Лекція 1

Розділ 1 ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1.1 Предмет математичного програмування, його значення в розв'язанні задач оптимізації та керування
1.2 Поняття математичної моделі економічних задач та вимоги до неї
1.3 Основні задачі оптимізації
1.4 Задача про найкращий розподіл ресурсів
1.5 Загальна задача математичного програмування ті її класифікація. Допустимі, опорні та оптимальні розв'язки

1.1 Предмет математичного програмування, його значення в розв'язанні задач оптимізації та керування

Математичне програмування (МП) – область математики, яка розробляє теорію і чисельні методи розв'язання багатовимірних екстремальних задач. Математично це зводиться до знаходження екстремуму функції кількох змінних з обмеженнями або без них на область визначення цих змінних.

Оскільки випускники вузів з економічних спеціальностей у подальшій практичній діяльності будуть зустрічатися з математичними методами оптимізації головним чином як користувачі, а не розробники, то в лекціях основна увага приділяється застосуванню математичних методів в економіці, а не їх теоретичному обґрунтуванню. Більш поглиблене математичне обґрунтування методів оптимізації можна знайти в спеціальній літературі.

При вивченні математичного програмування студент повинен володіти знаннями загальних розділів курсу вищої математики (лінійної алгебри, диференціального числення функції однієї та кількох змінних, невизначені інтеграли, теорії ймовірностей та математичної статистики), а також уміти користуватися ПЕОМ.

1.2 Поняття математичної моделі економічних задач та вимоги до неї

Математична модель – це абстракція реального економічного явища, яка записана в математичних символах, що встановлює співвідношення між сукупністю змінних – факторів керування явищем.

Модель задачі МП містить:

1) сукупність невідомих величин $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, діючи на які, можна удосконалювати дану економічну систему;

2) функцію, для якої треба знайти мінімальне або максимальне значення в умовах економічних та технологічних можливостей і яку називають **цільовою** (функцією цілі); вона є показником ефективності або критерієм оптимальності економічного процесу. Функцію цілі позначимо через *Z(X)*;

3) умови, які накладаються на невідомі змінні, утворюють **систему обмежень**. Вони випливають із умов виробничих та технологічних процесів. Математично обмеження виражаються у вигляді рівнянь та нерівностей.

Їх сукупність утворює область допустимих розв'язків (область економічних можливостей) вигляду: $\varphi_i(x) \ \le,\ge,= \ b_i(i=\overline{1,m})$.

Об'єднання всіх умов (обмежень), які накладаються на невід'ємні величини $x_1, x_2, ..., x_k$ задачі, позначимо символом Ω ($X < \Omega$).

За таких позначень математична модель задачі математичного програмування має вигляд: знайти

$$max\ (min)\ \ Z(X)\ ,\ \ X = (x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1.1)$$

при обмеженнях

$$\varphi_i(x)\ \ \leq, \geq, =\ \ \ b_i (i = \overline{1, m})\,. \qquad (1.2)$$

Крім цих обмежень, в економічних задачах, як правило, на невідомі величини накладаються умови невід'ємності $x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1, n}$ і цілочисловості.

Враховуючи все це, розв'язання задачі МП можна розбити на наступні етапи:

1) побудова математичної моделі;
2) знаходження оптимального розв'язку задачі одним із математичних методів;
3) економічне тлумачення одержаного результату.

Найбільш складний з цих етапів – побудова математичної моделі. Це викликано не тільки тим, що показник ефективності системи можна вибрати різним, залежно від керівника з його досвідченістю, вмінням та знаннями, але й слушного вибору та ув'язки між собою в умовах даного процесу всіх кількісних змінних, які впливають на систему.

Перед побудовою математичної моделі необхідно якісно вилучити найбільш важливі фактори x_j, які впливають на процес, а також установити закономірність, якій вони підпорядковуються. Часто з'являється бажання побудувати таку математичну модель, в якій враховувалось би велика кількість вхідних даних. Але, якщо вплив багатьох із них на процес незначний, то це тільки розширює вимірність задачі, що ускладнює знаходження її розв'язку і не дає кращого розв'язку.

1.3 Основні задачі оптимізації

За властивостями системи обмежень і цільової функції задачі оптимізації класифікують наступним чином:

1 Задачі безумовної оптимізації або задачі без обмежень – в них не накладаються обмеження на кількісні змінні.

2 Задачі умовної оптимізації або задачі з обмеженнями – в цих задачах на кількісні змінні накладаються обмеження.

3 Задачі оптимізації при неповних даних – в них функція цілі або система обмежень залежать від деякого параметру p (числового, векторного), значення якого повністю невизначено на момент розв'язання задачі.

В залежності від типу задачі застосовують різні методи її розв'язання. В задачах економіки частіше всього зустрічаються задачі умовної оптимізації. Тому далі всі міркування будуть відноситися до цього типу задач.

Наведемо приклад побудови математичної моделі економічної задачі.

1.4 Задача про найкращий розподіл ресурсів (задача про максимальну рентабельність підприємства)

Однією із задач оптимального виробничого планування є задача досягнення максимальної рентабельності підприємства при виробництві продукції із запасів сировини різних видів, яку має підприємство. Наведемо схему такої задачі.

Нехай для виготовлення кожного із *n* видів продукції використовується *m* видів сировини, при чому витрати *i*-го виду сировини $(i=\overline{1,m})$ на одиницю *j*-го виду продукції $(j=\overline{1,n})$ складає a_{ij} одиниць. Відому матрицю коефіцієнтів $A=[a_{ij}]$ називають **технологічною матрицею**. Кількість кожного виду сировини обмежена і складає відповідно $b_1,b_2,...,b_m$ одиниць. Вектор $B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$ називають **вектором ресурсів**. Відома також ціна реалізації $c_j(j=\overline{1,n})$ одиниці продукції *j*-го виду (прибуток від одиниці продукції).

Треба визначити, скільки одиниць кожного виду продукції повинно виробити підприємство, щоб забезпечити максимум обсягу реалізації (прибутку) при відомих обмеженнях ресурсів, які воно має.

Побудуємо математичну модель задачі.

Виходячи із складових математичної моделі, визначимо спочатку ті кількісні фактори, які впливають на кінцевий результат. Звичайно, це буде кількість виробленої продукції кожного виду. Тому позначимо через

x_1 – кількість одиниць продукції 1-го виду, виробленої підприємством;

x_2 – кількість одиниць продукції 2-го виду, виробленої підприємством;

…….

x_j – кількість одиниць продукції j-го виду, виробленої підприємством;

……

x_n – кількість одиниць продукції *n*-го виду, виробленої підприємством.

Із умови задачі виходить, що показником ефективності роботи підприємства є максимум обсягу реалізації (прибутку) . Тому цільова функція має вигляд

$$Z(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_jx_j+...+c_nx_n=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j,$$

де c_jx_j – вартість всієї продукції j-го виду.

Оскільки виробництво продукції проходить при обмежених ресурсах, то запишемо ці обмеження у математичному вигляді. Кількість одиниць сировини *i*-го виду, яка витрачена на виробництво всієї продукції j-го виду, дорівнює $a_{ij}x_j$. Кількість одиниць сировини *i*-го виду, яка витрачена на виробництво всіх видів продукції, дорівнює

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{ij}x_j+...+a_{in}x_n$$

і за умовою задачі обмежена b_i одиницями, тобто виконується нерівність

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i .$$

Тому для кожного виду сировини повинні виконуватися нерівності:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2,$$
$$..... \qquad .....$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m .$$

Крім того, зрозуміло, що всі кількісні змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ невід'ємні, тобто $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0$.

Таким чином, математична модель задачі про найкращий розподіл ресурсів, запишеться у вигляді: знайти максимум лінійної функції

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.3)$$

при обмеженнях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \qquad (1.4)$$
$$..... \qquad .....$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m,$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0. \qquad (1.5)$$

1.5 Загальна задача математичного програмування (МП) та її класифікація. Допустимі, опорні та оптимальні розв'язки

Як було зазначено, у загальному вигляді задача МП математично формулюється так: знайти максимум (мінімум) цільової функції Z(X) при обмеженнях $\varphi(x) \le, \ge, = \; b_i (i = \overline{1,m})$. Виходячи з економічних, фізичних або інших міркувань, на змінні $x_j (j = \overline{1,n})$ накладаються умови цілочисловості, невід'ємності та інше. Таким чином, математична модель загальної задачі МП формулюється так: знайти

$$\max \ (\min) \ Z(X); \qquad (1.6)$$
$$\varphi_i(X) \ \le, \ge, = \ b_i \ (i = \overline{1,m}), \qquad (1.7)$$

$$X = \ x_1, x_2, ..., x_n \ , \qquad (1.8)$$

X – довільний.

У залежності від особливостей цільової функції Z(X) і функцій $\varphi_i(X)$, які задають обмеження, задачі МП поділяються на ряд типів:

1 **Задачі лінійного програмування** (ЗЛП), в яких цільова функція і система обмежень лінійні відносно змінних x_j, що входять в математичну модель задачі .

До задач лінійного програмування відносяться практично всі задачі оптимального планування та керування виробництвом:

а) задача про максимальну рентабельність підприємства;

б) загальна задача виробничого планування з врахуванням технологій;

в) задача про оптимальне використання обладнання;
г) задача про складання графіка ремонту інструмента (задача про постачальника);
д) задача про оптимальний розкрій матеріалів (мінімізація відходів);
е) транспортна задача;
ж) задача про призначення та інші.

2 Будь - яка інша задача МП, яка не є ЗЛП, має назву **задачі нелінійного програмування** (ЗНП).

Для неї характерно те, що або Z(X) , або яка – небудь

$\varphi_i(X)$ є нелінійними функціями. Частіше всього зустрічаються задачі, в яких обмеження $\varphi_i(X)$ – лінійні функції, а цільова функція – квадратична функція змінних x_j $(j=\overline{1,n})$. Така задача МП називається **задачею квадратичного програмування**.

3 **Задачі динамічного програмування** – це задачі багатоетапних керованих процесів. До цих задач відносяться:
а) задача про раціональне використання ресурсів виробництва;
б) задача про оптимальний розподіл виробничих завдань між підприємствами;
в) задача визначення найкоротших відстаней по заданій сітці та інші.

4 **Задачі стохастичного програмування** – це задачі, в яких параметри, що входять в цільову функцію, або в обмеження є випадковими величинами, або якщо існує необхідність приймати рішення в умовах неповної або недостатньої інформації. До цих задач можна віднести задачі в умовах конфліктних ситуацій, неповної інформації та інші.

Дамо деякі означення, які відносяться до розв'язку задачі МП.

Означення. Сукупність чисел $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, які задовольняють обмеженням задачі, називається **допустимим розв'язком** (або планом).

Означення. Множина всіх припустимих розв'язків задачі МП називається **областю допустимих розв'язків** (область економічних можливостей).

Означення. Допустимий розв'язок $X=\{x_1^*,x_2^*,...,x_n^*\}$, при якому цільова функція (1.6) приймає максимальне (мінімальне) значення, називається **оптимальним розв'язком (оптимальним планом).**