

Роль диференціальних рівнянь у сучасній математиці

Автор: студентка гр. Пс-17
Зятікова Анастасія Вікторівна
Керівник: Бабаєва О.В.

Диференціальним рівнянням називають рівняння, що зв'язує незалежні змінні, їх функцію і похідні (або їх ще називають диференціали) цієї функції.

$$F(X, Y, Y')=0 \text{ (ФУНКЦІЯ 3-Х ЗМІННИХ)}$$

- де F – функція;
- x – незалежна змінна;
- y – функція від змінної x ;
- y' – похідна, тобто швидкість зміни функції.

Диференціальні рівняння у фізиці

Умова задачі: швидкість охолодження нагрітого тіла пропорційна різниці температур тіла й оточуючого середовища. За 10 хв. тіло остигло від 100°C до 60°C . Температура оточуючого повітря підтримується на рівні 20°C . За скільки хвилин тіло охолоне до 25°C ?

Розв'язання:

Нехай час t -незалежна змінна, а $x(t)$ -закон зміни температури тіла після початку охолодження. Швидкість охолодження є похідною від температури за часом, яку взято з протилежним знаком, тобто $-\frac{dx}{dt}$.

За умовою задачі

$$-\frac{dx}{dt} = k[x(t) - 20], \quad (1)$$

де k -коефіцієнт пропорційності.

Крім того, з умови випливає, що $x(0)=100$, $x(10)=60$.

Розв'язуючи диференціальне рівняння отримаємо:

$$\frac{dx}{x - 20} = -kdt,$$
$$\int \frac{dx}{x - 20} = - \int kdt + C_1$$

$$\ln|x - 20| = -kt + C_1$$

$$x - 20 = e^{-kt+C_1}$$

$$x - 20 = e^{-kt} \times e^{C_1}$$

$$x - 20 = C \times e^{-kt}$$

$$x = 20 + Ce^{-kt}$$

$$x(t) = 20 + Ce^{-kt}$$

З початкових умов $x(0)=100$, $x(10)=60$ знайдемо C, k :

$$100 = 20 + Ce^0, C = 80;$$

$$60 = 20 + 80e^{-10k},$$

$$40 = 80 \times e^{-10k}$$

$$e^{-10k} = \frac{40}{80}$$

$$e^{-10k} = \frac{1}{2},$$

$$-10k = \ln \frac{1}{2}$$

$$10k = -\ln \frac{1}{2}$$

$$10k = \ln 2$$

$$k = \frac{1}{10} \ln 2$$

$$x(t) = 20 + 80e^{-\frac{t}{10} \ln 2}, (2)$$

$$\text{або } x(t) = 20 + 80 \times 2^{-\frac{t}{10}}, (3)$$

Обчислимо тепер значення часу t охолодження тіла до 25°C :

$$25 = 20 + 80 \times 2^{\frac{t}{10}},$$

$$2^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{16},$$

$$\frac{t}{10} = 4,$$

$$t = 40\text{хв.}$$

Відповідь: тіло охолоне до 25°C за 40 хвилин.

Дякую за увагу!