ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА В ЕКОНОМІЦІ

Автор: ст. гр. ЕП-11 Оноприйчук Людмила Олександрівна,

Керівник: канд. фіз.-мат. наук, доц. Аршава О.О.

Поняття визначеного інтегралу

Нехай на відрізку $[a;b]$ $(a<b)$ осі Ох задана неперервна функція f(x). Відрізок розіб`ємо на n частин, довжини яких можуть бути довільними. Кожен такий відрізок будемо називати частковим. Абсциси точок розбиття позначимо через:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Довжину часткового відрізка, яка дорівнює різниці $x_к$-$x_{к-1}$ (к=1,2,…,n), позначимо через Δx_k:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

На кожному частковому відрізку виберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через ξ_k (к=1,2,…,n), обчислимо $f(\xi_k)$ – значення заданої функції f(x) у цій точці.

Знайдемо добуток числа $f(\xi_k)$ на довжину Δx_k відрізка, на якому взято точку ξ_k , тобто $f(\xi_k)\Delta x_k$. Складемо суму таких добутків

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k .$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції f(x) на відрізку $[a;b]$. За означенням границя інтегральної суми, тобто

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на часткові, ні від вибору на них точок ξ_k, називається визначеним інтегралом функції f(x) на відрізку $[a;b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x)dx$$

Прикладне застосування

Нехай деяке підприємство (фірма) виробляє продукцію з інтенсивністю праці (продуктивність праці) f=f(t). Знайдемо обсяг продукції q, виробленої протягом інтервалу [0,T].

Очевидно, якщо продуктивність виробництва продукції не змінюється (f(t)=const), то обсяг продукції q, виробленої протягом інтервалу часу [0;T], обчислюється за формулою **q= f(t)T =T const**.

У загальному випадку справедливе наближення значення обсягу продукції , $q=\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta t_k$, $c_k \in [t_{k-1};t_k]$, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ – довжини окремих відрізків розбиття відрізку [0;T].

Якщо $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta t_k \to 0$,то кожен із доданків суми стає дедалі точнішим, тому шуканий обсяг продукції (за умовою, що він існує) обчислюється за формулою

$$q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta t_k = \int_0^T f(t)dt$$

Отже, економічний зміст визначеного інтеграла полягає в наступному: **він чисельно дорівнює обсягу виробленої продукції підприємством (фірмою) з продуктивністю праці *f=f(t)* за інтервал часу [0;T].**

Приклад 1

Продуктивність праці виробничої бригади виражається формулою $f(t)=8t-t2$. Функція $f(t)=u'(t)$, де $u= u(t)$ – обсяг виробленої протягом інтервалу часу $[0; t]$.

Робітники працюють 8 год., тобто $t є [0; 8]$. Обчислимо обсяг виробленої продукції:

- протягом робочого дня;
- протягом інтервалу часу [2; 6]. Порівняємо ці обсяги в процентному відношенні.

Розв’язання

За умовою задачі треба знайти функцію *u(t)*, тобто первісну функції *f(t)*. Скористаємося формулою

Для випадку 1:

$$q_1 = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 (8t - t^2)dt = (8 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3})\Big|_0^8 = (4 \cdot 8^2 - \frac{8^3}{3}) - (4 \cdot 0 - \frac{0}{3}) = \frac{256}{3}$$

Для випадку 2:

$$q_2 = \int_2^6 f(t)dt = \int_2^6 (8t - t^2)dt = (8 \cdot \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3})\Big|_2^6 = (4 \cdot 6^2 - \frac{6^3}{3}) - (4 \cdot 2^2 - \frac{2^3}{3}) = \frac{176}{3}$$

Процентне співвідношення дорівнює $r = \frac{q_2}{q_1} \cdot 100\% \approx 68{,}75\%$

Приклад 2

В економічній теорії виробництва функція Кобба-Дугласа, яка враховує технічний прогрес, має вигляд f(t)=A $K^{\alpha} L^{\beta} e^{\lambda t}$, де

K - обсяг фондів;

L – обсяг трудових ресурсів;

λ – інтенсивність розвитку виробництва, пов’язаного з технічним прогресом.

Тоді згідно з економічним змістом виробничої функції Кобба-Дугласа можна показати, що обсяг виробленої за T років продукції визначається за формулою

$$q = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta t_k$$

Розв’язання

Знайдемо, наприклад, обсяг продукції, виробленої фірмою за два роки, якщо виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд: *f(t)=(1+2t)e^5t^.*

$f(t)=(1+2t)e^{5t}$.

За формулою одержуємо:

$$q=\int_0^2 (1+2t)\, e^{5t} dt = \left| \begin{matrix} u = 1+2t & dv = e^{5t}dx \\ du = 2dt & v = \frac{1}{5}e^{5t} \end{matrix} \right| =$$

$$=(1+2t)\frac{1}{5}e^{5t}\Big|_0^2 - \frac{2}{5}\int_0^2 e^{5t}dt = e^{10} - \frac{1}{5} - \frac{2}{25}e^{5t}\Big|_0^2 = e^{10} - \frac{1}{5} - \frac{2}{25}e^{10} + \frac{2}{25} = \frac{23}{25}e^{10} - \frac{3}{25} =$$

$$=0{,}92e^{10} - 0{,}12.$$