Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям

по разделам «Дифференциальное и интегральное исчисления»,

«Дифференциальные уравнения»

дисциплины «Высшая математика»
для иностранных студентов

Харьков 2019

Министерство образования и науки Украины
ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

Специальность 191

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим занятиям

по разделам «Дифференциальное и интегральное исчисления»,

«Дифференциальные уравнения»

дисциплины «Высшая математика»
для иностранных студентов

Утверждено на заседании
кафедры высшей математики.
Протокол № 2 от 22.10.18

Харьков 2019

Методические указания к практическим занятиям по разделам «Дифференциальное и интегральное исчисления», «Дифференциальные уравнения» дисциплины «Высшая математика» для иностранных студентов специальности 191 «Архитектура и градостроительство» / Составители: Л.И. Щелкунова, В.А. Гаевская, А.В. Лысянская. – Харьков: ХНУСА, 2019. – 35с.

Рецензент Е.А. Аршава

Кафедра высшей математики

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые методические указания разработаны для иностранных студентов специальности 191 «Архитектура и градостроительство» с целью оказания помощи в овладении практическими навыками решения задач по дисциплине «Высшая математика».

Методические указания содержат программу разделов «Дифференциальное и интегральное исчисления», «Дифференциальные уравнения», вопросы для самопроверки, краткий теоретический материал (определения, формулировки теорем, формулы, алгоритмы методов), примеры решения задач и перечень заданий для самостоятельной работы.

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

4 Введение в анализ. Производная функции

Функция и ее свойства. Предел функции. Основные теоремы о пределах.
Непрерывность функции. Точки разрыва функции.
Производная функции. Правила дифференцирования. Таблица производных.
Производная неявной, параметрически заданной функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Асимптоты графика функции.

5 Исследование функции с помощью производной

Необходимые и достаточные условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимые и достаточные условия существования экстремума. Выпуклость, вогнутость кривой, точки перегиба. Общая схема исследования функций.

6 Интегральное исчисление

Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов. Интегрирования по частям и подстановкой.
Определенный интеграл и методы его исчисления.
Приложения определенного интеграла.

7 Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Основные определения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Линейные и однородные дифференциальные уравнения.
Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Общий и частное решения.

8 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Элементы теории линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Структура общего решения. Методы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений со специальной правой частью.

4 ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

План

4.1 Вычисление производной и дифференциала функции.
4.2 Вычисление предела.
4.3 Нахождение асимптот графика функции.

Для выполнения заданий самостоятельной работы необходимо знать: определение производной, основные свойства и правила дифференцирования, таблицу производных, правило Лопиталя.

Таблица производных

Производные основных элементарных функций	Производные сложных элементарных функций
1. $\left(x^n\right)' = n x^{n-1}$	1а. $\left(u^n\right)' = n u^{n-1} \cdot u'$
2. $\left(x\right)' = 1$	
3. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	3а. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	4а. $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
5. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	5а. $\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
6. $\left(e^x\right)' = e^x$	6а. $\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
7. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	7а. $\left(\log_a u\right)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$
8. $\left(\lg x\right)' = \frac{1}{x \ln 10}$	8а. $\left(\lg u\right)' = \frac{1}{u \ln 10} \cdot u'$
9. $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	9а. $\left(\ln u\right)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
10. $\left(\sin x\right)' = \cos x$	10а. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
11. $\left(\cos x\right)' = -\sin x$	11а. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
12. $\left(tg\, x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12а. $\left(tg\, u\right)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
13. $\left(ctg\, x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	13а. $\left(ctg\, u\right)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
14. $\left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14а. $\left(\arcsin u\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
15. $\left(\arccos x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	15а. $\left(\arccos u\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
16. $\left(arctg\, x\right)' = \frac{1}{1+x^2}$	16а. $\left(arctg\, u\right)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
17. $\left(arcctg\, x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$	17а. $\left(arcctg\, u\right)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Основные правила дифференцирования

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ 2. $(uv)' = u'v + v'u$ 3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $x=x_0$ имеет вид

$$y - y_0 = \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ (если } f'(x_0) \neq 0\text{)}.$$

Правило Лопиталя применяется для нахождения пределов функций в случае раскрытия неопределённости одного из видов $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ (которые называют основными) и определяется формулой:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Решение примеров

Пример 1. Дана функция $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Найти y'.

Решение. Применим формулу 1): $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$

Пример 2. Найти производную функции $y = \sin(3x + 7)$.

Решение. Используем формулу 10а):

$$y' = \cos(3x + 7) \cdot (3x + 7)' = 3\cos(3x + 7).$$

Пример 3. Найти производную функции $y = ((2x + 3)^{100})$.

Решение. Применим формулу 1а), получим

$$y' = ((2x + 3)^{100})' = 100 \cdot (2x + 3)^{99} \cdot (2x + 3)' = 100 \cdot (2x + 3)^{99} \cdot 2 = 200 \cdot (2x + 3)^{99}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = 2^{x^2}$

Решение. Применим формулу 5а), получим $y' = 2^{x^2} \cdot 2x \cdot \ln 2$.

Пример 5. Найти производную функции $y = x\sqrt{x}(5\ln x - 1)$.

Решение. Применим формулы 1), 9а) и правило дифференцирования частного:

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(5\ln x - 1)\right)' = x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{5}{x} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(5\ln x12) = 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln x - 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

Пример 6 . Найти производную функции $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Решение. $$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 7. Найти производную функции $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}$.

Решение. $$y' = \operatorname{tg}\sqrt{x}\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{tg}^3\sqrt{x}.$$

Пример 8. Найти производную функции $y = x^{x^2}$.

Решение. Имеем степенно-показательную функцию, поэтому применяем правило логарифмического дифференцирования. Логарифмируя обе части функции, получим $\ln y = x^2 \ln x$. Откуда после дифференцирования обеих частей последнего равенства и с учётом $(\ln y)' = \frac{1}{y} \cdot y'$, получаем

$$\frac{y'}{y} = x^2 \cdot \frac{1}{x} + 2x\ln x, \quad \frac{y'}{y} = x(1+2\ln x).$$

$$y' = xy(1+2\ln x) = xx^{x^2}(1+2\ln x) = x^{x^2+1}(1+2\ln x).$$

Пример 9. Найти дифференциал функции $y = \left(\sin(x^2-3x+5)\right)$.

Решение.

$$dy = y'dx = \left(\sin(x^2-3x+5)\right)' dx = \cos(x^2-3x+5)\cdot(x^2-3x+5)' dx =$$

$$= \cos(x^2-3x+5)\cdot(2x-3)dx$$

Пример 9. Найти производную функции $y = (\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Решение. После логарифмирования обеих частей равенства получим:

$$\ln y = \operatorname{tg}x \ln\sin x, \quad \frac{y'}{y} = \operatorname{tg}x\frac{1}{\sin x}\cos x +$$

$$+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x = 1 + \frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x,$$

$$y' = y\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right) = (\sin x)^{\operatorname{tg}x}\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right).$$

Пример 10. Найти производную функции, заданной параметрически.

Решение.

$$\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \sin 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \left(\sin^2 t\right)' \\ y' = (\sin 2t)' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = 2\sin t \cdot \cos t = \sin 2t \\ y' = 2\cos 2t \end{cases},$$

$$y'_x = \frac{2\cos 2t}{\sin 2t} = 2ctg\,2t.$$

Пример 11. Найти производную функции, заданной неявно: $y^2 \cdot \cos x = a^2 \cdot \sin 3x$.

Решение.

$$y^2 \cdot \cos x = a^2 \cdot \sin 3x,$$
$$\left(y^2 \cdot \cos x\right)' = \left(a^2 \cdot \sin 3x\right)',$$
$$\left(y^2\right)' \cdot \cos x + y^2 \cdot (\cos x)' = a^2 \cdot \left(\sin 3x\right)',$$
$$2yy' \cdot \cos x - y^2 \cdot \sin x = 3a^2 \cdot \cos 3x,$$
$$2yy' \cdot \cos x = y^2 \cdot \sin x + 3a^2 \cdot \cos 3x.$$
$$y' = \frac{y^2 \cdot \sin x + 3a^2 \cdot \cos 3x}{2y \cdot \cos x}$$

Пример 12. Дана функция $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Найти производные высших порядков $y', y'', y''', \ldots$.

Решение. Имеем:

$$y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2},$$
$$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2, \quad y''' = 60x^2 + 48x - 18,$$
$$y^{(4)} = 120x + 48, \quad y^{(5)} = 120, \quad y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0.$$

Пример 13. Найти предел $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln 5x}{x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $(\frac{\infty}{\infty})$, поэтому по правилу Лопиталя

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln 5x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0.$$

Пример 14. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{7x} - e^{-x}}{x}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $(\frac{0}{0})$, поэтому

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{7x} - e^{-x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{7e^{7x} + e^{-x}}{1} = 8.$$

Пример 15. Найти предел $\lim\limits_{x \to 2} (2 - x) tg \frac{\pi x}{4}$.

Решение. Имеем неопределённость вида $(0 \cdot \infty.)$ Приведём её к неопределённости вида $(\frac{0}{0})$, после чего применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 2} (2 - x) tg \frac{\pi x}{4} = \lim_{x \to 2} \frac{2 - x}{ctg \frac{\pi x}{4}} = \lim_{x \to 2} \frac{-1}{-1/\sin^2 \frac{\pi x}{4} \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}.$$

Пример 16. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx-\sec x)$.

Решение. Имеем неопределённость вида $(\infty-\infty)$.её к неопределённости вида $(\frac{0}{0})$, после чего применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

Пример 17. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tg2x}$;

Решение. Имеем неопределённость вида (∞^0). Преобразуем выражение, воспользовавшись основным логарифмическим тождеством:

$$\lim_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tg2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(tg2x)\ln ctgx}$$

Сначала найдём предел показателя. Для этого приведём данную неопределённость к неопределённости вида $(\frac{\infty}{\infty})$ и воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}(tg2x\ln ctgx)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln ctgx}{1/tg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln ctgx}{ctg2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\ln ctgx}\frac{1}{ctgx}\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin x\cos x\ln ctgx}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x\cos x\ln ctgx}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tg2x}=e^0=1.$$

Пример 18. Найти асимптоты кривой:

1) $y=\dfrac{x^2-6x+7}{x-3}$; 2) $y=\dfrac{1}{x}$;

3) $y=xe^x$; 4) $y=\ln(4-x^2)$.

Решение.

1) Найдём асимптоты кривой $y=\dfrac{x^2-6x+7}{x-3}$.

При *x=3* данная кривая имеет бесконечный разрыв, поэтому прямая *x=3* является её вертикальной асимптотой.

Найдём наклонные асимптоты по формуле $y=kx+b$, где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^2-6x+7}{x-3}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6x+7}{x^2-3x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-6}{2x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{2}=1,\ k=1.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2-6x+7}{x-3}-x)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-6x+7-x^2+3x}{x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7-3x}{x-3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{1}=-3$$

Подставляя найденные значения k и b в уравнение наклонной асимптоты, получим: $y=x-3$. Других наклонных асимптот нет, поскольку при $x\to-\infty$ значения k и b будут такими же. Асимптотами кривой $y=\frac{x^2-6x+7}{x-3}$ являются прямые $x=3$ и $y=x-3$.

2) Найдём асимптоты равнобочной гиперболы $y=\frac{1}{x}$.

Определим вертикальную асимптоту; для этого найдём те значения *x*, в окрестности которых функция $f(x)=\frac{1}{x}$ неограниченно возрастает. Таким значением будет $x=0$. Это уравнение определяет прямую, совпадающую с осью *Oy*.

Найдём горизонтальные асимптоты. Для этого вычислим пределы

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0 \text{ и } \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Таким образом, кривая имеет одну горизонтальную асимптоту $y=0$, т.е. горизонтальной асимптотой является ось *Ox*.

3) Найдём асимптоты кривой $y=xe^x$.

Кривая не имеет вертикальных асимптот, поскольку она непрерывна всюду.

Найдём наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^x=\infty,$$

Т.е. при $x\to+\infty$ угловой коэффициент асимптоты не существует, вследствие чего, при $x\to+\infty$ кривая не имеет асимптоты.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^x=0;$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{-x}}=0.$$

Таким образом, при $x\to-\infty$ кривая имеет горизонтальную асимптоту $y=0$

4) Найдём асимптоты кривой $y=\ln(4-x^2)$.

Кривая имеет две вертикальные асимптоты: $x=-2$ и $x=2$, поскольку при $x=\pm2$ она имеет бесконечные разрывы.

Наклонных асимптот кривая не имеет, поскольку областью определения функции $y=\ln(4-x^2)$ является интервал $-2<x<2$ и поэтому x не может стремиться к бесконечности.

Задания для самоподготовки

1 Повторить [5, л.5]

2 Выполнить индивидуальные задания [6, задания 4.1 – 4.4.]

3 Найти производные второго порядка от функций:

1) $y = -\frac{22}{x+5}$. **Ответ.** $y'' = -\frac{44}{(x+5)^3}$.

2) $y = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$. **Ответ.** $y'' = \ln x$.

3) $y = -\frac{1}{9}x\sin 3x - \frac{2}{27}\cos 3x$. **Ответ.** $y'' = x \cdot \sin 3x$.

4) $y = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \sqrt{x^2 + a^2}$. **Ответ.** $y'' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

5) $y = xe^{x^2}$. **Ответ.** $2e^{x^2}\left(3x + 2x^3\right)$.

4 Найти производные и дифференциалы первого и второго порядков от функций

1). $\begin{cases} x = tgt \\ y = \sin t \end{cases}$ 2). $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$ 3). $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

5 Найти пределы функций по правилу Лопиталя

а) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{\sin(x-2)}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{2x} - e^{3x}}{\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{2}{\pi} arctgx\right)^x$.

Вопросы для самопроверки

1 Дайте определение дифференциала функции в точке.
2 В чем заключается геометрический смысл дифференциала функции?
3 Как находится производная функции, заданной параметрически?
4 Как находится производная функции, заданной неявно?
5 Что называется производной n-го порядка?
6 Что называется дифференциалом 2-го порядка?
7 Как находить производные второго порядка функции, заданной параметрически?
8 Как находить производные второго порядка функции, заданной неявно?
9 Сформулируйте правило Лопиталя.
10 Для каких неопределенностей применяется правило Лопиталя?
11 Как привести неопределённости вида $0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$ к сновным?

5 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

План

5.1 Нахождение промежутков монотонности функции и точек экстремума

5.2 Нахождение промежутков выпуклости графика функции и точек перегиба

5.3 Построение графика функции

Справочный материал

Для выполнения задач данной темы необходимо уметь вычислять производную, находить интервалы монотонности, экстремумы, промежутки выпуклости (вогнутости), точки перегиба и асимптоты графика функции одной переменной, знать алгоритм исследований для построения графика функции.

Алгоритм полного исследования функции и построения её графика

1 Найти область определения функции и исследовать ее поведение в граничных точках этой области.

2 Исследовать функцию на периодичность, четность и нечетность.

3 Найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности, нули функции и промежутки знакопостоянства, точки пересечения с осями координат.

4 Определить промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремума.

5 Найти точки перегиба и определить промежутки выпуклости вверх и вниз функции.

6 Найти асимптоты в случае их существования.

7 По полученным результатам (характерными точками и свойствам функции в промежутках между ними) построить график функции.

Решение примеров

Пример 1. Найти интервалы монотонности функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$.

Решение. Область определения функции $D(y)$: $x \in R$;

Для исследования функции на монотонность и экстремумы найдём $y'(x)$:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2\right)' = x^2 - 4.$$

Далее найдём критические точки из условий: $y' = 0$ и $y' = \infty$ (таких критических точек нет).

$y' = 0$, если $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$; $x_2 = 2$ – критические точки.

Исследуем производную на знак в образовавшихся интервалах (рис. 5.1):

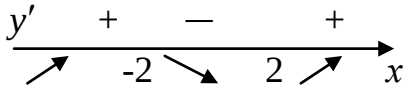

Рис. 5.1

На интервале $(-2;2)$ функция убывает, поскольку тут $y'(x)<0$.
На интервалах $(-\infty;-2)$ и $(2;+\infty)$ функция возрастает, поскольку тут $y'(x)>0$ (рис.5.1)

Пример 2. Найти точки экстремума функции $f(x)=(2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}$.

Решение. Область определения функции $D(y)$: $x\in R$;

Найдём производную

$$f'(x)=\left((2x+1)\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)'=(2x+1)'\sqrt[3]{(x-2)^2}\,(2x+1)\left(\sqrt[3]{(x-2)^2}\right)'=$$

$$=2\sqrt[3]{(x-2)^2}+\frac{2(2x+1)}{3\sqrt[3]{(x-2)}}=\frac{6(x-2)+2(2x+1)}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}=\frac{10x-10}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}}$$

Найдём критические точки:

$$f'(x)=0, \qquad f'(x)=\infty,$$
$$10x-10=0, \qquad \sqrt[3]{x-2}=0,$$
$$10x=10, \qquad x-2=0,$$
$$x=1, \qquad x=2.$$

Поскольку y' меняет знак при переходе через критические точки (рис. 5.2), то эти точки являются экстремальными:

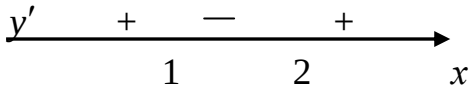

Рис.5.2

$$f_{\max}=f(1)=3;$$
$$f_{\min}=f(2)=0.$$

Пример 3. Определить характер выпуклости и точки перегиба графика функции $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$.

Решение. Область определения функции $D(y)$: $x\in R$;

$$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$$
$$f'(x)=3x^2-6x+2$$
$$f''(x)=6x-6$$
$$f''=0\ ,\quad 6x-6=0\Rightarrow x=1$$

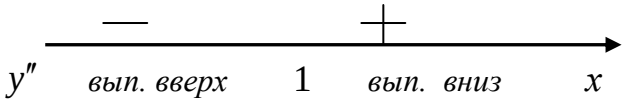

Рис.5.3

Результаты исследований представлены на рис.5.3

На интервале $(1;+\infty)$ график функции вогнутый (выпуклый вниз), поскольку тут $y''(x)<0$.

На интервале $(-\infty;1)$ график функции вогнутый, поскольку тут $y''(x)>0$.

При переходе через точку $x=1$ вторая производная меняет знак, а это значит, что точка $(1; y(1)) = (1;\ 1)$ является точкой перегиба.

Пример 4. Найти точки перегиба функции $y = x^2 \ln x$.

Решение.

Область определения функции $D(y)$: $x > 0$.

$$y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1);\ y'' = (2\ln x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3.$$

Производная второго порядка существует всюду в области определения функции; найдём нули производной второго порядка y'':

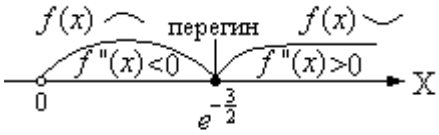

Рис. 5.4

$$y'' = 0,\ 2\ln x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-\frac{3}{2}} -$$

единственная точка, подозрительная на перегиб. Результаты проведённых исследований представлены на рис.5.4.

Таким образом, $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ является точкой перегиба.

Пример 5. Провести полное исследование и построить график функции $y = f(x) = \dfrac{x^4}{(x-1)^3}$.

Решение.

1 Область определения функции $D(y)$: $x \in R \setminus \{1\}$.

2 Функция является ни чётной ни нечётной, а также непериодической.

3 Функция является непрерывной на промежутках $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$ (поскольку элементарные функции непрерывны в области определения функции).

4 Исследование функции на монотонность и экстремумы начнём с нахождения производной функции: $f'(x) = \dfrac{x^3(x-4)}{(x-1)^4}$.

Находим критические точки из условий: $y' = 0$ *и* $y' = \infty$ (таких критических точек нет).

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3(x-4)}{(x-1)^4} = 0$. Откуда $x^3(x-4)=0$, то есть получены критические точки: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, которые наносим на числовую ось (рис. 5.5).

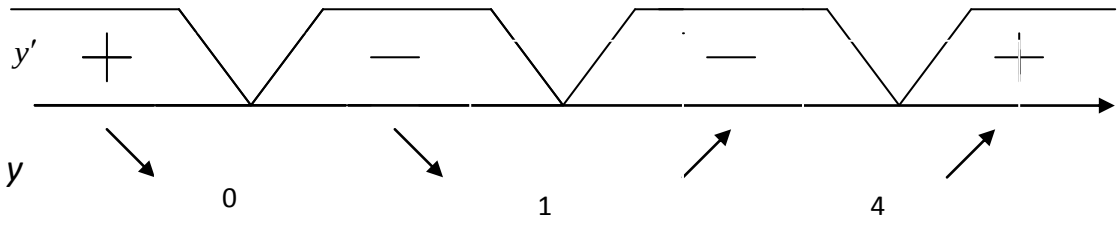

Рис.5.5

Поскольку производная y' меняет знак при переходе через критические точки, то эти точки являются экстремальными: $(0,0)$ - точка максимума $(4,(\frac{4}{3})^3 \bullet 4)$ - точка минимума (рис.5.5).

5 Для исследования функции на выпуклость и вогнутость и точки перегиба найдём вторую производную $y'' = \frac{12x^2}{(x-1)^5}$ и критические точки по второй производной из условий $y'' = 0$ и $y'' = \infty$ (таких критических точек нет):

$$y'' = \frac{12x^2}{(x-1)^5} = 0 \Leftrightarrow 12x^2 = 0,$$ то есть получена критическая точка $x = 0$.

Поскольку производная второго порядка не меняет знак при переходе через точку $x = 0$, поэтому эта точка не является точкой перегиба.

Но производная второго порядка меняет знак с “-“ на “+” при переходе через точку $x=1$, а это означает, что на промежутке $(-\infty;1)$ график функции является выпуклым, на промежутке $(1;+\infty)$ – вогнутым.

6 Найдём асимптоты кривой.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$, то $x = 1$ определяет уравнение вертикальной асимптоты.

Найдём наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4}{x(x-1)^3} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm} (\frac{x^4}{(x-1)^3} - x) = 3.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет вид: $y = x + 3$.

7 Строим график функции (рис. 5.6)

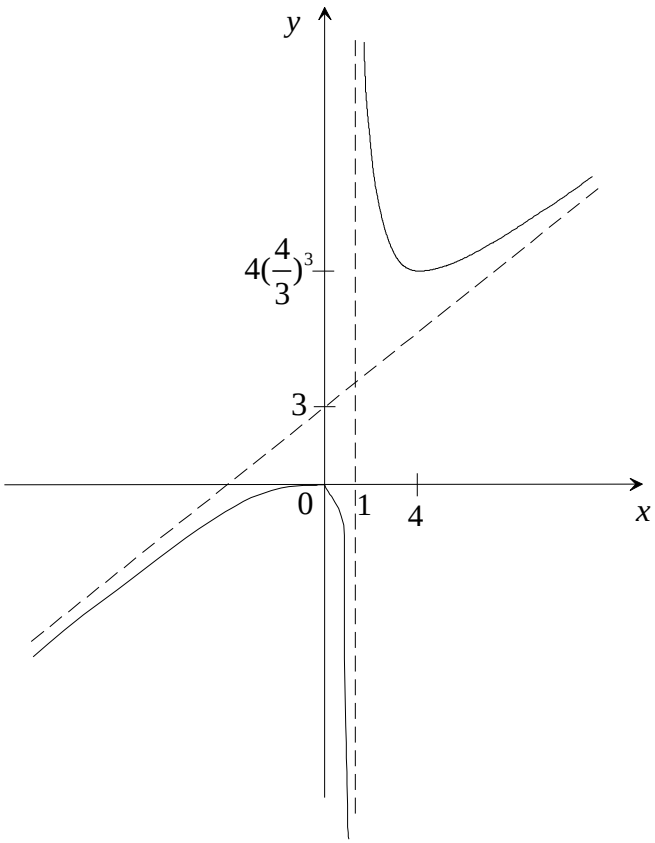

Рис.5.6

Задания для самоподготовки

1 Повторить [5, л.6]

2 Выполнить индивидуальные задания [6, задания 5.1]

3 Найти экстремумы и точки перегиба функции:

1) $\boldsymbol{y = 4x^2 - x^4}$;

2) $y = \dfrac{x^2 - 5}{x - 3}$;

3) $y = \ln\left(9 - x^2\right)$.

Вопросы для самопроверки

1 Сформулируйте необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции на промежутке.

2 Сформулируйте определения максимума (минимума) функции в точке?

3 Сформулируйте достаточное условие существования экстремума.

4 Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования интервалов выпуклости (вогнутости) кривой.

5 Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования точек перегиба кривой.

6 ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

План

6.1 Непосредственное интегрирование
6.2 Методы замены переменной и интегрирования по частям
6.3 Формула Ньютона-Лейбница
6.4 Геометрические приложения определённого интеграла

Справочный материал

Для выполнения заданий самостоятельной работы необходимо знать: определение первообразной, основные свойства неопределенного интеграла и таблицу основных неопределенных интегралов.

Таблица интегралов

1) $\int u^{\alpha} du = \int u^{\alpha} u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$; ($\int du = u + C$; $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$; $\int \frac{dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C$);

2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$;

3) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$; ($\int e^u du = e^u + C$);

4) $\int \sin u du = -\cos u + C$;

5) $\int \cos u du = \sin u + C$;

6) $\int \mathrm{tg}\, u du = -\ln|\cos u| + C$;

7) $\int \mathrm{ctg}\, u du = \ln|\sin u| + C$;

8) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$;

9) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgx + C$;

10) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2}\right)\right| + C$;

11) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$;

12) $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$;

13) $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$;

14) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$;

15) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Заметим, что символ u может означать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию от независимой переменной.

Решение примеров

Пример 1. Найти интеграл $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$.

Решение. Выполним тождественные преобразования подынтегральной функции.

$$\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 = 1-2\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}.$$

$$\int\left(1-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx = \int dx - 2\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x^4} = \int dx - 2\int x^{-2}dx + \int x^{-4}dx = x - 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+C =$$

$$= x - 2\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-3}}{-3}+C = x+2x^{-1}-\frac{x^{-3}}{3}+C = x+\frac{2}{x}-\frac{1}{3x^3}+C \text{ (формула 1).}$$

Пример 2. Найти интеграл $\int\frac{2+\sqrt{x}-x^3e^x+5x^3}{x^3}dx.$

Решение. Имеем

$$\int\frac{2+\sqrt{x}-x^3e^x+5x^3}{x^3}dx = \int\left(\frac{2}{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{5x^3}{x^3}\right)dx =$$

$$= 2\int\frac{dx}{x^3}+\int x^{-\frac{5}{2}}dx - \int e^x dx + 5\int dx = -\frac{2}{x}-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+5x+C = C-\frac{2}{x}-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+5x.$$

(формулы 1 и 3).

Пример 3. Найти интеграл $\int\sin(8x+3)dx.$

Решение.

$$\int\sin(8x+3)dx = \left|\begin{matrix} u=8x+3 \\ du=u'dx,\ \ du=8dx\end{matrix}\right| = \frac{1}{8}\int\sin u du. = -\frac{1}{8}\cos u + C = -\frac{1}{8}\cos(8x+3)+C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^2-7}$

Решение. $\int\frac{dx}{x^2-7} = \left|\begin{matrix} a^2=7,\ \ a=\sqrt{7} \\ u^2=x^2,\ \ u=x,\ \ du=dx\end{matrix}\right| dx = \frac{1}{2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{7}}{x+\sqrt{7}}\right|+C$ (формула 13).

Пример 5. Найти $\int\frac{x\,dx}{x^2-1}$.

Решение. Поскольку $\left(x^2-1\right)' = 2x$, то выполнивши тождественные преобразования подынтегральной функции, получим

$$\int\frac{x\,dx}{x^2-1} = \int\frac{2x\,dx}{2\left(x^2-1\right)} = \left|\begin{matrix} t=x^2-1 \\ dt=2x\,dx\end{matrix}\right| = \int\frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} =$$

$$=\frac{1}{2}\ln|t|+C=\frac{1}{2}\ln\left|x^2-1\right|+C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int\frac{e^{3x}}{\sqrt[5]{5-e^{2x}}}dx$.

Решение.

$$\int\frac{e^{3x}}{\sqrt[5]{5-e^{2x}}}dx=\left|\begin{array}{l}u=5-e^{2x}\\du=-2e^{2x}dx\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt[5]{u}}=-\frac{1}{2}\int u^{-1/5}du=$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot u^{-1/5+1}+C=\frac{1}{10}\left(5-e^{2x}\right)^{4/5}+C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\left|\begin{array}{l}u=\ln x\\du=\frac{1}{x}dx\end{array}\right|=\int\frac{du}{u}=\ln|u|+C=\ln|\ln x|+C.$$

Пример 8. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(2+7\operatorname{tg}x)^2\cos^2 x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{(2+7\operatorname{tg}x)^2\cos^2 x}.=\left|\begin{array}{l}u=2+7tgx\\du=7\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx\end{array}\right|=\frac{1}{7}\int\frac{du}{u^2}=-\frac{1}{7u}+C=-\frac{1}{7(2+tgx)}+C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int\sqrt{2x+1}\cdot xdx$.

Решение. Воспользуемся методом подстановки:

$$\int\sqrt{2x+1}\cdot xdx=\left|\ 2x+1=t\Rightarrow x=\frac{t-1}{2}\ \right|=\int\sqrt{t}\cdot\frac{t-1}{2}\cdot\frac{1}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(t\sqrt{t}-\sqrt{t}\right)dt=\frac{1}{4}\left(\int t^{1\frac{1}{2}}dt-\int t^{\frac{1}{2}}dt\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{t^{2\frac{1}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{t^{1\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{10}t^2\sqrt{t}-\frac{1}{6}t\sqrt{t}+C=\frac{1}{10}(2x+1)^2\sqrt{2x+1}-\frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int x\sin xdx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям

$$\int x\sin xdx=\left|\begin{array}{ll}u=x & du=dx\\dv=\sin xdx & v=-\cos x\end{array}\right|=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C.$$

Пример 11. Найти интеграл $\int\arcsin xdx$.

Решение.

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{matrix} u = \arcsin x & du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \left| t = 1 - x^2 \Rightarrow dt = -2xdx \Rightarrow xdx = -\frac{dt}{2} \right| = x \arcsin x + \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} = x \arcsin x + \sqrt{t} + C =$$

$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Пример 12. Вычислить интеграл $\int_1^2 2x^2 + \frac{2}{x^4} dx$.

Решение. Применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_1^2 \left(2x^2 + \frac{2}{x^4} \right) dx = \left(2 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^{-3}}{-3} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot 8 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) = \frac{16}{3} - \frac{2}{24} = \frac{126}{24} = \frac{63}{12} = \frac{21}{4}$$

Пример 13. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.

Решение. Этот типовой интеграл вычислим с помощью выделения полного квадрата в знаменателе и применения формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 4 + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{(x+2)^2 + 1} = \operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{1} \right) \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$$

Пример 14. Вычислить интеграл $\int_1^2 x \cos x^2 dx$.

Решение. Применим замену переменной, полагая $x = \sqrt{t}$. Для этого необходимо заменить x на $\sqrt{t}$ и соответственно изменить пределы интегрирования. Тут $t = x^2$, и поэтому в новом интеграле нижний и верхний пределы интегрирования соответственно равны 1 и 4.

Тогда

$$\int_1^2 x \cos x^2 dx = \int_1^4 \sqrt{t} \cos t d\sqrt{t} = \int_1^4 \sqrt{t} \cos t \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_1^4 \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t \Big|_1^4 = \frac{1}{2} (\sin 4 - \sin 1).$$

Пример 15. Вычислить интеграл $\int_{-1/2}^0 x e^{-2xx} dx$.

Решение. Это типовой случай использования формулы интегрирования по частям:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0} xe^{-2x}dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2x} & v = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{vmatrix} = x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} + \int_{-\frac{1}{2}}^{0} e^{-2x}dx = 0 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x}\Big|_{-\frac{1}{2}}^{0} =$$

$$= -\frac{1}{4}e - \frac{1}{4}\left(e^{0} - e^{1}\right) = -\frac{1}{4}e - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e = -\frac{1}{4}.$$

Пример 16. Вычислить интеграл $\int_{1}^{3} \ln x dx$.

Решение. Применим формулу интегрирования по частям, полагая

$$u = \ln x,\ d\upsilon = dx.$$

Тогда

$$\int_{1}^{3} \ln x dx = x\ln x\Big|_{1}^{3} - \int_{1}^{3} x d(\ln x) = 3\ln 3 - \int_{1}^{3} x\frac{1}{x}dx = 3\ln 3 - \int_{1}^{3} dx = 3\ln 3 - 2.$$

Пример 17. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 6x - 5$ и $y = -x + 1$.

Решение. Применим формулу площади плоской фигуры в случае декартовых координат: $S = \int_{a}^{b} [f_2(x) - f_1(x)]dx;\quad f_2(x) > f_1(x)$.

Тут $f_2(x)$ – парабола $y = -x^2 + 6x - 5$, а $f_1(x)$ – прямая $y = -x + 1$ (рис.6.1).

Построим параболу $y = -x^2 + 6x - 5$ и прямую $y = -x + 1$.

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3$$

$$y_0 = -3^2 + 6\cdot 3 - 5 = 4$$

x	0	1
y	1	0

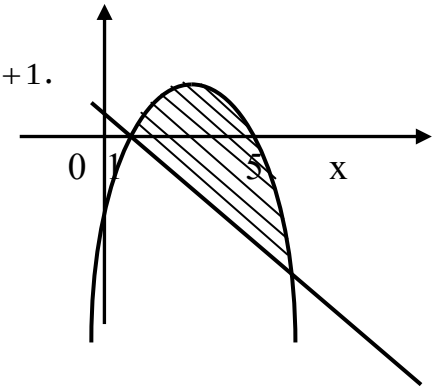

Рис.6.1

$Ox: y = 0$

$-x^2 + 6x - 5 = 0,$

$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4(-1)(-5) = 16,$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2(-1)} = 5,$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 + \sqrt{16}}{2(-1)} = 1.$$

$Oy: x = 0 \Rightarrow y = c = -5$.

Найдём точки пересечения графиков функций:

$$-x + 1 = -x^2 + 6x - 5,$$

$$-x + 1 + x^2 - 6x + 5 = 0,$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 6$$

Вычислим площадь фигуры с помощью определённого интеграла:

$$S=\int_1^6(-x^2+6x-5-(-x+1))\,dx=\int_1^6(-x^2+6x-5-+x-1)\,dx=\int_1^6(-x^2+7x-6)\,dx=$$

$$=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{7x^2}{2}-6x\right)\Bigg|_1^6=\left(-\frac{6^3}{3}+\frac{7\cdot 6^2}{2}-6\cdot 6\right)-\left(-\frac{1^3}{3}+\frac{7\cdot 1^2}{2}-6\cdot 1\right)=$$

$$=-72+126-36+\frac{1}{3}-\frac{7}{2}+6=132-108+\frac{2-21}{6}=24-3\frac{1}{6}=20\frac{5}{6}\ (\textit{кв.ед.}).$$

Пример 18. Найти площадь трёхлепестковой розы, которая задана уравнением $r=a\sin 3\theta$.

Решение. Найдём сначала площадь только шестой части трёхлепестковой розы (рис.6.2):

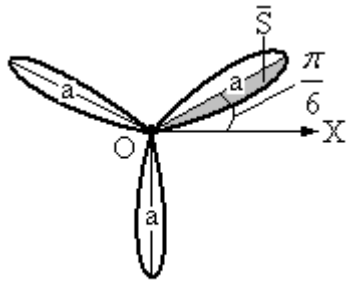

Рис. 6.2

$$\bar{S}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\sin^2 3\theta\,d\theta=\frac{a^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 6\theta)\,d\theta=\frac{a^2}{4}\left(\theta-\frac{1}{6}\sin 6\theta\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{a^2\pi}{24}.$$

Тогда искомая площадь

$$S=6\bar{S}=\frac{a^2\pi}{4}.$$

Пример 19. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=x^3$, если x изменяется от 0 до 4.

Решение. Поскольку кривая симметрична относительно оси Ox (рис. 6.3), вычислим длину только её части — дуги OA, которая находится в верхней полуплоскости (ей соответствует явное уравнение $y=x^{\frac{3}{2}}$, поэтому воспользуемся формулой $l=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, а потом результат умножим на 2):

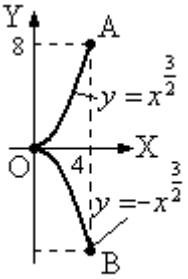

Рис.16.

Рис. 6.3

$$l_{OA}=\int_0^4\sqrt{\left(\left(x^{\frac{3}{2}}\right)'\right)^2+1}\,dx=\int_0^4\sqrt{\frac{9}{4}x+1}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{9}{4}x+1\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4=\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right);$$

$$l=2\cdot\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)=\frac{16}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Пример 20. Найти длину кардиоиды, полярное уравнение которой имеет вид:

$$r = a(1+\cos\theta).$$

Решение. Поскольку функция $r = a(1+\cos\theta)$ является 2π-периодической, то вся кривая будет получена, если θ пробегает все значения на любом отрезке длины 2π, например, пусть $\theta \in [0,2\pi]$.

Поскольку кардиоида — кривая, симметричная относительно полярной оси, то при вычислении можно найти длину только половины кривой, которая соответствует отрезку $\theta \in [0,\pi]$, а потом результат удвоить. Для вычисления воспользуемся формулой $l = \int\limits_{\theta_0}^{\Theta} \sqrt{(r'(\theta))^2 + r^2(\theta)}d\theta$, $r' = -a\sin\theta$.

$$l = 2l_{OA} = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\,d\theta = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos\theta}\,d\theta = 2\sqrt{2}a\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta = 4a\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = 8a\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8a.$$

Пример 21. Пусть фигура, ограничена прямыми $y = \frac{3}{4}x$, x=4 и осью Ox, вращается вокруг оси Ox. Полученным телом вращения есть конус. Найти его объём.

Решение. Пределами интегрирования являются абсциссы точек пересечения прямых $y = \frac{3}{4}x$ и x=4 с осью Ox. Эти точки найдём, решив систему уравнений $\begin{cases} y = \frac{3}{4}x, \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 4, \\ y = 0 \end{cases}$ (значит, $a = 0, b = 4$).

Далее вычислим объём конуса:

$$V = \int\limits_0^4 \pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx = \frac{9}{16}\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 = \frac{9}{4^2}\frac{4^3}{3}\pi = 12\pi.$$

Эту задачу можно решить по формуле вычисления объёма кругового конуса. Имеем $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$. Найдём радиус основания. Из уравнения $y = \frac{3}{4}x$ при x=4 следует, что R=3

Высота конуса h=4. Таким образом,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi 3^2 4 = 12\pi \text{ (куб. ед.)}.$$

Задания для самоподготовки

1 Повторить [5, л.7]

2 Выполнить индивидуальные задания [6, задания 6.1 – 6.5]

3 Найти интегралы:

а) методом подстановки:

1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$; 2) $\int_0^1 (e^x+1)^{10} e^x dx$; 3) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

б) методом интегрирования по частям:

1) $\int (2x+1)\sin 3x\, dx$; 2) $\int (x-1)\, e^{2x}\, dx$; 3) $\int x^3 \ln x\, dx$;

4. Вычислить интегралы

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt[3]{\cos x} \cdot dx$; 2) $\int_0^1 (e^x+1)^{10} e^x dx$; 3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+5tgx}{\cos^2 x} dx$; 4) $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{(7-3x)^3}$;

5) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$; 6) $\int_1^2 x \cdot \log_2 x \cdot dx$; 7) $\int_0^1 x e^{3x} dx$; 8) $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2}\, dx$.

Вопросы для самопроверки

1 Назовите основные методы интегрирования.

2 В чем заключается метод подстановки (замены переменной) в неопределенном интеграле?

3 Запишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

4 В каких случаях и для каких интегралов применяется формула интегрирования по частям?

5 Дайте определение определенного интеграла.

6 Сформулируйте теорему существования определенного интеграла.

7 Сформулируйте свойства определенного интеграла.

8 Чему равна производная от определенного интеграла с переменным верхним пределом интегрирования?

9 Сформулируйте формулу Ньютона-Лейбница.

10 В чем заключается суть методов замены переменной (подстановки) и интегрирования по частям в определенном интеграле?

11 Приведите формулы для вычисления площади плоской фигуры в декартовых и полярных координатах.

12 Запишите формулы вычисления длины кривой в декартовых и полярных координатах.

13 Запишите формулы для вычисления объёма тела вращения.

7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. ЛИНЕЙНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

План

7.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными
7.2 Однородные и линейные дифференциальные уравнения
7.3 Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка

Справочный материал

Для самостоятельного решения задач необходимо знать основные положения теории обыкновенных дифференциальных уравнений: определение дифференциального уравнения, его общего и частных решений; постановку задачи Коши; типы дифференциальных уравнений первого порядка и правила их интегрирования.

Решение примеров

Пример 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = -\frac{yx}{x+1}$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными ($f(y) = y$ и $g(x) = -\frac{x}{x+1}$ (здесь непрерывность функции $g(x)$ нарушается при $x = -1$). Разделим переменные и выполним интегрирование.

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{x}{x+1}dx \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy = -\int\frac{x}{x+1}dx \Rightarrow \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|, \quad C \neq 0$$

(выбор произвольной постоянной в виде $\ln|C|$ связан только с удобством дальнейшего потенцирования). Поскольку $-x = \ln e^{-x}$ и сумма логарифмов равна логарифму произведения, то

$$\ln|y| = \ln(|C||x+1|e^{-x}) \Leftrightarrow y = C(x+1)e^{-x}.$$

При разделении переменных (в результате деления на y) было потеряно решение $y \equiv 0$. Заметим, что это (нулевое) решение определяется при $C = 0$. Значит, любое решение заданного дифференциального уравнения определяется формулой $y = C(x+1)e^{-x}$, где C – произвольная постоянная.

Пример 2. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$xy(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0.$$

Решение. Имеем $M_1(x) = 1$, $N_1(y) = \left(1+y^2\right)$, $M_2(x) = x\left(1+x^2\right)$, $N_2(y) = y$. Поделив обе части равенства на $N_1(y) \cdot M_2(x)$, получим уравнение с разделёнными

переменными: $\frac{y}{1+y^2}dy-\frac{1}{x(1+x^2)}dx=0$. Поскольку $\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}$, то заданное уравнение перепишем в такому виде: $\frac{y}{1+y^2}dy-\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx=0$.

Отсюда $\int\frac{y}{1+y^2}dy-\int\frac{dx}{x}+\int\frac{x\ d\ x}{1+x^2}=c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right]-\ln x=c$.

Обозначим $c=\ln c_1$ и получим $(1+x^2)(1+y^2)=c_1x^2$.

Очевидно, что $x=0$ является частным решением данного уравнения и его необходимо добавить к общему решению.

Пример 3. Найти общее решение заданного дифференциального уравнения $y'=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$.

Решение. Правую часть данного уравнения $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2x^2}$ можно представить в виде: $f(x,y)=\frac{1+\frac{y^2}{x^2}}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$.

Отсюда имеем $y'=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$. Применим подстановку $u=\frac{y}{x}$, $y=ux$, $y'=u'x+u$:

$$u'x+u=\frac{1+u^2}{2} \Rightarrow u'x=\frac{1+u^2}{2}-u \Rightarrow u'x=\frac{u^2-2u+1}{2} \Rightarrow u'x=\frac{(u-1)^2}{2} \Rightarrow u'=\frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}.$$

Дифференциальное уравнение $u'=\frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x}$ – уравнение с разделяющимися переменными. Решим его, предварительно разделив переменные:

$$\frac{du}{dx}=\frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{-2}{u-1}=\ln|x|+\ln C \Rightarrow \frac{-2}{u-1}=\ln C|x|.$$

Подставим в полученное уравнение $u=\frac{y}{x}$: $\frac{-2}{\frac{y}{x}-1}=\ln C|x| \Rightarrow \frac{-2x}{y-x}=\ln C|x|$,

откуда найдём общее решение заданного дифференциального уравнения – $y=x-\frac{2x}{\ln C|x|}$.

Пример 4. Решить уравнение $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$. Ответ представить в виде общего решения.

Решение. Имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка вида $y'+p(x)y=q(x)$. Его решение ищем в виде $y=uv$. Тогда $y'=u'v+uv'$. Подставим y и y' в заданное уравнение: $u'v+uv'-\frac{2uv}{x}=2x^3 \Rightarrow u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=2x^3$.

Выберем функцию v таким образом, чтобы $v'-\frac{2v}{x}=0$. Найдём v:

$$v'=\frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v}=2\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=2\ln|x| \Rightarrow \ln|v|=\ln x^2,$$

откуда $v=x^2$.

Заметим, что поскольку в качестве функции v мы выбираем одно из решений уравнения $v' - \frac{2v}{x} = 0$, то тут после интегрирования дифференциального уравнения для нахождения v полагаем $C = 0$.

Подставляя найденную функцию v в уравнение $u'v + u\left(v' - \frac{2v}{x}\right) = 2x^3$, получаем уравнение для нахождения u: $u' \cdot x^2 = 2x^3$ или $u' = \frac{2x^3}{x^2}$. Находим u:

$$\frac{du}{dx} = 2x \;\Rightarrow\; du = 2x\,dx \;\Rightarrow\; \int du = \int 2x\,dx \;\Rightarrow\; u = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C \;\Rightarrow\; u = x^2 + C.$$

По формуле $y = uv$ находим общее решение заданного дифференциального уравнения – $y = uv = \left(x^2 + C\right)x^2$.

Таблица 7.1 **Справочный материал**

Уравнение	$y'' + py' + qy = 0$, где p и q - константы		
Характеристическое уравнение	$k^2 + pk + q = 0$		
Корни характеристического уравнения	$\kappa_1 \neq \kappa_2$	$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$	$k_{1,2} = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$
Фундаментальная система частных решений	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{kx}$ $y_2 = xe^{kx}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$
Общее решение	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x +$ $+ C_2 \sin\beta x)$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$.

Решение. Имеем линейное однородное уравнение вида $y'' + py' + qy = 0$. Запишем его характеристическое уравнение: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Решим полученное квадратное уравнение:

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9 > 0,$$

тогда

$$k_1 = \frac{5-3}{2} = 1 \text{ и } k_2 = \frac{5+3}{2} = 4.$$

Получен первый случай (корни действительные и разные). Поэтому по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ находим общее решение дифференциального уравнения $y = C_1 e^x + C_2 e^{4x}$.

Пример 6. Найти общее решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 8k + 16 = 0$, или $k + 4^2 = 0$. Поэтому $k_1 = k_2 = -4$, т.е. получили второй случай. Тогда по формуле $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$ запишем общее решение дифференциального уравнения в виде: $y = e^{-4x}\ C_1 + C_2 x$.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$.

Решение. Запишем соответствующее характеристическое уравнение:

$$k^2 + 2k + 10 = 0.$$

Решим его: $D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 4 - 40 = -36$, $k_1 = \frac{-2 - \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 - 6i}{2} = -1 - 3i$,

$$k_2 = \frac{-2 + \sqrt{-36}}{2} = \frac{-2 + 6i}{2} = -1 + 3i.$$

Корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые. Это соответствует третьему случаю. При этом $\alpha = -1$, $\beta = 3$. Поэтому по формуле $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ запишем общее решение уравнения в виде: $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

Задания для самоподготовки

1 Повторить [5, л.7-8]

2 Выполнить индивидуальные задания [6, задания 7.1]

3 Найти общее или частное решения следующих дифференциальных уравнений:

1) $x^2 y' + y = 0$. Ответ: $y = Ce^{\frac{1}{x}}$.

2) $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$. Ответ: $y = \sqrt[3]{3\left(x - x^2 + C\right)}$.

3) $y'\left(x^2 + 1\right) = 2xy$, если $y(0) = 1$. Ответ: $y = x^2 + 1$.

4) $y' = \frac{y}{x} + 5\cos^2 \frac{y}{x}$ Ответ: $\operatorname{tg}\frac{y}{x} = \ln C\left|x^5\right|$

5) $xy' = y \ln \frac{y}{x}$, если $y(1) = 1$ Ответ: $y = xe^{1-x}$

6) $y' - y \operatorname{ctg} x = \sin x$. Ответ: $y = (C + x)\sin x$.

7) $\left(x^2 + 1\right)y' + 4xy = 3$. Ответ: $y = \frac{x^3 + 3x + C}{x^2 + 1}$.

8) $y'' - 9y' = 0$ Ответ: $y = C_1 + C_2 e^{9x}$.

9) $y'' + 3y' + 2y = 0$. Ответ: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$.

10) $y'' - 4y' + 29y = 0$. Ответ: $y = e^{2x}\ C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x$.

Вопросы для самопроверки

1 Дайте определение дифференциального уравнения.

2 Что называется порядком дифференциального уравнения?

3 Что называется решением дифференциального уравнения?

4 Какая задача называется задачей Коши? При каких условиях существует единственное решение задачи Коши?

5 Дайте определение общего и частного решений дифференциального уравнения.
6 Геометрический смысл решений дифференциального уравнения.
7 Сформулируйте правило интегрирования дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
8 Какие дифференциальные уравнения первого порядка называются уравнениями однородными относительно переменных?
9 Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?

8 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

План

8.1 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью $f(x)=P_n(x)$

8.2 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$

8.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения со специальной правой частью $f(x)=A\cos bx+B\sin bx$

Справочный материал

Приведём таблицу простейших видов правых частей $f(x)$ уравнения $y''+py'+qy=f(x)$ и соответствующих видов частных решений Y (табл.8.1).

Таблица 8.1

Вид правой части уравнения $y''+py'+qy=f(x)$	Вид частного решения Y
$f(x)=P_n(x)$ (многочлен n-й степени)	$Y=x^sQ_n(x)$, где $S=\begin{cases}0, если\ k_1\neq 0\neq k_2\\ 1, если\ k_1=0\neq k_2\end{cases}$ $Q_n(x)$ – многочлен n-й степени, коэффициенты которого необходимо определить
$f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$	$Y=x^SQ_n(x)e^{\alpha x}$, где $S=\begin{cases}0, если\ k_1\neq a\neq k_2\\ 1, если\ k_1=a\neq k_2\\ 2, если\ k_1=a=k_2\end{cases}$
$f(x)=A\cos bx+B\sin bx$ (A, B, b – числа)	$Y=x^s(M\cos bx+N\sin bx)$, где $S=\begin{cases}0, если\ k_1\neq bi\neq k_2\\ 1, если\ k_1=bi\neq k_2\end{cases}$, M, N – коэффициенты, которые необходимо определить

В общем случае, когда $f(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx\right]$, где $P_n(x)$; $Q_m(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами степени n и m соответственно, частное решение записываем в виде:

$$Y=x^s e^{ax}\left[R_k(x)\cos bx+T_k(x)\sin bx\right],$$

где $k=max\{n,\ m\}$; $R_k(x)$, $T_k(x)$ – многочлены $к$-й степени, коэффициенты которого необходимо определить; а

$$S=\begin{cases}0, если\ k_1\neq a+bi\neq k_2\\ 1, если\ k_1=a+bi\neq k_2\\ 2, если\ k_1=a+bi=k_2\end{cases}.$$

Решение примеров

Пример 1. Найти общее решение уравнения $2y''+y'-y=2e^x$.

Решение. Данное уравнение является линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Его общее решение будем искать в виде $y=\bar{y}+Y$. Для нахождения $\bar{y}$ решим сначала линейное однородное дифференциальное уравнение, которое ему соответствует

$$2y''+y'-y=0.$$

Составим характеристическое уравнение $2к^2+к-1=0$, корни которого $к_1=-1$ и $k_2=\frac{1}{2}$, а это значит, что общее решение уравнения имеет следующий вид:

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}.$$

Правая часть $f(x)=2e^x$ данного уравнения является функцией вида $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, где n=0, a=1, $a\neq k_{1,2}$. Поэтому частное решение будем искать в виде $Y=Ae^x$. Дифференцируя Y дважды, получим $Y'=Ae^x, Y''=Ae^x$. Подставим выражения для Y, Y', Y'' в данное уравнение: $2Ae^x+Ae^x-Ae^x\equiv 2e^x$, откуда найдём A=1, а это значит, что $Y=e^x$. Тогда общее решение уравнения $2y''+y'-y=2e^x$ имеет вид: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$.

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y''+7y'+6y=\sin x$.

Решение. Убедимся, что данное уравнение является линейным неоднородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью, а значит его общее решение будем искать в виде $y=\bar{y}+Y$.

На первом шаге решим соответствующее ему однородное уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$. Его характеристическое уравнение $к^2-7к+6=0$ имеет корни $к_1=1$, $к_2=6$. Отсюда $\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{6x}$.

Правая часть данного уравнения $f(x) = \sin x$ представляет собой функцию вида $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$, де $A=0$, $B=1$, b=1. Поскольку $bi = 1 \neq k_{1,2}$, то $Y = M\cos x + N\sin x$, где M и N – коэффициенты, которые необходимо найти. Дифференцируя Y дважды, получим:

$$Y' = -M\sin x + N\cos x,$$

$$Y'' = -M\cos x - N\sin x.$$

Подставив выражения для Y, Y', Y'' в уравнение $y'' + 7y' + 6y = \sin x$, получим:

$$-M\cos x - N\sin x - 7(-M\sin x + N\cos x) + 6(M\cos x + N\sin x) = \sin x.$$

В левой части полученного тождества приведём подобные:

$$(5M - 7N)\cos x + (7M - 5N)\sin x \equiv 0\cos x + \sin x.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в обеих частях тождества, получим такую систему уравнений

$$\begin{cases} 5M - 7N = 0, \\ 7M + 5N = 1. \end{cases}$$

Решив её, получим $M = \dfrac{7}{74}, N = \dfrac{5}{74}$.

Откуда

$$Y = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

Решение. Убедимся, что данное уравнение является линейным неоднородным уравнением 2-го порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью, поэтому его общее решение ищем в виде $y = \bar{y} + Y$.

Сначала найдём общее решение $\bar{y}$ соответствующего данному однородного уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$: $к^2 - 6к + 9 = 0$; $(к - 3)^2 = 0$; $к_1=к_2= 3$. Таким образом, имеем $\bar{y} = (C_1 + C_2x)e^{3x}$.

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Его правая часть $f(x) = 2x^2 - x + 3$ является функцией вида $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, где n=2, a=0.

Поскольку $a \neq k_{1,2}$, то $Y = Ax^2 + Bx + C$. Далее находим $Y' = 2Ax + B$, $Y'' = 2A$ и подставляем выражения для Y, Y', Y'' в уравнение $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$:

$$2A - 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) \equiv 2x^2 - x + 3$$

или

$$9Ax^2 + (-12A + 9B)x + (2A - 6B + 9C) = 2x^2 - x + 3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах левой и правой частей тождества, получим:

$$\begin{cases} 9A = 2, \\ 9B - 12A = -1, \\ 9C - 6B + 2A = 3. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим $A = \frac{2}{9}, B = \frac{5}{27}, C = \frac{11}{27}$.

Откуда

$$Y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Окончательно искомое общее решение имеет такой вид:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, если:

1) $f(x) = 3e^{2x}$,

2) $f(x) = 2x^3 - 30$.

Решение. Общее решение данного уравнения будем искать в виде:

$$y = \bar{y} + Y.$$

Найдём общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Для этого составим характеристическое уравнение

$$к^2 - 3к + 2 = 0; \quad к_1 = 1; \quad к_2 = 2, \text{ то есть } к_1 \neq к_2.;$$

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Далее рассмотрим правые части уравнения:

1) $f(x) = 3e^{2x}$. Это функция вида $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, где n=0, a=2.

Поскольку, $a = к_2$, то

$$Y = Axe^{2x},$$

$$Y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = (A + 2Ax)e^{2x},$$

$$Y'' = 2Ae^{2x} + 2(A + 2Ax)e2^{x} = (4A + 4Ax)e^{2x}.$$

Подставив выражения для Y, Y', Y'' в уравнение $y'' - 3y' + 2y = 3e^{x}$, получим:

$$(4A + 4Ax)e^{2x} - 3(A + 2Ax)e^{2x} + 2Axe^{2x} = 3e^{2x}$$

$$(4A - 6A + 2A)xe^{2x} + (4A - 3A)e^{2x} = 3e^{2x}$$

$$(4A - 3A)e^{2x} = 3e^{2x} \;\Rightarrow\; 4A - 3A = 3 \;\Rightarrow\; A = 3.$$

Значит, $Y = 3xe^{2x}$, а общее решение имеет такой вид:

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}.$$

2) $f(x) = 2x^3 - 30$. Имеем функцию вида $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, где n=3, a=0. Поскольку, $a \neq k_{1,2}$, то

$$Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

$$Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$Y'' = 6Ax + 2B.$$

Подставив выражения для Y, Y', Y'' в уравнение $y'' - 3y' + 2y = 3e^{x}$, получим:

$$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 2x^3 - 30,$$

$$2Ax^3 + (2B - 9A)x^2 + (6A - 6B + 2C)x + (2B - 3C + 2D) = 2x^3 - 30.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах левой и правой частей тождества, получим:

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ 2B - 9A = 0, \\ 6A - 6B + 2C = 0, \\ 2B - 3C + 2D = -30. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 9/2, \\ C = 21/2, \\ D = -15/4. \end{cases}$$

Таким образом, $Y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$, а общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}.$$

Задания для самоподготовки

1 Выполнить индивидуальные задания [6, 8.1 – 8.2]

2 Найти общее и частное решения следующих уравнений.

1 $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x.$

Ответ: $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$

2 $y'' - 2y' + 2y = 2x.$ **Ответ**: $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1.$

3 $y'' - 3y' + 2y = f(x),$ если

1) $f(x) = 10e^{-x}.$ **Ответ** : $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3} e^{-x}.$

2) $f(x) = 2\sin x.$ **Ответ**: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$

4 $y'' + y = \cos x.$ **Ответ**: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$

5 Указать вид частных решений неоднородных уравнений:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$. **Ответ**: $xe^{2x}(Ax^2 + Bx + C).$

б) $y'' + 9y = \cos 2x$. **Ответ**: $A\cos 2x + B\sin 2x.$

в) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x.$ **Ответ**: $xe^x(A\cos x + B\sin x).$

Вопросы для самопроверки

1 Сформулировать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.

2 Какой вид имеет частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка со специальной правой частью в случаях:

1) $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx);$

2) $f(x) = P_n(x)e^{ax};$

3) $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1975.

2 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика / Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. Шк., 2001.

3 Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Инфра, 2000.

4 Щелкунова Л.І. «Вища математика» для студентів архітектурних спеціальностей ФОП. –Ворошилова О.В. Тексти лекцій, 2011. – 146с.

5 Щелкунова Л.І. Конспект лекцій з дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 191 «Архітектура та містобудування», ХНУБА, 2016. – 106 с.

6 Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 191 «Архітектура та містобудування»/Укладачі: Щелкунова Л.І.. – Харків, ХНУБА, 2016. – 60с.

7 Методичні вказівки для практичних занять з дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 191 «Архітектура та містобудування»/ Укладачі: Щелкунова Л.І. – Харків, ХНУБА, 2016. – 58с.

8 Методические указания к выполнению заданий модуля «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия на плоскости»/ Составители: Лисянская А.В., Щелкунова Л.И., Бабаева Е.В. – Харьков, ХНУСА, 2012. – 52с..

9 Методичні вказівки до виконання завдань модуля «Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної»/ Укладачі: Щелкунова Л.І., Харченко А.П., Стасенко О.М. – Харків, ХНУБА, 2012. – 52с.

СОДЕРЖАНИЕ

Вступление…..... 3
4 Введение в анализ. Дифференциальное исчисление..... 4
5 Исследование функции с помощью производной..... 11
6 Интегральное исчисление……..…..... 16
7 Дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка……..... 24
8Элементы теории линейных неоднородных дифференциальных уравнений. 28
Список литературы……..... 34

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з розділів «Диференціальне та інтегральне числення», «Диференціальні рівняння» дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 191 «Архітектура та містобудування».

Укладачі: ЩЕЛКУНОВА Любов Іванівна
ГАЄВСЬКА Вікторія Олексіївна
ЛИСЯНСЬКА Ганна Володиміровна

Роботу до видання рекомендувала О.О. Аршава

Редактор В.І. Пуцик

План 2019 р., поз. 160 Формат 60х84 1/16. Папір друк. №2.
Підп. до друку22.10.18 Обл.-вид. арк. 1,6
Надруковано на ризографі Умов .друк. арк. 1,7 Безкоштовно
Тираж 50 прим. Зам № 5430.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури