

# МЕТОД СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Автор: ст. гр. ПС-17 Нагайцев Володимир Анатолійович

Керівник: Бабаєва О.В.

**Приклад.** Методом степеневих рядів знайти розв'язок задачі Коші

$$y' = x + 2y^2, y(0) = 0$$

**Розв'язання.** Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді ряду

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Безпосередньо з початкової умови маємо  $y(0) = 0$ . З рівняння та початкової умови одержуємо, що  $y'(0) = 0 + 2y^2(0) = 0$ .

Диференціюючи обидві частини заданого рівняння, одержуємо

$$y'' = 1 + 4yy',$$

а отже,

$$y''(0) = 1 + 4y(0)y'(0),$$

$$y''(0) = 1$$

Диференціюючи послідовно обидві частини рівняння, знаходимо

$$\begin{aligned}y''' &= 4(y')^2 + 4yy'', & y'''(0) &= 0, \\y^{(IV)} &= 8y'y'' + 4y'y'' + 4yy''' = 12y'y'' + 4yy''', & y^{(IV)}(0) &= 0, \\y^{(V)} &= 12(y'')^2 + 16y'y''' + 4yy^{(IV)}, & y^{(V)}(0) &= 12.\end{aligned}$$

Якщо обмежитись першими шістьма членами розвинення, тобто степенями  $x$  до п'ятого степеня включно, то маємо розв'язок задачі Коші в наступному вигляді:

$$y(x) = \frac{1}{2!}x^2 + \frac{12}{5!}x^5,$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10}.$$

Якщо обмежитись дев'ятьма членами розвинення,

$$\begin{aligned}y^{(VI)} &= 24y''y'' + 16(y''y'' + y'y^{(IV)}) + 4(y'y^{(IV)} + yy^{(V)}) = \\ &= 40y''(1)y'''(0) + 20y'(0)y^{(IV)}(0) + 4y(0)y^{(V)}(12)\end{aligned}$$

$$y^{(VI)}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}y^{(VII)} &= 40(y'''y''' + y''y^{(IV)}) + 20(y''y^{(IV)} + y'y^{(V)}) + 4(y'y^{(V)} + yy^{(VI)}) = \\ &= 40(y'''(0))^2 + 60y''(1)y^{(IV)}(0) + 24y'(0)y^{(V)}(12) + 4y(0)y^{(VI)}(0)\end{aligned}$$

$$y^{(VII)}(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}y^{(VIII)} &= 80y''' + 60(y'''y^{(IV)} + y''y^{(V)}) + 24(y''y^{(V)} + y'y^{(VI)}) + 4(y'y^{(VI)} + y^{(VII)}y) = \\ &= 140y'''(0)y^{(IV)}(0) + 84y''(1)y^{(V)}(12) + 28y'(0)y^{(VI)}(0) + 4y(0)y^{(VII)}(0)\end{aligned}$$

$$y^{(VIII)}(0) = 1008.$$

то маємо розв'язок задачі Коші в наступному вигляді:

$$y(x) = \frac{1}{2!}x^2 + \frac{12}{5!}x^5 + \frac{1008}{8!}x^8,$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^8}{40}.$$

Отже, обмежуючись шістьма членами розвинення в ряд Тейлора, маємо розв'язок у вигляді

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10},$$

а обмежуючись дев'ятьма членами маємо розв'язок задачі Коші у вигляді.

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{10} + \frac{x^8}{40}.$$

Дякую за увагу !