Лекция 1. Тема: «Элементы комбинаторики»

Определение. Комбинаторика - это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов. Основы комбинаторики очень важны для оценки вероятностей случайных событий, т.к. именно они позволяют подсчитать принципиально возможное количество различных вариантов развития событий.

Основные правила комбинаторики

Большинство комбинаторных задач решается с помощью двух **основных правил** - правила суммы и правила произведения.

Правило суммы. Если некоторый объект A можно выбрать n способами, а другой объект B можно выбрать m способами, то выбор "либо A, либо B" можно осуществить $n+m$ способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора другой объект B можно выбрать (независимо от выбора объекта A) m способами, то пары объектов A и B можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Пример 1. Сколько существует двузначных чисел?

Решение. Поскольку в двузначном числе цифра, обозначающая число десятков, должна быть отлична от нуля, то A = {1, 2, ..., 9}, B = {0, 1, 2, ..., 9} и $A \times B = \{10, 11, \ldots, 19, \ldots, 90, 91, \ldots, 99\}$, $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 90.$

Основные формулы комбинаторики

1. Выборки элементов без повторений

Определение. Размещениями из n элементов по m называются такие выборки, которые, имея по m элементов, выбранных из числа данных n элементов, отличаются одна от другой либо составом элементов, либо порядком их расположения.

Число размещений из n элементов по m обозначим A_n^m. Используя основное правило комбинаторики, получаем

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Пример 2. Сколько существует двузначных чисел, в которых цифра десятков и цифра единиц различные и нечетные?

Решение. Т.к. нечетных цифр пять, а именно 1, 3, 5, 7, 9, то эта задача сводится к выбору и размещению на две разные позиции двух из пяти различных цифр, т.е. указанных чисел будет:

$$A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20.$$

Пример 3. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с любого из пяти языков: русского, английского, немецкого, французского, испанского - на любой другой из этих пяти языков?

Решение. Поскольку важен порядок, с какого языка задается перевод на другой, то для ответа на вопрос необходимо найти число размещений из пяти по два.

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ (словарей)}.$$

Определение. Если $m = n$, то A_n^n - число таких размещений, которые отличаются только порядком расположения элементов. Такие размещения называются **перестановками**. Их число P_n находится по формуле

$$P_n = A_n^n = n!$$

Пример 4. Сколькими способами семь книг разных авторов можно расставить на полке в один ряд?

Решение. Эта задача о числе перестановок семи разных книг. Имеется P_7=7!=1*2*3*4*5*6*7=5040 способов осуществить расстановку книг.

Определение. Выборки из m элементов, взятых из данных n, отличающихся только составом элементов, называются **сочетаниями** из n элементов по m. Число C_n^m таких сочетаний находится

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Пример 5. В соревнованиях на первенство университета по волейболу участвуют 8 команд. Насколько более продолжительным будет турнир, организованный по круговой системе, чем по олимпийской?

Решение. При проведении турнира по круговой системе каждый участник встречался с каждым и порядок их вхождения в пару не важен. Следовательно, по круговой системе потребуется провести $C_8^2 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = 28$ встреч, а по олимпийской только - 7 (четыре встречи в $1/4$ финала, две - в полуфинале и одна в финале).

Пример 6. Сколькими способами читатель может выбрать две книжки из шести имеющихся?

Решение. Число способов равно числу сочетаний из шести книжек по две, т.е. равно:

$$C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{2!} = 15$$

Обсуждение. Мы видим, что число возможных комбинаций можно посчитать по разным правилам (перестановки, сочетания, размещения) причем результат получится различный, т.к. принцип подсчета и сами формулы отличаются. Внимательно посмотрев на определения, можно заметить, что результат зависит от нескольких факторов одновременно.

Во-первых, от того, из какого количества элементов мы можем комбинировать их наборы (насколько велика генеральная совокупность элементов).

Во-вторых, результат зависит от того, какой величины наборы элементов нам нужны.

И последнее, важно знать, является ли для нас существенным порядок элементов в наборе. Поясним последний фактор на следующем примере.

Пример 7. На родительском собрании присутствует 20 человек. Сколько существует различных вариантов состава родительского комитета, если в него должны войти 5 человек?

Решение. В этом примере нас не интересует порядок фамилий в списке комитета. Если в результате в его составе окажутся одни и те же люди, то по смыслу для нас это один и тот же вариант. Поэтому мы можем воспользоваться формулой для подсчета числа **сочетаний** из 20 элементов по 5.

Иначе будут обстоять дела, если каждый член комитета изначально отвечает за определенное направление работы. Тогда при одном и том же списочном составе комитета, внутри него возможно 5! вариантов **перестановок**, которые имеют значение. Количество разных (и по составу, и по сфере ответственности) вариантов определяется в этом случае числом **размещений** из 20 элементов по 5.

Пусть имеется k групп элементов, причем i-я группа состоит из n_i элементов. Выберем по одному элементу из каждой группы. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, определяется соотношением $N=n_1*n_2*n_3*...*n_k$.

Пример 8. Поясним это правило на простом примере. Пусть имеется две группы элементов, причем первая группа состоит из n_1 элементов, а вторая - из n_2 элементов. Сколько различных пар элементов можно составить из этих двух групп, таким образом, чтобы в паре было по одному элементу от каждой группы? Допустим, мы взяли первый элемент из первой группы и, не меняя его, перебрали все возможные пары, меняя только элементы из второй группы. Таких пар для этого элемента можно составить n_2. Затем мы берем второй элемент из первой группы и также составляем для него все возможные пары. Таких пар тоже будет n_2. Так как в первой группе всего n_1элемент, всего возможных вариантов будет n_1*n_2.

Пример 9. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

Решение. $n_1=6$ (т.к. в качестве первой цифры можно взять любую цифру из 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_2=7$ (т.к. в качестве второй цифры можно взять любую цифру из 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6), $n_3=4$ (т.к. в качестве третьей цифры можно взять любую цифру из 0, 2, 4, 6).

Итак, $N=n_1*n_2*n_3=6*7*4=168$.

2. Выборки элементов с повторениями

В том случае, когда все группы состоят из одинакового числа элементов, т.е. $n_1=n_2=...n_k=n$ можно считать, что каждый выбор производится из одной и той же группы, причем элемент после выбора снова возвращается в группу. Тогда число всех способов выбора равно n^k. Такой способ выбора в комбинаторики носит название **выборки с возвращением.**

В данных выборках допускается повторение элементов, что является достаточно естественным (например, в телефонных и автомобильных номерах возможно использование одной цифры несколько раз).

Пример 10. Сколько всех четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 5, 6, 7, 8?

Решение. Для каждого разряда четырехзначного числа имеется пять возможностей, значит $N=5*5*5*5=5^4=625$.

Число **размещений** из n элементов по m с повторениями обозначается $\bar{A}_n^m$ и находится каким образом

$$\bar{A}_n^m = n^m.$$

Число **перестановок** $P_{m_1,m_2,\ldots,m_k}$, в которых 1-й элемент повторяется m_1 раз, 2-й - m_2 раз, а k-й - m_k раз, находится следующим образом:

$$P_{m_1,m_2,\ldots,m_k} = \frac{(m_1+m_2+\ldots+m_k)!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}.$$

Пример 11. Сколько "слов" можно получить, переставляя буквы в слове МАТЕМАТИКА?

Решение. Заметим, что если бы все буквы были различны, то получили бы P_{10} новых "слов", но буква "М" употребляется в "слове" 2 раза, "А" - 3 раза, "Т" - 2 раза, оставшиеся три буквы - по разу. Следовательно, искомое число будет в $P_2 \cdot P_3 \cdot P_2$ раз меньше, чем P_{10}, и равно

$$P_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

Число **сочетаний** с повторениями $\bar{C}_n^m$ из n элементов по m выражается через число сочетаний без повторений:

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Пример 12. В кафе в продаже имеются 5 сортов пирожных. Сколькими способами 8 студенток могут заказать себе по одному пирожному?

Решение. Зашифруем каждую покупку 8 пирожных единицами по 5 сортам, разделяя сорта нулями. Тогда каждой покупке будет соответствовать упорядоченный набор из 8 единиц и 4 (= 5 - 1) разделительных нулей, а общее число покупок будет соответствовать числу перестановок этих нулей и единиц $P_{8,4}$. Таким образом,

$$\bar{C}_5^8 = P_{8,4} = \frac{12!}{8! \cdot 4!} = 495 = C_{5+8-1}^8.$$

Задачи для самопроверки

1. Сколько трехзначных четных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры могут повторяться?

2. Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

3. В классе десять предметов и пять уроков в день. Сколькими способами можно составить расписание на один день?

4. Сколькими способами можно выбрать 4 делегата на конференцию, если в группе 20 человек?

5. Сколькими способами можно разложить восемь различных писем по восьми различным конвертам, если в каждый конверт кладется только одно письмо?

6. Из трех математиков и десяти экономистов надо составить комиссию, состоящую из двух математиков и шести экономистов. Сколькими способами это можно сделать?

Задачи

1. В чемпионате России по футболу участвуют 16 команд. Сколькими способами может определиться тройка призеров?

2. Из колоды, содержащей 36 карт, вынули 10 карт. Сколькими различными способами это можно сделать? В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы один туз? В скольких случаях окажется ровно один туз?

3. Сколькими способами 8 человек могут встать в очередь друг за другом?

4. Сколькими способами можно расставить на книжной полке 5 учебников по комбинаторике, 4 - по алгебре и 3 - по математическому анализу, если учебники по каждому предмету одинаковые?

5. На физмате работают 76 преподавателей. Из них 49 знают английский язык, 32 - немецкий и 15 - оба языка. Сколько преподавателей на физмате не знает ни английского, ни немецкого языков?

6. В цветочном магазине продаются цветы 4 сортов. Сколько можно составить различных букетов из пяти цветов в каждом?

7. В азбуке Морзе буквы представляются последовательностями тире и точек. Сколько символов потребуется, чтобы закодировать буквы русского алфавита?

8. Какова вероятность выиграть хотя бы один из призов в спортлото?