Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 126

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

з дисципліни «Вища математика»

для студентів спеціальності 126

«Інформаційні системи та технології»

заочної форми здобуття освіти

Розділ II

Харків 2020

Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 126

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

з дисципліни «Вища математика»

для студентів спеціальності

126 «Інформаційні системи та технології»

заочної форми здобуття освіти

Розділ II

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики
протокол № 1 від 16.01.2020

Харків 2020

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології». Розділ II / Укладач Л.І. Щелкунова – Харків: ХНУБА, 2020. - 54с.

Рецензент А.П. Харченко

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Методичні вказівки призначаються для надання допомоги студентам заочної форми здобуття освіти в організації самостійної роботи з дисципліни “Вища математика” під час вивчення наступних розділів: «Диференціальні рівняння», «Інтегральне числення функцій багатьох змінних», «Ряди».

Видання містить програму навчальної дисципліни, варіанти для виконання контрольних робіт № 3 і № 4 з розділів дисципліни та зразок їх виконання.

Контрольні роботи № 3 і № 4 можна виконати в одному зошиті або на аркушах формату А4, причому на обкладинці або титульному аркуші треба вказати своє прізвище та ініціали, шифр, номер контрольних робіт і назву дисципліни.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 2 (2-й семестр)

Змістовий модуль 1. Диференціальні рівняння. Кратні та криволінійні інтеграли

Тема 27. Диференціальні рівняння І порядку. Задача Коші. Рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння, однорідні відносно змінних.

Тема 28. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Тема 29. Рівняння другого порядку. Три типа рівнянь, що припускають зниження порядку

Тема 30. Лінійні однорідні диференціальні рівняння П порядку. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами.

Тема 31. Лінійні неоднорідні рівняння 2 порядку. Теорема про загальний розв’язок. Метод варіації довільних сталих.

Тема 32. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.

Тема 33. Системи диференціальних рівнянь.

Тема 34. Теорія стійкості. Поняття стійкості за Ляпуновим. Асимптотична стійкість. Про стійкість розв’язку рівняння n-го порядку. Рівняння в частинних похідних.

Тема 35. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах

Тема 36. Заміна змінних у подвійному інтегралі.

Тема 37. Застосування подвійного інтеграла до задач геометрії та механіки.

Тема 8. Обчислення потрійного інтеграла в прямокутних координатах.

Тема 39. Потрійний інтеграл в циліндричних та сферичних координатах.

Тема 40. Застосування потрійного інтеграла до задач механіки.

Тема 41. Означення криволінійного інтеграла, теорема існування, обчислення.

Змістовий модуль 2. Ряди

Тема 42. Формула Гріна. Обчислення площі плоскої фігури.

Тема 43. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.

Тема 44. Числові ряди. Необхідна ознака збіжності. Гармонічний ряд.

Тема 45. Числові ряди з додатними членами.. Ознаки Д'Аламбера та Коші.

Тема 46. Знакопочережні ряди. Теорема Лейбниця. Абсолютна та умовна збіжність.

Тема 47. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус та інтервал збіжності.

Тема 48. Ряди Тейлора і Маклорена. Розкладання в ряд Маклорена елементарних функцій.

Тема 49. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Тема 50. Ряди Фур`є. Формули для коефіцієнтів. Теорема Діріхле

Тема 51. Ряд Фур`є для парних і непарних функцій. Ряд Фур`є функцій на полу інтервалі.

Тема 52. Розкладання в ряд Фур`є функцій в довільному інтервалі

КОНТРОЛЬНАЯ РОБОТА № 3

Диференціальні рівняння. Кратні та криволінійні інтеграли

Змістовий модуль 1

Завдання 3.1 Знайти загальний або частинний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку.

Варіант 1

1 $y'\sqrt[5]{3x+7} = e^{-5y}$

2 $3xy' = x + 4y$

3 $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2 e^x$.

Варіант 2

1 $y' = \dfrac{3x^5 - 4}{7y^4 + 3}$

2 $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$

3 $y' = e^{2x} - ye^x$.

Варіант 3

1 $y' = \dfrac{x^2 - 2}{1 - y^3}$

2 $xy^2 y' = x^3 + y^3,\ y(1) = 3$

3 $xy' - 3y = x + 1.$

Варіант 4

1 $(x^2 + 1)y' - 4xy = 0$

2 $xy' - x\cos^2 \dfrac{y}{x} = y$

3 $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1.$

Варіант 5

1. $y^2 y' + x^2 = 1$

2. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$

3. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}.$

Варіант 6

1. $y' = y^2\cos 2x\ ,\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$

2. $xy' = 2y$

3. $x^2 y' + xy + 1 = 0.$

Варіант 7

1. $y \cdot y' + x = 5$

2. $yy' + x = 0$

3. $xydx + (x+1)dy = 0.$

Варіант 8

1. $y' = e^{x+y}$

2. $(x + 2y)dx - xdy = 0,\ y(1) = 1$

3. $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(2) = 8.$

Варіант 9

1. $y' = y \cdot tgx$

2. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$

3. $y' - y\,\mathrm{ctg}x = \mathrm{tg}^2 x.$

Варіант 10

1. $y' = \dfrac{4y}{x^2 - 4}$

2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

3. $xy' + y = \ln x + 1.$

Варіант 11

1. $y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$
2. $3xy' = x + 4y$, $y(1) = 1$
3. $x(1+x^2)dy = (y + yx^2 - x^2)dx$, $y\big|_{x=1} = -\frac{\pi}{4}$.

Варіант 12

1. $yy' = (1-3x^2)y^{-2}$
2. $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$
3. $(x+1)\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^2$.

Варіант 13

1. $y'\operatorname{tg}x - y = 1$
2. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$
3. $y' - 2xe^x y^3 - y = 0$, $y\big|_{x=0} = 1$.

Варіант 14

1. $yy' = -\frac{2x}{\cos y}$
2. $(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}\cdot dy = 0$
3. $(y' - y)x = e^x$, $y\big|_{x=1} = e$.

Варіант 15

1. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$
2. $(y + 2\sqrt{xy})dx - xdy = 0$, $y(e) = e$
3. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Варіант 16

1. $(1+x^2)dy + ydx = 0$
2. $xdy - ydx = x\sin^2\frac{y}{x}\cdot dx$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Варіант 17

1. $y' = \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y$

2. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$

3. $tds - 2sdt = t^2 \ln t \cdot dt$.

Варіант 18

1. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$

2. $y = x(y' + \sqrt[x]{e^y})$

3. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x, \quad y(\pi) = \dfrac{4}{3}$.

Варіант 19

1. $(x+1)y' = xy$.

2. $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$.

3. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2 - x} = 1, \quad y(2) = -2\ln 2$.

Варіант 20

1. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.

2. $y' = \dfrac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.

3. $y'\mathrm{ctg}x - y = 2\cos^2 x\,\mathrm{ctg}x$.

Варіант 21

1. $ydx + ctg\,xdy = 0$

2. $3xy' = x + 4y, \quad y(1) = 1$

3. $(\varphi^2 - 1)r' - \varphi r = \varphi^3 - \varphi$.

Варіант 22

1. $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$

2. $xy' - 3y = \dfrac{x^2}{y}$

3. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, \quad y\big|_{x=1} = 1$.

Варіант 23

1. $xydx = -(x+1)dy$

2. $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y\big|_{x=0} = 2$

3. $xy' - 2y = x + 1$.

Варіант 24

1. $y' - y\sin 2x = 0$

2. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$

3. $y'\cos x + y\sin x = 1, y(0) = 1$.

Варіант 25

1. $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$
2. $y'=\dfrac{x+2y}{x}$
3. $y'+(1+\dfrac{1}{x^2})y=e^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 26

1. $S\,\mathrm{tg}\,t\cdot dt+dS=0$
2. $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y}{x}-\dfrac{x}{y}$, $y(-1)=2$
3. $y'-\dfrac{y}{x+2}=x^2+4x+5$.

Варіант 27

1. $(x+1)y'+xy=0$,
2. $xy'\sin\dfrac{y}{x}=y\sin\dfrac{y}{x}-x$,
3. $y'+\dfrac{3y}{x}=7x^3+2x^2$.

Варіант 28

1. $y'=y^2\cos 2x,\quad y(\dfrac{\pi}{2})=1$,
2. $xy'\sin\dfrac{y}{x}=y\sin\dfrac{y}{x}-x$,
3. $y'\cos x-2y\sin x=2$.

Варіант 29

1. $yy'=\dfrac{2+x}{y}$,
2. $(x+2y)dx-xdy=0$,
3. $tdx+(x-t\sin t)dt=0$.

Варіант 30

1. $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$,
2. $tx'+t\cos\dfrac{x}{t}-x+t=0$,
3. $y'+\dfrac{y}{x+1}=3x-1$.

Завдання 3.2 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Варіант 1

1. $2y'' - 9y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 6$.
2. $y'' + 4y' + 5y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Варіант 2

1. $2y'' + 5y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
2. $y'' - 2y' = 5y = 0.$
3. $4y'' + 4y' + y = 0.$

Варіант 3

1. $3y'' + 5y'' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0.$
3. $y'' + 2y' + y = 0$

Варіант 4

1. $4y'' + y' - 3y = 0, y(0) = 1{,}5, y'(0) = 0{,}25.$
2. $y'' + 4y = 0.$
3. $y'' - 2y' + y = 0.$

Варіант 5

1. $10y'' - 3y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0{,}1.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 8y' + 16y = 0.$

Варіант 6

1. $3y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7.$
2. $y'' + 9y = 0.$
3. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

Варіант 7

1. $3y'' + 2y' - 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{14}{3}.$
2. $y'' - 4y' + 29y = 0.$
3. $0{,}04y'' + 0{,}4y' + y = 0.$

Варіант 8

1. $4y'' - 17y' = 15y = 0, y(0) = 7, y'(0) = 0{,}5.$
2. $y'' + 16y = 0.$
3. $y'' + y' + 0{,}25y = 0.$

Варіант 9

1. $5y'' - 8y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{5}.$
2. $y'' - 8y' + 20y = 0.$
3. $y'' - 14y' + 49y = 0.$

Варіант 10

1. $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$
2. $y'' + 8y' + 25y = 0.$
3. $25y'' - 10y' + y = 0.$

Варіант 11

1. $2y'' - 7y' + 6y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 4.$

2. $y'' + 25y = 0.$

3. $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

Варіант 12

1. $y'' - y' - 12y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 10.$

2. $y'' - 2y' + 10y = 0.$

3. $y'' + 16y' + 64y = 0.$

Варіант 13

1. $y'' + 14y' + 24y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 20.$

2. $y'' - 4y' + 5y = 0.$

3. $\frac{1}{4}y'' - y' + y = 0.$

Варіант 14

1. $y'' - 11y' - 60y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 4.$

2. $y'' + y' = 0.$

3. $9y'' + 24y' + 16y = 0.$

Варіант 15

1. $y'' - y' - 20y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 8.$

2. $y'' - 6y' + 10y = 0.$

3. $4y'' - 20y' + 25y = 0.$

Варіант 16

1. $9y'' - 6y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0.$

2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$

3. $y'' - 10y' = 0.$

Варіант 17

1. $y'' + 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

3. $y'' - 2y' + 4y = 0.$

Варіант 18

1. $y'' + 7y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6.$

2. $\frac{4}{9}y'' - \frac{4}{3}y'' + y = 0.$

3. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

Варіант 19

1. $4y'' - 8y' + 5y = 0, y(0) - 2, y'(0) = 3.$

2. $y'' + 5y' - 14y = 0.$

3. $16y'' - 40y' + 25y = 0.$

Варіант 20

1. $y'' + 4y' - 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 8.$

2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$

3. $169y'' + 26y' + y = 0.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' = 0, y(0)2, y'(0)2.$

2. $y'' - 6y' + 34y = 0.$

3. $y'' - 22y' + 121y = 0.$

Варіант 22

1. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

2. $81y'' - 18y' + y = 0.$

3. $y'' - 2y' + 17y = 0.$

Варіант 23

1. $y'' - 3y' - 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$

2. $100y'' - 20y' + y = 0.$

3. $y'' - 6y' + 25y = 0.$

Варіант 24

1. $4y'' - 7y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{4}.$

2. $y'' + 10y' + 61y = 0.$

3. $121y'' - 44y' + 4y = 0.$

Варіант 25

1. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1.$

2. $y'' - 8y' + 15y = 0.$

3. $17y'' + 2y' + y = 0.$

Варіант 26

1. $3y'' + 7y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' + 49y = 0.$

3. $4y'' - 28y' + 49y = 0.$

Варіант 27

1. $y'' + 4y' + 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4.$

2. $y'' - 5y' - 14y = 0.$

3. $1{,}44y'' - 2{,}4y' + y = 0.$

Варіант 28

1. $2y'' - 3y' - 35y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5.$

2. $y'' - 14y' + 58y = 0.$

3. $81y'' - 36y'' + 4y = 0.$

Варіант 29

1. $y'' - 13y' + 22y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 3.$

2. $y'' + 81y = 0.$

3. $y'' - 30y' + 225y = 0.$

Варіант 30

1. $5y'' - 6y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' - 2y' + 26y = 0.$

3. $y'' - 5y' + 6{,}25y = 0.$

Завдання 3.3 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1, y(0) = \frac{29}{32}, y'(0) = -\frac{3}{8}.$

2. $y'' + 4y = 8\sin 2x.$

Варіант 2

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y''(0) = 11.$

2. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + \cos 2x.$

Варіант 3

1. $y'' + 4y = 8x, y(0) = 0, y'(0) = 4.$

2. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$

Варіант 4

1. $y'' + 4y' + 4y = 5e^{3x}, y(0) = \frac{1}{5}, y'(0) = \frac{8}{5}.$

2. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$

Варіант 5

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}, y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 0.$

2. $y'' + 3y' = 9x.$

Варіант 6

1. $y'' + 4y = 4\sin x, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

2. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$

Варіант 7

1. $y'' - 2y' = x^2 - x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' + 2y' + 2y = 4\sin 2x + 2\cos 2x.$

Варіант 8

1. $y'' + y = x^2, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

2. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 2k\sin kt.$

Варіант 9

1. $y'' - 2y' + 10y = 5x + 9, y(0) = 4, y'(0) = 6{,}5.$

2. $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx.$

Варіант 10

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$

2. $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 2.$

Варіант 11

1. $y'' + y = \cos 2x,\ y(0) = -\frac{1}{3},\ y'(0) = 1.$

2. $y'' - 5y' + 4y = 4e^{2x}x^2.$

Варіант 12

1. $y'' - 2y' = 2e^x,\ y(1) = -1,\ y'(1) = 0.$

2. $y'' + y = 4\sin x.$

Варіант 13

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x + 3,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6.$

2. $y'' + 2y' - 3y = e^x x^2.$

Варіант 14

1. $y'' + y = 4e^x,\ y(0) = 4,\ y'(0) = -3.$

2. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

Варіант 15

1. $y'' - 3y' = x + \cos x,\ y(0) = -\frac{1}{10},\ y'(0) = -\frac{1}{9}.$

2. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$

Варіант 16

1. $y'' - 2y' + y = e^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2.$

2. $y'' + 4y' + 8y = 20\sin 2x.$

Варіант 17

1. $y'' - 4y = 8x + 3,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4.$

2. $y'' + 9y = e^x \cos 3x.$

Варіант 18

1. $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$

2. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

Варіант 19

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 11.$

2. $y'' + 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

Варіант 20

1. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3,\ y(0) = \frac{4}{3},\ y'(0) = \frac{1}{27}.$

2. $y'' + 4y' = 8e^{4x}.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0.$

2. $y'' - 3y' = 6e^{3x}.$

Варіант 22

1. $4y'' + y' - 3y = 3x^2 + x.$

2. $y'' - y = 8e^x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4.$

Варіант 23

1. $y'' + 4y = \sin x,\ y(0) = y'(0) = 1.$

2. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$

Варіант 24

1. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x},\ y(0) = y'(0) = 0.$

2. $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x.$

Варіант 25

1. $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x, y(0) = y'(0) = 0.$

2. $y'' - 8y' + 16y = 32x.$

Варіант 26

1. $y'' - 2y' + y = 4\sin x + 4\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

2. $y'' + y' = 49 - 2x^2.$

Варіант 27

1. $y'' - 3y' = 6 - 3x^2, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

2. $y'' + y = \sin x - \cos x.$

Варіант 28

1. $y'' - 2y' + y = 16e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x + 3.$

Варіант 29

1. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

2. $y'' + 2y' + y = 3\sin x.$

Варіант 30

1. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' + y' = 49 - 24x^3.$

Завдання 3.4 Методами інтегрального числення розв'язати наступні задачі.

Варіант 1

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ і площинами $x - z = 0$ і $2x - z = 0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = x + 2y.$$

Варіант 2

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 4x$ і площинами $x - z = 0$ і $2x - z = 0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 2,\ \gamma = 2x + 3y.$$

Варіант 3

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=6x$ і площинами $x-z=0$ і $3x-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=3x+4y.$$

Варіант 4

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=8x$ і площинами $x-z=0$ і $4x-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=4x+5y.$$

Варіант 5

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=10x$ і площинами $x-z=0$ і $5x-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=5x+6y.$$

Варіант 6

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=12x$ і площинами $x-z=0$ і $6x-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=6x+7y.$$

Варіант 7

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=14x$ і площинами $x-z=0$ і $7x-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=7x+8y.$$

Варіант 8

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=16x$ і площинами $x-z=0$ і $8x-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=8x+9y.$$

Варіант 9

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=18x$ і площинами $x-z=0$ і $9x-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=9x+y.$$

Варіант 10

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=20x$ і площинами $x-z=0$ і $10x-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=x+10y.$$

Варіант 11

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=2y$ і площинами $y-z=0$ і $2y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=1,\ y=0,\ \gamma=x^2+2y.$$

Варіант 12

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=4y$ і площинами $y-z=0$ і $2y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=2x^2+3y.$$

Варіант 13

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=6y$ і площинами $y-z=0$ і $3y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=3x^2+4y.$$

Варіант 14

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=8y$ і площинами $y-z=0$ і $4y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=4x^2+5y.$$

Варіант 15

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=10y$ і площинами $y-z=0$ і $5y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=5x^2+6y.$$

Варіант 16

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=12y$ і площинами $y-z=0$ і $6y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=6x^2+7y.$$

Варіант 17

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=14y$ і площинами $y-z=0$ і $7y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=7x^2+8y.$$

Варіант 18

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=16y$ і площинами $y-z=0$ і $8y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=8x^2+9y.$$

Варіант 19

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=18y$ і площинами $y-z=0$ і $9y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=9x^2+y.$$

Варіант 20

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=20y$ і площинами $y-z=0$ і $10y-z=0$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=x+2y^2.$$

Варіант 21

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=2x$ і площинами $z=1$ і $z=2$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=xy^2.$$

Варіант 22

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=4x$ і площинами $z=2$ і $z=3$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y=x^3,\ x=0,\ y=1,\ \gamma=2x^2y.$$

Варіант 23

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 6x$ і площинами $z = 3$ і $z = 4$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = 3xy^2.$$

Варіант 24

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 8x$ і площинами $z = 4$ і $z = 5$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = 4xy^2.$$

Варіант 25

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 10x$ і площинами $z = 5$ і $z = 6$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = 5xy.$$

Варіант 26

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 12x$ і площинами $z = 6$ і $z = 7$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = 6x^3y.$$

Варіант 27

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 14x$ і площинами $z = 7$ і $z = 8$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = 7xy.$$

Варіант 28

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 16x$ і площинами $z = 8$ і $z = 9$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = 8x^2y.$$

Варіант 29

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 18x$ і площинами $z = 9$ і $z = 10$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = 9x^2y.$$

Варіант 30

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 20x$ і площинами $z = 0$ і $z = 1$.

2 Обчислити масу пластинки, яка обмежена заданими лініями, при відомій густині:

$$y = x^3,\ x = 0,\ y = 1,\ \gamma = xy^2.$$

Завдання 3.5

Розв'язати наступні задачі

Варіант 1

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} xydx + (y-x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки *M* еліпса $x = \cos t, y = 2\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки *M* до центра еліпса.

Варіант 2

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} x^2 ydx + (2y-x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy$ *і* $F_y = x + y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^3$.

Варіант 3

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} xydx + (y-x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки *M* еліпса $x = \cos t, y = 4\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки *M* до центра еліпса.

Варіант 4

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(4;16)} xydx + (4y - x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = x^2y$ *і* $F_y = 2x + 3y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^3$.

Варіант 5

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 5x^2ydx + (y - 5x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки *M* еліпса $x = \cos t, y = 5\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки *M* до центра еліпса.

Варіант 6

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} xy^2dx + (6y - x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy^2$ *і* $F_y = 3x + 4y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^3$.

Варіант 7

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 7x^2 y dx + (y - 7x) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки *M* еліпса $x = \cos t, y = 7\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки *M* до центра еліпса.

Варіант 8

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} x^2 y dx + (8y - x) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy^2$ *і* $F_y = 4x + 5y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії $L: y = x^2$.

Варіант 9

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 9x^2 y dx + (y - 9x) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки *M* еліпса $x = \cos t, y = 9\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки *M* до центра еліпса.

Варіант 10

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} xydx + (y-x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^3 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = x^2y^2$ і $F_y = x + 3y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^2$.

Варіант 11

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки M еліпса $x = \cos t, y = 2\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса.

Варіант 12

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;8)} xy^2dx + (2y-x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^3 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy^2$ і $F_y = 2x + 3y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^3$.

Варіант 13

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 3x^2y^2dx + (y-3x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки M еліпса $x = \cos t, y = 3\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса.

Варіант 14

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} x^2ydx + (4y - x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = x^2y^2$ і $F_y = 4x + 5y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^2$.

Варіант 15

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 5x^2ydx + (y+9x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки M еліпса $x = \cos t, y = 9\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса.

Варіант 16

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(4;16)} xydx + (6y^2 - x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = x^2y$ *і* $F_y = x + 3y^2$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії *L:* $y = x^3$.

Варіант 17

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 7xydx + (y^2 - 5x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки *M* еліпса $x = \cos t, y = 7\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки *M* до центра еліпса.

Варіант 18

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} x^3y^2dx + (7y + x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy^2$ *і* $F_y = 8x + 5y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії *L:* $y = x^3$.

Варіант 19

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} 9x^2 y dx + (y - 7x) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^3 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки M еліпса $x = \cos t, y = 9\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса.

Варіант 20

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} x^2 y dx + (y - x^2) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = x^2 y^2$ і $F_y = x + 5y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку $(1;1)$ вздовж лінії L: $y = x^2$.

Варіант 21

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} x^3 y dx + (y + x) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки M еліпса $x = 2\cos t, y = 3\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса.

Варіант 22

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(4;16)} xydx + (2y + x^2)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = x^2y$ і $F_y = 2x + 5y^2$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^2$.

Варіант 23

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 3x^2ydx + (y + 5x^3)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^3 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки M еліпса $x = \cos t, y = 5\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса.

Варіант 24

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} xy^2dx + (5x + y)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy^2$ і $F_y = 3x + 4y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^3$.

Варіант 25

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 4x^2 y dx + (x^3 + 7y) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^3 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки M еліпса $x = \cos t, y = 5\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса.

Варіант 26

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} x^2 y dx + (5y + x) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy^2$ і $F_y = 6x^2 + 5y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^3$.

Варіант 27

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 7x^2 y dx + (y + 7x) dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^3 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки M еліпса $x = 2\cos t, y = 7\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки M до центра еліпса.

Варіант 28

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(4;16)} xydx + (9y + x^2)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = x\,y$ *і* $F_y = 8x + 3y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^3$.

Варіант 29

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(3;9)} 5x^2ydx + (y + 9x)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні вздовж дуги еліпса, розташованої у першому квадранті, яка прикладена до кожної точки *M* еліпса $x = 2\cos t, y = 9\sin t$, напрямлена до його центра та дорівнює за величиною відстані від точки *M* до центра еліпса.

Варіант 30

1 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{(0;0)}^{(2;4)} xy^2dx + (y + x^3)dy \text{ уздовж ліній } L\text{: } y = x^2 .$$

2 У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy^2$ *і* $F_y = x + 4y^2$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж лінії L: $y = x^2$.

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 3

Завдання 3.1

Знайти загальний або частинний розв'язок диференціальних рівнянь першого порядку.

1 $yy' = -\frac{1-2x}{y}$,

2 $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$,

3 $y' - ytgx = \sec x$, $y(0) = 0$.

Розв'язання.

1 Рівняння $yy' = -\frac{1-2x}{y}$ розв`яжемо рівняння відносно y', отримаємо рівняння $y' = -\frac{1-2x}{y^2}$, яке є рівнянням типу $y' = f_1(x) f_2(y)$, оскільки $\frac{1-2x}{y^2} = (1-2x)\frac{1}{y^2}$.

Замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, тоді рівняння перепишеться у такому вигляді:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y^2}.$$

Помноживши обидві частини на y^2dx, одержимо рівняння з відокремленими змінними вигляду

$$y^2dy = (1-2x)dx.$$

Інтегруючи обидві частини цього рівняння, знаходимо загальний інтеграл

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$$

або, розв`язавши відносно y, знаходимо загальний розв'язок вигляду

$$y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}.$$

2 Це рівняння відноситься до рівняння типу $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто є однорідним відносно змінних x і y диференціальним рівнянням першого порядку.

Зробимо заміну $\frac{y}{x} = u(x)$, звідки $y = ux$, а $y' = u'x + u.$. Підставляючи ці вирази в дане рівняння, отримаємо

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

а після відокремлювання змінних $udu = \frac{dx}{x}$. Інтегруючи цю рівність, знаходимо $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C|$ або $u^2 = \ln|Cx^2|$. Повертаючись до y, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння $\frac{y^2}{x^2} = \ln|Cx^2|$, а, розв`язавши відносно $y$, – загальний розв`язок рівняння

$$y = \pm\sqrt{\ln|Cx^2|}.$$

3 Задане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку. Знайдемо спочатку його загальний розв`язок. Для цього покладемо $y = uv$, $y' = u'v + v'u$ і підставимо знайдені вирази в рівняння

$$u'v + v'u - uvtgx = \sec x \text{ або } u'v + u(v' - vtgx) = \sec x.$$

Тоді

1. $v' - vtgx = 0;$

$\frac{dv}{dx} = vtgx;$

$\frac{dv}{v} = tgxdx;$

$\ln|v| = -\ln|\cos x|;$

$v = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.$

2. $u'v = \sec x;$

$u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x};$

$u' = 1;$

$u = x + C.$

Отже, загальний розв’язок вихідного рівняння має вигляд

$$y = uv = (x + C)\frac{1}{\cos x}.$$

Використовуючи початкові умови $y = 0$ при $x = 0$, знаходимо значення довільної сталої C

$$0 = (0 + C)\frac{1}{\cos 0} \Rightarrow C = 0.$$

Остаточно, шуканий частинний розв`язок рівняння буде мати наступний вигляд:

$$y = \frac{x}{\cos x}.$$

Завдання 3.2

Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 6; y'(0) = 10.$

2 $y'' - 2y' + y = 0.$

3 $y'' + 6y' + 13y = 0.$

Розв'язання.

1 Спочатку знайдемо загальний розв`язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння $\kappa^2 - 4\kappa + 3 = 0$. Його корені $\kappa_1 = 1$ і $\kappa_2 = 3$ дійсні й різні, тому загальний розв`язок має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. Диференціюючи y, отримаємо $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$. Використовуючи початкові умови, знаходимо значення C_1 і C_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6 = C_1 + C_2, \\ 10 = C_1 + 3C_2. \end{cases}$$

Розв`язуючи систему, одержимо $C_1 = 4$, $C_2 = 2$. Підставляючи ці значення в загальний розв`язок, знаходимо шуканий частинний розв`язок $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

2 Складемо характеристичне рівняння $\kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0$.

Оскільки $\kappa^2 - 2\kappa + 1 = (\kappa - 1)^2 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 1$. Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні, тому загальний розв`язок запишемо у вигляді $y = (C_1 + C_2 x)e^x$.

3 Складемо характеристичне рівняння $\kappa^2 + 6\kappa + 13 = 0$. Його корені знайдемо за формулою $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, згідно з якою

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm \sqrt{4i} = -3 \pm 2i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ($\kappa_{1,2} = \alpha \pm \beta i$). Отже, $\alpha = -3$; $\beta = 2$. Тоді загальний розв`язок даного рівняння набуде вигляду

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Завдання 3.3 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $2y'' + y' - y = 2e^x$.

2 $y'' + y + \sin 2x = 0, \quad y(\pi) = y'(\pi) = 1.$

Розв'язання.

1 Дане рівняння є ЛНДР II порядку зі сталими коефіцієнтами й спеціальною правою частиною. Його загальний розв`язок шукаємо у вигляді $y = \bar{y} + Y$. Для знаходження $\bar{y}$ запишемо ЛОДР II порядку, яке відповідає даному ЛНДР II порядку: $2y'' + y' - y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $2\kappa^2+\kappa-1=0$. Його корені κ_1=-1 і $k_2 = \frac{1}{2}$. Отже,

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}.$$

Підставимо Y, Y', Y'' в дане рівняння: $2Ae^x + Ae^x - Ae^x \equiv 2e^x$. Права частина $f(x) = 2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де α=1, а n=0, тому $Y = Ae^x$ бо $\alpha \neq \kappa_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y' = Ae^x, Y'' = Ae^x$. Звідки знаходимо A = 1. Отже, $Y = e^x$, а загальний розв`язок вихідного рівняння

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x.$$

2 Зведемо рівняння до загального вигляду: $y'' + y = -\sin 2x$.

Далі, розв`язуючи його відповідним методом, будемо мати:

$$y = \bar{y} + Y;$$

$$y'' + y = 0; \quad \kappa^2 + 1 = 0; \quad \kappa_{1,2} = \pm i; \quad \alpha = 0; \beta = 1;$$

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Оскільки $f(x) = -\sin 2x$, то $b = 2(\pm bi = \pm 2i \neq k_{1,2})$ і тому

$$\begin{array}{l|l} 1 & Y = M\cos 2x + N\sin 2x \\ 0 & Y' = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x \\ 1 & Y'' = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \cos 2x & M - 4M = 0; M = 0; \\ \sin 2x & N - 3N = -1; N = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Отже, $Y = \frac{1}{3}\sin 2x$ і загальний розв`язок неоднорідного рівняння набуде вигляду: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$.

Знаходимо $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x.$ Ураховуючи початкові умови: при $x = \pi; y = y' = 1,$ отримаємо систему

$$\begin{cases} 1 = -C_1, \\ 1 = -C_2 + \frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знаходимо C_1=- 1, $C_2 = -\frac{1}{3}$. Підставляючи числові значення C_1 і C_2 в загальний розв`язок, одержимо шуканий частинний розв`язок

$$y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Завдання 3.4

1 Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ і площинами $2x - z = 0$ і $4x - z = 0$.

2 Знайти масу пластинки, яка має форму прямокутного трикутника з катетами $OA = a$ і $OB = b$, якщо густина її в довільній точці P дорівнює відстані від точки P до катета OB.

Розв`язання.

1 Зобразимо тіло(рис. 3.1,а) та його проекцію на площину *XOУ*, область *(D)* (рис. 3.1,б). Треба обчислити різницю об`ємів циліндричних тіл, обмежених зверху площинами z_1=4x, z_2=2x.

$$V = \iint_{(D)} (z_1 - z_2)dxdy = \iint_{(D)} (4x - 2x)dxdy = 2\iint_{(D)} xdxdy.$$

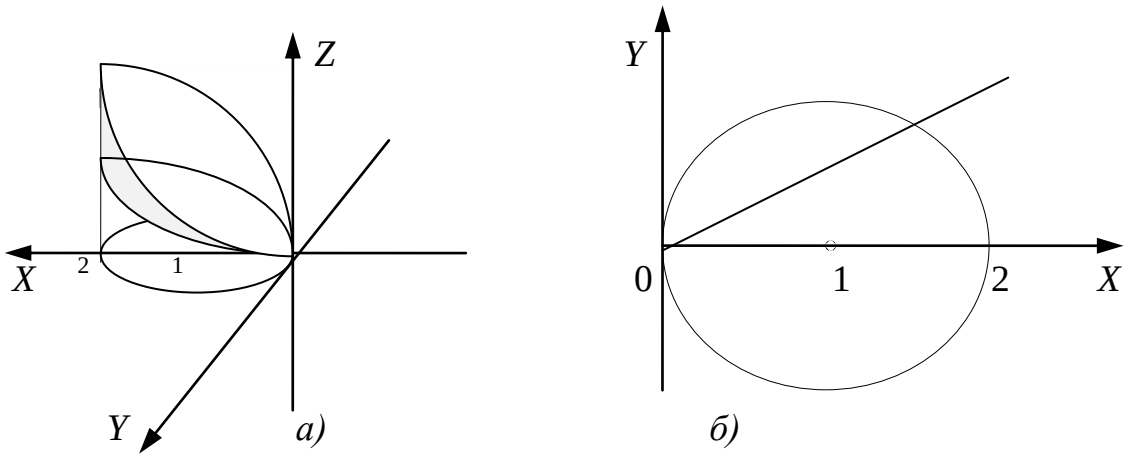

Рис. 3.1

Межею області *(D)* є коло, тому перейдемо до полярних координат. Рівняння межі має вигляд: $x^2+y^2=2x$ або $r^2=2r\cos\varphi \Rightarrow r=2\cos\varphi$. Тоді $xdxdy=r^2\cos\varphi drd\varphi$:

$$V=2\iint\limits_{(D)} r^2\cos\varphi drd\varphi=2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^2dr=2\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}(1+2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin2\varphi+\frac{1}{8}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3\pi}{2}=2\pi.$$

2 Побудуємо фігуру (рис.3.2):

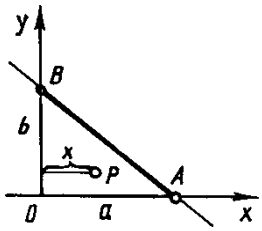

Рис. 3.2

Запишемо рівняння прямої AB: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $y=\frac{b}{a}(a-x)$. Тоді за формулою маси плоскої фігури маємо:

$$M=\iint\limits_{(D)}\rho(x;y)dxdy=\int_0^a dx\int_0^{\frac{b}{a}(a-x)}xdy=\int_0^a x\left(y\Big|_0^{\frac{b}{a}(a-x)}\right)dx=\frac{b}{a}\int_0^a x(a-x)dx=$$

$$=\frac{b}{a}\left(a\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^2b}{6}.$$

Завдання 3.5

1 Обчислити криволінійний інтеграл

$$\oint\limits_L(3x^2+y)dx+(x-2y^2)dy,$$

де L - контур трикутника з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$.

2 Обчислити роботу сили $\vec{F}=\vec{a}=z\vec{i}+x\vec{j}+y\vec{k}$ вздовж дуги OK заданої рівнянням $\vec{r}(t)=t\vec{i}+t^2\vec{j}+t^3\vec{k}$, $t\in[0;1]$.

Розв'язання.

1 Шлях інтегрування складається з трьох відрізків (рис.3.3): *OA, AB, BO,* тому I= $\int\limits_{OA}$ + $\int\limits_{AB}$ + $\int\limits_{BO}$.

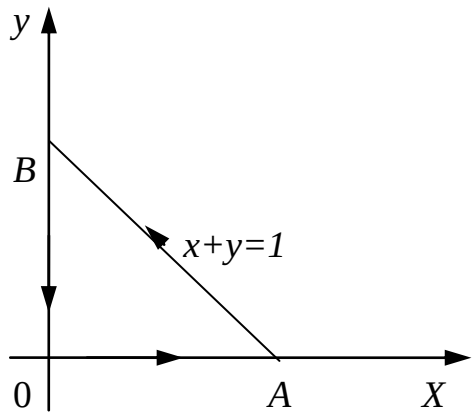

Рис. 3.3

На *OA*: *y=0, dy=0,* $0 \le x \le 1$, на *AB*: *y=1-x, dy= - dx, y* змінюється від 0 до 1; на *BO*: *x*=0, *dx*=0, *y* змінюється від 1 до 0. Таким чином,

$$I = \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^0 (3x^2 + 1 - x)dx - \int_0^1 \left[x - 2(1-x)^2\right]dx - \int_1^0 2y^2 dy =$$

$$= x^3\Big|_0^1 + \int_1^0 \left[3x^2 + 1 - 2x + 2(1-x)^2\right]dx - \frac{2}{3}y^3\Big|_1^0 =$$

$$= 1 + \left[x^3 + x - x^2 - \frac{2}{3}(1-x)^3\right]\Bigg|_1^0 + \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{3} = 0.$$

2 Скористаємось формулою роботи змінної сили вздовж деякої лінії переміщення, будемо мати:

$$A = \int\limits_{OK} zdx + xdy + ydz .$$

Запишемо рівняння дуги *OK* в параметричній формі

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3.$$

Тоді

$$dx = dt, \quad dy = 2tdt, \quad dz = 3t^2 dt .$$

Тому

$$A = \int_0^1 t^3 dt + t \cdot 2tdt + t^2 \cdot 3t^2 dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{5}t^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{71}{60} .$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

Завдання 4.1

Дослідити збіжність числових рядів

1 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg\frac{1}{n}}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3^n(n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{-n^2}$.

2 а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3(n^2-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n^4+2)}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$.

3 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}+n-4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+3)!}{(2n+5)5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{1}{2^n}$.

4 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{2}{n}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{7n+2}\right)^{\frac{n}{3}}$.

5 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+1}{2n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n!}\sin\frac{3}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{7^n}$.

6 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\sin\frac{1}{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt[5]{n^3}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n}{7n+2}\right)^{-n}$.

7 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(4n+1)}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{8n+1}\right)^{\frac{n}{5}}$.

8	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\sqrt[4]{n}}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n(n+3)}}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+2)^n}$.
9	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(3n+4)}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2-2)}{n!}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{5n}$.
10	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n^3-5}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}}{5^n}$;	в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}$.
11	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n^2+n-4}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\,\frac{2}{n}}{(n+3)!}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{3^n}$.
12	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{1}{n}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{n3^n}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln^2(3n+2)}$.
13	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+5}{2n^2+6n+1}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{n^3}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{9n+4}\right)^{3n}$.
14	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{5n^3-1}{5n^3+7}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)3^n}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\ln^2(n\sqrt{2})}$.
15	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n+3}}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^2+3)}{n!}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{2\pi}{5n}$.
16	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^7}}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}\sqrt[5]{n}}{n!}$;	в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(5n)}$.
17	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n-2)(n+5)}}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{1}{7^n}$.
18	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{5}{n}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}$;	в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln n}}$.
19	а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+\ln^3 n}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-3}\sqrt{n^2+4}}{n!}$;	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+1}\right)^{2n}$.

20 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n^2+5)(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+5)}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$.

21 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\sqrt[5]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^n}{6^{n^2}}$.

22 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}arctg\frac{1}{(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^3 n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n}{n+3}\right)^n$.

23 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^3(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2+2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$.

24 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(n+1)}{n!6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{7n+3}\right)^{2n}$.

25 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{3}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n}}$.

26 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{\pi}{3\sqrt[4]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n(n+3)!}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

27 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\sqrt[7]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\ln^n(n+4)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt[6]{\ln(n+2)}}$.

28 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\left(\frac{n+3}{5n+2}\right)^{3n}}$.

29 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+\sin^2 2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\arcsin^n\frac{1}{2n}}$.

30 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{1}{3n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(3n-1)!}$; в) $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{(n-4)\ln(n-4)}$.

Завдання 4.2

Установити, як збігається ряд: абсолютно, умовно чи розбігається

1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+2}{n(n+3)}$.

2 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(n+2)}$.

3 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{n}$.

4 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[5]{4n+5}}$.

5 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos\frac{2\pi}{5n}$.

6 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{2n}$.

7 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+3)5^{3n}}$.

8 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt[5]{n^2}}$.

9 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5n+2}}$.

10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln(n+3)}{n+3}$.

11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln(3n)}$.

12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+5)3^{2n+3}}$.

13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)$.

14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin 4^n}{4^n}$.

15 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{arctg\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{3n+1}}$.

16 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+5)\left(\frac{8}{3}\right)^{n}}$.

17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n^2+1}{n^4+5n^2+4}$.

18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\frac{\pi}{9^n}$.

19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{5^n}$.

20 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{3^n(n+1)!}$.

21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{(n+4)^n}$.

22 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3(n+2)}$.

23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{tgn\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2n}{7n+5}$.

25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^5}$.

26 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{n^2}$.

27 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{2^n(3n+1)}$.

28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+4n+1}$.

29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n(n+2)}{7^n}$.

30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^4}{e^n}$.

Завдання 4.3

Знайти область збіжності степеневого ряду

1 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n3^n}$.

2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n2^n}$.

3 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\sqrt{(2n-1)7^n}}$.

4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^{n+1}5^n}$.

5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}x^{2n+1}}{(3n-1)^2}$.

6 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{8^n(n+3)}$.

7 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n(4n+3)}.$

8 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)x^n}{2^n(n^2+6)}.$

9 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n2^n}.$

10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n x^n}{\sqrt[7]{n}}.$

11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)(x-4)^n}{2^n(n+1)}.$

12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+1)x^{2n}}{9^n}.$

13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n}}{7^n}x^n.$

14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^n}{6n+5}.$

15 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n.$

16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+3)!}.$

17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x-3)^n}{(n^2+2)5^n}.$

18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n3^{n+2}}.$

19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+3)7^{n+1}}.$

20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n}}{9^n(n+4)}.$

21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)x^n}{5^n(n^2+1)}.$

22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n^2 5^n}.$

23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{\sqrt{n^5+2}}.$

24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2\sqrt{n^3+3}}.$

25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^{n+1}}.$

26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{(n^2+5)2^n}.$

27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n x^n}{(n+5)!}.$

28 $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n+1}x^{2n-2}.$

29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt{n+2}}{7^n}x^n.$

30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n x^n}{\sqrt[7]{n^2}}.$

Завдання 4.4

Знайти три перші, відмінні від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язків диференціального рівняння за заданими початковими умовами.

1 $y' = \sin x + y^2;$ $y(0) = 1.$

2 $y'' = -x^2 y' - 2xy + 1;$ $y(0) = y'(0) = 0.$

3 $y' = 2\cos x - xy^2;$ $y(0) = 1.$

4 $y' = e^{xy} + y;$ $y(0) = 1.$

5 $y' = x^2 + y^2;$ $y(0) = 1.$

6 $y' = e^x + y;$ $y(0) = 4.$

7 $y' = x^3 + y^2 - e^x;$ $y(0) = 1.$

8 $y'' = -2xy;$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 1.$

9 $y' = \cos x + e^y + x;$ $y(0) = 0.$

10 $y' = y^2 + x^3;$ $y(0) = \frac{1}{2}.$

11 $y' = x^2 y^2 - 1;$ $y(0) = 1.$

12 $y' = e^{-2x} + y^2;$ $y(0) = 0.$

13 $y' = \cos x + y^2;$ $y(0) = 1.$

14 $y'' = xyy';$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 1.$

15 $y'' = y\cos x + x;$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 0.$

16 $y' = e^x + y^2;$ $y(0) = 0.$

17 $(1 - x)y' = 1 - x - y;$ $y(0) = 0.$

18 $y' = \sin 2x + xy;$ $y(0) = 1.$

19 $y' = \cos 2x + y^3;$ $y(0) = 1.$

20 $y'' = yy' - x^2;$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 1.$

21 $y' = x^2 + y^2 - e^x;$ $y(0) = 0.$

22 $y' = x^2 + \sin y + 1;$ $y(0) = 0.$

23 $y'' = -xy' - y;$ $y(0) = 0;$ $y'(0) = 1.$

24 $y' = e^y + xy;$ $y(0) = 0.$

25 $y' = \sin x + 0{,}5y^2;$ $y(0) = 1.$

26 $y'' = x^2 y;$ $y(0) = 0;$ $y'(0) = 1.$

27 $y' = y + y^2;$ $y(0) = 3.$

28 $y' = x + x^2 + y^2;$ $y(0) = 5.$

29 $y' = 2e^y - xy;$ $y(0) = 0.$

30 $y' = y^2 + xy;$ $y(0) = 1.$

Завдання 4.5

Використовуючи функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$, знайти розвинення в ряд Фур'є 2π - періодичної функції

$$F_1(x) = \begin{cases} f_1(x) & при\ -\pi \le x < 0, \\ f_2(x) & при\ \ 0 \le x < \pi \end{cases}$$

1 $f_1(x) = 3x - 1; \quad f_2(x) = 3x$

2 $f_1(x) = 2x + 1; \quad f_2(x) = 2x$

3 $f_1(x) = \frac{1}{3}x - 1; \quad f_2(x) = \frac{1}{3}x$

4 $f_1(x) = x - 1; \quad f_2(x) = x$

5 $f_1(x) = x - 3; \quad f_2(x) = 3;$

6 $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 1; \quad f_2(x) = -3;$

7 $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 1; \quad f_2(x) = \frac{1}{2};$

8 $f_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}; \quad f_2(x) = -\frac{1}{3};$

9 $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2; \quad f_2(x) = -1;$

10 $f_1(x) = x + 2; \quad f_2(x) = -2;$

11 $f_1(x) = -x + \frac{3}{2}; \quad f_2(x) = 0;$

12 $f_1(x) = x - 4; \quad f_2(x) = -1;$

13 $f_1(x) = -2x + 1; \quad f_2(x) = 1;$

14 $f_1(x) = -x + 2; \quad f_2(x) = -1;$

15 $f_1(x) = x - 3; \quad f_2(x) = 3;$

16 $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 1; \quad f_2(x) = -3;$

17 $f_1(x) = -x + 1; \quad f_2(x) = 1;$

18 $f_1(x) = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}; \quad f_2(x) = -\frac{1}{3};$

19 $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 2; \quad f_2(x) = -1;$

20 $f_1(x) = x + 1; \quad f_2(x) = -1.$

21 $f_1(x) = x - 4; \quad f_2(x) = x;$

22 $f_1(x) = x + 2; \quad f_2(x) = x;$

23 $f_1(x) = x - 1; \quad f_2(x) = x;$

24 $f_1(x) = 2x + 1; \quad f_2(x) = 2x;$

25 $f_1(x) = x + 1; \quad f_2(x) = x;$

26 $f_1(x) = \frac{1}{2}x - 1; \quad f_2(x) = \frac{1}{2}x;$

27 $f_1(x) = -\frac{1}{2}x + 3; \quad f_2(x) = -\frac{1}{2}x;$

28 $f_1(x) = \frac{5}{2}x - 1; \quad f_2(x) = \frac{5}{2}x;$

29 $f_1(x) = \frac{5}{2}x - 1; \quad f_2(x) = \frac{5}{2}x;$

30 $f_1(x) = 3x - 1; \quad f_2(x) = 3x.$

ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ № 4

Завдання 4.1

Дослідити числові ряди на збіжність

$$1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4n}; \quad 2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}.$$

Розв'язання.

1 Застосуємо ознаку порівняння. Для порівняння обираємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Даний ряд є збіжним, як узагальнений гармонічний ряд при $p = 2 > 1$.

За граничною формою ознаки порівняння рядів

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1 \neq 0.$$

Границя відношення загальних членів рядів існує, отже, заданий ряд так само, як і обраний, збігається.

Відповідь: ряд збіжний.

2 Даний ряд має додатні члени. Застосуємо до нього ознаку Даламбера. Запишемо $(n+1)$ – й член ряду $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 3^n}{3^{n+1} n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{6n} = \frac{1}{3} < 1,$$

таким чином, ряд збігається.

Відповідь: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ – збігається.

Завдання 4.2

Установити, як збігається ряд: абсолютно, умовно чи розбігається

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}.$$

Розв'язання.

Даний ряд є знакопочережним. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніця:

1) $2 > 1 > \frac{8}{3} > \ldots > \frac{2^n}{n^2} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(2^n\right)'}{\left(n^2\right)'} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \ln 2}{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n \ln^2 2}{2} = \infty.$

Друга умова ознаки Лейбніця не виконується, тому ряд розбігається.

Відповідь: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}$ розбігається.

Завдання 4.3

Знайти область збіжності степеневого ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3n^2+1}.$$

Розв'язання.

Даний ряд є повним степеневим за степенями x.

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 7^n}; \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)7^{n+1}}.$$

Радіус збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)7^{n+1}}{n7^n} = 7 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 7.$$

Для всіх $x \in \left]-7; 7\right[$ ряд збігається.

При $x = -7$ отримаємо знакопочережний ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots$$

Для цього ряду виконуються умови ознаки Лейбніця, отже цей ряд збігається.

При $x = 7$ отримаємо знакододатний ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$$

Даний ряд розбігається, оскільки є гармонічним рядом. Отже, областю збіжності даного ряду є інтервал $[-7;7[$.

Відповідь: $[-7;7[$ є областю збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 7^n}$.

Завдання 4.4

Знайти три перші, відмінні від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв'язків диференціального рівняння $y''=xy$ за заданими початковими умовами $y(0)=1;\ \ y'(0)=0$.

Розв'язання.

Розв'язок рівняння відшукуємо у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{y^{(6)}(0)}{6!}x^6+\cdots.$$

За заданих початкових умов маємо: $y(0)=1;\quad y'(0)=0.$ Із самого рівняння маємо: $y''(0)=0.$ Продиференціюємо задане диференціальне рівняння:

$$y'''=x'y+xy'$$

або

$$y'''=y+xy',$$

звідки $y'''(0)=y(0)+0\cdot y'(0)=1.$ Знайдемо $y^{(4)}=y'+y'+xy''=2y'+xy'',$ тоді $y^{(4)}(0)=2\cdot 0+0\cdot 0=0.$

Аналогічно:

$$y^{(5)}=2y''+y''+xy'''; \qquad y^{(5)}(0)=0;$$

$$y^{(6)}=2y'''+y'''+y'''+xy^{(4)}=4y'''+xy^{(4)}; \qquad y^{(6)}(0)=4.$$

Отже, $y(x) = 1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{4}{6!}x^6 + \cdots.$

Завдання 4.5

Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Розв'язання.

Графік цієї функції має вигляд

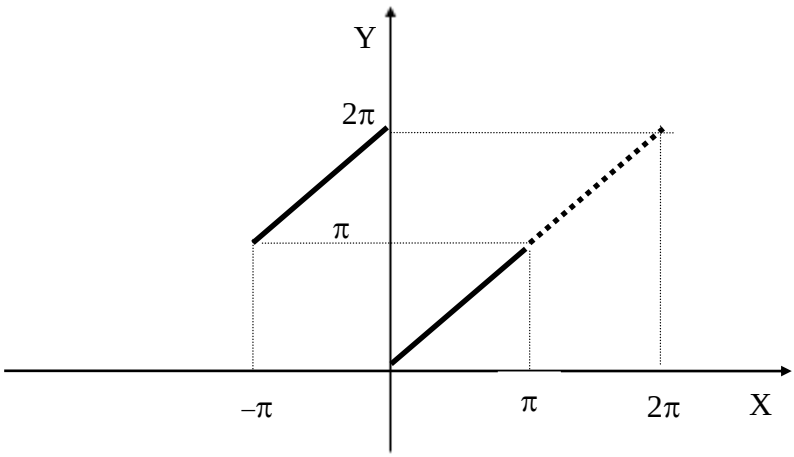

Рис. 4.1

Обчислення коефіцієнтів ряда Фур'є за допомогою загальних формул для цієї функції є дуже незручним, бо кожний з них треба розбивати на дві частини: від $-\pi$ до 0 та від 0 до π. Але можна продовжити фунцкцію $f(x)$ на проміжок $(-\pi;2\pi]$, як показано на рисунку 4.1. Таким чином, на проміжку $(0;2\pi]$ функція має достатньо простий вигляд: $f(x) = x.$ Тому коефіцієнти Фур'є обчислимо так:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx =$$

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = \cos nx dx \qquad v = \frac{1}{n}\sin nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nx dx\right) = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx =$$

$$u = x \qquad du = dx$$
$$dv = \sin nx dx \qquad v = -\frac{1}{n}\cos nx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nx dx\right) = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos 2\pi n + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{n}.$$

Отже, ряд Фур’є має вигляд

$$f(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)\sin nx = \pi - 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx + \cdots\right).$$

Бібліографічний список

1 Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии. М.,1986.

2 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х т. Т.1 – М., 1978.

3 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Учеб.: в 2-х т. Т.2 – М., 1978.

4 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.,1985.

5 Щелкунова Л.І. Вища та прикладна математика. Тексти лекцій для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», ХНУБА, 2017. –214 с.

6 Щелкунова Л.І. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», ХНУБА, 2017. – 222с.

7 Щелкунова Л.І. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності 126 «Інформаційні системи та технології», ХНУБА, 2017. – 175с.

8 Щелкунова Л.І., Харченко А.П. Методичні вказівки до індивідуальної роботи з дисципліни «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»,126 «Інформаційні системи та технології», ХНУБА, 2018. – 20с.

9 Л.І. Щелкунова. Вища математика для архітекторів. Навчальний посібник. – 2-ге вид. переробл. і доповн. – Харків: ФОП Панов А.М., 2018. – 150с.

10 О.О.Аршава, Н.Ю.Іохвідович, Л.І.Щелкунова. Навчально-методичний посібник "Вища математика". Тексти лекцій. Частина І. ХНУБА, 2014. – 136с.

11 О.О.Аршава, А.П. Харченко, Л.І.Щелкунова. Навчально-методичний посібник "Вища математика". Тексти лекцій. Частина ІІ. ХНУБА, 2016. – 84с.

ЗМІСТ

Вступ…… 3

Програма навчальної дисципліни……. 3

Контрольна робота № 3…… 4

Зразок виконання контрольної роботи № 3…… 32

Контрольна робота № 4…… 39

Зразок виконання контрольної роботи № 4…… 48

Бібліографічний список…… 53

Зміст…….. 54

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт
з дисципліни „Вища математика”
для студентів спеціальності
126 «Інформаційні системи та технології»
заочної форми здобуття освіти
Розділ II

Укладачі: Щелкунова Любов Іванівна

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор В.І. Пуцик

План 2020 р., поз Формат 60х84 1/16. Папір друк. №2.
Підп. до друку 16.01.20 Безкоштовно.
Надруковано на різографі. Умов. друк. арк. 2,7
Тираж 50 прим. Зам. № .

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури