1. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла

Відомо, що однією з основних задач диференціального числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

Основною ж задачею інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції за заданою її похідною або диференціалом. Ця операція (дія) називається інтегруванням.

Слід відзначити, що як і усяка обернена задача, ця задача складніша, ніж задача диференціювання, і розв`язок її не є однозначним.

Шукану функцію називають первісною функцією по відношенню до даної функції.

За означенням первісною функцією для функції *f(x),* визначеній на проміжку *<а;в>,* називають функцію *F(x),* яка визначена на тому ж проміжку і задовольняє умові

$$F'(x) = f(x) \quad \text{або} \quad dF(x) = f(x)dx.$$

Наприклад, первісною функцією для функції $5x^4$ буде x^5, бо $(x^5)' = 5x^4$. Однак похідна від x^5+7 також дорівнює $5x^4$, а це означає, що і x^5+7 буде первісною для $5x^4$. І взагалі $F(x) = x^5 + C,$ де C - стала, також будуть первісними для $f(x) = 5x^4$, бо $(x^5 + C)' = 5x^4$. Як бачимо на цьому прикладі, знаходження первісної для даної функції є завдання невизначене.

Доведено, що будь-яка функція, неперервна на проміжку, має в цьому проміжку первісну.

Якщо функція *F(x)* є яка-небудь первісна для функції *f(x)* на проміжку *<а;в>,* то множина всіх первісних для цієї функції *f(x)* на цьому проміжку *<а;в>* міститься у виразі

$$F(x)+C,$$

де C – довільна стала.

Отже, щоб одержати всі первісні для даної функції, досить знайти яку-небудь одну і додати до неї довільну сталу.

Зауважимо, що коли функція *F(x)* є первісною для функції *f(x)* і на будь-якому іншому проміжку $<\alpha;\beta>$, що повністю міститься на даному проміжку *<а;в>*.

Сукупність всіх первісних функції *f(x),* визначеної на проміжку *<а;в>,* називається невизначеним інтегралом від функції *f(x)* на цьому проміжку і позначається символом

$$\int f(x)dx,$$

де $\int$ – знак інтеграла, *f(x)*-підінтегральна функція, *f(x)dx*-підінтегральний вираз, *x*- змінна інтегрування.

Таким чином, якщо $F'(x) = f(x),$ то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Справедливе і обернене твердження.

Як уже відзначалося вище, операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається інтегруванням цієї функції. Інтегрування є операцією, оберненою диференціюванню.

Із сказаного випливає, що результат інтегрування можна перевірити диференціюванням.

1.2 Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C,$
4. $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, де C- const $\neq 0$
5. $\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)dx\right) = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$
6. $\int f(u)du = F(u) + C,$ де $u = \varphi(x)$ – диференційовна функція від незалежної змінної x.

1.3 Таблиця основних інтегралів

Таблиця 1.

$$\int Odu = \int Ou'_x dx = C \qquad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx == u + C \qquad (2)$$

$$\int u^\alpha du = \int u^\alpha u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1 \qquad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \qquad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C \qquad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C \qquad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C \qquad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u * u'_x dx = -\cos u + C \qquad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u * u'_x dx = \sin u + C \qquad (10)$$

$$\int tgu du = \int tgu * u'_x dx = -\ln|\cos u| + C \qquad (11)$$

$$\int ctgu du = \int ctgu * u'_x dx = \ln|\sin u| + c \qquad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = tgu + C \qquad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C \qquad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|tg\,\frac{u}{2}\right| + C \qquad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C \qquad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{u}{a} + C \qquad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C \qquad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C \qquad (19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C \qquad (20)$$

$$\int \sqrt{u^2 + A}du = \int \sqrt{u^2 + A} * u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C \qquad (21)$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \int \sqrt{a^2 - u^2} * u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C,\ (a>0) \qquad (22)$$

Зауважимо, що в формулах (1-22) a, A, і α – сталі, u-незалежна змінна або будь-яка диференційовна функція від незалежної змінної.

Кожна із формул цієї таблиці справедлива в будь-якому проміжку, який міститься в області визначення відповідної підінтегральної функції.

Невизначені інтеграли (1-22) називають основними або табличними інтегралами і їх необхідно запам`ятати.

Корисно також запам`ятати, що коли $u=ax+b$ і

$$\int F(u)du = F(u) + C,$$

то

$$\int F(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (23)$$

У справедливості цієї формули можна переконатися диференціюванням. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Є три основні методи інтегрування функцій: метод розкладу, метод заміни змінної і метод інтегрування частинами. Розглянемо кожний з цих методів.

1.4 Безпосереднє інтегрування і метод розкладу

Під безпосереднім інтегруванням розуміють пряме використання таблиці інтегралів.

Метод розкладу грунтується на застосуванні властивостей 4 і 5 невизначеного інтеграла. Тут слід також мати на увазі, що даний інтеграл може бути зведений до одного або кількох табличних інтегралів після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією.

Розв´язання прикладів

Приклад 1. Знайти $\int (4x^3 - 6x^2 + 5)dx.$

Розв`язання. Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати

$$\int (4x^3 - 6x^2 + 5) = \int 4x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 5dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 5\int dx$$

Далі застосувавши до перших двох одержаних інтегралів формулу (3), а до третього- властивість 3 (формула 2), остаточно знаходимо

$$\int (4x^3 - 6x^2 + 5)dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 5\int dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} + C_1 - 6\frac{x^3}{3} + C_2 + 5x + C_3 = x^4 - 2x^3 + 5x + C,$$

де $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Відзначимо, що додавати довільну сталу після знаходження кожного інтеграла, як це зроблено в даному прикладі, не слід. Досить всі довільні сталі підсумувати і результат, позначений однією буквою *C*, записати вкінці, тобто після того, як всі інтеграли будуть знайдені.

Приклад 2. Знайти $\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx.$

Розв`язання. Помічаємо, що $\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) = \left(\sqrt{x}\right)^3 + 1.$

Тоді

$$\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx = \int \left[\left(\sqrt{x}\right)^3 + 1\right]dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + x + C = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + x + C.$$

Приклад 3. Знайти $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx.$

Розв`язання. Маємо

$$\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx = \int \left(\frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{x^3 e^x}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} \right)dx =$$

$$= \int x^{-\frac{5}{2}} dx - \int e^x dx + \int \frac{dx}{x} = -\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C = C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|.$$

Приклад 4. Знайти $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz.$

Розв`язання. Виконуючи тотожні перетворення підінтегральної функціїї, будемо мати

$$f(z) = \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 = \left(\frac{1}{z} - 1\right)^2 = \frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + 1.$$

Тому

$$\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz = \int \left(\frac{1}{z^2} - \frac{2}{z} + 1\right)dz = \int \frac{1}{z^2} dz - 2\int \frac{dz}{z} + \int dz = -\frac{1}{z} - 2\ln|z| + z + C.$$

Приклад 5. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$.

Розв`язання. Маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3(1-x^2)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin x + C.$$

Приклад 6. Знайти $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx.$.

Розв`язання. Оскільки $1+cos2x=2cos^2x$, то

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x} dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} tgx + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{2}(tgx + x) + C.$$

Приклад 7. Знайти $\int tg^2 x dx.$.

Розв`язання. Відомо, що $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$

Тому

$$\int tg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Приклад 8. Знайти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

Розв`язання. Виконуємо тотожні перетворення над підінтегральною функцією:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Приклад 9. Знайти $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)} dx$

Розв`язання. Враховуючи, що $2x^2=x^2+x^2$, будемо мати

$$\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C.$$

Приклад 10. Знайти $\int tg^3 x d(tgx).$

Розв`язання. В силу табличного інтеграла (3) з урахуванням, що $u=tgx$, одержимо

$$\int tg^3 x d(tgx) = \frac{tg^4 x}{4} + C.$$

Приклад 11. Знайти $\int (5x+3)^{19} dx.$

Розв`язання. Тут підносити двочлен до 19-го степеня недоцільно, так як $u=5x+3$-лінійна функція. Виходячи із табличного інтеграла

$$\int u^{19}du=\frac{u^{20}}{20}+C$$

і формули (23), згідно з якою

$$\int F(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

одержимо

$$\int(5x+3)^{19}dx=\frac{1}{5}\frac{(5x+3)^{20}}{20}+C=\frac{(5x+3)^{20}}{100}+C.$$

Приклад 12. Знайти $\int\cos(\pi x+1)dx.$

Роз`вязання. Так як

$$\int\cos u du=\sin u+C$$

і $u=\pi x+1$ – лінійна функція, то в силу формули (23), будемо мати

$$\int\cos(\pi x+1)dx=\frac{1}{\pi}\sin(\pi x+1)+C.$$

Приклад 13. Знайти $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx.$

Розв`язання. Маємо

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx=\int\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}}\sin 2xdx.$$

Так як $\left(7-\cos^2 x\right)'=-2\cos x(-\sin x)=\sin 2x,$ то в якості змінної інтегрування маємло вираз $7-\cos^2 x$. Відносно цієї змінної одержимо інтеграл від степеневої функції, тобто

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx=\int\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}}\sin 2xdx=\frac{\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=$$

$$=\frac{\left(7-\cos^2 x\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(7-\cos^2\right)^2}+C.$$

Розв`язання даного прикладу можна записати ще й так:

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx=\int\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}}\sin 2xdx=\int\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}}d\left(7-\cos^2 x\right)=$$

$$=\frac{3\left(7-\cos^2 x\right)^{\frac{2}{3}}}{2}+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(7-\cos^2 x\right)^2}+C.$$

Проведені міркування можна записати і інакше, а саме:

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx=\int\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}}\sin 2xdx=\left|\begin{matrix} u=7-\cos^2 x \\ u_x'=-2\cos x*(-\sin x)=\sin 2x\end{matrix}\right|=$$

$$=\int u^{-\frac{1}{3}}*u_x'dx=\frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}+C=\frac{3}{2}u^{\frac{2}{3}}+C=\frac{3}{2}\sqrt{\left(7-\cos^2 x\right)^2}+C.$$

Приклад 15. Знайти $\int \frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x}$.

Розв`язання. Оскільки похідна виразу *5+7tgx* дорівнює $\frac{7}{\cos^2 x}$, а множник $\frac{1}{\cos^2 x}$ відрізняється від цієї похідної лише сталим множником *7*, то змінною інтегрування тут можна вважати вираз *5+7tgx* і таким чином, знайти інтеграл за формулою (6):

$$\int \frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x} = \frac{1}{7}\int \frac{1}{5+7tgx} * \frac{7}{\cos^2 x}dx = \left| \begin{matrix} u = 5+7tgx \\ u_x' = \frac{7}{\cos^2 x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{u} * u_x' dx = \frac{1}{7}\ln|5+7tgx| + C.$$

Приклад 16. Знайти $\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx.$

Розв`язання. Заданий інтеграл можна податити у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{arctg2x} * \frac{2}{1+4x^2}dx,$$

але $\frac{2}{1+4x^2} = (arctg2x)'$, і тому, вважаючи змінною інтегрування функцію *arctg2x,* інтеграл беремо за формулою (8):

$$\int \frac{e^{arctg2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}e^{arctg2x} + C$$

Приклад 17. Знайти $\int 5\sin^4 x\cos x dx.$.

Розв`язання.

$$\int 5\sin^4 x\cos x dx = 5\int (\sin x)^4 d(\sin x) = 5 * \frac{\sin^5 x}{5} + C = \sin^5 x + C.$$

Приклад 18. Знайти $\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+9}$.

Роз`вязання.

$$\int \frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+9} = \left| \begin{matrix} u = e^{2x}+9 \\ u_x' = 2e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}dx}{e^{2x}+9} = \frac{1}{2}\int \frac{u_x' dx}{u} = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+9\right| + C.$$

Приклад 19. Знайти $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9}$.

Розв`язання.

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9} = \int \frac{e^x dx}{(e^x)^2+3^2} = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ u_x' = e^x \end{matrix} \right| = \int \frac{u_x' dx}{u^2+3^2} = \frac{1}{3}arctg\frac{e^x}{3} + C.$$

Приклад 20. Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$.

Розв`язання. Звільняючись від ірраціональності в знаменнику дробу підінтегрального виразу, будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = \int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} = \int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx}{x-x+1} =$$

$$= \int \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int (x-1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Питання для самоперевірки

1. Яка дія називається інтегруванням?
2. Яка функція називається первісною для даної функції? Наведіть приклади.
3. Чим відрізняються між собою різні первісні функції для даної функції *f(x)*?
4. Дайте означення невизначеного інтеграла.

5. Який геометричний образ відповідає невизначеному інтегралу $\int f(x)dx$?
6. Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
7. При якій умові справедлива рівність
$$\int f(x)dx = F(x) + C\,?$$
8. Як перевіряється результат інтегрування?
9. Пригадайте і запишіть всі табличні інтеграли?
10. Укажіть при якому значенні n формула
$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
не має сенсу ($x > 0$)?
11. Яка формула застосовується в тому випадку, коли $n = -1$ в $\int x^n dx$?

ВПРАВИ

Знайти інтеграли:

1. $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. Відповідь: $C - \frac{1}{8(2x-3)^4}$.
2. $\int \sqrt[5]{x^3+2} * x^2 dx.$ Відповідь: $\frac{5}{18}\sqrt[5]{\left(x^3+2\right)^6} + C$.
3. $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$. Відповідь: $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + C$.
4. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$. Відповідь: $\frac{1}{\cos x} + C$.
5. $\int \cos^3 x \sin 2x dx.$ Відповідь: $C - \frac{2}{5}\cos^5 x$.
6. $\int \sin(2x-3)dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{2}\cos(2x-3) + C$.

7. $\int \cos(1-2x)dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$.

8. $\int e^x \sin e^x dx.$ Відповідь: $C\text{-}cose^x$.

9. $\int \frac{dx}{2x-1}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

10. $\int ctg(2x+1)dx.$ Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)|+C$.

11. $\int e^{-3x+1}dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-3x+1}+C$.

12. $\int e^{-x^3} * x^2 dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$.

13. $\int \frac{dx}{x\ln x}.$ Відповідь: $\ln|\ln x|+C$.

14. $\int \frac{dx}{1+9x^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{3}arctg3x+C$.

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$ Відповідь: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$.

16. $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}.$ Відповідь: $\frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2}+C$.

17. $\int \frac{xdx}{x^4+1}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}arctgx^2+C$.

18. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^8}}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+C$.

19. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}.$ Відповідь: $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$.

20. $\int \frac{dx}{2x^2+9}.$ Відповідь: $\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$.

21. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx.$ Відповідь: $e^x+e^{-x}+C.$

22. $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx.$ Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C$.

23. $\int \frac{x(1-x^2)dx}{1+x^4}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}arctgx^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$.

24. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$ Відповідь: $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

25. $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx.$ Відповідь: $x^3+2x-3\ln|x|-\frac{7}{x}+C$.

26. $\int\left(2^{3x-1}+\frac{3}{\cos^2 7x}-2ctg(x+5)\right)dx.$.

Відповідь: $\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}+\frac{3}{7}tg7x-2\ln|\sin(x+5)|+C$.

27. $\int \frac{2x^2-8}{16-x^4}dx.$ Відповідь: $-arctg\frac{x}{2}+C$.

28. $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}$. Відповідь: $\sin x - \cos x + C$.

29. $\int e^x \left(2^x + 3^x\right) dx$. Відповідь: $e^x \left(\frac{2^x}{1+\ln 2} + \frac{3^x}{1+\ln 3} \right) + C$.

30. $\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+4)} dx$. Відповідь: $\frac{1}{4} arctg \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + C$.