



**Міністерство освіти і науки України**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

**О.М. Стасенко**

**Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни  
«Економіко-математичні методи та моделі(економетрика)» для студентів  
заочної форми здобуття освіти для спеціальності 051 «Економіка»**

**Харків 2019**



**Міністерство освіти і науки України**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

Спеціальність 051

**О.М. Стасенко**

**Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни  
«Економіко-математичні методи та моделі(економетрика)» для студентів  
заочної форми здобуття освіти для спеціальності 051 «Економіка»**

Затверджено на засіданні кафедри  
вищої математики.  
Протокол № 14 від 25.10.2019

**Харків 2019**

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі(економетрика)» для студентів заочної форми здобуття освіти для спеціальності 051 «Економіка» / Укладач О.М. Стасенко – Харків: ХНУБА, 2019. - 37 с.

Рецензент М.І. Несвіт

Кафедра вищої математики

## **ВСТУП**

Методичні вказівки призначаються для надання допомоги студентам заочної форми здобуття освіти під час виконання контрольних робіт та індивідуальних завдань з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі(економетрика)» організації самостійної роботи з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)».

Результативність самостійної роботи забезпечується системою контролю, яка включає наступні етапи:

- виконання індивідуальних домашніх завдань;
- виконання контрольних робіт;
- виконання та складання підсумкового завдання з теми;
- виконання модульної контрольної роботи за всіма темами модуля.

Методичні вказівки містять робочу програму модуля, індивідуальні домашні завдання, варіанти підсумкового завдання і приклад його виконання

## **ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ**

**Змістовий модуль 1. Багатофакторна класична лінійна модель. Метод МНК. Мультиколінеарність.**

**Тема 1.** Визначення параметрів моделі.

**Тема 2.** Перевірка якості побудованої моделі.

**Тема 3.** Прогнозування.

**Тема 4.** Мультиколінеарність.

**Змістовий модуль 2. Узагальнена лінійна модель. Узагальнений МНК. Автокореляція. Динамічні моделі. Системи одночасних рівнянь.**

**Тема 5.** Узагальнена лінійна модель.

**Тема 6.** Гетероскедастичність.

**Тема 7.** Автокореляція.

**Тема 8.** Динамічні моделі. Системи одночасних рівнянь.

# ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.

## Варіанти індивідуальних домашніх завдань

**Завдання 1.1** Оцінити параметри економетричної моделі, що характеризують залежність між витратами, вантажообігом та фондомісткістю. Дослідити статистичну значущість моделі та оцінок параметрів.

## Варіанти завдань

Таблиця 1

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	2,85	17,2	70,6
2	2,4	16,8	73,4
3	2,91	14,8	80,7
4	2,29	19,6	62,2
5	3,27	11,4	98,6
6	2,45	17,1	71,3
7	2,38	19,5	61,7
8	3,04	12,5	96,2
9	2,67	16,5	72,9

Таблиця 2

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	2,93	18,1	71,2
2	2,5	17,2	73,4
3	2,95	14,9	81,2
4	2,39	20,1	63,7
5	3,25	11,4	96,6
6	2,65	17,1	72,2
7	2,42	19,5	61,7
8	3,14	17,5	96,2
9	2,75	16,7	72,9
10	2,65	19,4	64,1

Таблиця 3

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	2,14	17,4	80,3
2	2,94	13,8	102,5
3	2,67	15	94,3
4	2,44	18,6	76
5	2,83	16,2	87,3
6	2,92	15,7	90,1
7	2,61	17,9	82,8
8	2,72	15,3	96,9
9	2,68	16,3	83,7
10	2,88	17,3	82,1
11	2,87	15,1	93,2

Таблиця 4

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	2,67	15	94
2	2,45	18,6	78
3	2,86	16,2	87,5
4	2,9	15,7	90,2
5	2,6	17,9	84,8
6	2,72	16,3	95,9
7	2,68	17,7	91
8	2,5	16,8	84,7
9	2,74	17,5	88,2
10	2,91	15,8	90,3
11	2,6	14	93,1
12	2,55	16,9	85,01

Таблиця 5

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	2,83	13,8	68
2	2,75	14,8	64,3
3	2,4	16,9	55,1
4	2,3	16,8	55,5
5	2,47	14,8	63,3
6	2,45	17,9	52,7
7	2,48	17,6	53,7
8	2,41	15,7	60,2
9	2,34	15,2	62,2
10	2,5	17,2	56,1
11	2,34	16,9	55,2
12	2,6	13,2	63,5
13	2,65	13,25	63,8

Таблиця 6

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	3,6	17,95	71,35
2	3,15	17,55	74,15
3	3,66	15,55	81,45
4	3,04	20,35	62,95
5	4,02	12,15	99,35
6	3,2	17,85	72,05
7	3,13	20,25	62,45
8	3,79	13,25	96,95
9	3,42	17,25	73,65

Таблиця 7

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	3,68	18,85	71,95
2	3,25	17,95	74,15
3	3,7	15,65	81,95
4	3,14	20,85	64,45
5	4	12,15	97,35
6	3,4	17,85	72,95
7	3,17	20,25	62,45
8	3,89	18,25	96,95
9	3,5	17,45	73,65
10	3,4	20,15	64,85

Таблиця 8

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	2,89	18,15	81,05
2	3,69	14,55	103,25
3	3,42	15,75	95,05
4	3,19	19,35	76,75
5	3,58	16,95	88,05
6	3,67	16,45	90,85
7	3,36	18,65	83,55
8	3,47	16,05	97,65
9	3,43	17,05	84,45
10	3,63	18,05	82,85
11	3,62	15,85	93,95

Таблиця 9

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	3,42	15,75	94,75
2	3,2	19,35	78,75
3	3,61	16,95	88,25
4	3,65	16,45	90,95
5	3,35	18,65	85,55
6	3,47	17,05	96,65
7	3,43	18,45	91,75
8	3,25	17,55	85,45
9	3,49	18,25	88,95
10	3,66	16,55	91,05
11	3,35	14,75	93,85
12	3,3	17,65	85,76

Таблиця 10

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	3,58	14,55	68,75
2	3,5	15,55	65,05
3	3,15	17,65	55,85
4	3,05	17,55	56,25
5	3,22	15,55	64,05
6	3,2	18,65	53,45
7	3,23	18,35	54,45
8	3,16	16,45	60,95
9	3,09	15,95	62,95
10	3,25	17,95	56,85
11	3,09	17,65	55,95
12	3,35	13,95	64,25
13	3,4	14	64,55

Таблиця 11

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	4,85	19,2	72,6
2	4,4	18,8	75,4
3	4,91	16,8	82,7
4	4,29	21,6	64,2
5	5,27	13,4	100,6
6	4,45	19,1	73,3
7	4,38	21,5	63,7
8	5,04	14,5	98,2
9	4,67	18,5	74,9

Таблиця 12

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	4,18	19,35	72,45
2	3,75	18,45	74,65
3	4,2	16,15	82,45
4	3,64	21,35	64,95
5	4,5	12,65	97,85
6	3,9	18,35	73,45
7	3,67	20,75	62,95
8	4,39	18,75	97,45
9	4	17,95	74,15
10	3,9	20,65	65,35

Таблиця 13

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	3,39	18,65	81,55
2	4,19	15,05	103,75
3	3,92	16,25	95,55
4	3,69	19,85	77,25
5	4,08	17,45	88,55
6	4,17	16,95	91,35
7	3,86	19,15	84,05
8	3,97	16,55	98,15
9	3,93	17,55	84,95
10	4,13	18,55	83,35
11	4,12	16,35	94,45

Таблиця 14

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	3,92	16,25	95,25
2	3,7	19,85	79,25
3	4,11	17,45	88,75
4	4,15	16,95	91,45
5	3,85	19,15	86,05
6	3,97	17,55	97,15
7	3,93	18,95	92,25
8	3,75	18,05	85,95
9	3,99	18,75	89,45
10	4,16	17,05	91,55
11	3,85	15,25	94,35
12	3,8	18,15	86,26

Таблиця 15

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	4,08	15,05	69,25
2	4	16,05	65,55
3	3,65	18,15	56,35
4	3,55	18,05	56,75
5	3,72	16,05	64,55
6	3,7	19,15	53,95
7	3,73	18,85	54,95
8	3,66	16,95	61,45
9	3,59	16,45	63,45
10	3,75	18,45	57,35
11	3,59	18,15	56,45
12	3,85	14,45	64,75
13	3,9	14,5	65,05

Таблиця 16

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	5,85	20,2	73,6
2	5,4	19,8	76,4
3	5,91	17,8	83,7
4	5,29	22,6	65,2
5	6,27	14,4	101,6
6	5,45	20,1	74,3
7	5,38	22,5	64,7
8	6,04	15,5	99,2
9	5,67	19,5	75,9

Таблиця 17

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	5,18	20,35	73,45
2	4,75	19,45	75,65
3	5,2	17,15	83,45
4	4,64	22,35	65,95
5	5,5	13,65	98,85
6	4,9	19,35	74,45
7	4,67	21,75	63,95
8	5,39	19,75	98,45
9	5	18,95	75,15
10	4,9	21,65	66,35

Таблиця 18

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	4,39	19,65	82,55
2	5,19	16,05	104,75
3	4,92	17,25	96,55
4	4,69	20,85	78,25
5	5,08	18,45	89,55
6	5,17	17,95	92,35
7	4,86	20,15	85,05
8	4,97	17,55	99,15
9	4,93	18,55	85,95
10	5,13	19,55	84,35
11	5,12	17,35	95,45



Таблиця 19

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	4,92	17,25	96,25
2	4,7	20,85	80,25
3	5,11	18,45	89,75
4	5,15	17,95	92,45
5	4,85	20,15	87,05
6	4,97	18,55	98,15
7	4,93	19,95	93,25
8	4,75	19,05	86,95
9	4,99	19,75	90,45
10	5,16	18,05	92,55
11	4,85	16,25	95,35
12	4,8	19,15	87,26

Таблиця 20

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	5,08	16,05	70,25
2	5	17,05	66,55
3	4,65	19,15	57,35
4	4,55	19,05	57,75
5	4,72	17,05	65,55
6	4,7	20,15	54,95
7	4,73	19,85	55,95
8	4,66	17,95	62,45
9	4,59	17,45	64,45
10	4,75	19,45	58,35
11	4,59	19,15	57,45
12	4,85	15,45	65,75
13	4,9	15,5	66,05

Таблиця 21

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	5,83	20,18	73,58
2	5,38	19,78	76,38
3	5,89	17,78	83,68
4	5,27	22,58	65,18
5	6,25	14,38	101,58
6	5,43	20,08	74,28
7	5,36	22,48	64,68
8	6,02	15,48	99,18
9	5,65	19,48	75,88

Таблиця 22

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	5,16	20,33	73,43
2	4,73	19,43	75,63
3	5,18	17,13	83,43
4	4,62	22,33	65,93
5	5,48	13,63	98,83
6	4,88	19,33	74,43
7	4,65	21,73	63,93
8	5,37	19,73	98,43
9	4,98	18,93	75,13
10	4,88	21,63	66,33

Таблиця 23

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	4,37	19,63	82,53
2	5,17	16,03	104,73
3	4,9	17,23	96,53
4	4,67	20,83	78,23
5	5,06	18,43	89,53
6	5,15	17,93	92,33
7	4,84	20,13	85,03
8	4,95	17,53	99,13
9	4,91	18,53	85,93
10	5,11	19,53	84,33
11	5,1	17,33	95,43

Таблиця 24

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	4,9	17,23	96,23
2	4,68	20,83	80,23
3	5,09	18,43	89,73
4	5,13	17,93	92,43
5	4,83	20,13	87,03
6	4,95	18,53	98,13
7	4,91	19,93	93,23
8	4,73	19,03	86,93
9	4,97	19,73	90,43
10	5,14	18,03	92,53
11	4,83	16,23	95,33
12	4,78	19,13	87,24

Таблиця 25

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	5,06	16,03	70,23
2	4,98	17,03	66,53
3	4,63	19,13	57,33
4	4,53	19,03	57,73
5	4,7	17,03	65,53
6	4,68	20,13	54,93
7	4,71	19,83	55,93
8	4,64	17,93	62,43
9	4,57	17,43	64,43
10	4,73	19,43	58,33
11	4,57	19,13	57,43
12	4,83	15,43	65,73
13	4,88	15,48	66,03

Таблиця 26

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	20	47	2
2	32	77	2
3	48	127	2
4	65	225	2
5	45	94	4
6	64	148	4
7	79	229	4
8	104	360	4
9	68	137	6
10	93	220	6
11	117	333	6
12	145	492	6
13	91	177	9
14	131	307	9
15	167	470	9
16	195	751	8

Таблиця 27

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	22	45	1
2	34	75	1
3	50	125	1
4	67	223	1
5	47	92	3
6	66	146	3
7	81	227	3
8	106	358	3
9	70	135	5
10	95	218	5
11	119	331	5
12	147	490	5
13	93	175	8
14	133	305	8
15	169	468	8
16	197	749	7

Таблиця 28

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	22	45	3
2	34	75	3
3	50	125	3
4	67	223	3
5	47	92	5
6	66	146	5
7	81	227	5
8	106	358	5
9	70	135	7
10	95	218	7
11	119	331	7
12	147	490	7
13	93	175	10
14	133	305	10
15	169	468	10
16	197	749	9

Таблиця 29

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	20	47	1
2	35	77	1
3	51	128	2
4	67	227	2
5	47	92	3
6	66	146	3
7	80	227	3
8	106	358	3
9	70	135	5
10	95	218	5
11	119	331	5
12	147	490	5
13	93	176	8
14	133	305	8
15	169	468	8
16	198	749	7

Таблиця 30

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	20	44	2
2	36	78	2
3	50	125	1
4	69	225	2
5	49	92	3
6	66	146	3
7	81	227	3
8	106	358	3
9	70	135	5
10	95	218	5
11	119	331	5
12	147	490	5
13	93	175	7
14	133	305	8
15	160	465	7
16	197	749	7

**Завдання 1.2** Дослідити наявність мультиколінеарності в масиві  $X_1, X_2, X_3$ , використовуючи алгоритм Феррара-Глобера.

Таблиця 1

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,31	10,1	6,315	7,627
2	4,67	11,7	7,729	10,7
3	6,17	13,9	8,479	11,53
4	8,7	14,4	8,691	13,4
5	10,7	15,1	10,5	17,02
6	13,5	17,1	10,52	18,75
7	16,2	18,9	11,68	21,14
8	18,3	20,3	13,77	23,37
9	21,2	21,7	13,7	27,45
10	22,7	22,4	14,43	27,13
11	25,1	22,5	14,07	29,61
12	26,1	24,7	16,46	32,52

Таблиця 2

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,12	9,97	6,28	7,45
2	4,4	11,43	7,64	10,48
3	6,16	13,61	8,25	11,25
4	8,69	14,28	8,61	13,33
5	10,47	14,93	10,21	16,9
6	13,41	17,04	10,43	18,57
7	15,98	18,82	11,54	20,91
8	18,24	20,3	13,73	23,32
9	20,89	21,48	13,64	27,16
10	22,66	22,22	14,41	27
11	24,91	22,41	13,98	29,59
12	26,03	24,45	16,45	32,24
13	27,25	24,75	14,83	31,71

Таблиця 3

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,41	10,25	6,32	7,73
2	4,78	11,95	7,79	10,94
3	6,26	13,87	8,57	11,82
4	8,95	14,52	8,83	13,59
5	10,75	15,18	10,55	17,15
6	13,57	17,41	10,59	18,81
7	16,43	19,01	11,83	21,26
8	18,55	20,52	13,83	23,38
9	21,45	22,02	13,97	27,62
10	22,75	22,53	14,55	27,18
11	25,19	22,64	14,17	29,87
12	26,25	24,89	16,64	32,64
13	27,63	25,02	15,07	32,01
14	30,16	25,19	15,38	35,25

Таблиця 4

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,37	10,27	6,4	7,73
2	4,77	11,07	7,88	10,25
3	6,24	13,08	8,5	11,54
4	8,7	14,52	8,86	13,52
5	10,79	16,28	10,51	17,13
6	13,6	17,29	10,53	18,75
7	26,31	19,04	11,74	21,15
8	16,4	20,45	13,96	23,49
9	21,25	21,94	13,86	27,5
10	22,87	22,55	14,6	27,16
11	25,15	22,56	14,24	29,73
12	28,27	24,79	16,59	32,71
13	28,7	24,82	15,03	31,83
14	30	25,11	15,34	35,18
15	32,25	26,11	15,84	37,12

Таблиця 5

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,25	9,9	6,09	7,49
2	4,42	11,54	7,49	10,64
3	6,08	13,73	8,46	11,44
4	8,65	14,26	8,59	13,24
5	10,64	14,91	10,43	16,99
6	13,29	17,02	10,52	18,57
7	15,95	18,84	11,65	21,07
8	18,25	20,06	13,55	23,23
9	21,1	21,71	13,67	27,37
10	22,67	22,31	14,33	27,12
11	24,99	22,39	13,95	29,42
12	26	24,5	16,34	32,43
13	27,34	24,76	14,81	31,74
14	29,75	24,99	15,13	35,16
15	31,87	25,94	15,46	37,07
16	33,55	27,35	16,96	38,74

Таблиця 6

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,61	10,35	6,61	7,72
2	4,89	11,78	7,94	10,77
3	6,24	14,09	8,62	11,86
4	9,01	14,64	8,83	13,73
5	10,79	15,17	10,68	17,04
6	13,53	17,42	10,66	18,8
7	16,32	19,24	11,78	21,28
8	18,6	20,6	13,78	23,7
9	21,48	22,04	13,74	27,63
10	23,02	22,69	14,56	27,45
11	25,17	22,65	14,09	29,71
12	26,4	24,83	16,66	32,8

Таблиця 7

Таблиця 8

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,61	10,32	6,71	7,95
2	4,97	11,96	8,14	10,75
3	6,55	13,96	8,95	11,66
4	9,16	14,62	8,83	13,49
5	10,68	15,18	10,95	17,44
6	13,93	17,34	10,92	19,05
7	16,27	19,21	11,75	21,42
8	18,74	20,36	14,05	23,85
9	21,31	22,21	14,09	27,92
10	22,88	22,84	14,6	27,27
11	25,13	22,63	14,38	30,04
12	26,28	24,93	16,57	32,83
13	27,71	24,94	15,51	31,89

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,4	11,27	6,78	8,61
2	5,66	12,48	8,49	11,33
3	6,67	14,11	9,46	12,48
4	9,52	14,64	9,44	14,37
5	11,57	16,17	10,82	17,43
6	13,73	17,47	11,01	19,5
7	16,87	19,85	12,16	21,22
8	18,73	21,43	1,46	23,84
9	22,16	22,12	13,96	27,8
10	23,33	22,98	14,72	27,82
11	25,84	22,61	14,58	30,01
12	26,69	25,03	17,07	33,32
13	27,78	25,16	15,39	31,87
14	30,86	26,05	15,95	35,35

Таблица 9

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	1,43	9,18	6,17	7,29
2	3,92	10,94	7,7	9,79
3	5,49	13,3	8,43	11,26
4	8,17	13,89	8,12	12,42
5	9,68	14,49	10,41	16,04
6	13,42	16,73	10,39	18,34
7	15,92	17,97	11,36	20,94
8	18,04	19,45	13,32	22,74
9	20,69	21,49	12,72	27,09
10	22,68	21,8	14,22	26,43
11	24,33	21,64	13,51	29,39
12	25,64	24,48	15,83	32,37
13	27,14	24,02	14,52	31,52
14	29,22	24,42	15,06	34,89
15	31,09	25,96	15,32	36,33

Таблица 10

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	3,18	10,95	6,94	8,5
2	5,76	12,66	8,2	11,67
3	7,26	14,35	9,03	12,11
4	8,95	15,04	9,87	14,09
5	11,44	16,26	10,65	18,01
6	14,59	18,13	10,57	19,21
7	16,91	19,73	12,18	21,33
8	18,4	21,09	14,02	23,54
9	21,84	22,47	13,77	27,72
10	23,88	22,58	15,01	27,18
11	25,98	22,68	14,51	30,26
12	26,85	25,76	17,62	33,09
13	28,71	25,63	15,59	32,22
14	30,38	25	16,23	35,42
15	32,66	26,36	16,63	37,21

Таблица 11

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,41	10,2	6,415	7,727
2	4,77	11,8	7,829	10,8
3	6,27	14	8,579	11,63
4	8,8	14,5	8,791	13,5
5	10,8	15,2	10,6	17,12
6	13,6	17,2	10,62	18,85
7	16,3	19	11,78	21,24
8	18,4	20,4	13,87	23,47
9	21,3	21,8	13,8	27,55
10	22,8	22,5	14,53	27,23
11	25,2	22,6	14,17	29,71
12	26,2	24,8	16,56	32,62

Таблица 12

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	3,12	10,97	7,28	8,45
2	5,4	12,43	8,64	11,48
3	7,16	14,61	9,25	12,25
4	9,69	15,28	9,61	14,33
5	11,47	15,93	11,21	17,9
6	14,41	18,04	11,43	19,57
7	16,98	19,82	12,54	21,91
8	19,24	21,3	14,73	24,32
9	21,89	22,48	14,64	28,16
10	23,66	23,22	15,41	28
11	25,91	23,41	14,98	30,59
12	27,03	25,45	15,45	33,24
13	28,25	25,75	15,83	32,71

Таблица 13

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,61	10,45	6,52	7,93
2	4,98	12,15	7,99	11,14
3	6,46	14,07	8,77	12,02
4	9,15	14,72	9,03	13,79
5	10,95	15,38	10,75	17,25
6	13,77	17,61	10,79	19,01
7	16,63	19,21	12,03	21,46
8	18,75	20,72	14,03	23,48
9	21,65	22,22	14,17	27,72
10	22,95	22,73	14,75	27,38
11	25,39	22,84	14,37	30,07
12	26,45	25,09	16,84	32,84
13	27,83	25,22	15,27	32,21
14	30,36	25,39	15,58	35,45

Таблица 14

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,67	10,57	6,7	8,03
2	5,07	11,37	8,18	11,55
3	6,54	13,38	8,8	11,84
4	9	14,82	9,16	13,82
5	11,09	16,58	10,81	17,43
6	13,9	17,59	10,83	19,05
7	26,61	19,34	12,04	21,45
8	16,7	20,75	14,26	23,79
9	21,55	22,24	14,16	27,8
10	23,17	22,85	14,9	27,46
11	25,45	22,86	14,54	30,03
12	28,57	25,09	16,89	33,01
13	20,3	25,12	15,33	32,13
14	30,3	25,31	15,64	35,48
15	32,55	26,41	16,14	37,42

Таблица 15

Таблица 16

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,35	10	6,19	7,59
2	4,52	11,64	7,59	10,74
3	6,18	13,83	8,56	11,54
4	8,75	14,36	8,69	13,34
5	10,74	15,01	10,53	17,09
6	13,39	17,12	10,62	18,67
7	16,05	18,94	11,75	21,17
8	18,35	20,16	13,65	23,33
9	21,2	21,81	13,77	27,47
10	22,77	22,41	14,43	27,22
11	25,09	22,49	14,05	29,52
12	26,1	24,6	16,44	32,53
13	27,44	24,86	14,91	31,84
14	29,85	25,09	15,43	35,26
15	31,97	26,04	15,56	37,17
16	33,65	27,45	17,06	38,84

Таблиця 17

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,51	10,22	6,61	7,85
2	4,87	11,86	8,04	10,65
3	6,45	13,86	8,85	11,56
4	9,06	14,52	8,73	13,39
5	10,58	15,08	10,85	17,34
6	13,83	17,24	10,82	18,95
7	16,17	19,11	11,65	21,32
8	18,64	20,26	13,95	23,75
9	21,21	22,11	13,99	27,82
10	22,78	22,74	14,5	27,17
11	25,03	22,53	14,28	29,94
12	26,18	24,83	16,47	32,73
13	27,61	24,84	15,41	31,79

Таблиця 19

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	0,43	8,18	5,17	6,29
2	2,92	9,94	6,7	8,79
3	4,49	12,3	7,43	10,26
4	7,17	11,89	7,12	11,42
5	9,68	13,49	9,41	15,04
6	12,42	15,73	9,39	17,34
7	14,92	16,97	10,36	19,94
8	17,04	18,45	12,32	21,74
9	19,69	20,49	11,72	26,09
10	21,68	20,8	13,22	25,43
11	23,33	20,64	12,51	28,39
12	24,64	23,48	14,83	31,37
13	26,14	23,02	13,52	30,52
14	28,22	23,42	14,06	33,89
15	30,09	24,96	14,32	35,33

Таблиця 21

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	0,29	8,08	4,295	5,607
2	2,65	9,68	5,709	8,68
3	4,15	11,88	6,459	9,51
4	6,68	12,38	6,671	11,38
5	8,68	13,08	8,48	15
6	11,48	15,08	8,5	16,73
7	14,18	16,88	9,66	19,12
8	16,28	18,28	11,75	21,35
9	19,18	19,68	11,68	25,43
10	20,68	20,38	12,41	25,11
11	23,08	20,48	12,05	27,59
12	24,08	22,68	14,44	30,5

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,81	10,55	6,81	7,92
2	5,09	11,98	8,14	10,97
3	6,44	14,29	8,82	12,06
4	9,21	14,84	9,03	13,93
5	10,99	15,37	10,88	17,24
6	13,73	17,62	10,86	19
7	16,52	19,44	11,98	21,48
8	18,8	20,8	13,98	23,9
9	21,68	22,24	13,94	27,83
10	23,22	22,99	14,76	27,65
11	25,37	22,85	14,29	29,91
12	26,6	25,03	16,76	33

Таблиця 18

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,3	11,17	6,68	8,51
2	5,56	12,38	8,39	11,23
3	6,57	14,01	9,36	12,38
4	9,42	14,54	9,34	14,27
5	11,47	16,07	10,72	17,33
6	13,63	17,57	10,91	19,4
7	16,77	19,75	11,96	21,12
8	18,63	21,33	1,36	23,74
9	22,06	22,02	13,86	27,7
10	23,23	22,88	14,62	27,72
11	25,74	22,51	14,48	29,91
12	26,59	24,93	16,97	33,22
13	27,68	25,06	15,29	31,77
14	30,76	25,95	15,85	35,25

Таблиця 20

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,18	9,95	5,94	7,5
2	4,76	11,66	7,2	10,67
3	6,26	13,35	8,03	11,11
4	7,95	14,04	8,87	13,09
5	10,44	15,26	9,65	17,01
6	13,59	17,13	9,57	18,21
7	15,91	18,73	11,18	20,33
8	17,4	20,09	13,02	22,54
9	20,84	21,47	12,77	26,72
10	22,88	21,58	14,01	26,18
11	24,98	21,68	13,51	29,26
12	25,85	24,76	16,62	32,09
13	27,71	24,63	14,59	31,22
14	29,38	24	15,23	34,42
15	31,66	25,36	15,63	36,21
16	32,88	27,54	16,28	38,64

Таблиця 22

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	1	8,85	5,16	6,33
2	3,28	10,31	6,52	9,36
3	5,04	12,49	7,13	10,13
4	7,57	13,16	7,49	12,21
5	9,35	13,81	9,09	15,78
6	12,29	15,92	9,31	17,45
7	14,86	17,7	10,42	19,79
8	17,12	19,18	12,61	22,2
9	19,77	20,36	12,52	26,04
10	21,54	21,1	13,29	25,88
11	23,79	21,29	12,86	28,47
12	24,91	23,33	13,33	31,12

Таблица 23

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	0,49	8,33	4,4	5,81
2	2,86	10,03	5,87	9,02
3	4,34	11,95	6,65	9,9
4	7,03	12,6	6,91	11,67
5	8,83	13,26	8,63	15,13
6	11,65	15,49	8,67	16,89
7	14,51	17,09	9,91	19,34
8	16,63	18,6	11,91	21,36
9	19,53	20,1	12,05	25,6
10	20,83	20,61	12,63	25,26
11	23,27	20,72	12,25	27,95
12	24,33	22,97	14,72	30,72
13	25,71	23,1	13,15	30,09
14	28,24	23,27	13,46	33,33

Таблица 24

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	0,55	8,45	4,58	5,91
2	2,95	9,25	6,06	9,43
3	4,42	11,26	6,68	9,72
4	6,88	12,7	7,04	11,7
5	8,97	14,46	8,69	15,31
6	11,78	15,47	8,71	16,93
7	24,49	17,22	9,92	19,33
8	14,58	18,63	12,14	21,67
9	19,43	20,12	12,04	25,68
10	21,05	20,73	12,78	25,34
11	23,33	20,74	12,42	27,91
12	26,45	22,97	14,77	30,89
13	18,18	23	13,21	30,01
14	28,18	23,19	13,52	33,36
15	30,43	24,29	14,02	35,3

Таблица 25

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	0,23	7,88	4,07	5,47
2	2,4	9,52	5,47	8,62
3	4,06	11,71	6,44	9,42
4	6,63	12,24	6,57	11,22
5	8,62	12,89	8,41	14,97
6	11,27	15	8,5	16,55
7	13,93	16,82	9,63	19,05
8	16,23	18,04	11,53	21,21
9	19,08	19,69	11,65	25,35
10	20,65	20,29	12,31	25,1
11	22,97	20,37	11,93	27,4
12	23,98	22,48	14,32	30,41
13	25,32	22,74	12,79	29,72
14	27,73	22,97	13,31	33,14
15	29,85	23,92	13,44	35,05
16	31,53	25,33	14,94	36,72

Таблица 26

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,18	9,95	5,94	7,5
2	4,76	11,66	7,2	10,67
3	6,26	13,35	8,03	11,11
4	7,95	14,04	8,87	13,09
5	10,44	15,26	9,65	17,01
6	13,59	17,13	9,57	18,21
7	15,91	18,73	11,18	20,33
8	17,4	20,09	13,02	22,54
9	20,84	21,47	12,77	26,72
10	22,88	21,58	14,01	26,18
11	24,98	21,68	13,51	29,26
12	25,85	24,76	16,62	32,09
13	27,71	24,63	14,59	31,22
14	29,38	24	15,23	34,42
15	31,66	25,36	15,63	36,21
16	32,88	27,54	16,28	38,64

Таблица 27

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	0,29	8,08	4,295	5,607
2	2,65	9,68	5,709	8,68
3	4,15	11,88	6,459	9,51
4	6,68	12,38	6,671	11,38
5	8,68	13,08	8,48	15
6	11,48	15,08	8,5	16,73
7	14,18	16,88	9,66	19,12
8	16,28	18,28	11,75	21,35
9	19,18	19,68	11,68	25,43
10	20,68	20,38	12,41	25,11
11	23,08	20,48	12,05	27,59
12	24,08	22,68	14,44	30,5

Таблица 28

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,4	11,27	6,78	8,61
2	5,66	12,48	8,49	11,33
3	6,67	14,11	9,46	12,48
4	9,52	14,64	9,44	14,37
5	11,57	16,17	10,82	17,43
6	13,73	17,47	11,01	19,5
7	16,87	19,85	12,16	21,22
8	18,73	21,43	1,46	23,84
9	22,16	22,12	13,96	27,8
10	23,33	22,98	14,72	27,82
11	25,84	22,61	14,58	30,01
12	26,69	25,03	17,07	33,32

Таблица 29

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,51	10,22	6,61	7,85
2	4,87	11,86	8,04	10,65
3	6,45	13,86	8,85	11,56
4	9,06	14,52	8,73	13,39
5	10,58	15,08	10,85	17,34
6	13,83	17,24	10,82	18,95
7	16,17	19,11	11,65	21,32
8	18,64	20,26	13,95	23,75
9	21,21	22,11	13,99	27,82
10	22,78	22,74	14,5	27,17
11	25,03	22,53	14,28	29,94
12	26,18	24,83	16,47	32,73
13	27,61	24,84	15,41	31,79

Таблица 30

№з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	2,61	10,32	6,71	7,95
2	4,97	11,96	8,14	10,75
3	6,55	13,96	8,95	11,66
4	9,16	14,62	8,83	13,49
5	10,68	15,18	10,95	17,44
6	13,93	17,34	10,92	19,05
7	16,27	19,21	11,75	21,42
8	18,74	20,36	14,05	23,85
9	21,31	22,21	14,09	27,92
10	22,88	22,84	14,6	27,27
11	25,13	22,63	14,38	30,04
12	26,28	24,93	16,57	32,83
13	27,71	24,94	15,51	31,89

## Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

**Завдання 1.1** Оцінити параметри економетричної моделі, що характеризують залежність між витратами, вантажообігом та фондомісткістю. Дослідити статистичну значущість моделі та оцінок параметрів.

### Приклад 1. Парна лінійна регресія.

На основі статистичних даних по дев'яти металобазах побудувати економетрична модель, яка характеризує залежність між витратами обігу, грн., та вантажообігом, грн.

Таблиця вихідних даних

№з/п	Витрати обігу	Вантажообіг
1	2,7	15,6
2	3	15,3
3	2,8	14,9
4	2,9	15,1
5	2,6	16,1
6	2,5	16,7
7	2,8	15,4
8	2,6	17,1
9	2,5	16,8

У таблиці 1 наведено вихідні дані та їх елементарні перетворення для побудови моделі

Таблиця 1

№ з/п	$Y$	$X$	$X^2$	$XY$	$Y - \bar{Y}$	$X - \bar{X}$	$(Y - \bar{Y})^2$	$(X - \bar{X})^2$	$(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})$
1	2,7	15,6	243,36	42,12	-0,011	-0,289	0,0001	0,0835	0,0032
2	3	15,3	234,09	45,9	0,289	-0,589	0,0835	0,3468	-0,1701
3	2,8	14,9	222,01	41,72	0,089	-0,989	0,0079	0,9779	-0,0879
4	2,9	15,1	228,01	43,79	0,189	-0,789	0,0357	0,6223	-0,1490
5	2,6	16,1	259,21	41,86	-0,111	0,211	0,0123	0,0446	-0,0235
6	2,5	16,7	278,89	41,75	-0,211	0,811	0,0446	0,6579	-0,1712
7	2,8	15,4	237,16	43,12	0,089	-0,489	0,0079	0,2390	-0,0435
8	2,6	17,1	292,41	44,46	-0,111	1,211	0,0123	1,4668	-0,1346
9	2,5	16,8	282,24	42	-0,211	0,911	0,0446	0,8301	-0,1923
Сума	24,4	143	2277,3	386,72			0,2489	5,2689	-0,9689
Середнє	2,7111	15,888	253,04	42,968					

Далі потрібно:

- 1 Побудувати лінійну регресійну модель та одержати найкращі оцінки невідомих параметрів.
- 2 Провести аналіз точності оцінок параметрів регресії.
- 3 Перевірити значущість коефіцієнтів лінійного рівняння регресії, використовуючи  $t$ - статистику.
- 4 Побудувати інтервальні оцінки параметрів регресії.
- 5 Виконати перевірку моделі на адекватність в цілому:
  - а) Обчислити коефіцієнт детермінації  $R^2$ ;

б) обчислити значення параметра критерію Фішера  $F$  та порівняти його з табличним.

6 Побудувати точковий та інтервальний прогноз для індивідуального значення витрат.

7 Обчислити коефіцієнт еластичності.

### Розв'язання.

1 Обчислимо середні значення початкових даних, використовуючи таблицю 1:

$$\bar{X} = (15,5 + 15,3 + 14,9 + 15,1 + 16,1 + 16,7 + 15,4 + 17,1 + 16,8) / 9 = 15,889$$

$$\bar{Y} = (2,7 + 3 + 2,8 + 2,9 + 2,6 + 2,5 + 2,8 + 2,6 + 2,5) / 9 = 2,711$$

$$\overline{XY} = (42,12 + 45,9 + 41,72 + 43,79 + 41,86 + 41,75 + 43,12 + 44,46 + 42) / 9 = 42,969$$

$$\overline{X^2} = (243,36 + 234,09 + 222,01 + 228,01 + 259,21 + \dots + 292,41 + 282,24) / 9 = 253,042$$

Ідентифікуємо змінні:

$Y$  - витрати (залежна змінна),  $X$  - вантажообіг (незалежна змінна).

Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:  $Y = b_0 + b_1 X + \varepsilon$ , де  $b_0$ ,  $b_1$  - параметри моделі;  $\varepsilon$  - стохастична складова (збурення).

Оцінимо параметри моделі  $\hat{Y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 X$  методом МНК за формулами:

$$\hat{b}_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}, \quad \hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1 \bar{x}.$$

Одержимо:

$$\hat{b}_1 = \frac{42,969 - 2,711 \cdot 15,889}{253,042 - 15,889^2} = -0,184, \quad \hat{b}_0 = 2,711 - (-0,184) \cdot 15,889 = 5,633.$$

2 Обчислимо дисперсії залежної змінної та збурення:

Таблиця 2

$\hat{Y}$	$e = Y - \hat{Y}$	$e^2$	$(Y - \hat{Y})^2$
2,7642	-0,06	0,004	0,004
2,8194	0,18	0,033	0,033
2,8930	-0,09	0,009	0,009
2,8562	0,04	0,002	0,002
2,6723	-0,07	0,005	0,005
2,5620	-0,06	0,004	0,004
2,8010	0,00	0,000	0,000
2,4884	0,11	0,012	0,012
2,5436	-0,04	0,002	0,002
Сума	$-18 \cdot 10^{-16}$	0,071	0,071

Для оцінки дисперсії збурення використаємо формулу  $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - 2}$ :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{0,071}{9 - 2} = 0,0101$$

Оцінимо дисперсії для параметрів  $b_0$  та  $b_1$ :

$$\hat{\sigma}_{b_0}^2 = \frac{0,0101 \cdot 2277,4}{9 \cdot 5,27} = 0,485, \quad \hat{\sigma}_{b_1}^2 = \frac{0,0101}{5,27} = 0,00192.$$



3 Перевіримо гіпотези відносно коефіцієнтів лінійного рівняння регресії, використовуючи  $t$ - статистику.

Для перевірки гіпотези

$$H_0 : \hat{b}_1 = b_1^0 ,$$

$$H_1 : \hat{b}_1 \neq b_1^0 ,$$

скористуємось статистикою

$$t = \frac{\hat{b}_1 - b_1^0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}} .$$

У нашому випадку перевіримо гіпотезу: 
$$\begin{cases} H_0 : \hat{b}_1 = 0, \\ H_1 : \hat{b}_1 \neq 0. \end{cases}$$

$$t_{\text{факт}} = \left| \frac{\hat{b}_1 - b_1^0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}} \right| = 4,199$$

Критичне значення  $t_{\text{кр}}$  при рівні значущості  $\alpha = 0,05$  з числом ступенів свободи  $\nu = n - 2 = 7$  буде таким:  $t_{\text{кр}} = 2,365$ .

Бачимо, що  $t_{\text{факт}} > t_{\text{кр}}$ , а це означає, що приймається гіпотеза  $H_1 : \hat{b}_1 \neq 0$ .

4 Побудуємо довірчі інтервальні оцінки коефіцієнтів рівняння регресії, використовуючи формули:

$$\hat{b}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_0} < b_0 < \hat{b}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_0} ,$$

$$\hat{b}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_1} < b_1 < \hat{b}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_1} ,$$

Довірчий інтервал для  $b_0$ :

$$\hat{b}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_0} = 5,633 - 2,365 \cdot 0,697 = 3,986 ,$$

$$\hat{b}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_0} = 5,633 + 2,365 \cdot 0,697 = 7,280 ,$$

або

$$(3,99 < b_0 < 7,28) .$$

Довірчий інтервал для  $b_1$ :

$$\hat{b}_1 - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_1} = (-0,184) - 2,365 \cdot 0,044 = -0,287 ,$$

$$\hat{b}_1 + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_1} = (-0,184) + 2,365 \cdot 0,044 = -0,080 ,$$

або

$$(-0,29 < b_1 < -0,08) .$$

5 Виконаємо перевірку моделі на адекватність в цілому.

Спочатку обчислимо коефіцієнт детермінації:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0,071}{0,2489} = 0,716 .$$

Далі обчислимо фактичне значення параметра критерію Фішера  $F_{\phi}$  і порівняємо його з табличним  $F_{\text{табл}}$ .

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-2}{1} = \frac{0,716}{1-0,716} \cdot \frac{9-2}{1} = 17,635.$$

Табличне значення параметра Фішера  $F_{табл}$  при рівні значущості  $\alpha = 0,05$  та числах ступенів свободи  $\nu_1 = 1$  та  $\nu_2 = 9 - 2 = 7$  буде таким  $F_{табл} = 5,59$ .

Оскільки  $F_{табл} < F_\phi$ , робимо висновок, що гіпотеза про значущість зв'язку незалежної та залежної змінних приймається і, отже, модель є статистично значущою.

6 Обчислимо прогнозні значення.

Спочатку знайдемо точковий прогноз:  $\hat{y}_{n+1} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{n+1}$ , де  $x_{n+1} = x_{10} = 17,4$ .

$$\hat{y}_{10} = 5,633 + (-0,184) \cdot 17,4 = 2,43.$$

Далі знайдемо інтервальний прогноз, використовуючи формулу

$$\left( \hat{y}_{n+1} - t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}; \hat{y}_{n+1} + t_{\frac{\alpha}{2}, n-2} \hat{\sigma} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{n+1} - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \right),$$

$$\left( 2,43 - 2,365 \cdot 0,1 \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(15,889 - 17,4)^2}{5,27}}; 2,43 + 2,365 \cdot 0,1 \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(15,889 - 17,4)^2}{5,27}} \right),$$

або

$$(2,138 < y_{10} < 2,729).$$

7 Обчислимо коефіцієнт еластичності:

$$\bar{E} = b_1 \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{y}} = -0,184 \cdot \frac{15,889}{2,711} = -1,078.$$

## Приклад 2. Множинна лінійна регресія.

Оцінити параметри економетричної моделі, що характеризує залежність між витратами, вантажообігом та фондомісткістю.

Вихідні дані в умовних одиницях наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

№з/п	Витрати $y$	Вантажообіг $x_1$	Фондомісткість $x_2$
1	2,72	15,6	106,3
2	3,04	13,5	128,5
3	2,84	15,3	118
4	2,89	14,9	121,2
5	2,58	15,1	120
6	2,64	16,1	118,4
7	2,52	16,7	108,4
8	2,75	15,4	110
9	2,63	17,1	105,9

## Розв'язання.

1 Запишемо економетричну модель

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \varepsilon$$

$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2$$

де  $y$ ,  $\hat{y}$  – відповідно фактичні та розрахункові значення витрат за моделлю,  $x_1$  - вантажообіг,  $x_2$  - фондомісткість,  $\varepsilon$  - стохастична складова,  $b_0, b_1, b_2$  - оцінки параметрів моделі.

2 Побудуємо оператор оцінювання параметрів моделі за методом МНК, використовуючи формулу  $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y$ , де

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 15,6 & 106,3 \\ 1 & 13,5 & 128,5 \\ 1 & 15,3 & 118 \\ 1 & 14,9 & 121,2 \\ 1 & 15,1 & 120 \\ 1 & 16,1 & 118,4 \\ 1 & 16,7 & 108,4 \\ 1 & 15,4 & 110 \\ 1 & 17,1 & 105,9 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 2,72 \\ 3,04 \\ 2,84 \\ 2,89 \\ 2,58 \\ 2,64 \\ 2,52 \\ 2,75 \\ 2,63 \end{pmatrix},$$

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 15,6 & 13,5 & 15,3 & 14,9 & 15,1 & 16,1 & 16,7 & 15,4 & 17,1 \\ 106,3 & 128,5 & 118 & 121,2 & 120 & 118,4 & 108,4 & 110 & 105,9 \end{pmatrix},$$

$X'$  - матриця, транспонована до матриці  $X$ .

Матриця  $X$ , крім векторів незалежних змінних, містить вектор одиниць. Він дописується в цій матриці тоді, коли економетрична модель має вільний член. Не дописуючи такого вектора одиниць, вільний член можна обчислити, скориставшись рівністю:  $\hat{b}_0 = \bar{y} - \hat{b}_1\bar{x}_1 - \hat{b}_2\bar{x}_2$ , де  $\bar{y}$  - середнє значення залежної змінної.

Згідно з оператором оцінювання  $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y$  знайдемо:

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 9 & 139,7 & 1036,7 \\ 139,7 & 2177,4 & 16037,7 \\ 1036,7 & 16037,7 & 119909,3 \end{pmatrix} \quad (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 293,14 & -9,444 & -1,271 \\ -9,444 & 0,335 & 0,037 \\ -1,271 & 0,037 & 0,006 \end{pmatrix}$$

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 24,61 \\ 380,85 \\ 2841,5 \end{pmatrix} \quad \hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,024 \\ -0,137 \\ -0,001 \end{pmatrix}$$

3 Тоді економетрична модель має такий вигляд:  $\hat{y} = 5,024 - 0,137x_1 - 0,001x_2$ .

4 Отже, коли за всіх однакових умов незалежна змінна  $x_1$  (вантажобіг) збільшується (зменшується) на одиницю, то залежна змінна  $\hat{y}$  (оцінка витрат) при цьому зменшується (збільшується) на 0,137 одиниць. Якщо за інших незмінних умов незалежна змінна  $x_2$  (фондомісткість) збільшується (зменшується) на одиницю, то залежна змінна  $\hat{y}$  (оцінка витрат) при цьому зменшується (збільшується) на 0,001 одиниць.

5 Відповідно до отриманих оцінок параметрів моделі отримаємо обчислені значення  $\hat{y}$ , які приведені у таблиці 2:

Таблиця 2

№з/п	Витрати $y$	Витрати $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2$	Збурення $e = y - \hat{y}$
1	2,72	2,74	-0,02
2	3,04	2,99	0,05
3	2,84	2,76	0,08
4	2,89	2,81	0,08
5	2,58	2,79	-0,21
6	2,64	2,65	-0,01
7	2,52	2,58	-0,06
8	2,75	2,76	-0,01
9	2,63	2,53	0,1

6 Обчислимо незміщену оцінку дисперсії збурень за формулою  $\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-p-1}$ , де  $e'$  - транспонований стовпчик збурень  $e$ .

$$e' = (-0,02 \quad 0,05 \quad 0,08 \quad 0,08 \quad -0,21 \quad -0,01 \quad -0,06 \quad -0,01 \quad 0,1)$$

$$e'e = 0,07103$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-p-1} = \frac{0,07103}{9-2-1} = 0,01184.$$

7 Побудуємо коваріаційну матрицю  $\hat{K}_b$  (проведемо її оцінку) за формулою  $\hat{K}_b = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$ :

$$\hat{K}_b = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = 0,01184 \begin{pmatrix} 293,14 & -9,444 & -1,271 \\ -9,444 & 0,335 & 0,037 \\ -1,271 & 0,037 & 0,006 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,4705 & -0,111806 & -0,015051 \\ -0,111806 & 0,003968 & 0,000436 \\ -0,015051 & 0,000436 & 0,000072 \end{pmatrix}$$

8 Обчислимо стандартні помилки оцінок параметрів моделі за формулою  $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}^2} = \hat{\sigma} \sqrt{(X'X)^{-1}_{ii}}$ :

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{b}_0}^2} = \sqrt{3,4705} = 1,8629, \quad \hat{\sigma}_{\hat{b}_{01}} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{b}_{01}}^2} = \sqrt{0,003968} = 0,063,$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}_2} = \sqrt{\hat{\sigma}_{\hat{b}_2}^2} = \sqrt{0,000072} = 0,0085.$$

9 Проведемо перевірку статистичної значущості коефіцієнтів рівняння регресії за формулою  $t_{i\Phi} = \frac{\hat{b}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}}$ :

$$t_{0\Phi} = \frac{\hat{b}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_0}} = \frac{5,024}{1,8629} = 2,6966, \quad t_{1\Phi} = \frac{\hat{b}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}} = \frac{-0,137}{0,063} = -2,1751, \quad t_{2\Phi} = \frac{\hat{b}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_2}} = \frac{-0,001}{0,0085} = -0,1663.$$

10 Для обраних параметрів економетричної моделі (при рівні значущості  $\alpha = 0,05$  та  $\nu = n - p - 1 = 9 - 2 - 1 = 6$ ) знайдемо критичне значення параметра розподілу Стюдента  $t_{кр} = 2,4469$ .

Як бачимо,  $|t_{0\Phi}| > t_{кр}$ ,  $|t_{1\Phi}| < t_{кр}$  (але близьке до  $t_{кр}$ ),  $|t_{2\Phi}| < t_{кр}$ . Отже, на практиці це означає, що оцінка параметра  $\hat{b}_2$  не є статистично значущою, отже, його треба відкинути. А це означає, що з моделі треба вилучити фактор  $x_2$ , що з економічної точки зору може бути невиправданим. Тоді треба повернутися до початку побудови моделі та перевірити її.

11 Знайдемо довірчий інтервал, який з надійністю  $(1-\alpha)$  накриває невідоме значення параметра  $b_1$  рівняння регресії, за формулою

$$\hat{b}_i - t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_i} < b_i < \hat{b}_i + t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_i} :$$

$$-0,137 - 2,4469 \cdot 0,063 < b_1 < -0,137 + 2,4469 \cdot 0,063.$$

12 Перевіримо якість рівняння в цілому. Для цього обчислимо коефіцієнт детермінації за формулою  $R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$ , виконавши попередні розрахунки в таблиці 3.

Таблиця 3

№з/п	$y_i$	$\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{i1} + \hat{b}_2 x_{i2}$	$(y_i - \hat{y}_i)^2$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	2,72	2,74	0,000266	0,000209
2	3,04	2,99	0,002233	0,093364
3	2,84	2,76	0,006252	0,011142
4	2,89	2,81	0,006206	0,024198
5	2,58	2,79	0,042234	0,023853
6	2,64	2,65	0,000116	0,00892
7	2,52	2,58	0,003925	0,045986
8	2,75	2,76	0,000072	0,00242
9	2,63	2,53	0,009728	0,010909
Сума			0,071	0,219

Остаточо маємо:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0,071}{0,219} = 0,675.$$

Обчислимо скорегований коефіцієнт детермінації за формулою

$$\bar{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-p-1} = 1 - (1 - 0,675) \cdot \frac{9-1}{9-2-1} = 0,567.$$

13 Проведемо аналіз значущості коефіцієнта детермінації. Обчислимо значення параметра Фішера за формулою

$$F_{\phi} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-p-1}{p} = \frac{0,675}{1-0,675} \cdot \frac{9-2-1}{2} = 6,242.$$

Для перевірки гіпотези  $H_0: b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$  знайдемо за таблицею розподілу Фішера з  $\nu_1 = p = 2$ ,  $\nu_2 = n - p - 1 = 9 - 2 - 1 = 6$  ступенями свободи та рівнем значущості  $\alpha = 0,05$  критичне значення  $F_{кр} = 5,14$ . Бачимо, що обчислене значення параметра Фішера  $F_{\phi}$  більше за критичне  $F_{кр}$ , тобто  $F_{\phi} > F_{кр}$ . Отже, нульова гіпотеза  $H_0: b_1 = b_2 = \dots = b_p = 0$  відхиляється, а це означає сукупний вплив змінних  $x_1, x_2$  на залежну змінну істотний.

14 Використаємо побудовану регресійну модель для прогнозу залежної змінної. Задаємо прогнозовані значення незалежних змінних  $x'_{10} = (1; x_{10,1}; x_{10,2}) = (1; 17,5; 112)$ . Тоді прогнозовані значення знайдемо за формулою:

$$\hat{y}_{10} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \hat{b}_2 x_2 = 5,024 - 0,137 \cdot 17,5 - 0,001 \cdot 112 = 2,468.$$

Для побудови довірчого інтервала для індивідуального значення використаємо формулу

$$\hat{y}_{n+1} - t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma} \left[ 1 + x'_{n+1} (X'X)^{-1} x_{n+1} \right]^{1/2} < y_{n+1} < \hat{y}_{n+1} + t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma} \left[ 1 + x'_{n+1} (X'X)^{-1} x_{n+1} \right]^{1/2},$$

де  $x'_{n+1} = x'_{10} = (1; 17,5; 112)$

$$t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma} \left[ 1 + x'_{n+1} (X'X)^{-1} x_{n+1} \right]^{1/2} = 2,4469 \cdot 0,1088 \left[ 1 + (1 \ 17,5 \ 112) \begin{pmatrix} 293,14 & -9,444 & -1,271 \\ -9,444 & 0,335 & 0,037 \\ -1,271 & 0,037 & 0,006 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 17,5 \\ 112 \end{pmatrix} \right]^{1/2} = 0,378$$

$$2,468 - 0,378 < y_{10} < 2,468 + 0,378 \quad \text{або} \quad 2,0896 < y_{10} < 2,8463.$$

15 Обчислимо середні коефіцієнти еластичності за формулою  $\bar{\Theta}_{yx_j} = \hat{b}_j \frac{\bar{X}_j}{\bar{Y}}$ :

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^9 x_{i1} = \frac{1}{9} (15,6 + 13,5 + \dots + 17,1) = 15,52$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^9 x_{i2} = \frac{1}{9} (106,3 + 128,5 + \dots + 105,9) = 115,89$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^9 y_i = \frac{1}{9} (2,72 + 3,04 + \dots + 2,63) = 2,73$$

$$\bar{\Theta}_{yx_1} = \hat{b}_1 \frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}} = -0,137 \cdot \frac{15,52}{2,73} = -0,778, \quad \bar{\Theta}_{yx_2} = \hat{b}_2 \frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}} = -0,001 \cdot \frac{115,189}{2,73} = -0,059.$$

Отже, бачимо, що при збільшенні фактора  $x_1$  на один відсоток результативна ознака  $y$  у середньому зменшиться на 0,78%, а при такому ж збільшенні фактора  $x_2$  результативна ознака  $y$  зменшиться на 0,06%.

**Завдання 1.2** Дослідити наявність мультиколінеарності в масиві  $X_1, X_2, X_3$ , використовуючи алгоритм Феррара-Глобера.

№ з/п	$X_1$	$X_2$	$X_3$
1	2,37	10,27	6,4
2	4,77	11,07	7,88
3	6,24	13,08	8,5
4	8,7	14,52	8,86
5	10,79	16,28	10,51
6	13,6	17,29	10,53
7	16,31	19,04	11,74
8	16,4	20,45	13,96
9	21,25	21,94	13,86
10	22,87	22,55	14,6
11	25,15	22,56	14,24
12	28,27	24,79	16,59
13	28,7	24,82	15,03
14	30,0	25,11	15,34
15	32,25	26,11	15,84
16	33,85	27,58	17,3

**Розв'язання.**

**Крок 1** Стандартизуємо початкові змінні:

Стандартизуємо змінні за формулою  $x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \bar{X}_j}{\sqrt{\sigma_{x_j}^2 \cdot n}}$ ,  $j = \overline{1, p}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,

де  $n$  – число спостережень,  $i$  – номер значення  $j$ -тої змінної,  $\bar{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ ,

$$\sigma_{x_j}^2 = \overline{X_j^2} - \bar{X}_j^2.$$

$$\bar{X}_1 = \frac{2,37+4,77+6,24+10,79+13,6+16,4+21,25+22,87+22,15+28,27+28,7+30+32,25+33,85}{16} = 18,845.$$

Середні значення для  $X_2$  та  $X_3$  обчислюються аналогічно:

$$X_2 = 19,841, \quad X_3 = 12,574.$$

Дисперсія  $\sigma_{x_j}^2$  знаходиться за формулою  $\sigma_{x_j}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{X}_j)^2}{n}$ .

$$\sigma_{x_1}^2 = \left( (2,37 - 18,845)^2 + (4,77 - 18,845)^2 + (6,24 - 18,845)^2 + \dots + (33,85 - 18,845)^2 \right) / 16 = 107,54.$$

Дисперсії для  $X_2$  та  $X_3$  знаходяться аналогічно:

$$\sigma_{x_2}^2 = 107,54, \quad \sigma_{x_3}^2 = 107,54.$$

Далі обчислюємо стандартизовані (нормалізовані) значення змінних:

$$x_{11}^* = \frac{2,37 - 18,845}{\sqrt{107,54 \cdot 16}} = -0,397, \quad x_{12}^* = \frac{4,77 - 18,845}{\sqrt{107,54 \cdot 16}} = -0,339.$$

Таблиця стандартизованих змінних приймає наступний вигляд:

$X_1^*$	$X_2^*$	$X_3^*$
-0,397	-0,388	-0,916
-0,339	-0,352	-0,807
-0,304	-0,261	-0,762
-0,245	-0,196	-0,735
-0,194	-0,116	-0,614
-0,126	-0,07	-0,612
-0,061	0,009	-0,523
-0,059	0,073	-0,36
0,058	0,14	-0,367
0,097	0,168	-0,313
0,152	0,168	-0,339
0,227	0,269	-0,166
0,238	0,27	-0,281
0,269	0,283	-0,258
0,323	0,329	-0,221
0,362	0,395	-0,114

**Крок 2** Знаходження кореляційної матриці  $R$ :

$$R = X^{*T} X^* = \begin{pmatrix} -0,397 & -0,339 & \dots & 0,362 \\ -0,388 & -0,352 & \dots & 0,395 \\ -0,916 & -0,807 & \dots & -0,114 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,397 & -0,388 & -0,916 \\ -0,339 & -0,352 & -0,807 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0,362 & 0,395 & -0,114 \end{pmatrix},$$

де  $X^{*f}$  – матриця транспонованих пояснювальних змінних.

Отримаємо

$$R = \begin{pmatrix} 0,938 & 0,928 & 0,909 \\ 0,928 & 0,937 & 0,926 \\ 0,909 & 0,926 & 0,938 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник кореляційної матриці:  $\det R = |R| = 0,00036$ .

**Крок 3** Обчислимо значення критерію  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = - \left[ n - 1 - \frac{1}{6}(2 \cdot p + 5) \right] \ln R = - \left[ 16 - 1 - \frac{1}{6}(2 \cdot 3 + 5) \right] \ln 0,00036 = 104,41.$$

Знайдемо табличне значення критерію  $\chi^2_{\alpha, \nu}$  при ступенях свободи  $\nu = \frac{1}{2} p(p-1) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3-1) = 3$  і рівні значущості  $\alpha = 0,05$ . Критерій  $\chi^2_{\alpha, \nu} = 7,815$ .

Оскільки  $\chi^2_{\alpha, \nu} > \chi^2$ , робимо висновок, що в масиві змінних існує мультиколінеарність.

**Крок 4** Знайдемо матрицю, обернену до матриці  $R$ .

$$C = R^{-1} = (X^{*f} X^*)^{-1}; \quad C = \frac{1}{\det R} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{23} & B_{33} \end{pmatrix}.$$

де  $B_{ij}$  – алгебраїчні доповнення відповідних елементів матриці  $(X^{*f} X^*)^{-1}$ .

$$\begin{pmatrix} 58,528 & -76,77 & 19,087 \\ -76,97 & 145,23 & -69,026 \\ 19,087 & -69,03 & 50,749 \end{pmatrix}$$

**Крок 5** Використовуючи діагональні елементи матриці  $C$ , обчислимо значення  $F$  - критеріїв:

$$F_1 = (c_{11} - 1) \frac{n-m}{m-1} = (58,53 - 1) \frac{16-3}{3-1} = 191,73,$$

$$F_2 = (c_{22} - 1) \frac{n-m}{m-1} = (145,23 - 1) \frac{16-3}{3-1} = 480,78,$$

$$F_3 = (c_{33} - 1) \frac{n-m}{m-1} = (50,75 - 1) \frac{16-3}{3-1} = 165,83.$$

Для рівня значущості  $\alpha = 0,05$  і ступенів свободи  $\nu_1 = p = 2$  і  $\nu_2 = n - p - 1 = 12$  критичне (табличне) значення критерію -  $F_{\alpha, \nu_1, \nu_2} = 19,41$ .

Оскільки  $F_1 > F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$ ,  $F_2 > F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$ ,  $F_3 > F_{\alpha, \nu_1, \nu_2}$ , то кожна з пояснювальних змінних мультиколінеарна з двома іншими. Щоб визначити наявність попарної мультиколінеарності, продовжимо дослідження.

**Крок 6** Обчислимо частинні коефіцієнти кореляції  $r_{ij}$ , скориставшись елементами матриці  $C$ :

$$r_{12} = \frac{-c_{12}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{22}}} = \frac{76,77}{\sqrt{58,53 \cdot 145,23}} = 0,83, \quad r_{13} = \frac{-c_{13}}{\sqrt{c_{11} \cdot c_{33}}} = \frac{-19,09}{\sqrt{58,53 \cdot 50,75}} = -0,35,$$

$$r_{23} = \frac{-c_{23}}{\sqrt{c_{22} \cdot c_{33}}} = \frac{69,03}{\sqrt{145,23 \cdot 50,75}} = 0,80.$$



Порівнявши частинні коефіцієнти кореляції з парними, якими є відповідно елементи кореляційної матриці  $R$ :  $r_{12} = 0,928$ ,  $r_{13} = 0,909$ ,  $r_{23} = 0,926$ , можна помітити, що вони близькі за величиною (крім  $r_{13}$ ), отже зробити висновки про наявність певної мультиколінеарності поки що не можливо.

**Крок 7** Визначимо значення  $t$ -критерію на основі частинних коефіцієнтів кореляції:

$$t_{12} = \frac{r_{12}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} = \frac{0,83\sqrt{16-3}}{\sqrt{1-0,83^2}} = 5,42, \quad t_{13} = \frac{r_{13}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{13}^2}} = \frac{0,35\sqrt{16-3}}{\sqrt{1-0,35^2}} = 1,35,$$

$$t_{23} = \frac{r_{23}\sqrt{n-m}}{\sqrt{1-r_{23}^2}} = \frac{0,8\sqrt{16-3}}{\sqrt{1-0,8^2}} = 4,88.$$

Табличне значення  $t$ -критерію при  $n-p-1 = 12$  ступенях свободи і рівні значущості  $\alpha=0,05$  дорівнює 2,179. Тільки числове значення  $t_{13}$  менше за табличне значення.

Отже, робимо висновок, що  $X_2$  колінеарне з  $X_1$  та  $X_3$ . Тому далі фактор  $X_2$  потрібно виключити із розгляду і можна оцінити параметри економетричної моделі, що характеризує залежність  $Y$  від змінних  $X_1$ ,  $X_3$  як це зроблено в попередній лабораторній роботі.

## ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.

### Варіанти індивідуальних домашніх завдань

**Завдання 2.1** Встановити наявність гетероскедастичності, застосувавши алгоритм Гольдфелда - Квандта.

### Варіанти завдань

Таблиця 1			Таблиця 2			Таблиця 3		
№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X
1	300	25	1	350	26	1	400	25
2	280	20	2	280	22	2	380	20
3	350	30	3	350	30	3	350	30
4	340	30	4	340	30	4	350	30
5	330	28	5	300	29	5	430	28
6	320	29	6	320	28	6	420	28
7	310	25	7	320	25	7	310	25
8	300	24	8	280	24	8	400	24
9	320	27	9	300	23	9	350	25
10	280	22	10	380	21	10	380	20
11	340	35	11	340	30	11	350	30
12	360	30	12	360	32	12	340	30
13	320	29	13	330	28	13	320	28
14	300	28	14	320	29	14	320	28
15	310	25	15	340	25	15	310	25
16	350	26	16	300	24	16	380	24

Таблица 4			Таблица 5			Таблица 6		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	320	15	1	300	25	1	200	15
2	280	10	2	280	20	2	180	20
3	350	20	3	350	20	3	250	30
4	340	20	4	340	10	4	240	30
5	330	18	5	380	28	5	230	38
6	320	18	6	320	28	6	220	38
7	310	15	7	310	15	7	210	25
8	300	14	8	400	24	8	250	34
9	310	15	9	350	25	9	200	15
10	290	10	10	280	20	10	190	25
11	350	20	11	350	20	11	250	30
12	340	20	12	340	20	12	240	30
13	330	18	13	380	28	13	230	18
14	320	18	14	320	28	14	280	28
15	310	15	15	310	15	15	210	25
16	300	14	16	320	14	16	200	14

Таблица 7			Таблица 8			Таблица 9		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	300	8	1	100	30	1	200	30
2	280	10	2	120	35	2	220	35
3	350	20	3	130	40	3	230	40
4	340	15	4	125	30	4	225	35
5	330	18	5	140	45	5	240	45
6	320	18	6	150	30	6	250	50
7	310	15	7	155	55	7	255	55
8	300	14	8	160	60	8	260	62
9	300	9	9	100	30	9	200	30
10	280	10	10	120	35	10	220	38
11	350	15	11	130	40	11	230	40
12	340	20	12	125	30	12	225	36
13	330	21	13	140	45	13	240	45
14	320	15	14	150	50	14	250	50
15	310	17	15	155	55	15	255	55
16	300	20	16	160	60	16	260	60

Таблица 10			Таблица 11			Таблица 12		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	110	20	1	100	30	1	100	30
2	130	25	2	120	35	2	120	35
3	140	30	3	130	40	3	130	40
4	125	20	4	125	30	4	125	30
5	140	35	5	140	45	5	140	45
6	160	20	6	150	50	6	150	50
7	155	45	7	155	55	7	155	55
8	180	50	8	160	60	8	160	60
9	120	20	9	100	30	9	150	65
10	120	25	10	120	35	10	140	70
11	130	30	11	130	40	11	130	35
12	135	20	12	125	30	12	180	45
13	145	35	13	140	45	13	120	40
14	150	20	14	150	50	14	135	50
15	155	45	15	155	55	15	155	50
16	160	50	16	160	60	16	160	40

Таблица 13			Таблица 14			Таблица 15		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	50	10	1	50	10	1	50	70
2	45	12	2	45	12	2	45	62
3	55	9	3	55	9	3	55	72
4	50	10	4	50	10	4	50	60
5	60	8	5	60	8	5	60	55
6	70	16	6	70	6	6	70	60
7	52	10	7	55	5	7	50	60
8	47	12	8	57	6	8	45	82
9	55	9	9	56	7	9	55	62
10	50	10	10	59	8	10	50	60
11	65	18	11	51	9	11	60	85
12	70	9	12	58	10	12	70	60
13	75	17	13	75	18	13	60	80
14	45	9	14	45	8	14	40	70
15	50	10	15	50	10	15	50	81
16	45	12	16	45	12	16	45	59

Таблица 16			Таблица 17			Таблица 18		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	50	50	1	50	10	1	50	10
2	45	45	2	45	12	2	42	12
3	55	55	3	55	9	3	55	9
4	50	50	4	50	10	4	50	10
5	60	60	5	60	18	5	60	8
6	70	70	6	70	6	6	70	6
7	50	50	7	50	15	7	80	8
8	45	45	8	45	12	8	85	10
9	55	55	9	55	19	9	75	12
10	50	50	10	50	10	10	90	7
11	60	60	11	60	9	11	45	15
12	70	70	12	70	14	12	50	14
13	65	65	13	60	10	13	85	12
14	75	75	14	40	8	14	65	10
15	60	73	15	75	18	15	60	10
16	45	70	16	45	8	16	47	8

Таблица 19			Таблица 20			Таблица 21		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	55	5	1	75	5	1	55	5
2	57	6	2	67	6	2	87	6
3	56	7	3	56	7	3	56	7
4	59	8	4	59	8	4	59	8
5	51	9	5	51	9	5	51	9
6	58	10	6	58	10	6	58	10
7	60	8	7	60	7	7	60	11
8	50	9	8	65	8	8	65	5
9	45	15	9	45	9	9	70	6
10	65	8	10	40	10	10	50	4
11	70	11	11	50	15	11	55	5
12	52	12	12	65	14	12	62	7
13	75	15	13	80	7	13	53	8
14	58	10	14	82	5	14	50	9
15	65	14	15	58	10	15	55	10
16	75	16	16	62	12	16	65	9

Таблица 22			Таблица 23			Таблица 24		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	300	25	1	350	26	1	400	25
2	280	20	2	280	22	2	380	20
3	350	30	3	350	30	3	350	30
4	340	30	4	340	30	4	350	30
5	330	28	5	300	29	5	430	28
6	320	29	6	320	28	6	420	28
7	310	25	7	320	25	7	310	25
8	300	24	8	280	24	8	400	24
9	320	27	9	300	23	9	350	25
10	280	22	10	380	21	10	380	20
11	340	35	11	340	30	11	350	30
12	360	30	12	360	32	12	340	30
13	320	29	13	330	28	13	320	28
14	300	28	14	320	29	14	320	28
15	310	25	15	340	25	15	310	25
16	350	26	16	300	24	16	380	24

Таблица 25			Таблица 26			Таблица 27		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	320	15	1	300	25	1	200	15
2	280	10	2	280	20	2	180	20
3	350	20	3	350	20	3	250	30
4	340	20	4	340	10	4	240	30
5	330	18	5	380	28	5	230	38
6	320	18	6	320	28	6	220	38
7	310	15	7	310	15	7	210	25
8	300	14	8	400	24	8	250	34
9	310	15	9	350	25	9	200	15
10	290	10	10	280	20	10	190	25
11	350	20	11	350	20	11	250	30
12	340	20	12	340	20	12	240	30
13	330	18	13	380	28	13	230	18
14	320	18	14	320	28	14	280	28
15	310	15	15	310	15	15	210	25
16	300	14	16	320	14	16	200	14

Таблица 27			Таблица 29			Таблица 30		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	300	5	1	100	30	1	75	5
2	280	4	2	120	35	2	67	6
3	350	6	3	130	40	3	56	7
4	340	7	4	125	30	4	59	8
5	330	7	5	140	45	5	51	9
6	320	5	6	150	30	6	58	10
7	310	6	7	155	55	7	60	7
8	300	4	8	160	60	8	65	8
9	300	5	9	100	30	9	45	9
10	280	4	10	120	35	10	40	10
11	350	6	11	130	40	11	50	15
12	340	7	12	125	30	12	65	14
13	330	7	13	140	45	13	80	7
14	320	5	14	150	50	14	82	5
15	310	6	15	155	55	15	58	10
16	300	4	16	160	60	16	62	12

**Завдання 2.2** На підставі вихідних даних, наведених в таблиці, побудувати економетричну модель, перевірити наявність чи відсутність автокореляції залишків на основі критерію Дарбіна-Уотсона.

### Варіанти завдань

Таблиця 1			Таблиця 2			Таблиця 3		
№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X
1	26	72	1	13	36	1	26	72
2	26	74	2	13	37	2	26	74
3	28	78	3	14	39	3	28	78
4	32	82	4	16	41	4	32	81
5	35	82	5	17,5	41	5	35	82
6	36	83	6	18	42	6	36	83
7	40	85	7	20	43	7	40	85
8	37	84	8	18,5	42	8	37	84
9	38	84	9	19	42	9	38	84
10	42	88	10	21	44	10	42	88

Таблиця 4			Таблиця 5			Таблиця 6		
№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X
1	12	36	1	25	72	1	12,5	36
2	13	37	2	26	74	2	13	37
3	14	39	3	28	78	3	14	39
4	16	41	4	32	82	4	16	41
5	17,5	41	5	35	82	5	17,5	41
6	18	42	6	36	83	6	18	42
7	20	43	7	40	85	7	20	43
8	18,5	42	8	37	84	8	18,5	42
9	19	42	9	38	84	9	19	42
10	21	44	10	42	88	10	21	44

Таблиця 7			Таблиця 8			Таблиця 9		
№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X
1	26	72	1	12,5	36	1	24	71
2	26	74	2	13,5	37	2	26	74
3	28	78	3	14	39	3	28	78
4	32	82	4	16	41	4	32	82
5	35	82	5	17,5	41	5	35	82
6	36	83	6	18	42	6	36	83
7	40	85	7	20	43	7	40	85
8	38	84	8	18,5	42	8	37	84
9	38	84	9	19	42	9	38	84
10	42	88	10	21	44	10	42	88

Таблиця 10			Таблиця 11			Таблиця 12		
№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X
1	13	36	1	25	72	1	13	36
2	13,5	37	2	25,5	74	2	13	37
3	14	39	3	28	78	3	14	39
4	16	41	4	32	82	4	16	41
5	17,5	41	5	35	82	5	17,5	41
6	18	42	6	36	83	6	18	42
7	20	43	7	40	85	7	20	43
8	18,5	42	8	37	84	8	18,5	42
9	19	42	9	38	84	9	19	42
10	21	44	10	42	88	10	21,5	44

Таблица 13			Таблица 14			Таблица 15		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	26,5	72	1	13	36	1	25,5	72
2	26	74	2	14	37	2	26,5	74
3	28	78	3	14,5	39	3	28	78
4	32	82	4	16	41	4	32	82
5	35	82	5	17,5	41	5	35	82
6	36	83	6	18	42	6	36	83
7	40	85	7	20	43	7	40	85
8	37	84	8	18,5	42	8	37	84
9	38	84	9	19	42	9	38	84
10	42	88	10	21	44	10	42	88

Таблица 16			Таблица 17			Таблица 18		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	13	36	1	26	72	1	13	36
2	13,2	37,7	2	26,7	74	2	13,3	37
3	14	39	3	28	78	3	14	39
4	16	41	4	32	82	4	16	41
5	17,5	41	5	35	82	5	17,5	41
6	18	42	6	36	83	6	18	42
7	20	43	7	40	85	7	20	43
8	18,5	42	8	37	84	8	18,5	42
9	19	42	9	38	84	9	19	42
10	21	44	10	42	88	10	21	44

Таблица 19			Таблица 20			Таблица 21		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	25	72	1	13,2	36	1	26	42
2	25,8	74	2	13,8	37	2	26	42
3	28	78	3	14	39	3	28	44
4	32	82	4	16	41	4	32	46
5	35	82	5	17,5	41	5	35	47
6	36	83	6	18	42	6	36	49
7	40	85	7	20	43	7	40	52
8	37	84	8	18,5	42	8	37	50
9	38	84	9	19	42	9	38	50
10	42	88	10	21	44	10	42	55

Таблица 22			Таблица 23			Таблица 24		
№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х	№ з/п	У	Х
1	13	21	1	350	26	1	26	42
2	13	21	2	280	22	2	26	42
3	14	22	3	350	30	3	28	44
4	16	23	4	340	30	4	32	46
5	17,5	23,5	5	300	29	5	35	47
6	18	24,5	6	320	28	6	36	49
7	20	26	7	320	25	7	40	52
8	18,5	26	8	280	24	8	37	50
9	19	25	9	300	23	9	38	50
10	21	27,5	10	380	21	10	42	55

Таблиця 25			Таблиця 26			Таблиця 27		
№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X
1	12	21	1	25	42	1	12,5	21
2	13	21	2	26	42	2	13	21
3	14	22	3	28	44	3	14	22
4	16	23	4	32	46	4	16	23
5	17,5	23,5	5	35	47	5	17,5	23,5
6	18	24,5	6	36	49	6	18	24,5
7	20	26	7	40	52	7	20	26
8	18,5	26	8	37	50	8	18,5	26
9	19	25	9	38	50	9	19	25
10	21	27,5	10	42	55	10	21	27,5

Таблиця 28			Таблиця 29			Таблиця 30		
№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X	№ з/п	Y	X
1	300	5	1	100	30	1	26	42
2	280	4	2	120	35	2	26	42
3	350	6	3	130	40	3	28	44
4	340	7	4	125	30	4	32	46
5	330	7	5	140	45	5	35	47
6	320	5	6	150	30	6	36	49
7	310	6	7	155	55	7	40	52
8	300	4	8	160	60	8	38	50
9	300	5	9	100	30	9	38	50
10	280	4	10	120	35	10	42	55

### Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

**Завдання 2.1** Встановити наявність гетероскедастичності, застосувавши алгоритм Гольдфелда - Квандта.

**Приклад 3.** Нехай треба побудувати економетричну модель, яка характеризує залежність заощаджень від доходів населення. Для побудови цієї моделі використовується вихідна сукупність даних, яка включає 18 спостережень. Щоб правильно вибрати метод для оцінки параметрів моделі, необхідно перевірити, чи властива гетероскедастичність для наведених вихідних даних:

№з/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Y	1,36	1,20	1,08	1,20	1,10	1,12	1,41	1,50	1,43	1,59	1,90	1,95	1,82	2,04	2,53	2,94	2,75	2,99
X	13,8	14,4	15,0	15,6	16,0	16,9	17,7	18,5	19,3	20,5	21,7	22,7	23,6	24,7	26,1	27,8	28,9	30,2

Y – заощадження, X – дохід.

## Розв'язання.

Таблиця 1

№з/п	$Y$	$X$		$X^2$	$XY$	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$
1-й	1,36	13,8		190,44	18,768	1,1974	0,1626	0,0264
2-й	1,20	14,4		207,36	17,280	1,2016	-0,0016	0,000025
3-й	1,08	15,0		225,00	16,200	1,2057	-0,1257	0,0158
4-й	1,20	15,6	$n_2$	243,36	18,720	1,2098	-0,0098	0,000096
5-й	1,10	16,0		256,00	17,600	1,2126	-0,1126	0,0127
6-й	1,12	16,9		285,61	18,928	1,2188	-0,0988	0,0098
7-й	1,41	17,7		313,29	24,957	1,2243	0,1857	0,0345
8-й	1,50	18,5						
9-й	1,43	19,3						
10-й	1,59	20,5						
11-й	1,90	21,7						
12-й	1,95	22,7		515,29	44,265	1,8401	0,1099	0,0121
13-й	1,82	23,6		556,96	42,925	1,9885	-0,1685	0,0284
14-й	2,04	24,7		610,09	50,388	2,1699	-0,1299	0,0169
15-й	2,53	26,1	$n_1$	681,21	66,033	2,4008	0,1292	0,0167
16-й	2,94	27,8		772,84	81,732	2,6811	0,2589	0,0670
17-й	2,75	28,9		835,21	79,475	2,8625	-0,1125	0,0127
18-й	2,99	30,2		912,04	90,298	3,0769	-0,0869	0,0076
$\Sigma$	<b>31,91</b>	<b>373,4</b>						

Продовження Таблиці 1

№з/п	$\lambda_i = 1/X_i$	$\hat{Y}$	$Y - \hat{Y}$	$(Y - \hat{Y})^2$	$Y - \bar{Y}$	$(Y - \bar{Y})^2$
1-й	0,0725	0,9865	0,3735	0,1395	-0,4128	0,1704
2-й	0,0694	1,0542	0,1458	0,2126	-0,5728	0,3281
3-й	0,0667	1,1219	-0,0419	0,0176	-0,6928	0,4799
4-й	0,0641	1,1896	0,0104	0,0001	-0,5728	0,3281
5-й	0,0625	1,2347	-0,1347	0,0181	-0,6728	0,4527
6-й	0,0592	1,3362	-0,2162	0,0467	-0,6528	0,4261
7-й	0,0565	1,4265	-0,0165	0,0003	-0,3628	0,1316
8-й	0,0541	1,5167	-0,0167	0,0003	-0,2728	0,0744
9-й	0,0518	1,6069	-0,1769	0,0313	-0,3428	0,1175
10-й	0,0488	1,7423	-0,1523	0,0232	-0,1828	0,0334
11-й	0,0461	1,8777	0,0223	0,0005	0,1272	0,0162
12-й	0,0441	1,9905	-0,0405	0,0016	0,1772	0,0314
13-й	0,0424	2,0919	0,2719	0,0739	0,0472	0,0022
14-й	0,0405	2,2161	-0,1761	0,0310	0,2672	0,0714
15-й	0,0383	2,3739	0,1561	0,0244	0,7572	0,5734
16-й	0,0359	2,5657	0,3743	0,1401	1,1672	1,3624
17-й	0,0346	2,6898	0,0602	0,0036	0,9772	0,9549
18-й	0,0331	2,8365	0,1535	0,0236	1,2172	1,4816
$\Sigma$				<b>0,7884</b>		<b>7,0357</b>

В таблиці дані впорядковані за величиною доходу, починаючи від меншого до більшого значення.



### 1 Ідентифікація змінних:

$$Y = f(X, u),$$

$Y$  - залежна змінна (заощадження);

$X$  - незалежна змінна (дохід);

$u$  - стохастична складова.

### 2 Специфікація моделі:

$$Y = a_0 + a_1 X + u,$$

$$\hat{Y} = \hat{a}_0 + \hat{a}_1 X,$$

$$u = Y - \hat{Y}.$$

**3** Визначимо наявність гетероскедастичності. Для цього застосуємо алгоритм Гольдфелда - Квандта. Дану сукупність спостережень впорядкуємо по  $X$  від меншого до більшого значення. Відшукуємо  $C$  спостережень, які знаходяться в середині сукупності:

$$\frac{C}{n} = \frac{4}{15}, \quad n=18, \quad \frac{C}{18} = \frac{4}{15}, \quad C = \frac{4 \cdot 18}{15} \approx 4.$$

Тоді  $n_1 = n_2 = 7$ .

#### 3.1 Розрахуємо економетричну модель для сукупності $n_1 = 7$ .

Оцінимо кількісно параметри моделі на основі 1МНК.

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum x = \sum y \\ \hat{a}_0 \sum x + \hat{a}_1 \sum x^2 = \sum xy \end{cases}$$

$$\sum x = 109,4; \quad \sum y = 8,47; \quad \sum x^2 = 1721,06; \quad \sum xy = 132,453.$$

$$\begin{cases} 7\hat{a}_0 + 109,4\hat{a}_1 = 8,47 \\ 109,4\hat{a}_0 + 1721,06\hat{a}_1 = 132,453 \end{cases} \begin{array}{l} \times 109,4 \\ \times 7 \end{array}$$

$$\begin{cases} 765,8\hat{a}_0 + 11968,36\hat{a}_1 = 926,618 \\ 765,8\hat{a}_0 + 12047,42\hat{a}_1 = 927,171 \end{cases}$$

$$79,06\hat{a}_1 = 0,553$$

$$\hat{a}_1 = 0,0069$$

$$7\hat{a}_0 + 109,4 \times 0,0069 = 8,47$$

$$7\hat{a}_0 = 8,47 - 0,7549$$

$$7\hat{a}_0 = 7,7151$$

$$\hat{a}_0 = 1,1022$$

$\hat{Y}_1 = 1,1022 + 0,0069X$  - перша економетрична модель.

На основі моделі можна зробити висновок: і якщо дохід виросте на **1**, то заощадження збільшаться на **0,0069** одиниці.

#### 3.2 Розрахуємо економетричну модель для сукупності $n_2 = 7$ .

Оцінимо кількісно параметри моделі на основі 1МНК.

$$\begin{cases} n\hat{a}_0 + \hat{a}_1 \sum x = \sum y \\ \hat{a}_0 \sum x + \hat{a}_1 \sum x^2 = \sum xy \end{cases}$$

$$\sum x = 184; \quad \sum y = 17,02; \quad \sum x^2 = 4883,64; \quad \sum xy = 455,143.$$

$$\begin{cases} 7\hat{a}_0 + 184\hat{a}_1 = 17,02 \\ 184\hat{a}_0 + 4883,64\hat{a}_1 = 455,143 \end{cases} \begin{array}{l} \times 184 \\ \times 7 \end{array}$$

$$\begin{cases} 1288\hat{a}_0 + 33856\hat{a}_1 = 3131,68 \\ 1288\hat{a}_0 + 34185,48\hat{a}_1 = 3186,001 \end{cases}$$

$$329,48\hat{a}_1 = 54,321$$

$$\hat{a}_1 = 0,1649$$

$$7\hat{a}_0 + 184 \times 0,1649 = 17,02$$

$$7\hat{a}_0 = 17,02 - 30,3416$$

$$7\hat{a}_0 = -13,3216$$

$$\hat{a}_0 = -1,9031$$

$\hat{Y}_2 = -1,9031 + 0,1649X$  - друга економетрична модель.

На основі моделі можна зробити висновок: і якщо дохід виросте на **1**, то заощадження збільшаться на **0,1649** одиниці для даної сукупності спостережень.

**3.3** Для кожної моделі знайдемо суму квадратів залишків:

$$S_1 = u_1' u_1 = \sum (Y_1 - \hat{Y}_1)^2;$$

$$S_2 = u_2' u_2 = \sum (Y_2 - \hat{Y}_2)^2;$$

$$S_1 = 0,0993;$$

$$S_2 = 0,1614.$$

**3.4** Знаходимо критерій  $R$ :

$$R = \frac{S_2}{S_1}; \quad R = \frac{0,1614}{0,0993} = 1,625.$$

Порівняємо цей критерій із табличним значенням критерію Фішера при ступенях свободи  $\frac{n-c-2m}{2} = 5$  і рівні довіри  $\alpha = 0,05$   $F_{\text{табл}} = 5,05$ .

Гетероскедастичність відсутня, тому що  $R < F_{\text{табл}}$ .

**Завдання 2.2** На підставі вихідних даних, наведених в таблиці, побудувати економетричну модель, перевірити наявність чи відсутність

автокореляції залишків на основі критерію Дарбіна-Уотсона.

**Приклад 4.** На підставі двох взаємопов'язаних часових рядів про роздрібний товарообіг та доходи населення побудувати економетричну модель, що характеризує залежність роздрібного товарообігу від доходу. Вихідні дані наведені в таблиці 2.

Таблиця 2

Рік	Роздрібний товарообіг	Дохід
1-й	24,0	27,1
2-й	25,0	28,2
3-й	25,7	29,3
4-й	27,0	31,3
5-й	28,8	34,0
6-й	30,8	36,0
7-й	33,8	38,7
8-й	38,1	43,2
9-й	43,4	50,0
10-й	45,5	52,1

### Розв'язання.

**1** Ідентифікуємо змінні моделі:

$Y_t$  – роздрібний товарообіг у період  $t$ , залежна змінна;

$X_t$  – дохід у період  $t$ , пояснююча змінна;

Звідси  $Y_t = f(X_t, u_t)$ , де  $u_t$  – стохастична складова, залишки.

**2** Специфікуємо економетричну модель у лінійній формі:

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t;$$

$$\hat{Y}_t = a_0 + a_1 \hat{X}_t;$$

$$u = u_t = Y - \hat{Y}.$$

**3** Визначимо параметри моделі  $a_0$ ,  $a_1$  на основі методу 1МНК, припустивши, що залишки  $u_t$  некорельовані:

$$A = (A'A)^{-1} X'Y,$$

де  $X'$  – матриця, транспонована до матриці  $X$ .

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 27,1 \\ 1 & 28,2 \\ 1 & 29,3 \\ 1 & 31,3 \\ 1 & 34,0 \\ 1 & 36,0 \\ 1 & 38,7 \\ 1 & 43,7 \\ 1 & 50,0 \\ 1 & 52,1 \end{pmatrix}; \quad (X'X) = \begin{pmatrix} 10 & 370,4 \\ 370,4 & 14441,62 \end{pmatrix};$$

$$(X'Y) = \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,09 \end{pmatrix};$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,0513 \\ -0,0513 & 0,0014 \end{pmatrix};$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 2,0002 & -0,0513 \\ -0,0513 & 0,0014 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 322,1 \\ 12555,09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,172 \\ 0,865 \end{pmatrix};$$

$$\hat{a}_0 = 0,172; \quad \hat{a}_1 = 0,865.$$

Економетрична модель має вигляд:  $\hat{Y}_t = 0,172 + 0,865X_t$ .

4 Знайдемо розрахункові значення роздрібного товарообігу на основі моделі  $\hat{Y}_t = 0,172 + 0,865X_t$  і визначимо залишки  $u_t$ .

Таблиця 3

Рік	$Y_t$	$\hat{Y}_t$	$u_t$	$u_t^2$	$u_t - u_{t-1}$	$(u_t - u_{t-1})^2$	$u_t \cdot u_{t-1}$
1-й	24,0	23,6123	0,3877	0,1503	—	—	—
2-й	25,0	24,5637	0,4363	0,1903	0,0485	0,0024	0,1691
3-й	25,7	25,5152	0,4848	0,0342	-0,2515	0,0632	0,0806
4-й	27,0	27,2451	-0,2451	0,0601	-0,4299	0,1848	-0,0453
5-й	28,8	29,5805	-0,7805	0,6092	-0,5354	0,2866	0,1913
6-й	30,8	31,3104	-0,5104	0,2605	0,2701	0,0729	0,3984
7-й	33,8	33,6458	0,1542	0,0238	0,6646	0,4417	-0,0787
8-й	38,1	37,9706	0,1294	0,0167	-0,0248	0,0006	0,0199
9-й	43,4	43,4199	-0,0199	0,0004	-0,1492	0,0222	-0,0026
10-й	45,5	45,2363	0,2637	0,0695	0,2836	0,0804	-0,0052
$\Sigma$	<b>322,1</b>			<b>1,4151</b>		<b>1,1550</b>	<b>0,7276</b>

5 Знайдемо оцінку критерію Дарбіна–Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{10} (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{10} u_t^2} = \frac{1,1550}{1,4151} = 0,816.$$

Порівняємо значення критерію  $DW$  з табличним при  $\alpha = 0,05$  і  $n = 10$ .

Критичні значення критерію  $DW$  у цьому випадку:

$DW_1 = 0,879$  – нижня межа;

$DW_2 = 1,320$  – верхня межа.

Оскільки  $DW_{\text{факт}} < DW_1$ , то при  $\alpha = 0,05$  можна стверджувати, що залишки  $u_t$  мають додатню автокореляцію.

## Бібліографічний список

1. Аршава О.О. Методичні вказівки до практичних занять з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі (економетрика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка». – ХНУБА, 2018.
2. Аршава О.О. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі (економетрика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка». – ХНУБА, 2018.
3. Аршава О.О. Методичні вказівки до індивідуальної роботи з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі (економетрика)» для студентів спеціальностей 051 «Економіка», 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність». – ХНУБА, 2018.
4. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрии. – М.: ЮНИТИ, 1998.
5. Джонстон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980.
6. Доугерти К. введение в эконометрику. – М.: Финансы и статистика, 1999.
7. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. – М.: Дело, 1998.
8. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ, 2002.
9. Бородич С.А. Эконометрика. – Минск: Новое знание, 2001.
10. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрія. – К.: Товариство “Знання”, КОО, 1998.
11. Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія. – К.: КНЕУ, 2000.
12. Назаренко О.М. Основи економетрики. – К.: “Центр навчальної літератури”, 2004.
13. Назаренко О.М. Основи економетрики: Підручник. – Київ: „Центр навчальної літератури”, 2004. – 392с.
14. Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрика: Підручник. – К.: Товариство „Знання”, КОО, 1998. – 494с.
15. Толбатов Ю.А. ,Економетрика: Підручник для студентів екон. спеціал. вищ. навч. закл.- К,: Четверта хвиля, 1997. – 320 с.:іл.
16. Корольов О.А., Рязанцева В.В., Практикум з економетрії: завдання з практичними рекомендаціями, алгоритмами та прикладом їх наскрізного виконання. Ч1.Регресійний аналіз: Навч.посібник. – К.:Вид-во Європ. ун-ту, 2002.-250с.
17. Наконечний С.І. ,Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія: Навч. – метод. Посібник для самост. вивч. дисц. – К.: КНЕУ, 2001. – 192с.
18. Гинтнер Г. Введение в эконометрию - М.: Статистика, 1964.
19. Грубер И. Економетрія. Вступ в економетрію. Том І. - К.: Астар 1966.
20. Клас А., Гергелк К., Колек Ю., Шуян И. Введение в эконометрическое моделирование. - М.: Статистика, 1978.

## ЗМІСТ

Вступ .....	3
Програма навчальної дисципліни.....	3
Змістовий модуль 1 .....	4
Варіанти індивідуальних домашніх завдань .....	4
Завдання 1.1 .....	4
Завдання 1.2 .....	9
Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань .....	13
Завдання 1.1 .....	13
Завдання 1.2 .....	20
Змістовий модуль 2 .....	23
Варіанти індивідуальних домашніх завдань .....	23
Завдання 2.1 .....	23
Завдання 2.2 .....	27
Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань .....	29
Завдання 2.1 .....	29
Завдання 2.2 .....	32
Бібліографічний список .....	35



## Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі(економетрика)» для студентів заочної форми здобуття освіти для спеціальності 051 «Економіка»

Укладач: Стасенко Олександр Миколайович

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

За редакцією автора

План 2019р., поз. 194.20  
Підп. до друку 22.11.19  
Надруковано на різнографі.  
Тираж 50 прим.

Формат 60х84 1/16.  
Обл. - вид. арк.  
Умов. друк. арк. 1,8  
Зам. №5937.

Папір друк. № 2.  
Безкоштовно.

---

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

---

Підготовлено та віддруковано РВВ Харківського національного університету  
будівництва та архітектури