**Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**
**БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

**М.І.Несвіт, Є.В.Поклонський, А.П.Харченко**

# ТЕОРІЯ ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ
# ТА
# ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Навчально–методичний посібник

**Харків 2012**

**Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**
**БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

**М.І.Несвіт, Є.В.Поклонський, А.П.Харченко**

# ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Рекомендовано
науково-методичною радою університету
як навчально–методичний посібник
для студентів технічних вузів

**Харків 2012**

УДК 517
Н-55

Рецензенти:
*В.М. Кравець*, доцент кафедри 403 Національного аерокосмічного університета ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»
*Н.Ю. Іохвідович*, канд.фіз.-мат.наук, доцент кафедри вищої математики (ХНУБА)

Рекомендовано кафедрою вищої математики.
Протокол № 7 від 26 березня 2009 р.

Затверджено науково-методичною радою університету.
Протокол № 8 від 24 травня 2012.

Автори: М.І.Несвіт
Є.В.Поклонський
А.П.Харченко

Н-55 Несвіт М.І, Поклонський Є.В., Харченко А.П. Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення: Навчально–методичний посібник. – Харків: ХНУБА, 2012. – 80с.

Іл. 42; табл. 4; бібл. 4 назви.

Розглянуто основи теорії функцій комплексної змінної та операційного числення. У посібнику наведено необхідні теоретичні дані та формули, розв’язки типових задач, задачі для самостійного розв’язку, які супроводжуються відповідями та вказівками.

Призначено для студентів усіх спеціальностей технічного вузу для набуття навичок розв’язання задач методами операційного числення.

Несвіт М.І, Поклонський Є.В., Харченко А.П. , 2012

# ВСТУП

Посібник складається з двох частин. У першій частині розглянуто основи теорії функцій комплексної змінної в об'ємі, необхідному для вивчення операційного числення.

Операційне числення розглядається у другій частині посібника. Методи операційного числення застосовуються в математичній фізиці, теорії спеціальних функцій, при обчисленні інтегралів і рядів і ряді інших питань. Особлива велике і важливе значення вони мають в сучасних галузях науки і техніки, таких як автоматика та телемеханіка, теорія регулювання.

У посібнику наведено необхідні теоретичні дані та формули, розв'язки типових задач, задачі для самостійного розв'язку, які супроводжуються відповідями та вказівками. Докладно розглянуто застосування операційного числення для інтегрування звичайних лінійних диференційних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

# 1 ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

## 1.1 Лінії та області на комплексній площині

**Література**: [1]; [3], гл. II, §27–31, 36–48.

Множина точок $D$ комплексної площини називається ***областю***, якщо вона задовольняє таким умовам: 1) разом із кожною точкою із $D$ цій множині належить достатньо малий круг з центром у вказаній точці (властивість відкритості); 2) будь-які дві точки множини можна з'єднати ламаною, яка повністю складається із точок множини $D$ (властивість зв'язності).

Усі точки, які задовольняють умові 1) визначення області, називаються точками області (***внутрішніми точками області*** $D$).

***Зовнішня точка області*** $D$ – це точка комплексної площини, яка не належить множині $D$ разом з деяким кругом, який містить у собі цю точку.

Будь-яка область, яка містить в собі деяку точку $z_0$, називається ***околом*** цієї точки. Як окіл точки часто беруть круг; якщо радіус круга $r$ ($|z-z_0|< r$ ), то окіл називається ***$r$ – околом*** точки $z_0$.

Під околом нескінченно віддаленої точки розуміють зовнішність будь-якого круга з центром у початку координат (тобто область $|z–z_0|>K$, $K>0$).

Точка $M$ називається ***межовою точкою*** області $D$, якщо вона не належить області $D$, але будь-який достатньо малий окіл вказаної точки містить точки області $D$.

Сукупність усіх межових точок області $D$ називається її ***межею***. Наприклад, для круга $|z|<1$ межею є коло $|z|=1$.

Усяка область $D$ з приєднаною до неї межею називається ***замкненою областю*** і позначається через $\bar{D}$. Так, множина точок, які задовольняють нерівності $|z|\le 2$, є замкненою областю.

Неперервна на $[\alpha,\beta]$ функція $z(t)$ дійсного параметра $t$ визначає неперервну криву (лінію, дугу); значення функції $z(t)$ називають точками кривої; рівняння

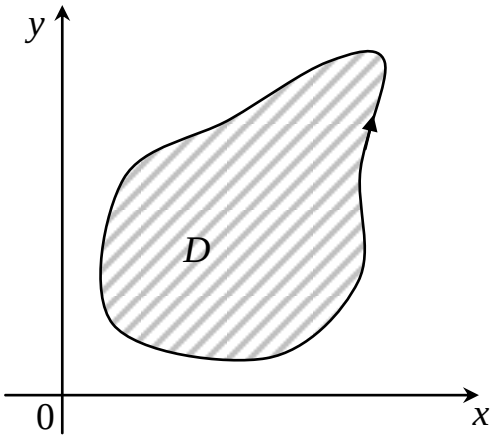
$z=z(t)$ – це рівняння кривої (параметричне).

На кожній кривій можна зафіксувати один з двох напрямів – у бік збільшення параметра або, навпаки, – зменшення. У першому випадку $z(\alpha)$ – початок кривої, а $z(\beta)$ – її кінець (у другому випадку навпаки). Якщо початок і кінець кривої збігаються, то крива називається ***замкненою***.

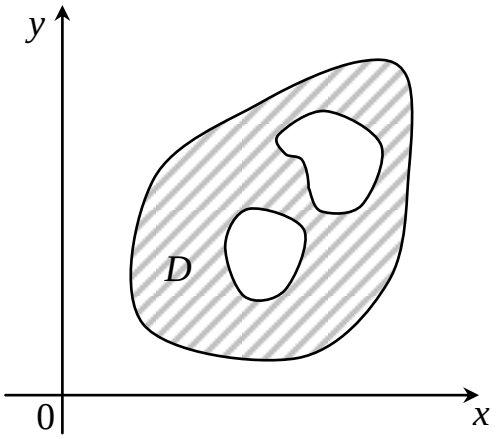
Точка, яка відповідає тільки одному значенню параметра, називається ***простою***; точка, яка відповідає двом і більшому числу значень параметра – ***кратною***. Крива, яка складається тільки з простих точок, називається простою (або ***координованою***) кривою.

Область $D$ називається ***однозв'язною***, якщо будь-яка проста замкнена крива, яка повністю належить $D$, може бути стягнена в точку за допомогою неперервної деформації без виведення з області $D$ (в іншому випадку – область ***многозв'язна***). З цього визначення випливає, що межа многозв'язної області не може складатися з однієї замкненої кривої. Приклад однозв'язної області наведено на мал.1.1, многозв'язної – на мал.1.2.

Нехай $D$ – однозв'язна область і $L$ – її межа. Виберемо на $L$ деяку точку і, починаючи з цієї точки, будемо обходити межу $L$. ***Додатним напрямом обходу*** межі області вважається таким, при якому область залишається весь час зліва (див. мал.1.1).



Мал.1.1



Мал.1.2

**Розв'язання типових прикладів**

**Приклад 1** Написати рівняння таких ліній в комплексно-параметричній формі:

а) $\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = 5 + 3t, \end{cases}$ ,  б) $(x-3)^2+(y-2)^2=36$.

*Розв'язання.* А) Оскільки $z(t)=x(t) + iy(t)$, то $z=2+5i+(4+3i)\cdot t$.

Б) Коло $(x-3)^2+(y-2)^2=36$ має центр у точці (3;2) і радіус, що дорівнює 6. Запишемо рівняння кола у параметричній формі:

$$\begin{cases} x = 3 + 6\cdot\cos t, \\ y = 2 + 6\cdot\sin t, \end{cases}$$

а потім у комплексно-параметричній формі:

$$z(t)=3+6\cdot\cos t+i(2+6\cdot\sin t)=3+2i+6(\cos t+i\sin t)=3+2i+6\cdot e^{it},\quad 0\le t\le 2\pi.$$

**Приклад 2** Які лінії задані рівняннями ($t$ – дійсний параметр):

а) $z=4\cdot e^{it}$, б) $z=t^2+\frac{i}{t^2}$.

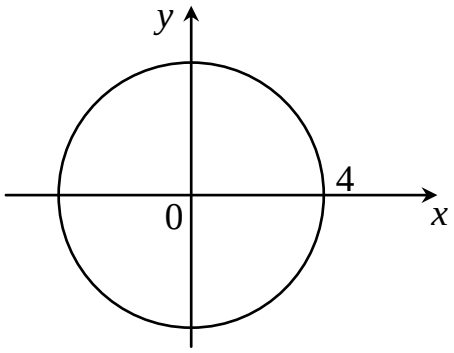
*Розв'язання.* А) Оскільки $e^{it}=\cos t+i\sin t$, то $z(t)=x(t)+iy(t)=4\cos t+4i\sin t$.

Прирівнюючи дійсні і уявні частини, одержимо $\begin{cases} x=4\cdot\cos t, \\ y=4\cdot\sin t. \end{cases}$

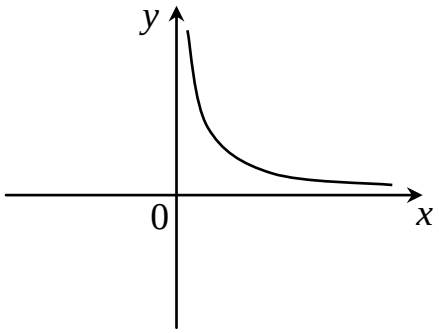
Виключивши параметр $t$, одержимо $x^2+y^2=16$.

Дана лінія – коло з центром у початку координат радіуса 4 (мал.1.3).

А) Виключивши параметр $t$ із системи $\begin{cases} x=t^2 \\ y=1/t^2 \end{cases}$, одержимо $y=\frac{1}{x}$. Але $x>0$, $y>0$, таким чином рівняння $\begin{cases} x=t^2 \\ y=1/t^2 \end{cases}$ визначає вітку гіперболи у першому квадранті (мал.1.4).




Мал.1.3




Мал.1.4

**Приклад 3** Визначити та побудувати на комплексній площині лінії, задані рівняннями:

а) $|z+3-i|=4$, б) $\operatorname{Re} z=-3$, в) $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$.

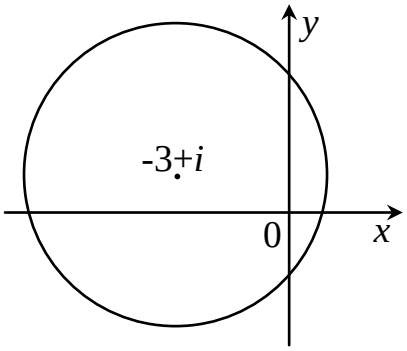
*Розв'язання.* А) Користуючись означенням модуля і тим, що $z=x+iy$, одержимо $|z+3-i|=|x+3+i\cdot(y-1)|=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}=4$ або $(x+3)^2+(y-1)^2=16$ – рівняння кола з центром у точці $(-3;1)$ радіуса 4.

Даний приклад можна розв'язати іншим способом. Подамо рівняння у вигляді $|z-(-3+i)|=4$. Оскільки $|z-z_1|$ – відстань між точками $z$ і $z_1$, то відстань від точки $-3+i$ до будь-якої точки даної лінії незмінна і дорівнює 4. Тому рівняння визначає коло з центром у точці радіуса 4 (мал.1.5).

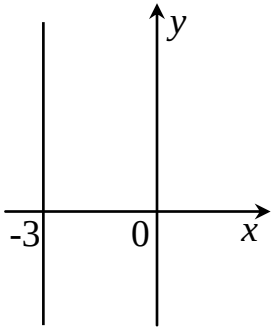
Б) Оскільки $\operatorname{Re} z=x$, то із умови виплаває, що $x=-3$. Це рівняння прямої, паралельної осі $Oy$ (мал.1.6).

В) Оскільки $\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}$, то рівняння $\operatorname{Im}\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$ набуде вигляду $-\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$. Після перетворень одержимо $x^2+(y+2)^2=4$. Таким чином, рівняння

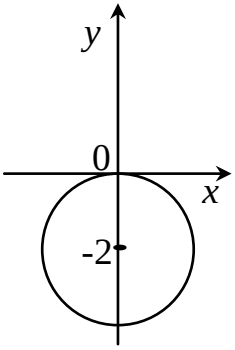
$\mathrm{Im}\,\frac{1}{z}=\frac{1}{4}$ визначає коло радіуса 2 з центром у точці (0;–2) (мал.1.7).



Мал.1.5



Мал.1.6



Мал.1.7

**Приклад 4** Побудувати на комплексній площині множини, що задовольняють нерівностям:

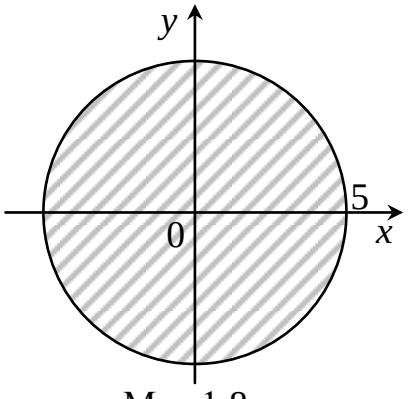
а) $|z|\le 5$, б) $|z-3+5i|\ge\frac{1}{2}$, в) $1<|z-3+2i|<2$,

г) $\mathrm{Im}\,z<3$, д) $1<|z+3-2i|<2$, $\frac{3}{4}\pi<\arg z<\frac{5}{6}\pi$.

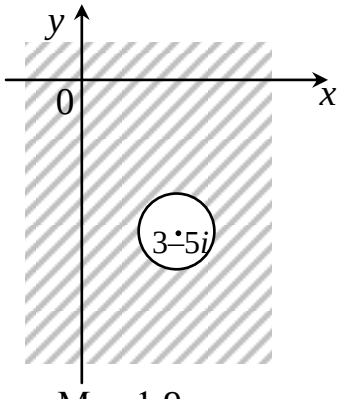
*Розв'язання*. А) Даній множині точок задовольняють точки круга радіуса 5 з центром в початку координат. Ця множина є областю, оскільки вона є зв'язною. Область обмежена, оскільки вона цілком міститься всередині круга радіуса 6 з центром в початку координат. Область замкнена, оскільки включає в себе свою межу $|z|=5$ і однозв'язна, оскільки межа складається із одного кола $|z|=5$ (мал.1.8).

Б) Множина точок розташована зовні круга радіуса 0,5 з центром в точці $3-5i$, тобто площина $z$ з вирізаним кругом. Ця множина – область. Область необмежена, оскільки вона не може бути поміщена в жоден круг скінченного радіуса. Область замкнена, оскільки її межа – коло $|z-3+5i|=0{,}5$ – належить даній множині. Область однозв'язна (мал.1.9).

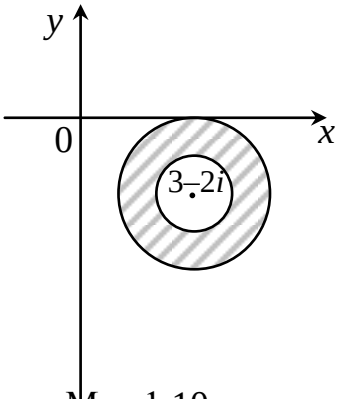
В) Дана множина точок повинна одночасно задовольняти двом умовам:



Мал.1.8



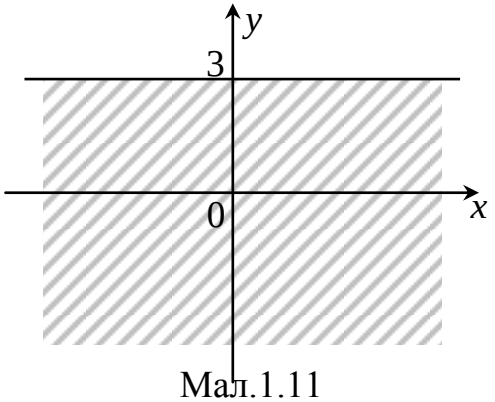
Мал.1.9



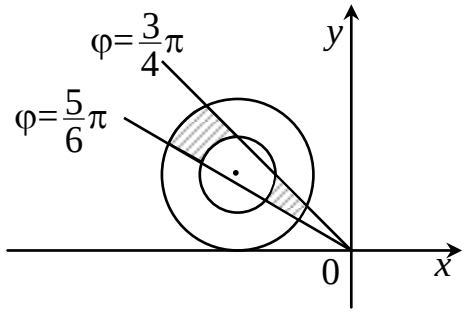
Мал.1.10

$|z-(3-2i)|<2$ і $|z-(3-2i)|>1$. Перша з цих нерівностей визначає відкритий круг радіуса 2 з центром у точці $3-2i$, друге – зовнішність одиничного круга з центром у точці $3-2i$. Таким чином дана множина точок – це відкрите кільце з центром у точці $3-2i$ і радіусами 1 та 2. Область відкрита, оскільки її межа – ко-

ла $|z-(3-2i)|=2$ і $|z-(3-2i)|=1$ – не належить даній множині. Область обмежена, оскільки вона цілком лежить всередині круга $|z|<7$. Область двозв'язна в силу того, що її межа складається з двох зв'язаних частин – двох кіл (мал.1.10).




Мал.1.11




Мал.1.12

Г) Оскільки $\mathrm{Im}\, z = y$, то точки даної множини задовольняють нерівності $y<3$. Ця множина – півплощина (мал.1.11). Вона не включає межу $y=3$, тому це відкрита область. Область необмежена, оскільки не може бути поміщена в жоден круг скінченного радіуса, однозв'язана.

Д) Множина точок, задана умовами $1<|z+3-2i|<2$, $\frac{3}{4}\pi < \arg z < \frac{5}{6}\pi$ є частина комплексної площини (мал.1.12). Дана множина точок не є областю, оскільки немає зв'язності.

### Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 1** Які лінії представлені рівняннями:

1) $z=(1+3i)\cdot t$, де а) $-\infty < t < +\infty$; б) $0 < t < +\infty$; 2) $z = t + \frac{i}{t}$; 3) $z=t+i\cdot t^2-4$;

4) $z=\frac{5}{2}\cdot\cos t + i\cdot\frac{3}{2}\cdot\sin t$; 5) $|z-1|=2|z-i|$; 6) $\mathrm{Re}\, z^2 = a^2$;

7) $z = 7\cdot e^{2it} + 3\cdot e^{-2it}$; 8) $\mathrm{Re}\, z + \mathrm{Im}\, 2z = 3$; 9) $\mathrm{Im}\, z^2 = -3$; 10) $\arg z = \frac{\pi}{8}$.

*Відповідь.* 1) а) пряма $y=3x$, б) півпряма $y=3x$ у першому квадранті ( $x > 0$);

2) $xy=1$; 3) $y=(x+4)^2$; 4) $\frac{x^2}{6.25}+\frac{y^2}{2.25}=1$; 5) $(x+\frac{1}{3})^2+(y-\frac{4}{3})^2=\frac{8}{9}$;

6) $x^2-y^2=a^2$; 7) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{16}=1$; 8) $x+2y=3$; 9) $2xy=-3$; 10) промінь $\varphi=\frac{\pi}{8}$.

**Задача 2** Записати за допомогою нерівностей та побудувати на комплексній площині такі множини: а) смугу, що складається з точок, відстань від яких до уявної осі менше одиниці; б) півкруг радіуса 1 (без межі) з центром у точці $z=0$, розташований зліва від уявної осі; в) перший квадрант; г) півплощина, утворена точками, що лежать вище прямої $y=2$; д) круг радіуса 2 з центром у точці $z=1+i$ (разом із колом).

*Відповідь.* А) $-1<\mathrm{Re}\, z<1$; б) $|z|<1,\ \mathrm{Re}\, z < 0$; в) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$;

г) $\mathrm{Im}\, z > 2$; д) $|z-1-i| \le 2$.

**Задача 3** Побудувати на комплексній площині області, задані нерівностями:

а) $|z-2+2i|\geq 1.5$; б) $1<|z-2+2i|<3$; в) $1<|z|<2$, $\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{4}$;

г) $\left|\frac{z-1}{z-2i}\right|>1$; д) $|z-2|+|z+2|<5$; е) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leq 1$; ж) $-1\leq \mathrm{Re}\, z\leq 2$; з) $\mathrm{Im}\, z<\mathrm{Re}\, z$.

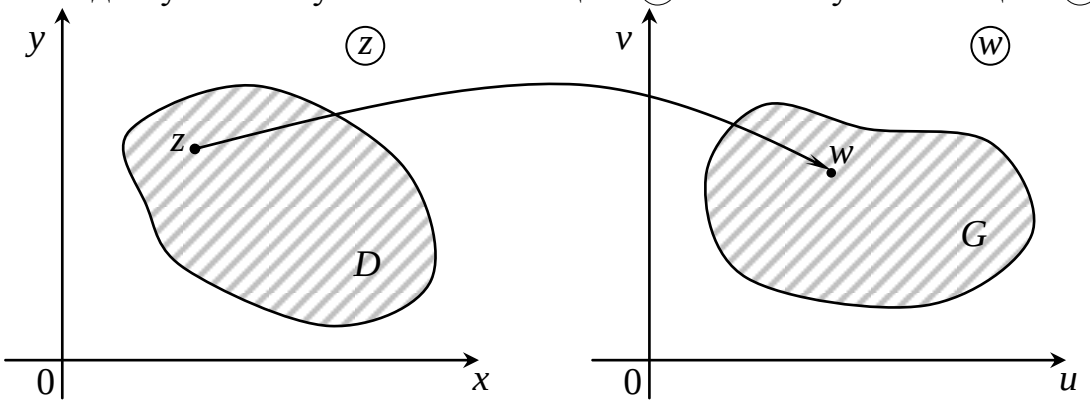
Для кожної області зазначити відкритість (закритість), обмеженість (необмеженість), однозв'язність (многозв'язність).

*Відповідь.* А) зовнішність круга – однозв'язна, необмежена, замкнена область; б) кільце – двозв'язна, обмежена, відкрита область; в) частина кільця між променями $\varphi=\frac{\pi}{6}$ і $\varphi=\frac{\pi}{4}$ – область однозв'язна, обмежена, відкрита; г) частина площини вище прямої $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{4}$ – область однозв'язна, необмежена, відкрита; д) внутрішність еліпса – однозв'язна, обмежена, відкрита область; е) права півплощина – однозв'язна, необмежена, замкнена область; ж) смуга $-1\leq x\leq 2$ – однозв'язна, необмежена, замкнена область; з) частина площини під прямою $y=x$ – область однозв'язна, необмежена, відкрита.

## 1.2 Функція комплексної змінної, її геометричний зміст. Границя. Неперервність. Основні елементарні функції

**Література**: [1], гл.6, §6.1, 6.2; [3], гл. II, §27–31, 36–48.

Нехай маємо дві площини комплексних чисел $z=x+iy$ і $w=u+iv$ (мал.1.13). Розглянемо деяку множину точок $D$ в площині $(z)$ і множину $G$ в площині $(w)$.




Мал.1.13

Якщо кожному числу $z\in D$ за деяким законом поставлено у відповідність певне комплексне число $w\in G$, то на множині $D$ задана однозначна ***функція комплексної змінної***, яка відображає множину $D$ у множину $G$. Символічно це позначають $w=f(z)$.

Множина $D$ називається ***множиною визначення*** функції $f(z)$. Множина $G$, кожна точка якої є значенням функції, називається ***множиною значень*** цієї функції, або образом множини $D$ за допомогою функції $f(z)$ (функція $f(z)$ ***відображає*** множину $D$ на множину $G$).

Якщо кожному $z\in D$ відповідає кілька різних значень $w$, то функція $w=f(z)$ називається ***багатозначною***.

Якщо функція $w=f(z)$ однозначна на множині $D$ і при цьому двом різним то-

чкам множини $D$ завжди відповідають дві різні точки множини $G$, то таке відображення називається взаємно однозначним або ***однолистим*** в $D$.

Функцію $w=f(z)$ можна записати у вигляді $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $(x,y)\in D$, де $u(x,y)=\mathrm{Re}f(z)$, $v(x,y)=\mathrm{Im}f(z)$ – функції дійсних змінних $x$ та $y$.

Нехай функція $w=f(z)$ визначена в деякому околі точки $z_0=x_0+iy_0$, крім, можливо, самої точки $z_0$.

Якщо існують границі $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y)=u_0$, і $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$, то функція $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ має ***границю*** при $z\to z_0$, яка дорівнює

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=u_0+iv_0=w_0.$$

Дане визначення зводиться до звичайного визначення границі функції дійсних аргументів, тому основні властивості граничного переходу для функцій дійсних змінних справедливі і для функцій комплексної змінної

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\pm g(z)\right]=\lim_{z\to z_0} f(z)\pm\lim_{z\to z_0} g(z);$$

$$\lim_{z\to z_0}\left[f(z)\cdot g(z)\right]=\lim_{z\to z_0} f(z)\cdot\lim_{z\to z_0} g(z); \qquad (1.1)$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0} g(z)} \quad \left(\lim_{z\to z_0} g(z)\neq 0\right).$$

Функція $f(z)$ називається ***неперервною у точці*** $z_0$, якщо вона визначена у деякому околі $z_0$ (включаючи саму точку $z_0$) і $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$. Очевидно, що для неперервності функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ у точці $z_0$ необхідно і достатньо, щоб функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ були неперервними у точці $(x_0,y_0)$.

Із властивостей (1.1) випливає, що сума, різниця, добуток і частка неперервних у точці $z_0$ комплексних функцій $f(z)$ і $g(z)$ є неперервними функціями в цій точці. (У випадку частки припускаємо, що $g(z_0)\neq 0$).

Функція називається ***неперервною в області*** $D$, якщо вона є неперервною в кожній точці цієї області.

Для функцій, неперервних у замкнених областях, на замкнених лініях, на відрізках ліній, що містять свої кінці, залишаються справедливими звичайні властивості функцій, неперервних на замкнених інтервалах. А саме, кожна функція $w=f(z)$, яка є неперервною на замкненій множині $\bar{D}$:

1) обмежена на ній, тобто існує така стала $M>0$, що для всіх $z$ із $D$ $|f(z)|<M$;

2) досягає свого найбільшого і найменшого за модулем значень, тобто в $\bar{D}$ існують такі точки $z'$ і $z''$, що для всіх $z$ із $\bar{D}$: $|f(z')|\geq|f(z)|$, $|f(z'')|\leq|f(z)|$.

**Основні елементарні функції комплексної змінної**

1 Дробово–раціональна

$$w=\frac{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\ldots+b_m}; \qquad n, m\in N;$$

її окремими випадками є:

лінійна функція: $w=az+b$; $a, b\in C,\ a\neq 0$;

степенева: $w=z^n$; $n \in N$;

дробово–лінійна: $w=\frac{az+b}{cz+d}$; $a, b, c, d \in C$.

2 Показникова функція $w=e^z$, яка визначається за формулою $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$. Вона є періодичною з уявним періодом $2\pi i$. При довільних значеннях комплексних чисел $z_1$ і $z_2$ характеризується властивостями $e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}$, $e^{z_1}/e^{z_2}=e^{z_1-z_2}$.

3 Тригонометричні функції $w=\sin z$, $w=\cos z$, $w=\operatorname{tg} z$, $w=\operatorname{ctg} z$, які визначаються формулами $\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})$, $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$, $\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}$. При довільних значеннях комплексних аргументів $z_1$ і $z_2$ справедливі формули

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cdot\cos z_2\pm\cos z_1\cdot\sin z_2;$$
$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2\mp\sin z_1\cdot\sin z_2.$$

При довільному комплексному $z$ виконується тотожність $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.
Функції $w=\sin z$, $w=\cos z$ періодичні з дійсним періодом $2\pi$, а $w=\operatorname{tg} z$, $w=\operatorname{ctg} z$ – з дійсним періодом $\pi$.

4 Гіперболічні функції $w=\operatorname{sh} z$, $w=\operatorname{ch} z$, $w=\operatorname{th} z$, $w=\operatorname{ch} z$, які визначаються формулами $\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})$, $\cos z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$, $\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$. Для них справедливі рівності $\operatorname{sh} z=-i\cdot\sin iz$, $\operatorname{ch} z=\cos iz$, $\operatorname{th} z=-i\cdot\operatorname{tg} iz$, $\operatorname{cth} z=i\cdot\operatorname{ctg} iz$, з яких випливає , що функції $w=\operatorname{sh} z$, $w=\operatorname{ch} z$ періодичні з уявним періодом $2\pi i$, а функції $w=\operatorname{th} z$, $w=\operatorname{ch} z$ – з уявним періодом $\pi i$.

5 Логарифмічна функція визначається як функція, обернена до показникової. Якщо $e^w=z$, де $z\neq 0$, то $w$ називається логарифмом числа $z$ і позначається $w=\operatorname{Ln} z$. На відміну від показникової вона є багатозначною функцією

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i(\arg z+2\pi k),\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Вираз $\ln|z|+i\cdot\arg z$ називається головним значенням логарифмічної функції і позначається $\ln z$. Таким чином

$$\operatorname{Ln} z=\ln z+i2\pi k,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

6 Загальна показникова функція $w=a^z$ ($a\in C$), яка визначається за допомогою рівності $a^z=e^{z\cdot\operatorname{Ln} a}$. Головне значення цієї багатозначної функції дорівнює $e^{z\cdot\ln a}$. У подальшому при $a>0$ покладемо $a^z=e^{z\cdot\ln a}$.

7 Загальна степенева функція $w=z^a$ ($a\in C$), яка визначається за допомогою рівності $z^a=e^{a\cdot\operatorname{Ln} z}$. Головне значення цієї багатозначної функції дорівнює $e^{a\cdot\ln z}$. При $a=1/n$, $n\in N$ одержимо багатозначну функцію – корінь степеня $n$ з комплексного числа

$$z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}=e^{\frac{1}{n}(\ln|z|+i(\arg z+2\pi k))}=\sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\arg z+2\pi k}{n}},\quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

8 Обернені тригонометричні функції $w=\operatorname{Arcsin} z$, $w=\operatorname{Arccos} z$, $w=\operatorname{Arctg} z$, $w=\operatorname{Arcctg} z$, які визначаються як обернені по відношенню до функцій $w=\sin z$, $w=\cos z$, $w=\operatorname{tg} z$, $w=\operatorname{ctg} z$. Ці функції багатозначні і виражаються через логарифмі-

чні функції

$\mathrm{Arcsin}z=-i\cdot\mathrm{Ln}(iz+\sqrt{1-z^2})$, $\mathrm{Arccos}z=-i\cdot\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$,

$\mathrm{Arctg}z=-\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}$, $\mathrm{Arcctg}z=\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}$.

9 Обернені гіперболічні функції $w=\mathrm{Arcsh}z$, $w=\mathrm{Arcch}z$, $w=\mathrm{Arcth}z$, $w=\mathrm{Arccth}z$, які визначаються як обернені по відношенню до функцій $w=\mathrm{sh}z$, $w=\mathrm{ch}z$, $w=\mathrm{th}z$, $w=\mathrm{cth}z$, і на відміну від них багатозначні. Вони визначаються формулами

$\mathrm{Arcsh}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2+1})$, $\mathrm{Arcch}z=\mathrm{Ln}(z+\sqrt{z^2-1})$,

$\mathrm{Arcth}z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}$, $\mathrm{Arccth}z=\frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1}$.

**Розв'язання типових прикладів**

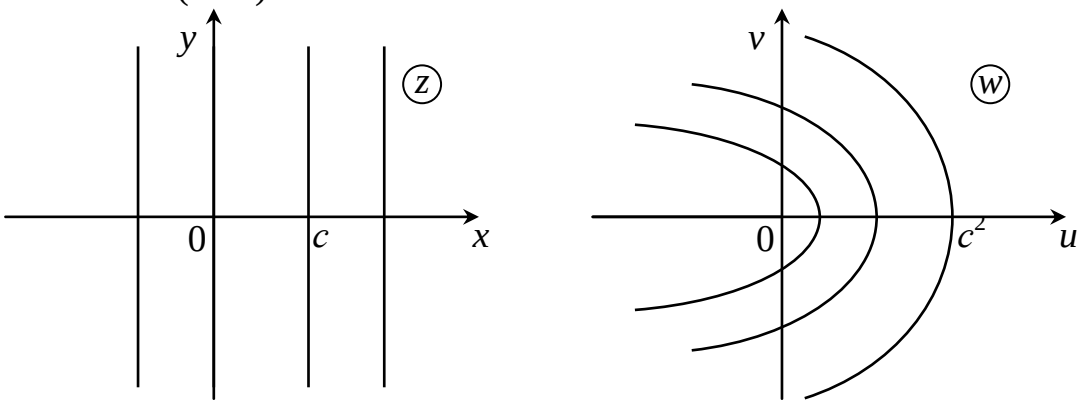
**Приклад 1** При відображенні $w=z^2$ знайти: а) образи ліній $x=c$, б) прообрази ліній $u=c$.

*Розв'язання*. А) Відділимо дійсну та уявну частини функції

$w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$, тобто $\mathrm{Re}w=u=x^2-y^2$, $\mathrm{Im}w=v=2xy$.

$x=c$ – прямі, паралельні осі $Oy$. Для того, щоб знайти образи цих прямих на площині $\textcircled{w}$, необхідно систему рівнянь $\begin{cases}x=c\\u=x^2-y^2\\v=2xy\end{cases}$ розв'язати відносно $u$ і $v$. Ця система рівнозначна системі $\begin{cases}u=c^2-y^2\\v=2cy\end{cases}$.

Виключаючи параметр $y$, одержимо $v^2=-4c^2(u-c^2)$. Це рівняння визначає на площині $\textcircled{w}$ сім'ю парабол з вершиною у точці $(c^2,0)$, напрямлених у від'ємну сторону осі $Ou$. Коли точка $z$ пробігає по лінії $x=c$, то відповідна точка $w$ пробігає лінію $v^2=-4c^2(u-c^2)$.

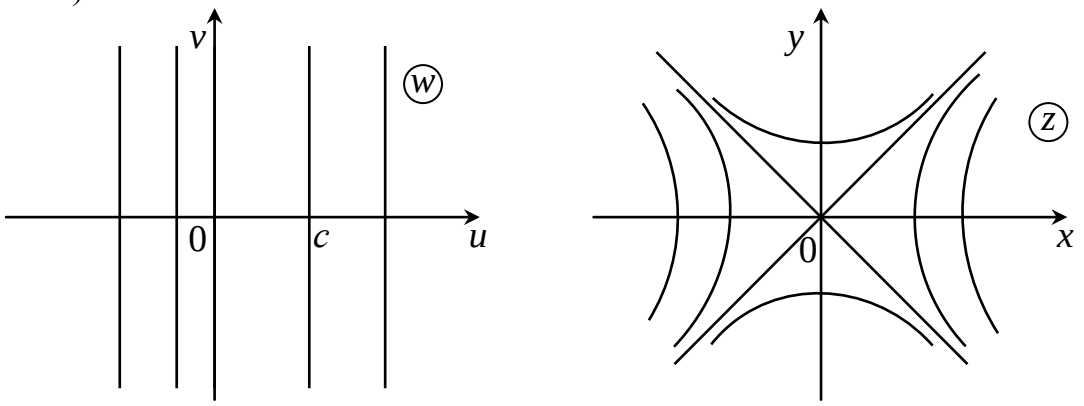



Мал.1.14

Таким чином, при відображенні $w=z^2$ для прообразу сім'ї прямих $x=c$ на площині $\textcircled{z}$ образом є сім'я парабол $v^2=-4c^2(u-c^2)$ на площині $\textcircled{w}$ (мал.1.14). При $c=0$ $x=0$ і $\begin{cases}u=-y^2\\v=0\end{cases}$. Рівняння $v=0$ означає, що точки розташовані на осі $Ou$. Із

першого рівняння системи випливає, що $u \le 0$. Таким чином, пряма $x=0$ відображається на від'ємну частину дійсної осі $Ou$ площини $w$.

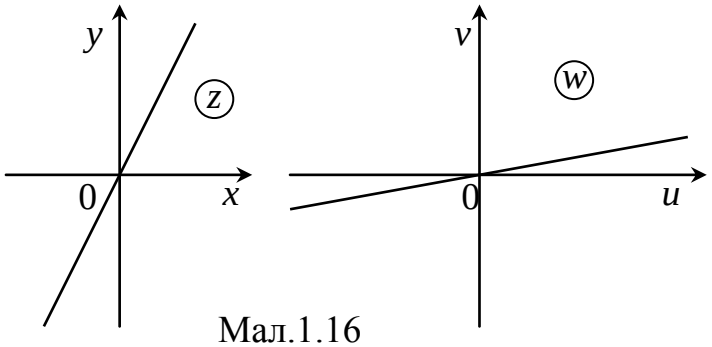
Б) $u=c$ – прямі, паралельні осі $Ov$. Прообрази цих прямих на площині $z$ знайдемо, розв'язавши систему рівнянь $\begin{cases} u=c \\ u=x^2-y^2 \\ v=2xy \end{cases}$ відносно $x$ і $y$. Одержимо $x^2-y^2=c$, $c\neq 0$ – сім'я гіпербол на площині $z$. Якщо $c=0$, то $x^2-y^2=0 \Rightarrow y=\pm x$, тобто прообразом осі $Ov$ є пара прямих. Таким чином, прообразами сім'ї прямих ліній $u=c$ на $w$ при відображенні $w=z^2$ є сім'я гіпербол $x^2-y^2=c$ на площині $z$ (мал.1.15).




Мал.1.15

**Приклад 2** При відображенні $w=z^3$ знайти образ лінії $z=(1+2i)t$.

*Розв'язання*. Рівняння $z=(1+2i)t$ рівносильне рівнянням $x=t$, $y=2t$. Воно визначає на площині $z$ пряму $y=2x$. Ця пряма відображається за допомогою функції $w=z^3$ на лінію $w=(1+2i)^3\cdot t^3=(-11-2i)\cdot t^3$. Звідси маємо $u=\mathrm{Re}\,w=-11t^3$, $v=\mathrm{Im}\,w=-2t^3$. Виключимо параметр $t$ і одержимо $u=5.5v$ – рівняння прямої на площині $w$ (мал.1.16).



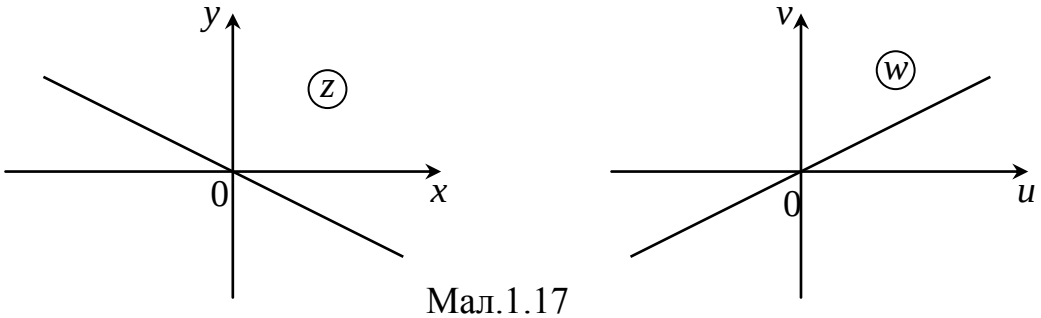

Мал.1.16

**Приклад 3** При відображенні $w=\dfrac{1}{z}$ знайти образ лінії $y=-\dfrac{x}{2}$.

*Розв'язання*. Оскільки функція $w=\dfrac{1}{z}$ встановлює взаємно однозначну відповідність між точками $z$ і $w$, то $z=\dfrac{1}{w}$. Виділимо дійсну і уявну частини $z$:

$$z=\frac{1}{w}=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2},$$

$$x=\mathrm{Re}\,z=\frac{u}{u^2+v^2}, \qquad y=\mathrm{Im}\,z=-\frac{v}{u^2+v^2}.$$




Мал.1.17

Підставивши одержані вирази для $x$ і $y$ у рівняння прямої $y=-\frac{x}{2}$, одержимо – $\frac{v}{u^2+v^2}=-\frac{1}{2}\frac{u}{u^2+v^2}$, або $v=\frac{u}{2}$. Таким чином, пряма $y=-\frac{x}{2}$ відображається на пряму $v=\frac{u}{2}$ (мал.1.17).

**Приклад 4** Обчислити наступні границі:

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}+i\frac{n}{2n+3}\right), \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n, \quad \text{в) } \lim_{n\to\infty}\frac{1+ni}{1-ni}.$$

*Розв'язання*. А) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n+i\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n$, тому

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}+i\frac{n}{2n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}+i\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+3}=1+\frac{1}{2}i.$$

Б) Оскільки $\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{1+i}{2}\right|^n=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+i}{2}\right)^n=0.$

В) Можна зробити як у випадку а), виділивши спочатку дійсну і уявну частини, або скористатись теоремами про границі:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+ni}{1-ni}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+i}{\frac{1}{n}-i}=-1.$$

**Приклад 5** Обчислити наступні границі:

$$\text{а) } \lim_{z\to1+i}\frac{z}{z+1}, \quad \text{б) } \lim_{z\to i}\frac{z^2}{z-i}, \quad \text{в) } \lim_{z\to2i}\frac{z^2+4}{z-2i}, \quad \text{г) } \lim_{z\to\infty}\frac{z-2i}{z+i}.$$

*Розв'язання*. А) $\lim\limits_{z\to1+i}\frac{z}{z+1}=\frac{1+i}{1+i+1}=\frac{1+i}{2+i}$,

б) $\lim\limits_{z\to i}\frac{z^2}{z-i}=\frac{i^2}{\lim\limits_{z\to i}(z-i)}=\frac{-1}{\lim\limits_{z\to i}(z-i)}=\infty$,

в) $\lim\limits_{z\to2i}\frac{z^2+4}{z-2i}=\lim\limits_{z\to2i}\frac{(z-2i)\cdot(z+2i)}{z-2i}=\lim\limits_{z\to2i}(z+2i)=4i$,

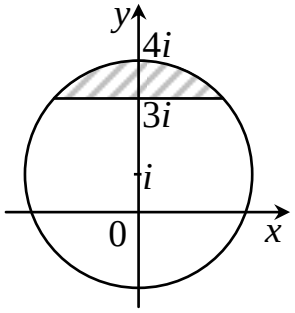
г) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z-2i}{z+i}=\lim\limits_{z\to\infty}\frac{1-\frac{2i}{z}}{1+\frac{i}{z}}=1.$

**Приклад 6** Дослідити на неперервність функцію $w=z\cdot\mathrm{Re}\,z$.

*Розв'язання*. Запишемо функцію у вигляді $w=(x+iy)\cdot x=x^2+xyi$,

$\mathrm{Re}\,w=u(x,y)=x^2$, $\mathrm{Im}\,w=v(x,y)=xy$. Оскільки функції $u(x,y)$ і $v(x,y)$ неперервні на площині $x$O$y$, то функція $w=z\cdot\mathrm{Re}\,z$ також неперервна на всій площині $\textcircled{z}$.

**Приклад 7** Чи досягає модуль функції $w=z^2$ найбільшого та найменшого значень в області $|z-i|\le 3$, $\mathrm{Im}\,z\ge 3$?



Мал.1.18

*Розв'язання*. Дана область (заштрихована, мал.1.18) замкнена. Функція $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$ неперервна на площині $\textcircled{z}$, оскільки функції $\mathrm{Re}\,w=x^2-y^2$ і $\mathrm{Im}\,w=2xy$ неперервні на площині $x$O$y$. Отже в замкненій і обмеженій області модуль функції $w=z^2$ досягає найбільшого та найменшого значень. $|z^2|=|z|^2=x^2+y^2$ – квадрат відстані від точки $(x,y)$ до точки $(0,0)$. $x^2+y^2$ буде найменшим у точці $(0,3)$, а найбільшим у точці $(0,4)$. Таким чином, $|z^2|$ буде найбільшим у точці $z_1=4i$ і найменшим у точці $z_2=3i$. Точки $z_1=4i$ і $z_2=3i$ належать межі області.

**Приклад 8** Обчислити значення функцій:

а) $e^{3+\frac{\pi}{2}i}$, б) $\cos 3i$, в) $\mathrm{sh}(-2+i)$, г) $\mathrm{Ln}(2-3i)$.

*Розв'язання*. А) За означенням $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$. Таким чином,

$$e^{3+\frac{\pi}{2}i}=e^3(\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2})=e^3\cdot i\approx 20.09i\ .$$

Б) Із означення $\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$, одержимо

$$\cos 3i=\tfrac{1}{2}(e^{i3i}+e^{-i3i})=\tfrac{1}{2}(e^{-3}+e^{3})\approx 10.07\ .$$

В) За означення $\mathrm{sh}\,z=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})$, $\cos z=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})$. Тому

$$\mathrm{sh}(-2+i)=\tfrac{1}{2}(e^{-2+i}-e^{2-i})=\tfrac{1}{2}(e^{-2}\cdot(\cos 1+i\cdot\sin 1)-e^2\cdot(\cos 1-i\cdot\sin 1))\ )=$$
$$=\cos 1\cdot\tfrac{1}{2}(e^{-2}-e^2)+i\cdot\sin 1\cdot\tfrac{1}{2}(e^{-2}+e^2)=-\cos 1\cdot\tfrac{1}{2}(e^2-e^{-2})+i\cdot\sin 1\cdot\tfrac{1}{2}(e^2+e^{-2})=$$
$$=-\cos 1\cdot\mathrm{sh}\,2+i\cdot\sin 1\cdot\mathrm{ch}\,2\,.$$

Г) Використовуючи означення логарифмічної функції, знаходимо

$$\mathrm{Ln}(2-3i)=\ln(2-3i)+2\pi ki,\quad \ln(2-3i)=\ln|2-3i|+\arg(2-3i),$$
$$|2-3i|=\sqrt{13},\qquad \ln(2-3i)=\ln\sqrt{13}+i\cdot\mathrm{arctg}(-\tfrac{2}{3});$$
$$\mathrm{Ln}(2-3i)=\tfrac{1}{2}\ln 13+i(2\pi k-\mathrm{arctg}(\tfrac{2}{3}).$$

## Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 1** При відображенні $w=z^2$ знайти: а) образи ліній $x=3$, $y=-2$, $y=c$. б) прообрази ліній $u=1$, $v=4$, $v=c$.

*Відповідь*. А) $v^2=-36(u-9)$; $v^2=16(u+4)$; $v^2=4c^2(u+c^2)$ $(c\ne 0)$. б) $x^2-y^2=1$; $xy=2$; $xy=\frac{c}{2}$ $(c\ne 0)$.

**Задача 2** При відображенні $w=\frac{1}{z}$ знайти образи ліній: а) $x=c$; б) $y=x-1$; в) $|z|=4$; г) $(x-1)^2+y^2=1$; д) $\arg z=\frac{3}{4}\pi$; е) $x^2-2x+y^2-2y-2=0$.

*Відповідь*. А) $u^2+v^2-\frac{u}{c}=0$; б) $(u-\frac{1}{2})^2+(v-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$; в) $|w|=\frac{1}{4}$; г) $u=\frac{1}{2}$;

д) $\arg w=-\frac{3}{4}\pi$; е) $(u+\frac{1}{2})^2+(v-\frac{1}{2})^2=1$.

**Задача 3** При відображенні $w=2z-i$ знайти образи ліній: а) $\mathrm{Re}z=\mathrm{Im}z$; б) $|z|=1$.

*Відповідь.* А) $u-v=1$; б) $|w+i|=2$.

**Задача 4** Знайти образ області $0\le\mathrm{Re}z\le1$, $0\le\mathrm{Im}z\le1$ при відображенні $w=z^2$. Образ і прообраз зобразити геометрично.

*Відповідь.* Квадрат відображається у криволінійний трикутник, розташований у верхній півплощині і обмежений лініями $-1\le u\le1$, $v^2=\pm4(u\pm1)$.

**Задача** 5 Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}+i\frac{n}{n+1}\right)$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2i}{3n+7i}$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{i\frac{\pi}{n}}$, г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{i^n}{n}$, д) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+3i)^n$,

е) $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\frac{i}{n}$, є) $\lim\limits_{n\to\infty}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2n}\right)}$.

*Відповідь.* А) $1+i$, б) $\frac{1}{3}$, в) 1, г) 0, д) не існує, е) $i$, є) $-i$.

**Задача 6** Обчислити наступні границі:

а) $\lim\limits_{z\to1}\frac{2z+1}{z+2}$, б) $\lim\limits_{z\to3-4i}|z|$, в) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^2+1}{z-2i}$, г) $\lim\limits_{z\to1}\frac{z^2-1}{z-1}$, д) $\lim\limits_{z\to\infty}\frac{3z^2-z+i}{2z^2+z}$,

е) $\lim\limits_{z\to0}\frac{\bar{z}}{z}$, є) $\lim\limits_{z\to-\frac{\pi}{2}i}\frac{e^{2z}+1}{e^z+i}$.

*Відповідь.* А) 1, б) 5, в) $\infty$, г) 2, д) $\frac{3}{2}$, е) не існує, є) $-2i$.

**Задача 7** Дослідити на неперервність функції. Вказати області визначення, значність, неперервність.

а) $w=z^2$, б) $w=\bar{z}$, в) $w=\mathrm{Re}z$, г) $w=\mathrm{Im}z$, д) $w=\frac{1}{z}$, е) $w=z+\frac{1}{z}$.

*Відповідь.* Визначені, однозначні, неперервні скрізь на $z$, крім точки $z=0$ для д) і е).

**Задача** 8 Обчислити значення функцій:

а) $e^{-1+2i}$, б) $\mathrm{ch}\,i$, в) $\sin(5-i)$, г) $\cos(i\cdot\ln5)$, д) $\mathrm{Ln}(3+4i)$, е) $\mathrm{Arcsin}\,2$, є) $i^{1+i}$.

*Відповідь.* А) $\frac{1}{e}(\cos2+i\cdot\sin2)$, б) $\cos1$, в) $-\sin5\cdot\mathrm{ch}\,1-i\cdot\cos5\cdot\mathrm{sh}\,1$, г) 2.6,

д) $\ln5+(\mathrm{arctg}\frac{4}{3}+2\pi k)$, $k\in Z$, е) $\frac{\pi}{2}-i\cdot\ln(2\pm\sqrt{3})+2\pi k$, $k\in Z$,

є) $ie^{-(\frac{\pi}{2}+2\pi k)}$, $k\in Z$.

## 1.3 Диференційовність функції. Аналітичні функції

**Література: [1], гл. 6, §§ 6.2 – 6.4; [3], гл. II, §49 – 56.**

Похідною однозначної функції комплексної змінної $w = f(z)$ називається границя відношення $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$, якщо $\Delta z$ будь яким способом прямує до нуля. Таким чином

$$f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Якщо в точці $z \in D$ функція $f(z)$ має похідну $f'(z)$, то вона називається ***диференційовною*** в точці z. Однозначна функція, яка є диференційовною в кожній точці області *D*, називається ***аналітичною*** в області *D*. Функція називається ***аналітичною в точці*** $z_0 \in D$, якщо $f(z)$ аналітична в деякому околі точки $z_0$.

Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ була аналітичною в області *D*, необхідно і достатньо існування в цій області неперервних частинних похідних від функцій $u(x, y)$ та $v(x, y)$, які задовольняють умови Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Коли виконуються умови Коші-Рімана, похідна $f'(z)$ обчислюється за формулами:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Похідні від елементарних функцій комплексної змінної знаходяться за тими ж формулами, що й для функцій дійсного аргументу.

Дійсна і уявна частини аналітичної в області *D* функції $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ є гармонічними функціями в цій області, тобто кожна з них задовольняє рівнянням Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Нехай $w = f(z)$ аналітична в точці $z_0$ функція та $f'(z) \neq 0$. Тоді модуль її похідної $|f'(z_0)|$ дорівнює ***коефіцієнту розтягу*** $k$ у точці $z_0$ при відображенні площини ⓩ на площину ⓦ за допомогою функції $w = f(z)$ (при $k > 1$ має місце розтяг, а при $k < 1$ – стиск). Коефіцієнт розтягу у даній точці сталий, тобто однаковий для усіх напрямів. Аргумент похідної $\theta = \arg f'(z_0)$, рівний куту, на який слід повернути дотичну в точці $z_0$ до будь-якої кривої, яка проходить через цю точку, щоб одержати дотичну у відповідній точці $w_0 = f(z_0)$ до образу даної кривої при відображенні $w = f(z)$. При цьому, якщо $\theta > 0$, то поворот відбувається проти стрілки годинника, а при $\theta < 0$ – за годинниковою стрілкою.

Крім сталості розтягу, відображення, яке здійснюється за допомогою аналітичної функції $w = f(z)$, зберігає у всіх точках, де $f'(z) \neq 0$, кути між лініями

за величиною та напрямком. Відображення з такими властивостями називають ***конформним***.

**Розв'язання типових прикладів**

**Приклад 1** Чи є наступні функції диференційовними?

а) $w=|z|$; б) $w=-\sin x-i\sin y$.

*Розв'язання.* А) Оскільки $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, то $w=u(x,y)+iv(x,u)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow\ u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $v(x,y)=0$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{\partial v}{\partial x}=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}=0\ \Rightarrow\ \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x}\neq-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Умови Коші-Рімана не задовольняються. Отже функція $w=|z|$ не є диференційовною.

Б) $u=\operatorname{Re}w=-\sin x$, $v=\operatorname{Im}w=-\sin y$. Перевіримо виконання умов Коші-Рімана, для чого знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\cos x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\cos y.$$

Умови Коші-Рімана задовольняються тільки для точок площини $\textcircled{z}$, які лежать на прямій $x=y$. Таким чином, задана функція є диференційовною в усіх точках прямої $x=y$.

**Приклад 2** Чи є аналітичною функція $w=z\operatorname{Im}z$?

*Розв'язання.* $w=z\operatorname{Im}z=xy+iy^2\ \Rightarrow\ u=\operatorname{Re}w=xy$, $v=\operatorname{Im}w=y^2$. Перевіряємо виконання умов Коші-Рімана, для чого спочатку знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=x,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2y.$$

Частинні похідні неперервні на усій площині $\textcircled{z}$, але умови Коші-Рімана виконуються лише при $x=0$ та $y=0$. Отже функція $w=z\operatorname{Im}z$ є диференційовною лише в точці $z=0$ і ніде не є аналітичною, тому що не існує околу точки $z=0$, в якій функція була би диференційовною.

**Приклад 3** Показати, що функція $w=f(z)=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)$ є аналітичною на усій площині $\textcircled{z}$ та знайти її похідну.

*Розв'язання.* $u(x,y)=\operatorname{Re}w=x^3-3xy^2$, $v(x,y)=\operatorname{Im}w=3x^2y-y^3$ – неперервні функції. Перевіримо виконання умов Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=6xy,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2.$$

Таким чином, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Оскільки $u(x,y)$ та $v(x,y)$ мають неперервні частинні похідні та задовольняють умовам Коші-Рімана у будь якій точці площини $\textcircled{z}$, то ця функція аналітична у всій площині. Знайдемо її похідну:

$$w' = f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + i6xy = 3(x+iy)^2 = 3z^2.$$

**Приклад 4** Відновити, якщо це можливо, аналітичні функції по заданій дійсній або уявній частині:

а) $u = \operatorname{Re} w = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ та $w(0) = f(0) = 0$;

б) $v = \operatorname{Im} w = e^x \sin y$, $f(0) = -i$; в) $u = x^2 + 1$.

*Розв'язання.* А) Функція $u(x, y)$ є гармонічною на усій площині $z$, оскільки вона задовольняє рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + 12y - 6x - 12y = 0.$$

Задана функція $u(x, y)$ та шукана $v(x, y) = \operatorname{Im} w$ повинні задовольняти умови Коші-Рімана.

Визначимо тепер $v(x, y)$, користуючись тим, що вона пов'язана з $u(x, y)$ умовами Коші-Рімана.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -6x^2 + 6xy + 6y^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2.$$

Інтегруючи перше рівняння по $x$ та вважаючи $y$ сталою, отримаємо

$$v(x, y) = -2x^3 + 2yx^2 + 6y^2x + \varphi(y).$$

Але тому що $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2$, повинна виконуватись рівність

$$3x^2 + 12yx + \varphi'(y) = 3x^2 + 12yx - 3y^2 \quad \text{або} \quad \varphi'(y) = -3y^2.$$

Звідси знаходимо, що $\varphi(y) = -y^3 + C$. Отже,

$$w = u + iv = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + i(-2x^3 + 3yx^2 + 6y^2x - y^3 + c) =$$

$$= x^3 - 3xy^2 + 3ix^2y - iy^3 - 2i\left(x^3 + 3ix^2y - iy^3 - \frac{c}{2}\right) = z^3 - 2i\left(z^3 - \frac{c}{2}\right)$$

Оскільки $w(0) = f(0) = 0$, то $c = 0$. Таким чином, $w = f(z) = z^3(1 - 2i)$.

Б) Оскільки $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$ у всій площині, то $v(x, y)$ – гармонічна функція. З умов Коші-Рімана знайдемо гармонічно спряжену до неї функцію $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y.$$

Інтегруючи перше рівняння по $x$, отримуємо $u(x, y) = e^x \cos y + \varphi(y)$. Але з другого рівняння $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ виходить, що виконується рівність

$-e^x \sin y + \varphi'(y) = -e^x \sin y$. Звідси $\varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi(y) = c$. Тому $w = u + iv =$ $= e^x \cos y + c + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y) + c = e^z + c$. Оскільки $f(0) = -i$, то $-i = 1 + c$, звідки $c = -1 - i$. Таким чином, $w = f(z) = e^z - 1 - i$.

В) Перш за все перевіримо існування розв'язку задачі, тобто чи є функція $u = x^2 + 1$ гармонічною. Оскільки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \neq 0,$$

то $u = x^2 + 1$ не гармонічна функція і тому у даному випадку неможливо відновити аналітичну функцію $w = u + iv$.

**Приклад 5** Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту $\theta$ при відображенні $w = e^z$ у точці $z_0 = \ln 2 + i\frac{\pi}{4}$.

*Розв'язання.* $w'(z) = e^z$,

$$w'(z_0) = w'\left(\ln 2 + i\frac{\pi}{4}\right) = e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln 2} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

Виходячи із геометричного змісту модуля та аргументу похідної отримуємо коефіцієнт перекручення $k = \left|w'\left(\ln 2 + i\pi/4\right)\right| = 2$, а кут повороту $\theta = \arg w'\left(\ln 2 + i\pi/4\right) = \arg(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) = \pi/4$. Оскільки $k > 1$, то має місце розтяг.

**Приклад 6** Яка частина площини $(z)$ розтягується, а яка стискується при відображенні $w = z^2 + 2z$?

*Розв'язання.* $w'(z) = 2z + 2$, $|w'| = |2z + 2| = 2|z + 1|$. Розтяг має місце, якщо $|w'| > 1$, тобто коли $2|z + 1| > 1$, або $|z + 1| > \frac{1}{2}$. Ця нерівність визначає множину точок, які лежать зовні кола із центром у точці $z = -1$ і радіусом $1/2$. Стиснення відбувається для точок $|z + 1| < 1/2$, тобто у середині даного кола.

Тому, для точок, що лежать зовні кола $|z + 1| < 1/2$ має місце розтяг, а для точок всередині кола $|z + 1| < 1/2$ – стиснення.

### Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 1** Чи диференційовні функції: а) $w = e^x \cos y + ie^x \sin y$;

б) $w = \cos(iz)$; в) $w = z \operatorname{Re} z$?

*Відповідь.* А) так; б) ні; в) диференційовна в точці $z = 0$.

**Задача 2** Знайти область аналітичності таких функцій: а) $w = \cos\bar{z}$;

б) $w = \sin 2z$; в) $w = \frac{1}{z^2}$.

*Відповідь.* А) не аналітична у жодній точці; б) аналітична всюди; в) аналітична всюди окрім точки $z = 0$.

**Задача 3** Знайти похідні функцій: а) $w = 3x - 2iy$; б) $w = x^3 + y + i(x + y^3)$;

в) $w = e^{\mathrm{tg}3z}$; г) $w = \sin(z/3)$; д) $w = z^3$; е) $w = \cos 2z$.

*Відповідь.* А), б) похідних немає; в) $3e^{\mathrm{tg}3z}\sec^2 3z$; г) $\frac{1}{3}\cos\frac{z}{3}$;

д) $3z^2$; е) $-2\sin 2z$.

**Задача 4** Відновити, якщо це можливо, аналітичні функції по заданих дійсній або уявній частинах:

а) $u = 2x^2 - 2y^2 - y$, $w(0) = 0$; б) $v = \dfrac{x^2 + y^2 - x}{x^2 + y^2}$, $w(1) = 0$;

в) $u = x^2 - y^2 + x$; г) $v = e^y \cos x$, $w(0) = i$; д) $u = e^{y/x}$;

е) $v = = \mathrm{arctg}\dfrac{y}{x}$; ж) $v = 2x^2 - 2y^2 + x$.

*Відповідь.* А) $w = f(z) = 2z^2 + iz$; б) $w = f(z) = \dfrac{i(z-1)}{z}$;

в) $w = f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + c)$; г) $w = f(z) = ie^{-iz}$;

д) не існує; е) не існує; ж) $w = f(z) = c + i(2z^2 + z)$.

**Задача 5** Знайти коефіцієнт розтягу та кут повороту при відображенні $w = z^2$ в точках а) $z_0 = 1$; б) $z_0 = 1 + i$; в) $z_0 = \sqrt{2}(1 - i)$.

*Відповідь.* А) $k = 2$, $\theta = 0$; б) $k = 2\sqrt{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$; в) $k = 4$, $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$;

**Задача 6**. Яка частина площини $\textcircled{z}$ розтягується, а яка стискується при таких відображеннях а) $w = \dfrac{1}{z}$; б) $w = \ln z$; в) $w = 2z^2 - 20z + 2$?

*Відповідь.* А), б) розтягується область $|z| < 1$ (окрім $z = 0$), а область $|z| > 1$ стискується; в) розтягується область $|z - 5| > \dfrac{1}{4}$, а область $|z - 5| < \dfrac{1}{4}$ стискується.

## 1.4 Інтеграл від функції комплексної змінної. Теорема Коші. Формула Коші

**Література: [3], гл. III, §61 – 79**.

Нехай $L$ – деяка замкнена або незамкнена напрямлена крива у площині $\textcircled{z}$, на якій задана функція комплексної змінної $w = f(z)$, точки $z_k \in L$, $k$ = 0, 1, 2, …, $n$ розбивають криву $L$ на $n$ елементарних дуг, на кожній з яких вибрано по одній точці $\xi_k$, $k$ = 1, 2, …, $n$. Тоді інтеграл від функції $f(z)$ уздовж кривої $L$ визначається рівністю

$$\int_L f(z)dz = \lim_{\max|\Delta z_k| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k \qquad (1.2)$$

при умові, що границя в правій частині (1.2) існує і не залежить від вибору точок $\xi_k$. Якщо $L$ – кусково-гладка крива, а $f(z)$ – кусково-неперервна й обмежена функція, то інтеграл (1.2) завжди існує.

Якщо $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то обчислення інтеграла (1.2) зводиться до обчислення криволінійних інтегралів другого роду

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x,u)dx - v(x,y)dy + i\int_L v(x,u)dx + u(x,y)dy. \qquad (1.3)$$

Якщо крива $L$ задана параметричним рівнянням $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, причому початкова і кінцева точки дуги відповідають значенням параметра $t = t_0$, $t = t_1$, то

$$\int_L f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(z(t))z'(t)dt. \qquad (1.4)$$

З формули (1.3) впливає, що для інтегралів від комплексних функцій комплексної змінної є справедливими всі властивості криволінійних інтегралів від дійсних функцій дійсних змінних. Так, зокрема,

1) $\int_L (A_1 f_1(z) + A_2 f_2(z))dz = A_1\int_L f_1(z)dz + A_2\int_L f_2(z)dz$;

2) $\int_L f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz$;

3) $\int_{L^-} f(z)dz = -\int_L f(z)dz$;

4) $\left|\int_L f(z)dz\right| \le Ml$, якщо $|f(z)| \le M$ $(M \ge 0)$.

У цих виразах $A_1$, $A_2$ – комплексні сталі; $L_1$, $L_2$ – дві криві, які складають криву $L$; $L^-$ – крива, яка збігається з кривою $L$ за формою і положенням, але обходиться у протилежному напрямку; $l$ – довжина дуги кривої $L$.

***Теорема Коші***. Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в однозв'язній області $D$, обмеженій контуром $L$, і $L_1$ – замкнений контур в $D$, то $\int_{L_1} f(z)dz = 0$.

Якщо додатково функція $w = f(z)$ неперервна в замкненій області $\overline{D} = D \cup L$, то $\int_L f(z)dz = 0$.

Теорема Коші справедлива також для багатозв'язної області.

Якщо функція $w = f(z)$ аналітична в однозв'язній області $D$, то при фіксованому $z_0 \in D$ функція $\Phi(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$ є функцією, аналітичною в області $D$, для якої $\Phi'(z) = f(z)$. Функція $\Phi(z)$ називається ***первісною*** або невизначеним інтегралом від $f(z)$, причому, якщо $F(z)$ – одна з первісних для $f(z)$, то

$\int_{z_1}^{z_2} f(t)dt = F(z_2) - F(z_1)$ – формула Ньютона-Лейбніца.

Якщо $f(z)$ аналітична в однозв'язній області $\overline{D}$ з кусково-гладкою межею $L$, то для будь якої точки $z_0 \in D$ має місце інтегральне зображення функції $f(z_0)$ – ***інтегральна формула Коші***

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{z - z_0}dz \tag{1.5}$$

і для її похідних $f^{(n)}(z_0)$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz\,,\ n = 1, 2, \ldots, \tag{1.6}$$

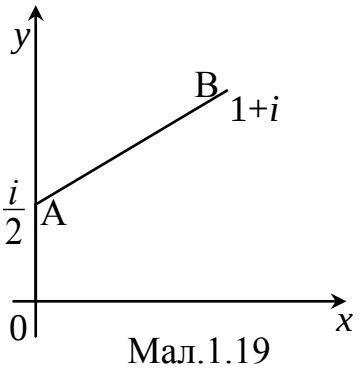
Формули (1.5) і (1.6) мають місце і в тому випадку, коли $D$ – багатозв'язна область.

**Розв'язання типових прикладів**

**Приклад 1** Обчислити $\int_\gamma z\,\mathrm{Im}\,z dz$, де $\gamma$:

а) дуга параболи $x = y^2$ від $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$;

б) ламана OAB з вершинами у точках $z_1 = 0$, $z_2 = i/2$, $z_3 = 1 + i$ (мал.1.19).



Мал.1.19

*Розв'язання*. Знайдемо дійсну та уявну частини підінтегральної функції $f(z) = z\,\mathrm{Im}\,z$:

$$u(x, y) = xy\,,\quad v(x, y) = y^2.$$

Скористаємося формулою зведення інтеграла від функції комплексної змінної до криволінійних інтегралів:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_\gamma v(x, y)dx + u(x, y)dy\,,$$

тобто

$$\int_\gamma z\,\mathrm{Im}\,z dz = \int_\gamma xydx - y^2dy + i\int_\gamma y^2dx + xydx\,.$$

Щоб обчислити криволінійні інтеграли треба перейти до параметричних рівнянь кривої інтегрування:

а) покладемо $y = t$, $x = t^2$, де $0 \le t \le 1$. Тому

$$\int_\gamma z\,\mathrm{Im}\,z dz = \int_0^1 (2t^4 - t^2)dt + i\int_0^1 3t^3 dt = \frac{1}{15} + \frac{3}{4}i\,;$$

б) рівняння відрізка OA: $x = 0$, $y = t$, де $0 \le t \le 1/2$. Тому

$$\int_{OA} z\,\mathrm{Im}\,z dz = -\int_0^{1/2} t^2 dt = -\frac{1}{24}.$$

Рівняння відрізка AB: $x = 2t-1,\ y = t$, де $1/2 \le t \le 1$. Тому

$$\int_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z dz = \int_{1/2}^{1} (3t^2 - 2t)dt + i\int_{1/2}^{1} (4t^2 - t)dt = \frac{3+19i}{24}.$$

Отже,

$$\int_{OAB} z\,\mathrm{Im}\,z dz = \int_{OA} z\,\mathrm{Im}\,z dz + \int_{AB} z\,\mathrm{Im}\,z dz = \frac{2+19i}{24}.$$

**Приклад 2** Обчислити $\int_\gamma (\bar{z} + \mathrm{Re}\,z)dz$, де $\gamma$ – еліпс $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, який обходиться проти годинникової стрілки, починаючи з точки $z = 3$.

*Розв'язання*. Визначимо дійсну та уявну частини підінтегральної функції, та використовуючи параметричні рівняння еліпса $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$, де $0 \le t \le 2\pi$, отримаємо:

$$\int_\gamma (\bar{z} + \mathrm{Re}\,z)dz = \int_\gamma 2xdx + ydy + i\int_\gamma 2xdy - ydx = -\int_0^{2\pi} 7\sin 2t dt + i\int_0^{2\pi} (9 + 3\sin 2t)dt = 18\pi i.$$

**Приклад 3** Обчислити інтеграл $\int_\gamma (2z + 3\bar{z})dz$, де $\gamma$ – верхнє півколо $|z-2| = 3$, $0 \le \arg z \le \pi$.

*Розв'язання*. Запишемо рівняння $|z-2| = 3$ у вигляді $z = 2 + 3e^{i\varphi}$, де $0 \le \varphi \le \pi$. Тоді, на $\gamma$: $dz = 3ie^{i\varphi}d\varphi$ та $\bar{z} = 2 + 3e^{-i\varphi}$. Таким чином,

$$\int_\gamma (2z + 3\bar{z})dz = \int_0^\pi [2(2 + 3e^{i\varphi}) + 3(2 + 3e^{-i\varphi})]3ie^{i\varphi}d\varphi = 3i\int_0^\pi (10e^{i\varphi} + 6e^{2i\varphi} + 9)d\varphi =$$

$$= 3i\left(\frac{10}{i}e^{i\varphi} + \frac{3}{i}e^{2i\varphi} + 9\varphi\right)\Big|_0^\pi = -60 + 27\pi i.$$

**Приклад 4** Обчислити інтеграл $\int_0^i (z-i)e^{-z}dz$.

*Розв'язання*. Функція $(z-i)e^{-z}$ аналітична у всій площині $\mathbb{C}$ і, відповідно, має первісну, яку ми знайдемо методом інтегрування по частинам. Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца для функції аналітичної в однозв'язній області, отримаємо:

$$\int_0^i (z-i)e^{-z}dz = -(z-i)e^{-z}\Big|_0^i + \int_0^i e^{-z}dz = e^{-z}(z-i+1)\Big|_0^i = 1 - i - e^{-i} =$$

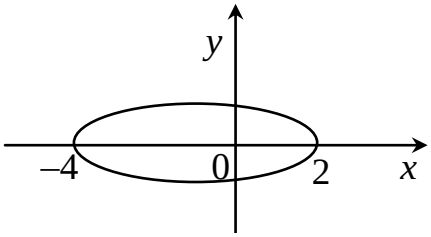
$$= 1 - \cos 1 - i(\sin 1 - 1) = 1 - \cos 1 + i(1 - \sin 1).$$

**Приклад 5** Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{e^z}{z+i\pi/2}dz$, де $\gamma$:

а) еліпс $\frac{(x+1)^2}{9}+y^2=1$, (мал.1.20); б) півколо $|z+i|=1$, (мал.1.21).

*Розв'язання.* А) У цьому випадку підінтегральна функція є аналітичною на контурі інтегрування та усередині. Тому, згідно з теоремою Коші для однозв'язної області отримаємо:

$$\int\limits_{\gamma}\frac{e^z}{z+i\pi/2}dz=0.$$

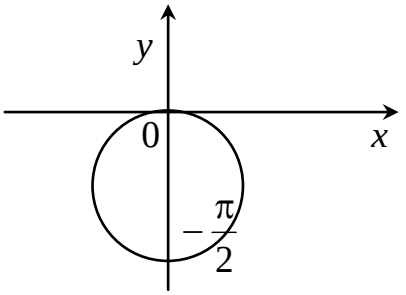


Мал.1.20

Б) У цьому випадку підінтегральна функція втрачає аналітичність в точці $z=-i\pi/2$, яка знаходиться усередині контура інтегрування. Використаємо формулу Коші:

$$\oint\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a),$$

де $f(z)=e^z$ – аналітична в крузі $|z+i|\le 1$, $a=-i\pi/2$. Тоді



Мал.1.21

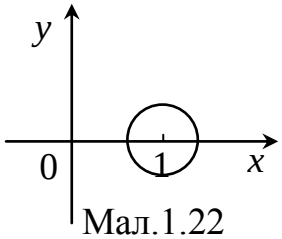
$$\int\limits_{\gamma}\frac{e^z}{z+i\pi/2}dz=2\pi i e^{-i\pi/2}=2\pi i\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\pi.$$

**Приклад 6** Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma}\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z-1)(z^2+4)^2}dz$, де $\gamma$:

а) коло $|z-1|=\frac{1}{3}$, (мал.1.22); б) коло $|z+2i|=\frac{1}{3}$, (мал.1.23).

*Розв'язання.* А) Перепишемо цей інтеграл у вигляді:

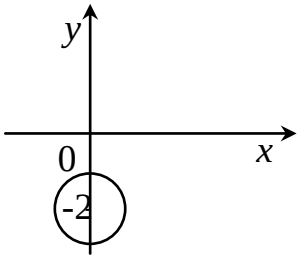
$$\int\limits_{\gamma}\frac{\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z^2+4)^2}}{(z-1)}dz.$$



Мал.1.22

Функція $\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z^2+4)^2}$ аналітична в крузі $|z-1|\le\frac{1}{3}$, і тому, застосовуючи формулу Коші, отримаємо:

$$\int\limits_{\gamma}\frac{\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z^2+4)^2}}{(z-1)}dz=2\pi i\left.\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z^2+4)^2}\right|_{z=1}=\frac{2\pi i}{25}\operatorname{sh}\pi.$$



Мал.1.23

Б) Перепишемо цей інтеграл у вигляді

$$\int_\gamma \frac{\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z-1)(z-2i)^2}}{(z+2i)^2}dz.$$

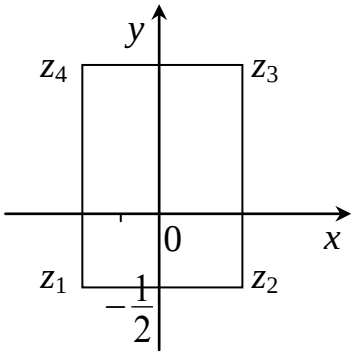
Функція $\dfrac{\operatorname{sh}\pi z}{(z-1)(z-2i)^2}$ аналітична в крузі $|z+2i|\le\dfrac{1}{3}$. Використаємо формулу Коші для $f^{(n)}(a)$:

$$f^{(n)}(a)=\frac{2\pi i}{n!}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz.$$

Тут $a=-2i$, $n=1$, $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}\pi z}{(z-1)(z-2i)^2}$, тобто

$$\int_\gamma \frac{\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z-1)(z-2i)^2}}{(z+2i)^2}dz=2\pi i\left(\frac{\operatorname{sh}\pi z}{(z-1)(z-2i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-2i}=\frac{\pi^2(2+i)}{40}.$$

**Приклад 7** Обчислити інтеграл $\int_\gamma \dfrac{e^{2z}}{(z+1/2)^4}dz$, де $\gamma-$ границя прямокутника з вершинами у точках $z_1=-1-i$, $z_2=1-i$, $z_3=1+2i$, $z_4=-1+2i$, (мал.1.24).



Мал.1.24

*Розв'язання*. Контур інтегрування містить в середині точку $z=-1/2$, у якій підінтегральна функція втрачає аналітичність. Відзначимо, що $f(z)=e^{2z}$ є аналітичною на границі прямокутника та у середині його.

Застосуємо формулу Коші для вищих похідних:

$$\int_\gamma \frac{e^{2z}}{(z+1/2)^4}dz=2\pi i(e^{2z})'''\Big|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{8\pi i}{3e}.$$

## Задачі для самостійного розв'язку

**Задача 1** Обчислити інтеграл $\int_\gamma e^{-\bar z}dz$, де $\gamma$:

а) ламана з вершинами у точках $z_1=0$, $z_2=2$, $z_3=2-i$;

б) відрізок прямої з кінцями у точках $z_1=0$, $z_2=2-i$.

*Відповідь.*

А) $e^{-2}(\cos1-2-i\sin1)+1$; б) $\dfrac{4}{5}\left(e^{-2}\left(\left(1+\dfrac{3i}{4}\right)\sin1+\left(-\dfrac{3}{4}+i\right)\cos1\right)-i+\dfrac{3}{4}\right)$.

**Задача 2** Обчислити інтеграл $\int_\gamma |z|\bar z dz$, де $\gamma-$ замкнений контур складений з верхнього півкола $|z|=1$, та відрізка $-1\le x\le1$, $y=0$.

*Відповідь.* $\pi i$.

**Задача 3** Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{e^{-z}}{z+\pi i} dz$, де $\gamma$: а) коло $|z+2i|=\frac{1}{2}$;

б) границя трикутника з вершинами у точках $z_1=0$, $z_2=-1-4i$, $z_3=4-4i$.

*Відповідь.* А) 0; б) $-2\pi i$.

**Задача 4** Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma} (2-3z+z^2)dz$, де $\gamma$:

а) дуга параболи $x=y^2$ від $z_1=0$ до $z_2=4+2i$;

б) дуга кола $|z|=2$, $-\frac{\pi}{3} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$.

*Відповідь.* А) $-44-\frac{164}{3}i$; б) $7\sqrt{3}i$.

**Задача 5** Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{\cos 2z}{z^2+3z+2} dz$, де $\gamma$:

а) коло $|z|=\frac{1}{2}$; б) коло $|z+2|=\frac{1}{2}$; в) коло $|z+1|=\frac{1}{2}$;

*Відповідь.* А) 0; б) $-2\pi i \cos 4$; в) $2\pi i \cos 2$.

**Задача 6** Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{z^3+1}{z^2+4} dz$, де $\gamma$:

а) коло $|z|=1$; б) коло $|z+2i|=1$; в) коло $|z-2i|=1$;

*Відповідь.* А) 0; б) $\frac{-8+i}{2}\pi i$; в) $\frac{8-i}{2}\pi i$.

**Задача 7** Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{\operatorname{ch} z dz}{(z+\pi i/2)^2 (z-\pi i)^2}$, де $\gamma$:

а) коло $|z+\pi i/2|=1$; б) коло $|z-\pi i|=1$; в) коло $|z|=1$;

г) еліпс $\frac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$.

*Відповідь.* А) $-\frac{8}{9}\pi$; б) $-\frac{32}{27\pi^2}$; в) 0; г) 0.

**Задача 8**. Обчислити інтеграл $\int\limits_{\gamma} \frac{e^z-1}{(z+2i)^3} dz$, де $\gamma$ – прямокутник з вершинами у точках $z_1=-1$, $z_2=-1-3i$, $z_3=1-3i$, $z_4=1$.

*Відповідь.* $i\pi e^{-2i}$.

## 1.5 Степеневі ряди. Розвинення функцій у ряди Тейлора і Лорана

**Література: [3], гл. IV, § 88-93.**

Ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n = C_0+C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2+ ...+ C_n(z-z_0)^n+... \qquad (1.7)$$

де $z$ – комплексна змінна; $C_n$, $z_0$ – комплексні числа, називається ***степеневим***. Ті значення $z$, при яких ряд (1.7) збігається, називають ***точками збіжності***. Для степеневого ряду існує круг з центром у точці $z_0$, в середині якого він збігається, а зовні його – розбігається. На межі круга ряд може як збігатися, так і розбігатися. Цей круг називається ***кругом збіжності***, його радіус $R$ – ***радіусом збіжності***.

Радіус збіжності степеневого ряду (1.7) визначається формулами

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|C_n|}{|C_{n+1}|}, \quad \text{або} \quad \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|},$$

якщо відповідні границі існують.

В середині круга збіжності степеневий ряд збігається до аналітичної функції.

Степеневий ряд (1.7) в середині круга збіжності можна почленно інтегрувати і диференціювати довільне число раз, причому радіус збіжності одержаних рядів дорівнює радіусові збіжності ряду (1.7).

Коефіцієнти степеневого ряду (1.7) виражаються через значення суми ряду $f(z)$ та її похідних в центрі круга збіжності формулами

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad n=0,1,2,... \qquad (1.8)$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична в середині круга $|z-z_0| < R$, то вона може бути зображена в цьому крузі збіжним степеневим рядом

$$f(z)= \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, \qquad (1.9)$$

причому, коефіцієнти цього ряду визначаються однозначно за формулами (1.8), або, оскільки

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz,$$

за формулами

$$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \quad n=0,1,2,... \ ,$$

де $l$ – довільний замкнений контур в середині круга аналітичності, що містить точку $z_0$.

Розвинення аналітичної функції $f(z)$ в крузі $|z-z_0| < R$ в збіжний степеневий ряд називається ***розвиненням Тейлора***, а відповідний ряд – ***рядом Тейлора*** функції $f(z)$.

Точка $z_0$ називається ***правильною точкою*** функції $f(z)$, якщо існує степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$, який збігається до функції $f(z)$ у крузі досить малого радіуса з центром у точці $z_0$, тобто якщо існує круг як завгодно малого радіуса з центром в точці $z_0$. Точки які не є правильними, називаються ***особливими точками*** функції $f(z)$ .

Якщо функція $f(z)$ аналітична в області $D$, то всі внутрішні точки цієї області є правильними точками функції $f(z)$. Серед точок границі $\Gamma$ області $D$ можуть бути правильні і особливі точки.

Якщо степеневий ряд в середині круга збіжності задає аналітичну функцію $f(z)$, то всі точки, що лежать в середині круга, є правильними, а на колі (межі круга збіжності) буде хоча б одна особлива точка функції $f(z)$. Звідси випливає, що радіус збіжності степеневого ряду дорівнює відстані від точки $z_0$ до найближчої особливої точки суми цього ряду.

Нехай $0 \le r < R \le +\infty$. Довільна аналітична в кільці $r < |z-z_0| < R$ функція $f(z)$ однозначно зображується у цьому кільці у вигляді збіжного ряду

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-z_0)^n, \qquad (1.10)$$

коефіцієнти якого визначаються згідно з формулою

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|<\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi, \qquad n=0,\pm 1,\pm 2,... \qquad (1.11)$$

де $r<\rho<R$. Ряд (1.11) називається рядом Лорана функції $f(z)$. При цьому ряд $f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-z_0)^n$ збігається в крузі $|z-z_0| < R$ і називається правильною частиною ряду Лорана, а ряд $f_2(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1} C_n (z-z_0)^n$ збігається при $|z-z_0| > r$ і називається головною частиною ряду.

Рядом Лорана для функції $f(z)$ в околі точки $z=+\infty$ буде ряд $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$, який збігається в кільці $r<|z|<\infty$. У цьому випадку головною частиною ряду Лорана є $\sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n$, а правильною – ряд $\sum_{n=-\infty}^{0} C_n z^n$.

### Розв'язання типових прикладів

**Приклад 1** Знайти область збіжності рядів

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( z^n + \frac{1}{2^n \cdot z^n} \right)$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2+i)^n + (z-2+i)^{-n}}{n \cdot 3^n}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2i)^n + (z+2i)^{-n}}{n!}$.

*Розв'язання.* А) Відповідно до означення даний ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(z^n+\frac{1}{2^n\cdot z^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot z^n}.$$

Знайдемо область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}z^n$, застосовуючи радикальну ознаку Коші $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|z|^n}=|z|$, тобто $|z|<1$, і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}z^n$ збігається в крузі радіуса $R=1$ з центром у точці $z_0=0$.

Для визначення області збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot z^n}$ виконаємо заміну змінної за формулою $\frac{1}{z}=\xi$. Тоді ряд набуває вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{2^n}$. Застосовуючи до цього ряду радикальну ознаку Коші, маємо $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|\xi|^n}{2^2}}=\frac{|\xi|}{2}$, тобто $\frac{|\xi|}{2}<1$, або $|\xi|<2$. Для даного ряду область збіжності визначається умовами $\frac{1}{|z|}<2$, або $|z|>\frac{1}{2}$, що може бути зображено як зовнішність круга радіуса $\frac{1}{2}$ з центром у початку координат. Таким чином, область збіжності заданого ряду визначається умовами $|z|<1$ і $|z|>\frac{1}{2}$. Це кільце $\frac{1}{2}<|z|<1$.

Б) Запишемо заданий ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n+(z-2+i)^{-n}}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{n\cdot 3^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n(z-2+i)^n}.$$

Для визначення області збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{n\cdot 3^n}$ застосовуємо ознаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(z-2+i)^{n+1}\cdot n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot(z-2+i)^n}\right|=\frac{|z-2+i|}{3}$, тобто $\frac{|z-2+i|}{3}<1$, тоді маємо $|z-(2-i)|<3$. Здобута нерівність геометрично описує внутрішність круга радіуса 3 з центром у точці $z=2-i$.

Другий ряд зміною $\xi=\frac{1}{z-2+i}$ зведемо до вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n\cdot 3^n}$. Область його збіжності знайдемо також, застосовуючи ознаку Даламбера :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\xi^{n+1}n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\cdot\xi^n}\right|=\frac{|\xi|}{3}<1,\quad\text{тоді}\quad|\xi|<3.$$

Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 3^n(z-2+i)^n}$ збігається в області $|z-(2-i)|>\frac{1}{3}$, тобто поза кругом радіуса $\frac{1}{3}$ з центром у точці $z=2-i$.

Отже, маємо область збіжності цього ряду у вигляді кільця

$$\frac{1}{3}<|z-2+i|<3.$$

В) Зобразимо даний ряд у вигляді:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n+(z+2i)^{-n}}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^n}.$$

Для визначення області збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n!}$ застосуємо ознаку Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(z+2i)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!(z+2i)^n}\right|=0$ , тобто область збіжності є площина $z$.

Використовуючи змінну $\xi=\frac{1}{z+2i}$, зведемо другий ряд до вигляду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!}$, для якого область збіжності є площина $\xi$, тобто для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(z+2i)^n}$ область збіжності визначається умовою $\frac{1}{|z+2i|}<\infty$, або $|z+2i|>0$.

Остаточно для області збіжності заданого ряду маємо $0<|z+2i|<\infty$, що геометрично зображує площину, яка не має точки $z=2i$.

**Приклад 2** Розвинути у ряд Тейлора функцію $f(z)=\frac{1}{3z+1}$ за степенями $z+2$. Вказати область збіжності здобутого розвинення.

*Розв'язання.* Задану функцію перетворимо до вигляду:

$$f(z)=\frac{1}{3z+1}=\frac{1}{3(z+2)-5}=-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{3(z+2)}{5}}.$$

Дріб $\frac{1}{1-\frac{3(z+2)}{5}}$ будемо розглядати як суму нескінченно спадної геометричної прогресії, модуль знаменника для якої $\frac{3(z+2)}{5}<1$. Звідси,

$$f(z)=\frac{1}{3z+1}=-\frac{1}{5}\left(1+\frac{3(z+2)}{5}+\frac{3^2(z+2)^2}{5^2}+\ldots+\frac{3^n(z+2)^n}{5^n}+\ldots\right)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(z+2)^n}{5^{n+1}}.$$

Область збіжності здобутого ряду визначимо умовою $\frac{3|z+2|}{5}<1$, звідси маємо, що $|z+2|<\frac{5}{3}$ (внутрішність круга з центром у точці $z=-2$, радіуса $\frac{5}{3}$).

**Приклад 3** Розвинути функцію $f(z)=e^z$ у ряд Тейлора в колі точки $z_0=\frac{1}{2}$. Знайти область збіжності здобутого ряду.

*Розв'язання.* Перетворимо задану функцію:

$$f(z)=e^{z}=e^{z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=e^{z-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}.$$

Використовуючи зображення $e^{u}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{u^{n}}{n!},(|u|<\infty)$, маємо

$$e^{z-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\frac{1}{2})^{n}}{n!},\qquad (|z-\tfrac{1}{2}|<\infty).$$

Область збіжності є вся комплексна площина $z$.

**Приклад 4** Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{1}{z^{2}+3z+2}$ у ряд Лорана в кільці $0<|z+2|<1$.

*Розв'язання.* Особливими точками функції

$$f(z)=\frac{1}{z^{2}+3z+2}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}$$

є точки $z_1=-1$ і $z_2=-2$. Звідси, у кільці $0<|z+2|<1$ задана функція буде аналітичною, тобто за теоремою Лорана вона зображується у цьому кільці своїм рядом Лорана $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z+2)^{n}$.

**1 спосіб.** Визначимо коефіцієнти $C_n$ за формулою

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma}\frac{\frac{1}{(z+1)(z+2)}}{(z+2)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{\gamma}\frac{1}{(z+1)(z+2)^{n+2}}dz,$$

де $\gamma$ – коло, яке належить до кільця $0<|z+2|<1$. Якщо $n+2<0$, тобто $n<-2$, тоді підінтегральна функція $\dfrac{1}{(z+1)(z+2)^{n+2}}$ аналітична в усіх точках, які належать кругу $|z+2|<\gamma$ і у цьому випадку $C_n=0$. Якщо $n+2\geq 0$, то застосовуючи формулу для похідної будь-якого порядку від аналітичної функції, одержимо:

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\frac{1}{z+1}}{(z+2)^{n+2}}dz=\frac{1}{(n+1)!}\frac{d}{dz^{n+1}}\left(\frac{1}{z+1}\right)\Bigg|_{z=-2}=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{(n+1)!(-1)^{n+1}}{(z+1)^{n+2}}|_{z=-2}=-1.$$

Таким чином, у кільці $0<|z+2|<1$ функція $f(z)$ зображується рядом Лорана $f(z)=-\sum\limits_{n=-1}^{\infty}(z+2)^{n}$.

**2 спосіб.** Розглянемо спосіб розвинення функції у ряд Лорана, який використовує розвинення відомих елементарних функцій у ряд Тейлора. Зобразимо заданий дріб, як суму елементарних дробів:

$$f(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}.$$

Якщо функцію $f(z)=\dfrac{1}{z^2+3z+2}$ необхідно зобразити у вигляді суми додатних та від'ємних ступенів $z+2$, тоді перетворюємо перший дріб так:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z+2-1}=-\frac{1}{1-(z+2)}.$$

Дріб $\dfrac{1}{1-(z+2)}$ можна розглядати як суму геометричної прогресії зі знаменником $z+2$, тому

$$-\frac{1}{1-(z+2)}=-\left(1+(z+2)+(z+2)^2+\ldots+(z+2)^n+\ldots\right).$$

Дріб $\dfrac{1}{z+2}$ має необхідний вигляд, тому що зображає собою степінь $z+2$.

Таким чином, остаточно маємо

$$f(z)=-\left(\frac{1}{z+2}+1+(z+2)+(z+2)^2+\ldots+(z+2)^n+\ldots\right)=-\sum_{n=-1}^{\infty}(z+2)^n.$$

**Приклад 5** Розвинути у ряд Лорана функцію $f(z)=\cos\dfrac{3z+4}{z+1}$ в околі точки $z_0=-1$.

*Розв'язання.* Перетворюємо задану функцію до вигляду:

$$f(z)=\cos\frac{3z+4}{z+1}=\cos\left(3+\frac{1}{z+1}\right)=\cos3\cdot\cos\frac{1}{z+1}-\sin3\cdot\sin\frac{1}{z+1}.$$

При розвиненні функцій $\cos\dfrac{1}{z+1}$ та $\sin\dfrac{1}{z+1}$ за степенями $(z+1)$ застосуємо відомі розвинення даних функцій у ряд Тейлора .

$$f(z)=\cos3\cdot\left(1-\frac{1}{2!(z+1)^2}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!(z+1)^{2n}}+\ldots\right)-$$

$$-\sin3\cdot\left(\frac{1}{z+1}-\frac{1}{3!(z+1)}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!(z+1)^{2n-1}}+\ldots\right)=$$

$$=\cos3-\frac{\sin3}{z+1}-\frac{\cos3}{2!(z+1)^2}+\frac{\sin3}{3!(z+1)^3}+\ldots\ .$$

Здобуте розвинення є справедливим в кільці $0<|z+1|<\infty$.

**Приклад 6** Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{3z-1}{2z^2-3z-2}$ в околі нескінченно віддаленої точки $z_0=\infty$.

*Розв'язання.* Перетворюємо задану функцію до вигляду :

$$f(z)=\frac{3z-1}{2z^2-3z-2}=\frac{3z-1}{(2z+1)(z-2)}=\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{z-2}.$$

Така функція не є аналітичною у точках $z_1=-\frac{1}{2}$, $z_2=2$, звідси околом нескінченно віддаленої точки, у якому функція є аналітичною, буде зовнішність круга з центром у початку координат радіуса 2: $|z|>2$.

Якщо $|z|>2$, маємо

$$\frac{1}{2z+1}=\frac{1}{2z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{2z}}=\frac{1}{2z}(1-\frac{1}{2z}+\frac{1}{2^2z^2}-\ldots+\frac{(-1)^n}{2^nz^n}+\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}z^{n+1}},$$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\frac{1}{z}\cdot\left(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots+\frac{2^n}{z^n}+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}.$$

Таким чином, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^{n+1}}{2^{n+1}z^{n+1}}$ при $|z|>2$.

**Приклад 7** Розглянути різні розвинення у ряд Лорана функції

$f(z)=\frac{3z^2+1}{z(z^2+1)}$ якщо $z_0=i$.

*Розв'язання.* Задана функція має 3 особливі точки $z_1=0$, $z_2=i$, $z_3=-i$, тому маємо три кругових кільця з центром у точці $z_0=i$, в яких функція *f*(*z*) аналітична:

$$0<|z-i|<1,\quad 1<|z-i|<2,\quad 2<|z-i|<\infty.$$

У кожному з цих кілець функція *f(z)* може бути розвинена у ряд Лорана єдиним чином.

1 В кільці $0<|z-i|<1$:

$$f(z)=\frac{3z^2+1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{(z-i)+i}+\frac{1}{(z-i)+2i}=$$

$$=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}}+\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{i^n}+$$

$$+\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{2^ni^n}=\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n(2^{n+1}+1)}{2^{n+1}\cdot i^{n+1}}.$$

2 В кільці $1<|z-i|<2$:

$$f(z)=\frac{3z^2+1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{(z-i)+i}+\frac{1}{(z-i)+2i}=$$

$$=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}}+\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^ni^n}{(z-i)^n}+$$

$$+\frac{1}{2i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^n}=\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot i^n}{(z-i)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-i)^n}{(2i)^{n+1}};$$

3 В кільці $2<|z-i|<\infty$:

$$f(z)=\frac{3z^2+1}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}+\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z+i}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{(z-i)+i}+\frac{1}{(z-i)+2i}=$$

$$=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{i}{z-i}}+\frac{1}{z-i}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{2i}{z-i}}=\frac{1}{z-i}+\frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n i^n}{(z-i)^n}+$$

$$+\frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2i)^n}{(z-i)^n}=\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot i^n}{(z-i)^{n+1}}+$$

$$+\frac{1}{z-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2i)^n}{(z-i)^n}=\frac{1}{z-i}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot i^n(1+2^n)}{(z-i)^{n+1}}.$$

Дана задача ілюструє той факт, що для функції розвинення її у ряд Лорана має різні вигляди для різних областей .

## Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 1** Знайти область збіжності рядів :

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 3^n(z-5+3i)^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum_{0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{e^{in+\frac{1}{2}}}$,

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2^n\cdot(z-1)^{n+1}}+\frac{n(z-1)^{n-1}}{3^n}\right)$.

*Відповідь.* А) $|z-5+3i|>\frac{1}{3}$, б) ряд розбігається, в) кільце $\frac{1}{2}<|z-1|<3$.

**Задача 2** Розвинути у ряд Тейлора функцію $f(z)=\sin(2z+i)$ за ступенями $z$. Вказати область збіжності здобутого розвинення.

*Відповідь.* $\operatorname{ch}1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2z)^{2n+1}}{(2n-1)!}+i\operatorname{sh}1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2z)^{2n}}{(2n)!}$ (збігається на всій площині).

**Задача 3** Розвинути у ряд Тейлора функцію $f(z)=\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ в околі точці $z_0=0$. Вказати область збіжності здобутого ряду.

*Відповідь.* $-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-\ldots$ (збігається при $|z|<1$).

**Задача 4** Розвинути у ряд Лорана функцію $f(z)=\frac{1}{z^2-z}$ в кільці $0<|z-1|<1$.

*Відповідь.* $\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n$.

**Задача 5** Розвинути у ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+8}$ за степенями (z-2). Вказати область збіжності.

*Відповідь.* $\sum\limits_{n=-1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{6^{n+2}}$, $0<|z-2|<6$.

**Задача 6** Розвинути у ряд Лорана функцію $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z+8}$ в кільці $2<|z|<4$.

*Відповідь.* $\dfrac{1}{6}\cdot\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}z^n}{4^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{z^n}\right)$.

**Задача 7** Розглянути різні розвинення у ряд Лорана функції $f(z)=\dfrac{3z^2+1}{z(z^2+1)}$, якщо $z_0=0$.

*Відповідь.* 1) в кільці $0<|z|<1$: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n\cdot 2\cdot z^{2n+2}}{z}$;

2) в кільці $1<|z|<\infty$: $\sum\limits_{n==0}^{\infty}\dfrac{z^{2n}+(-1)^n\cdot 2}{z^{2n+1}}$.

**Задача 8** Розвинути функцію $f(z)=\dfrac{4z-3}{3z^2-5z+2}$ в околі нескінченно віддаленої точки .

*Відповідь.* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^{n+1}\cdot z^{n+1}}$, $|z|>1$.

**Задача 9** Розвинути функцію $f(z)=e^{\frac{2z+1}{z-3}}$ в околі точки $z_0=3$ і вказати область збіжності здобутого розвинення.

*Відповідь.* $e^2\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{7^n}{n!(z-3)^n}$, $0<|z-3|<+\infty$.

## 1.6 Ізольовані особливі точки аналітичної функції. Лишки та їх застосування.

**Література: [3], гл.IV, §94–98, гл. V, §105–112.**

Нехай функція $f(z)$ аналітична в точці $z_0$. Точка $z_0$ називається ***нулем функції*** $f(z)$ порядку $m$, якщо виконуються умови

$$f(z_0)=0,\quad f'(z_0)=0,\ldots,f^{(m-1)}(z_0)=0,\ f^m(z_0)\neq 0.$$

У випадку $m=1$ точку $z_0$ називають ***простим нулем***.

Для того, щоб точка $z_0$ була нулем $m$-го порядку аналітичності в точці $z_0$ функції $f(z)$, необхідно і достатньо, щоб у деякому околі цієї точки виконува-

лась рівність

$$f(z)=(z-z_0)^m\cdot\varphi(z),$$

де $\varphi(z)$ аналітична в точці $z_0$ і $\varphi(z_0)\neq 0$.

Точка, в якій порушується аналітичність функції, є ***особливою***. Точка $z_0$ є ***ізольованою особливою точкою*** функції $f(z)$, якщо існує множина $0<|z-z_0|<r$ (точка $z_0$ скінчена), або множина $R<|z|<\infty$ (якщо $z_0=+\infty$), в яких функція $f(z)$ аналітична.

Існують три типа ізольованих особливих точок: ***усувна особлива точка, полюс*** та ***істотно особлива точка***. Кваліфікуються вони або за виглядом ряду Лорана, або за поведінкою функції в околі особливої точки (див. таблицю). Для того, щоб точка $z_0$ була полюсом функції $f(z)$, необхідно й достатньо, щоб ця точка була нулем функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$.

Точка $z_0$ називається ***полюсом*** порядку $m$ $(m\geq 1)$ функції $f(z)$, якщо вона є нулем порядку $m$ для функції $\varphi(z)=\dfrac{1}{f(z)}$. У випадку $m=1$ полюс називають ***простим***.

Для того, щоб точка $z_0$ була полюсом порядку $m$ функції $f(z)$ необхідно й достатньо, щоб функцію $f(z)$ можна було зобразити у вигляді:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m},$$

де функція $\varphi(z)$ аналітична у точці $z_0$ і $\varphi(z_0)\neq 0$.

Таблиця

| Типи точок | Ряд Лорана | | Поведінка функції | |
|---|---|---|---|---|
| | $z=z_0$ | $z=\infty$ | $z=z_0$ | $z=\infty$ |
| Усувна особлива | $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ | $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_{-n}z^{-n}$ | $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=c$<br>$c=const$ | $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=c$<br>$c=const$ |
| Полюс порядку $m$ | $\sum\limits_{n=-m}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ | $\sum\limits_{n=-\infty}^{m}C_nz^n$ | $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$ | $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$ |
| Істотно особлива | $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$ | $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}C_nz^n$ | $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$<br>не існує | $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$<br>не існує |

Нехай $z_0$ є ізольованою особливою точкою функції $f(z)$. ***Лишком*** функції $f(z)$ в точці $z_0$ називають число, що позначається символом $res[f(z),z_0]$ і визначається рівністю :

$$res[f(z),z_0]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz,$$

де $\gamma$ – контур, що містить всередині тільки одну особливу точку $z_0$ функції і не виходить за межі аналітичності функції $f(z)$.

Лишок функції дорівнює коефіцієнту $C_{-1}$ в розвиненні функції $f(z)$ в околі точки $z_0$ в ряд Лорана: $res[f(z),z_0]=C_{-1}$. Лишок в усувній особливій точці дорівнює нулеві.

Якщо точка $z_0$ – полюс порядку $m$ функції $f(z)$, то

$$res[f(z),z_0]=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[f(z)\cdot(z-z_0)^m].$$

У випадку, коли функція $f(z)$ в околі точки $z_0$ зображується як частка двох аналітичних функцій: $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$, $g(z_0)\neq 0, h(z_0)=0, h'(z_0)\neq 0$, тобто якщо точка $z_0$ – простий полюс функції $f(z)$, то

$$res[f(z),z_0]=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Для знаходження лишку, коли точка $z_0$ є істотно особливою точкою функції $f(z)$ потрібно знайти $C_{-1}$ – коефіцієнт в лорановому розвиненні функції $f(z)$ в околі точки $z_0$.

Нехай функція $f(z)$ – аналітична в деякому околі точки $z=\infty$. Лишком функції $f(z)$ в точці $z=\infty$ називається величина

$$res[f(z),\infty]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz,$$

де $\gamma$ – коло $|z|=R$ має досить великий радіус, яке обходиться за годинниковою стрілкою . Згідно з визначенням коефіцієнтів ряду Лорана має місце формула $res[f(z),\infty]=-C_{-1}$.

Для знаходження лишку в точці $z=\infty$ зручно користуватися таким твердженням.

***Теорема***. Нехай функція $f(z)$ аналітична на розширеній комплексній площині за винятком скінченого числа ізольованих особливих точок $z_k\,(k=1,2,\ldots,N)$. Тоді

$$res[f(z),\infty]+\sum_{k=1}^{N} res[f(z),z_k]=0.$$

Якщо функція $f(z)$ аналітична в середині області $D$ і на її межі $L$, за винятком скінченого числа ізольованих особливих точок $z_1,z_2,..z_N\in D$, то

$$\int_L f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{N} res[f(z),z_0].$$

Теорія лишків використовується також для обчислення визначених інтег-

ралів. Нехай $f(z)$ – раціональна функція, неперервна на всій дійсній осі, і степінь знаменника, принаймні, на дві одиниці більше степеня чисельника. Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{\infty} res[f(z), z_0],$$

де $z_k$ – особливі точки функції $f(z)$, які розташовані у верхній півплощині $(\mathrm{Im} z_k \geq 0)$ (Теорема Коші про лишки).

***Лемма Жордана***. Нехай $C_R$ – дуга кола радіуса $R$ з центром у точці О, що лежить у верхній половині площині, а функція $f(z)$ має вигляд $f(z) = e^{i\lambda z} F(z)$, $\lambda > 0$. Якщо функція $F(z)$ аналітична на дійсній осі, а у верхній половині площині має лише скінчене число особливих точок і $F(z) \to 0$, $|z| \to \infty$, то $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} f(z)dz = 0$ .

Інтеграли вигляду $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(z)\cos\lambda z dz$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(z)\sin\lambda z dz$, де $R(z)$ – правильний раціональний дріб, $\lambda > 0$, обчислюються з використанням вказаної леми.

Для обчислення інтегралів вигляду $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$, де $R$ – раціональна функція аргументів $\cos x$ та $\sin x$, обмежена в середині проміжку інтегрування, проводять заміну $z = e^{ix}$. Тоді $dx = \dfrac{dz}{iz}$, $\cos x = \dfrac{z^2+1}{2z}$, $\sin x = \dfrac{z^2-1}{2iz}$. При цьому $|z|=1$, $0 \leq x \leq 2\pi$. Вказана заміна зводить інтеграл до вигляду $\int\limits_C F(z)dz$, де $C$ – коло одиничного радіуса з центром в початку координат. За теоремою Коші про лишки

$$\int_C F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} res[F(z), z_k],$$

де $z_k$ – особливі точки, які знаходяться в середині кола С.

### Розв'язання типових прикладів

**Приклад 1** Знайти ізольовані особливі точки і вказати їх тип для наступних функцій: а) $f(z) = \dfrac{z-2}{z^2(z^2+1)}$, б) $f(z) = \dfrac{z - \sin z}{z^3}$, в) $f(z) = \cos\dfrac{1}{1-z}$.

*Розв'язання.* А) Чисельник і знаменник функції є аналітичні функції в усій площині $Z$, причому знаменник $z^2(z^2+1) = 0$ при $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$, чисельник в цих точках не дорівнює нулю. Отже, точки $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ є ізольованими особливими точками заданої функції типа полюса. Оскільки $z_1 = 0$ є нулем знаменника кратності 2, то для даної функції – це полюс 2-го порядку. Аналогічно, $z_2 = i$, $z_3 = -i$ – прості полюси даної функції.

Б) Функції $z-\sin z$ і $z^3$ є аналітичним і в усій площині, а їх відношення $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$ аналітичне в усій площині, крім точки $z=0$, в якій знаменник дорівнює нулю. Таким чином, точка $z=0$ є ізольованою особливістю. Для знаходження характеру цієї особливості розвинемо дану функцію в околі $z=0$ в ряд Лорана:

$$\frac{z-\sin z}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\sin z=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\cdot\left(\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)=$$

$$=\frac{1}{3!}-\frac{z^2}{5!}+\frac{z^4}{7!}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n+1)!}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n+1)!}.$$

У ряді Лорана всі члени головної частини дорівнюють нулю, таким чином точка $z=0$ є усувною особливою точкою даної функції.

В) Функція $f(z)=\cos\dfrac{1}{1-z}$ має єдину особливу точку $z=1$. Розвинемо $\cos\dfrac{1}{1-z}$ в околі $z=1$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\cos\frac{1}{1-z}=1-\frac{1}{2!(z-1)^2}+\frac{1}{4!(z-1)^4}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\ldots.$$

Точка $z=1$ є істотно особливою точкою, тому що здобуте розвинення має в головній частині нескінченну множину членів.

**Приклад 2** Дослідити характер нескінченно віддаленої точки для наступних функцій: а) $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z-1)^2}$, б) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{z^2}$, в) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}+2z^2-5$.

*Розв'язання.* А) Ізольовані особливі точки даної функції $z_1=0,\ z_2=1$, тому область $|z|>1$ є околом точки $z=\infty$, де не має особливих точок.

Розвинемо при $|z|>1$ функцію в ряд Лорана за степенями $z$, для цього поділимо $z+2$ на $z^3-2z^2+z$:

$$f(z)=\frac{z+2}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z^2}+\frac{4}{z^3}+\frac{7}{z^4}+\frac{10}{z^5}+\ldots\ .$$

Очевидно, $z=\infty$ є усувною особливою точкою (в розвиненні відсутні додатні степені $z$). До цього ж висновку приходимо, якщо обчислимо границю $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{z+2}{z(z-1)^2}=0$. Ця границя скінченна, тому $f(z)$ регулярна в нескінченності, тобто має при $z=\infty$ усувну особливість .

Б) Околом точки $z=\infty$, яка не містить інших особливих точок даної функції, є область $0<|z|<\infty$. Зобразимо функцію $f(z)$ рядом Лорана в цієї області по степеням $z$:

$$f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\frac{z^6}{8!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n}}{(2n+2)!}.$$

Здобуте розвинення містить нескінченну множину додатних степенів $z$.

Таким чином, робимо висновок, що $z=\infty$ це істотно особлива точка даної функції.

В) В області $0<|z|<\infty$ розвинемо дану функцію по степеням $z$:

$$f(z)=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{z^3\cdot 3!}+\ldots+\frac{1}{z^n\cdot n!}+\ldots+2z^2-5=2z^2-5+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}.$$

Очевидно, що $z=\infty$ є полюсом другого порядку.

**Приклад 3** Обчислити лишки в особливих точках наступних функцій:

а) $f(z)=\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$, б) $f(z)=z^2\cdot\sin\dfrac{1}{z}$.

*Розв'язання.* А) Особливими точками функції $\dfrac{\cos z}{z^3-\frac{\pi}{2}z^2}$ є точки $z_1=0$, $z_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Оскільки $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}=\infty$, то $z_1=0$ є полюсом (другого порядку).

Отже, застосовуючи формулу обчислення лишку в полюсі порядку *m*:

$$resf\,(a)=\frac{1}{(m-1)!}\cdot\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(f(z)(z-a)^m),$$

дістанемо:

$$resf\,(0)=\frac{1}{(2-1)!}\cdot\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}\cdot z^2\right)=\lim_{z\to 0}\frac{(z-\frac{\pi}{2})\sin z-\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

Точка $z_2=\dfrac{\pi}{2}$ є усувною особливою точкою даної функції тому, що

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos z}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(z-\frac{\pi}{2})}{z^2(z-\frac{\pi}{2})}=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(z-\frac{\pi}{2})}{(z-\frac{\pi}{2})}\cdot\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{z^2}=\frac{1}{\pi^2}$$ (скінченне число).

Отже, $res\,f(\frac{\pi}{2})=0$.

Б) Задана функція має особливу точку $z=0$. Розвинемо цю функцію в ряд Лорана в околі точки $z=0$:

$$f(z)=z^2\cdot\sin\frac{1}{z}=z^2(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!z^{2n-1}}+\ldots)=$$

$$=z-\frac{1}{3!z}+\frac{1}{5!z^5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!z^{2n-3}}+\ldots.$$

Очевидно, що $z=0$ це істотно особлива точка для даної функції і

$$res\,f(0)=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}.$$

**Приклад 4** Обчислити лишки відносно нескінченно віддаленої точки для функцій:

а) $f(z)=\dfrac{z^6+5z^5-2z^4}{z^5+3}$, б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2+4}$.

*Розв'язання.* А) Особливими точками даної функції є корні рівняння $z^5+3=0$. Оскільки вони належать колу $|z|=\sqrt[5]{3}$, то околом нескінченно віддаленої точки, де дана функція є аналітичною, є область $|z|>\sqrt[5]{3}$. В цій області розвинемо дану функцію в ряд Лорана по степеням $z$ поділивши чисельник на знаменник:

$$f(z)=\frac{z^6+5z^5-2z^4}{z^5+3}=z+5-\frac{2}{z}-\frac{3}{z^4}-\frac{9}{z^5}-\dots .$$

Оскільки $res\, f(\infty)=-C_{-1}$, де $C_{-1}$ – коефіцієнт при $\frac{1}{z}$, то $res\, f(\infty)=2$.

Б) Точки $z_1=2i,\ \ z_2=-2i$ є простими полюсами заданої функції.
Визначимо лишки у цих точках:

$$resf(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{\sin z}{z^2+4}\cdot(z-2i)=\frac{\sin 2i}{4i}=\frac{sh2}{4},$$

$$resf(-2i)=\lim_{z\to -2i}\frac{\sin z}{z^2+4}\cdot(z+2i)=\frac{\sin(-2i)}{4i}=\frac{sh2}{4}\ .$$

Тоді $res\, f(\infty)=-(res\, f(2i)+res\, f(-2i))=-\frac{\mathrm{sh}\,2}{2}$.

**Приклад 5** Обчислити інтеграл $\int\limits_\gamma \frac{1}{z}e^{\frac{z-1}{z}}dz$, де $\gamma$ – коло $|z|=1$.

*Розв'язання.* Підінтегральна функція $f(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{z-1}{z}}$ має особливу точку $z=0$, яка утримується в середині кола $|z|=1$, тому згідно з основною теоремою про лишки:

$$\int\limits_\gamma \frac{1}{z}e^{\frac{z-1}{z}}dz=2\pi i\cdot res\, f(0).$$

Розвинемо $f(z)=\frac{1}{z}e^{\frac{z-1}{z}}$, в околі точки $z=0$ в ряд Лорана:

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot e^{1-\frac{1}{z}}=e\cdot\frac{1}{z}\cdot e^{-\frac{1}{z}}=\frac{e}{z}(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}-\frac{1}{3!z^3}+\dots)=\frac{e}{z}-\frac{e}{z^2}+\frac{e}{2!z^3}-\frac{e}{3!z^4}+\dots .$$

Тоді $res\, f(0)=e$. Отже,

$$\int\limits_\gamma \frac{1}{z}e^{\frac{z-1}{z}}dz=2i\pi e.$$

**Приклад 6** **О**бчислити інтеграл $\int\limits_\gamma \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)}$, де $\gamma$: а) коло $|z|=\frac{3}{2}$, б) коло $|z|=3$.

*Розв'язання.* Особливими точками підінтегральної функції є корені рівняння $z^5=32$ (ці точки належать колу $|z|=2$), $z=0$ і $z=1$.

А) В середині контуру $|z|=\frac{3}{2}$ лежать $z=0$ і $z=1$.

Тоді, $\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)} = 2\pi i \cdot (res\, f(0) + res\, f(1))$.

Оскільки $z=0$ і $z=1$ прості полюси, то

$$resf(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{z(z-1)(z^5-32)} \cdot z = \frac{1}{32}, \quad resf(1) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{z(z-1)(z^5-32)} \cdot (z-1) = -\frac{1}{31}.$$

Отже,

$$\int\limits_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)} = 2\pi i\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{31}\right) = -\frac{\pi i}{496}.$$

Б) В середині контуру $|z|=3$ містяться усі особливі точки підінтегральної функції. Скористаємося тим, що

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)} = -2\pi i \cdot res\, f(\infty).$$

Маючи на увазі, що $|z|>2$, функцію $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z^5-32)}$ представимо по степеням $z$ у вигляді :

$$\frac{1}{z(z-1)(z^5-32)} = \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^9} + \ldots \ .$$

Звідки, $res\, f(\infty) = 0$, а інтеграл дорівнює:

$$\int\limits_{|z|=3} \frac{dz}{z(z-1)(z^5-32)} = -2\pi i \cdot 0 = 0.$$

**Приклад 7** Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ .

*Розв'язання.* Введемо функцію $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$, яка на дійсній осі при $z=x$, співпадає з підінтегральної функцією $f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^3}$.

Функція $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$ має у верхній півплощині полюс третього порядку в точці $z=i$. Лишок $f(z)$ відносно цього полюса дорівнює:

$$res\, f(i) = \frac{1}{2!} \cdot \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{(z-i)^3(z+i)^3}(z-i)^3\right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to i} \frac{12}{(z+i)^5} = -\frac{3i}{16}.$$

Тоді, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = 2\pi i \cdot \left(-\frac{3i}{16}\right) = \frac{3\pi}{8}$.

**Задачі для самостійного розв'язку**

**Задача 1** Визначити характер ізольованих особливих точок функцій:

а) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4}$; б) $f(z)=z\cdot\operatorname{sh}\dfrac{1}{z}$; в) $f(z)=\cos\dfrac{1}{z-2}+\sin\dfrac{2+2\pi-\pi z}{2(z-2)}$.

*Відповідь.* А) $z=0$ – полюс четвертого порядку; $z=1$ – простий полюс;
б) $z=0$ – істотно особлива точка; в) $z=2$ – усувна особлива точка.

**Задача 2** Дослідити характер нескінченно віддаленої точки для функцій:

а) $f(z)=\cos\dfrac{z}{1-z}$, б) $f(z)=\dfrac{z+2}{e^z}$, в) $f(z)=1-z+2z^2+\sin\dfrac{1}{z}$.

*Відповідь.* А) $z=\infty$ – усувна особлива точка; б) $z=\infty$ – істотно особлива точка; в) $z=\infty$ – полюс другого порядку.

**Задача 3** Визначити лишки в особливих точках даних функцій :

а) $f(z)=\dfrac{1}{z^3-z^5}$, б) $f(z)=\dfrac{\sin 2z}{(z+1)^3}$, в) $f(z)=\operatorname{tg} z$.

*Відповідь.* А) $res\, f(0)=1,\ res\, f(1)=-\dfrac{1}{2},\ res\, f(-1)=-\dfrac{1}{2}$.

Б) $res\, f(-1)=2\sin 2$, в) $res\, f\left(\dfrac{\pi}{2}(2k+1)\right)=-1$.

**Задача 4** Знайти лишки в нескінченно віддаленої точки функцій:

а) $f(z)=\dfrac{z^6+5z^3}{z^4+16}$, б) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^2}$, в) $f(z)=z\cdot\cos z$ .

*Відповідь.* А) $res\, f(\infty)=-5$, б) $res\, f(\infty)=0$, в) $res\, f(\infty)=1$.

**Задача 5** Обчислити інтеграл $\int\limits_\gamma \dfrac{z+2}{e^z-1}dz$, де $\gamma$ – коло $|z-2|=7$.

*Відповідь.* $12\pi i$.

**Задача 6** Обчислити інтеграл $\int\limits_\gamma \dfrac{\cos 2z}{z^2+1}dz$, де $\gamma$ – коло $|z+i|=\dfrac{3}{2}$.

*Відповідь.* $-\dfrac{1}{2}\operatorname{sh} 2$.

**Задача 7** Обчислити $\int\limits_\gamma \dfrac{z^5+5z^4-z+1}{z^5+2}dz$, де $\gamma$ – коло $|z|=3$ .

*Відповідь.* $10\pi i$.

**Задача 8** Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+4)^2}dx$, б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.

*Відповідь.* А) $\dfrac{\pi}{4}$, б) $\dfrac{\pi}{3}$.

# 2 ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Операційне числення використовується для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із звичайними та частинними похідними, диференціально-різницевих рівнянь та лінійних інтегральних рівнянь типу згортки. До цих рівнянь приводяться задачі по перехідним процесам лінійних фізичних систем електротехніки, радіотехніки, імпульсної техніки, теорії автоматичного регулювання та інших галузей науки і техніки.

Основою операційного числення є перетворення Лапласа. За допомогою перетворення Лапласа функції $x(t)$ (оригінал) ставиться у відповідність функція комплексного аргументу $X(p)$ (зображення). При цьому, дифенціюванню оригіналу $x(t)$ відповідає множення зображення $X(p)$, інтегруванню – ділення:

$$x(t) \to X(p),\ \ \frac{dx}{dt} \to pX(p),\ \ \int_0^t x(t)dt \to \frac{X(p)}{p}.$$

Таким чином, лінійному диференціальному (інтегро–диференціальному) рівнянню із сталими коефіцієнтами для функції $x(t)$ ставиться у відповідність алгебраїчне рівняння відносно функції $X(p)$. Знайшовши $X(p)$, за допомогою оберненого перетворення Лапласа знаходимо розв'язок $x(t)$.

## 2.1 Перетворення Лапласа. Зображення деяких функцій. Властивості перетворення Лапласа: лінійність, подібність, запізнення, випередження

**Література: [4], гл. 1, §1–5, гл. 2, §6–9.**

### Перетворення Лапласа. Зображення та оригінал

***Оригіналом*** називається комплексна функція $f(t)=u(t)+i\cdot v(t)$ дійсної змінної $t$, що задовольняє умовам:

1) $f(t)$ – однозначна, кусково-неперервна функція разом зі своїми похідними $n$-го порядку в інтервалі $(-\infty; \infty)$;
2) $f(t)=0$ при $t<0$;
3) існують такі числа $M>0$ і $s>0$, що для всіх $t>0$

$$|f(t)| < Me^{st}.$$

Число $s_0$, для якого умова 3) виконана при будь-якому $s=s_0+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) і не виконується при $s=s_0-\varepsilon$ ($s_0$ – точна нижня межа чисел $s$) називається ***показником зростання функції*** $f(t)$. Функції, які при $t\to\infty$ є обмеженими, або задовольняють умові 3) називаються ***функціями експоненціального типу***.

***Зображенням*** функції-оригіналу $f(t)$ називається функція $F(p)$ комплексної змінної $p=s+i\sigma$, яка визначається інтегралом (***інтегральним перетворенням***) Лапласа

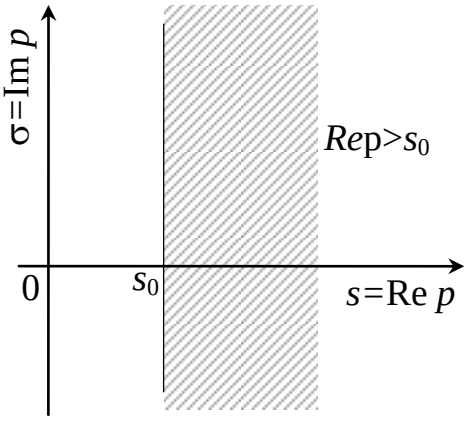
$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt. \qquad (2.1)$$

Символічно рівність (2.1) записують:

$$f(t) \to F(p),\ \ f(t) \leftarrow F(p),\ \ \ f(t) \leftrightarrow F(p),\ \ f(t) \div F(p)\ \text{ і т.п.}$$

Оригінал зображається малою літерою, а зображення – відповідною великою.

**Теорема**. Якщо функція $f(t)$ – оригінал із показником зростання $s_0$, то її зображення $F(p)$ визначено у комплексній півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ (мал.2.1).



Мал.2.1

*Доведення*. За умовою $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Тоді

$$|F(p)| = \left| \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt \right| < M \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s - s_0}.$$

*Зауваження 1*. Можна показати ([4], §2), що при умовах теореми інтеграл Лапласа збігається рівномірно відносно $p$ і тому зображення $F(p)$ в цій області є неперервною функцією.

*Зауваження 2*. Можна довести ([4], §2), що при умовах теореми зображення є аналітичною функцією і тому має похідну будь-якого порядку. Знайдемо першу похідна зображення.

$$\Delta F = \int_0^\infty e^{-pt}(e^{-\Delta p \cdot t} - 1) f(t)\,dt, \quad \frac{\Delta F}{\Delta p} = -\int_0^\infty e^{-pt} t f(t) \frac{e^{-\Delta p \cdot t} - 1}{-\Delta p \cdot t}\,dt$$

і таким чином

$$F'(p) = -\int_0^\infty e^{-pt} t f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re} p > s_0. \tag{2.2}$$

**Наслідок**. Якщо функція $F(p)$ є зображенням, то $\lim\limits_{\operatorname{Re} p \to \infty} F(p) = 0$. Цей вираз є *необхідною ознакою існування зображення*.

## Зображення деяких функцій

Функція-оригінал $\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$ називається ***одиничною функцією Хевісайда.*** Якщо функція $f(t)$ задовольняє умовам оригінала 1) і 3), то функція $f(t)\cdot\mathbf{1}(t)$ задовольняє всім умовам оригіналу. Далі для стислості оригінали $f(t)\cdot\mathbf{1}(t)$ записуватимемо без множника $\mathbf{1}(t)$.

**Зображення одиничної функції** $\mathbf{1}(t)$. По формулі (2.1) одержимо

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\mathbf{1}(t)\,dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-pt}\,dt = \lim_{a\to\infty} \frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}e^{-pa}\right).$$

Якщо $\operatorname{Re} p > 0$, то $\lim\limits_{a\to\infty} e^{-pa} = 0$. Таким чином

$$\mathbf{1}(t) \to \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \tag{2.3}$$

**Зображення функції** $e^{\alpha t}$. По формулі (2.1) маємо

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} e^{\alpha t}\,dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-(p-\alpha)t}\,dt = -\lim_{a\to\infty} \frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\Big|_0^a = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{p-\alpha} - \frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)a}\right).$$

Якщо Re ($p$–$\alpha$) > 0, то $\lim\limits_{a\to\infty} e^{-(p-\alpha)a} = 0$. Таким чином

$$e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}, \quad \text{Re } p > \text{Re } \alpha. \tag{2.4}$$

***Гамма-функція*** визначається інтегралом

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt, \qquad s > 0.$$

Можна довести справедливість формул ([4], гл. 1, §5)

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s);$$
$$\Gamma(s+1) = s\,(s-1)\,(s-2)\ldots(s-k)\Gamma(s-k), \quad k < s, \ k \in N;$$
$$\Gamma(1)=1; \qquad \Gamma(n+1) = n!, \quad n \in N; \tag{2.5}$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}; \qquad \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{2^{2n}\cdot n!}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma(-n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(-1)^n 2^{2n}\cdot n!}{(2n)!}\sqrt{\pi} \tag{2.6}$$

**Зображення степеневої функції** $t^\alpha$, $\alpha > -1$. Можна показати ([4], гл. 1, §5), що

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} t^\alpha dt = \frac{1}{p^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1), \qquad \alpha+1 > 0, \ \ \text{Re } p > 0.$$

Таким чином,

$$t^\alpha \to \frac{1}{p^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1), \qquad \alpha > -1, \ \ \text{Re } p > 0. \tag{2.7}$$

В інтервалі $-1<\alpha<0$ функція $t^\alpha$ не є оригіналом, оскільки $t^\alpha \to \infty$ при $t \to 0$, однак інтеграл Лапласа збігається. У цьому випадку оригінал і зображення називаються ***узагальненими***.

## Основні властивості перетворення Лапласа

**Лінійність.** Якщо $f_1(t) \to F_1(p)$, $f_2(t) \to F_2(p)$, …, $f_n(t) \to F_n(p)$, і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – будь-які сталі, то

$$\alpha_1 \cdot f_1(t) + \alpha_2 \cdot f_2(t) + \ldots + \alpha_n \cdot f_n(t) \to \alpha_1 \cdot F_1(p) + \alpha_2 \cdot F_2(p) + \ldots + \alpha_n \cdot F_n(p).$$

*Доведення*. Властивість випливає із лінійності інтеграла.

**Подібність.** Якщо $f(t) \to F(p)$ і $\alpha > 0$ – стала, то

$$f(\alpha t) \to \frac{1}{\alpha} \cdot F(\tfrac{p}{\alpha}).$$

*Доведення*. Зробимо заміну $\alpha t = \tau$:

$$f(\alpha t) \to \int_0^\infty e^{-pt} f(\alpha t)\, dt = \left| \begin{matrix} \alpha t = \tau \\ dt = \frac{1}{\alpha} d\tau \end{matrix} \right| = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{\alpha}\tau} f(\tau)\, d\tau = \frac{1}{\alpha} F(\tfrac{p}{\alpha}).$$

**Запізнення**. Якщо $f(t) \to F(p)$ і $t_0 > 0$ – стала, то

$$f(t - t_0) \to e^{-t_0 p} F(p).$$

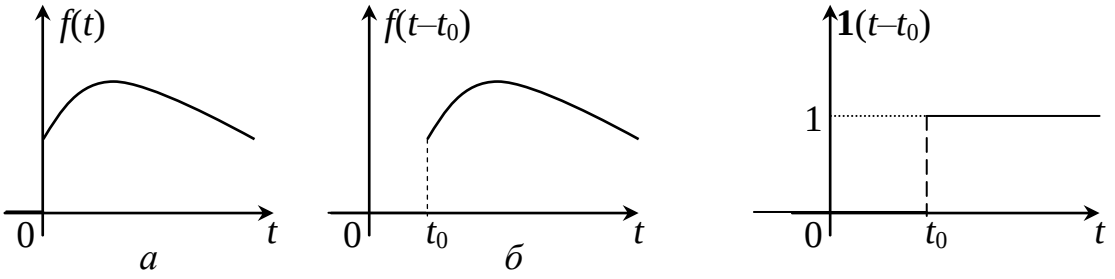
*Доведення*. Маємо $f(t-t_0) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t-t_0), & t > t_0. \end{cases}$

Графік цієї функції одержимо при зсуві графіка функції $f(t)$ (мал.2.2, *а*) на відрізок [0; $t_0$] (мал.2.2, *б*). Тому :

$$f(t-t_0) \to \int_0^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = \int_{t_0}^\infty e^{-pt} f(t-t_0)\,dt = \left|\begin{matrix} t-t_0=\tau \\ dt=d\tau \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^\infty e^{-p(\tau+t_0)} f(\tau)\,d\tau = e^{-pt_0}\int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)\,d\tau = e^{-pt_0}F(p), \quad t > t_0.$$

Множення зображення $F(p)$ на $e^{-t_0 p}$ зсуває графік оригіналу $f(t)$ вправо на відрізок $[0; t_0]$.




Мал.2.2




Мал.2.3

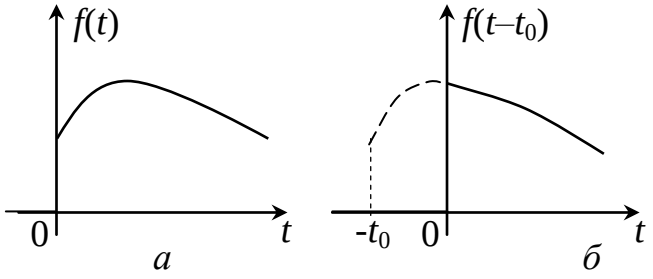
**Наслідок 1**. Зображення для оригіналу $f(\alpha t - t_0)$, $\alpha>0$, $t_0>0$. Маємо $f(t) \to F(p)$. Тоді за властивостями подібності і запізнення знаходимо

$$f(\alpha t - t_0) = f\big(\alpha(t - t_0/\alpha)\big) \to \tfrac{1}{\alpha} F(\tfrac{p}{\alpha}) \cdot e^{-\frac{t_0}{\alpha}p}. \qquad (2.8)$$

*Зауваження*. Функція $\mathbf{1}(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t \ge t_0, \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$ називається ***узагальненою одиничною функцією Хевісайда*** (мал.2.3)**.** Її зображення має вигляд

$$\mathbf{1}(t–t_0) \to \frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Властивість запізнення та узагальнену одиничну функцію використовують для знаходження зображень кусково-неперервних функцій.




Мал.2.4

**Наслідок 2**. Використовуючи властивості лінійності, запізнення можна одержати корисну формулу для знаходження зображення кусково-неперервної функцій, графік якої складається із прямих:

$$F(p) = \sum_{k=1}^{n} e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p} + \frac{\beta_k}{p^2}\right).$$

Тут $\tau_k$ – точки розриву $f(t)$ та $f'(t)$;

$\alpha_k$ – стрибки $f(t)$ в точках $\tau_k$;

$\beta_k$ – стрибки $f'(t)$ в точках $\tau_k$.

**Випередження**. Якщо $f(t) \to F(p)$ і $t_0 > 0$ – стала, то

$$f(t+t_0) \to e^{t_0 p}\cdot\left(F(p)-\int_0^{t_0} e^{-pt} f(t)dt\right).$$

*Доведення*. Графік функції $f(t+t_0)$ одержимо при зсуві графіка $f(t)$ (мал.2.4 *а*) вліво на відрізок $[0; t_0]$. Частина зсуненого графіка в інтервалі $[-t_0; 0]$ зануляється, а обрізана частина при $t>0$ є графіком функції $f(t+t_0)$ (мал.2.4 *б*). Отже:

$$f(t+t_0) \to \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t+t_0)dt = \left|\begin{matrix} t+t_0=u \\ t_0<u<\infty \end{matrix}\right| = \int_{t_0}^{\infty} e^{-p(u-t_0)} f(u)du =$$

$$= e^{pt_0}\int_{t_0}^{\infty} e^{-pu} f(u)du = e^{pt_0}\left(\int_0^{\infty} e^{-pu} f(u)du - \int_0^{t_0} e^{-pu} f(u)du\right)$$

Таким чином, $f(t+t_0) \to e^{pt_0}\left(F(p)-\int_0^{t_0} e^{-pu} f(u)du\right)$.

Властивість випередження застосовують при розв'язанні різницевих рівнянь, до яких входять $f(t)$, $f(t+t_0)$, …, $f(t+nt_0)$.

**Розв'язання типових прикладів**

**Приклад 1** Знайти зображення функцій: 1) $t^{n+\frac{1}{2}}$, 2) $t^5$, 3) $\frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}}$.

*Розв'язання*. Скористаємося формулою (2.7).

1) $t^{n+\frac{1}{2}} \to \frac{\Gamma(\frac{3}{2}+n)}{p^{\frac{3}{2}+n}}$. Використавши формулу (2.6), одержимо

$$t^{n+\frac{1}{2}} \to \frac{(2n+1)!\cdot\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\cdot n!}\cdot\frac{1}{p^{\frac{3}{2}+n}},$$

зокрема, $$\sqrt{t} \to \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^3}}.$$

2) За формулами (2.7) та (2.5) маємо $t^5 \to \frac{5!}{p^6} = \frac{120}{p^6}$.

3) $\frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}} \to \frac{\Gamma(-n+\frac{1}{2})}{p^{-n+\frac{1}{2}}}$. Використавши формулу (2.6), одержимо

$$\frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}} \to \frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot n!\cdot\sqrt{\pi}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{p^{-n+\frac{1}{2}}},$$

зокрема , $$\frac{1}{\sqrt{t}} \to \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

**Приклад 2** Знайти зображення функцій: 1) sin *t*, 2) sh *t*, 3) cos *t*, 4) ch *t*.

*Розв'язання*. Використаємо властивість лінійності і рівність (2.4).

1) $\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \to \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i}\right)$, $\sin t \to \frac{1}{p^2+1}$.

2) $\mathrm{sh}\, t = \frac{1}{2}(e^{t} - e^{-t}) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right)$, $\mathrm{sh}\, t \to \frac{1}{p^2-1}$.

3) $\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i}\right)$, $\cos t \to \frac{p}{p^2+1}$.

4) $\mathrm{ch}\, t = \frac{1}{2}(e^{t} + e^{-t}) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-1} + \frac{1}{p+1}\right)$, $\mathrm{ch}\, t \to \frac{p}{p^2-1}$.

**Приклад 3** Користуючись теоремою подібності, знайти зображення функцій: 1) $\sin \alpha t$, 2) $\mathrm{sh}\, \alpha t$, 3) $\cos \alpha t$, 4) $\mathrm{ch}\, \alpha t$, 5) $\cos^2 \alpha t$, 6) $\mathrm{ch}^2 \alpha t$, 7) $\sin^2 \alpha t$, 8) $\mathrm{sh}^2 \alpha t$, 9) $\sin \alpha t \cdot \cos \beta t$, 10) $\sin \alpha t \cdot \mathrm{ch}\, \beta t$, $\cos \alpha t \cdot \mathrm{sh}\, \beta t$.

*Розв'язання*.

1) $\sin \alpha t \to \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1}$, $\sin \alpha t \to \frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$.

2) $i\, \mathrm{sh}\, \alpha t = \sin i\alpha t \to \frac{i\alpha}{p^2 + (i\alpha)^2}$, $\mathrm{sh}\, \alpha t \to \frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$.

3) $\cos \alpha t \to \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\frac{p}{\alpha}}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^2 + 1}$, $\cos \alpha t \to \frac{p}{p^2 + \alpha^2}$.

4) $\mathrm{ch}\, \alpha t = \cos i\alpha t \to \frac{p}{p^2 + (i\alpha)^2}$, $\mathrm{ch}\, \alpha t \to \frac{p}{p^2 - \alpha^2}$.

5) $\cos^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha t) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2}\right)$, $\cos^2 \alpha t \to \frac{p^2 + 2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$.

6) $\mathrm{ch}^2 \alpha t = \cos^2 i\alpha t \to \frac{p^2 + 2i^2\alpha^2}{p(p^2 + 4i^2\alpha^2)}$, $\mathrm{ch}^2 \alpha t \to \frac{p^2 - 2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}$.

7) $\sin^2 \alpha t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha t) \to \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\alpha^2}\right)$, $\sin^2 \alpha t \to \frac{2\alpha^2}{p(p^2 + 4\alpha^2)}$.

8) $i^2\, \mathrm{sh}^2 \alpha t = \sin^2 i\alpha t \to \frac{2(i\alpha)^2}{p(p^2 + 4i^2\alpha^2)}$, $\mathrm{sh}^2 \alpha t \to \frac{2\alpha^2}{p(p^2 - 4\alpha^2)}$.

9) $\sin \alpha t \cdot \cos \beta t = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta)t + \sin(\alpha + \beta)t\right) \to$

$$\to \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - \beta}{p^2 + (\alpha - \beta)^2} + \frac{\alpha + \beta}{p^2 + (\alpha + \beta)^2}\right) = \frac{\alpha(p^2 + \alpha^2 - \beta^2)}{[p^2 + (\alpha - \beta)^2] \cdot [p^2 + (\alpha + \beta)^2]}$$

10) $\sin(\alpha+i\beta)t \to \dfrac{\alpha+i\beta}{p^2+(\alpha+i\beta)^2} = \dfrac{\alpha+i\beta}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)+2i\alpha\beta} =$

$$= \frac{(\alpha+i\beta)[(p^2+\alpha^2-\beta^2)-2i\alpha\beta]}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2},$$

або

$$\sin\alpha t\cdot \mathrm{ch}\beta t + i\cos\alpha t\cdot \mathrm{sh}\beta t \to \frac{\alpha(p^2+\alpha^2+\beta^2)+i\beta(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}.$$

Звідси маємо

$$\sin\alpha t\cdot \mathrm{ch}\beta t \to \frac{\alpha(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2},$$

$$\cos\alpha t\cdot \mathrm{sh}\beta t \to \frac{\beta(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}.$$

**Приклад 4** Знайти зображення функцій: 1) $\sin(\omega t-\varphi_0)$, 2) $\mathrm{sh}(\omega t-\varphi_0)$, 3) $\cos(\omega t-\varphi_0)$, 4) $\mathrm{ch}(\omega t-\varphi_0)$, 5) $(at-b)^\alpha$, де $\omega$, $\varphi_0$, $a$, $b > 0$, $\alpha\in\boldsymbol{R}$. Скористатись формулою (2.8). (Властивість запізнення).

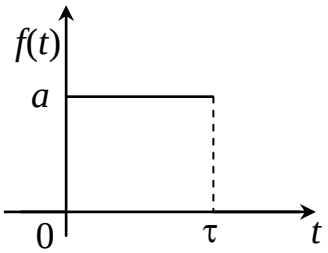
*Розв'язання.*

1) $\sin(\omega t-\varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$; 2) $\mathrm{sh}(\omega t-\varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$;

3) $\cos(\omega t-\varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$; 4) $\mathrm{ch}(\omega t-\varphi_0) \to e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$;

5) $(at-b)^\alpha \to \dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{\alpha+1}}e^{-\frac{b}{a}p} = \dfrac{\alpha^\alpha\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}e^{-\frac{b}{a}p}$.

**Приклад 5** За допомогою властивості запізнення знайти зображення кусково-неперервних функцій:



Мал.2.5

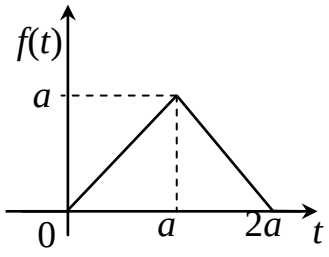
1) $f(t)=\begin{cases} a, & 0<t<\tau, \\ 0, & t<0 \text{ і } t>\tau \end{cases}$ (мал.2.5).

2) $f(t)=\begin{cases} t, & 0<t<a, \\ 2a-t, & a<t<2a, \\ 0, & t<0 \text{ і } t>2a \end{cases}$ (мал.2.6).

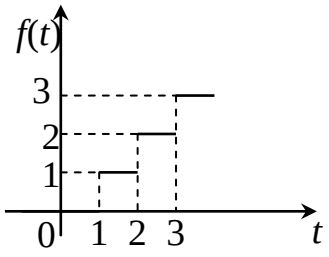
3) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0, \\ n, & n<t<n+1, \quad n=1,2,3,\ldots \end{cases}$ (мал.2.7).

4) $f(t)=\begin{cases} t-2a, & 2a<t<a+b, \\ 2b-t, & a+b<t<2b, \\ 0, & t<2a \text{ і } t>2b \end{cases}$ (мал.2.8).

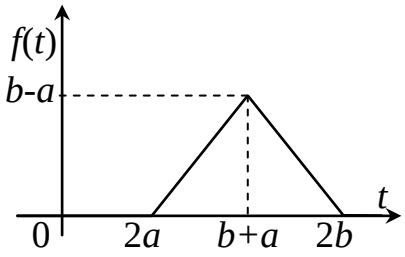
*Розв'язання.* 1) Задану функцію $f(t)$ за допомогою узагальненої одиничної функції зобразимо у вигляді $f(t)=(\mathbf{1}(t)-\mathbf{1}(t-\tau))\cdot a$.




Мал.2.6




Мал.2.7




Мал.2.8

Оскільки $\mathbf{1}(t)\to\frac{1}{p}$, $\mathbf{1}(t-\tau)\to e^{-p\tau}\cdot\frac{1}{p}$, то $f(t)\to a\cdot\frac{1-e^{-p\tau}}{p}$.

2) Оригінал $f(t)$ запишемо у вигляді $f(t)=t\cdot\mathbf{1}(t)-t\cdot\mathbf{1}(t-a)+(2a-t)\cdot\mathbf{1}(t-a)+$ $+(t-2a)\cdot\mathbf{1}(t-2a)$, або $f(t)=t\cdot\mathbf{1}(t)-2(t-a)\cdot\mathbf{1}(t-a)+(t-2a)\cdot\mathbf{1}(t-2a)$. Зображення цієї функції має вигляд

$$f(t)\to\frac{1}{p^2}-2\frac{1}{p^2}e^{-pa}+\frac{1}{p^2}e^{-2pa}=\frac{1}{p^2}(1-e^{-pa})^2.$$

3) Функцію $f(t)$ запишемо у вигляді $f(t)=\mathbf{1}(t-1)+\mathbf{1}(t-2)+\mathbf{1}(t-3)+\ldots+$ $+\mathbf{1}(t-n)+\ldots$. Зображення $F(p)$ цієї функції має вигляд

$$F(p)=\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-2p}}{p}+\frac{e^{-3p}}{p}+\ldots+\frac{e^{-np}}{p}+\ldots=\frac{1}{p(e^{p}-1)}.$$

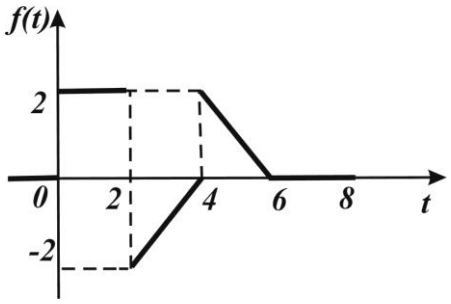
4) Функцію $f(t)$ запишемо у вигляді $f(t)=(t-2a)\cdot\mathbf{1}(t-2at)-(t-2a)\cdot\mathbf{1}(t-a-b)+$ $+(2b-t)\cdot\mathbf{1}(t-a-b)+(t-2b)\cdot\mathbf{1}(t-2b)$, або

$$f(t)=(t-2a)\cdot\mathbf{1}(t-2at)-2(t-a-b)\cdot\mathbf{1}(t-a-b)+(t-2b)\cdot\mathbf{1}(t-2b).$$

Зображення $F(p)$ цієї функції має вигляд

$$F(p)=\frac{e^{-2pa}}{p^2}-2\frac{1}{p^2}e^{-p(a+b)}+\frac{e^{-2pb}}{p^2}=\frac{1}{p^2}(e^{-pa}-e^{-pb})^2.$$

**Приклад 6** За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа




Мал.2.9

*Розв'язання*. Зображення Лапласа $F(p)$ для кусково-неперервної функції можна знайти за формулою

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n}e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p}+\frac{\beta_k}{p^2}\right),$$

де $\tau_k$ – точки розриву $f(t)$ та $f'(t)$;

$\alpha_k$ – стрибки $f(t)$ в точках $\tau_k$;

$\beta_k$ – стрибки $f'(t)$ в точках $\tau_k$.

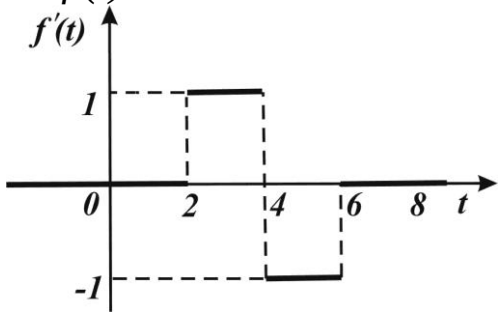
Знаходимо точки розриву заданої функції та похідної:

$$\tau_1 = 0, \quad \tau_2 = 2, \quad \tau_3 = 4, \quad \tau_4 = 6.$$

Знаходимо стрибки функції в точках $\tau_k$:

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -4, \quad \alpha_3 = 2, \quad \alpha_4 = 0.$$

Побудуємо графік похідної $f'(t)$ :




Мал.2.10

Запишемо стрибки похідної:

$$\beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 1, \quad \beta_3 = -2, \quad \beta_4 = 1.$$

Тому, шукане зображення має вигляд:

$$F(p) = e^{-p\tau_1} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{p} + \frac{\beta_1}{p^2}\right) + e^{-p\tau_2}\left(\frac{\alpha_2}{p} + \frac{\beta_2}{p^2}\right) + e^{-p\tau_3}\left(\frac{\alpha_3}{p} + \frac{\beta_3}{p^2}\right) + e^{-p\tau_4}\left(\frac{\alpha_4}{p} + \frac{\beta_4}{p^2}\right) =$$

$$= e^{-0p} \cdot \left(\frac{2}{p} + \frac{0}{p^2}\right) + e^{-2p}\left(\frac{-4}{p} + \frac{1}{p^2}\right) + e^{-4p}\left(\frac{2}{p} - \frac{2}{p^2}\right) + e^{-6p}\left(\frac{0}{p} + \frac{1}{p^2}\right).$$

Відповідь**:** $F(p) = \frac{1}{p}\left(2 - 4e^{-2p} + 2e^{-4p}\right) + \frac{1}{p^2}\left(e^{-2p} - 2e^{-4p} + e^{-6p}\right)$.

**Задачі для самостійного розв'язання**

**Задача 1** Знайти зображення функцій: 1) $t^{\frac{5}{2}}$, 2) $t^{-\frac{3}{2}}$, 3) $t^{0.2}$.

*Відповідь*. 1) $\frac{15}{8} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{p^{\frac{7}{2}}}$; 2) $-2\sqrt{\pi p}$; 3) $\frac{0.2 \cdot \Gamma(0.2)}{p^{1.2}}$.

**Задача 2** Використовуючи властивість лінійності знайти зображення функцій: 1) $\frac{1}{2}(\cos t + \operatorname{ch} t)$, 2) $\frac{1}{2}(\sin t + \operatorname{sh} t)$, 3) $\frac{1}{2}(\operatorname{sh} t - \sin t)$, 4) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch} t - \cos t)$.

*Відповідь*. 1) $\frac{p^3}{p^4 - 1}$; 2) $\frac{p^2}{p^4 - 1}$; 3) $\frac{1}{p^4 - 1}$; 4) $\frac{p}{p^4 - 1}$.

**Задача 3** Використовуючи властивість подібності знайти зображення функцій: 1) $\operatorname{sh} \alpha t \cdot \operatorname{ch} \beta t$, 2) $\cos \alpha t \cdot \cos \beta t$, 3) $\operatorname{ch} \alpha t \cdot \operatorname{ch} \beta t$, 4) $\sin \alpha t \cdot \sin \beta t$,

5) $\operatorname{sh} \alpha t \cdot \operatorname{sh} \beta t$, 6) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha t + \cos \alpha t)$, 7) $\frac{1}{2}(\operatorname{sh}\alpha t + \sin \alpha t)$, 8) $\frac{1}{2}(\operatorname{ch}\alpha t - \cos \alpha t)$,

9) $\frac{1}{2}(\mathrm{sh}\alpha t-\sin\alpha t)$, 10) $\cos\alpha t\cdot\mathrm{ch}\beta t$, 11) $\sin\alpha t\cdot\mathrm{sh}\beta t$.

*Відповідь*. 1) $\dfrac{\alpha(p^2-\alpha^2+\beta^2)}{[p^2-(\alpha-\beta)^2]\cdot[p^2-(\alpha+\beta)^2]}$;

2) $\dfrac{p(p^2+\alpha^2+\beta^2)}{[p^2+(\alpha-\beta)^2]\cdot[p^2+(\alpha+\beta)^2]}$; 3) $\dfrac{\alpha(p^2-\alpha^2-\beta^2)}{[p^2-(\alpha-\beta)^2]\cdot[p^2-(\alpha+\beta)^2]}$;

4) $\dfrac{2\alpha\beta p}{[p^2+(\alpha-\beta)^2]\cdot[p^2+(\alpha+\beta)^2]}$; 5) $\dfrac{2\alpha\beta p}{[p^2-(\alpha-\beta)^2]\cdot[p^2-(\alpha+\beta)^2]}$;

6) $\dfrac{p^3}{p^4-\alpha^4}$; 7) $\dfrac{\alpha p^2}{p^4-\alpha^4}$; 8) $\dfrac{\alpha^2 p}{p^4-\alpha^4}$; 9) $\dfrac{\alpha^3}{p^4-\alpha^4}$;

10) $\dfrac{p(p^2+\alpha^2-\beta^2)}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$; 11) $\dfrac{2\alpha\beta p}{(p^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

**Задача 4** Знайти зображення кусково-неперервних функцій ( $a,b>0$):

1) $f(t)=\begin{cases}1, & a<t<b,\\ 0, & t<a \text{ і } t>b.\end{cases}$ 2) $f(t)=\begin{cases}1, & 0<t<a,\\ -1, & a<t<2a,\\ 0, & t<0 \text{ і } t>2a.\end{cases}$

3) $f(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1-e^{-b(t-a)}, & t>a.\end{cases}$ 4) $f(t)=\begin{cases}0, & t<a,\\ e^{-b(t-a)}, & t>a.\end{cases}$

5) $f(t)=\begin{cases}0, & t<0,\\ t, & 0<t<a,\\ a, & t>a.\end{cases}$

*Відповідь*. 1) $\mathbf{1}(t-a)-\mathbf{1}(t-b)$, $\dfrac{e^{-ap}-e^{-bp}}{p}$; 2) $\mathbf{1}(t)-2\cdot\mathbf{1}(t-a)+\mathbf{1}(t-2a)$,

$\dfrac{(1-e^{-ap})^2}{p}$; 3) $(1-e^{-b(t-a)})\cdot\mathbf{1}(t-a)$, $\dfrac{be^{-ap}}{p(p+b)}$; 4) $e^{-b(t-a)}\cdot\mathbf{1}(t-a)$, $\dfrac{e^{-ap}}{p+b}$;

5) $t\cdot\mathbf{1}(t)-(t-a)\cdot\mathbf{1}(t-a)$, $\dfrac{1-e^{-ap^2}}{p^2}$.

## 2.2 Властивості перетворення Лапласа: зображення періодичного оригіналу, зсунення, диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення

**Література: [4], гл. 2, §10–15.**

**Зображення періодичного оригіналу**. Якщо $f(t)$ – періодична функція з періодом $T$, $f_0(t)=\begin{cases}f(t), & 0<t<T,\\ 0, & t>T,\end{cases}$ і $f_0(t)\to F_0(p)$, то

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}}. \tag{2.9}$$

*Доведення*. Зауважимо, що функція $f(t)$ періодична при $t>0$, при $t<0$ вона як ори-

гінал дорівнює нулю. Її можна виразити через $f_0(t)$ так: $f(t)=f_0(t)+f(t-T)$, оскільки $f(t-T)=0$ при $t<T$. Тоді $F(p)=F_0(p)+e^{-pT}\cdot F(p)$. Звідси маємо

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1-e^{-pT}},\quad \text{де}\quad F_0(p)=\int_0^T e^{-pt}f_0(t)dt.$$

*Зауваження*. Нехай періодична функція змінює знак на півперіоді

$f(t+\frac{T}{2})=-f(t)$ і $f_0(t)=\begin{cases} f(t), & 0<t<\frac{T}{2},\\ 0, & t>\frac{T}{2}.\end{cases}$ Тоді $f(t)=f_0(t)-f(t-\frac{T}{2})$ і

$F(p)=F_0(p)-e^{-\frac{T}{2}p}\cdot F(p)$. Звідси маємо

$$F(p)=\frac{F_0(p)}{1+e^{-\frac{T}{2}p}},\quad \text{де}\quad F_0(p)=\int_0^{T/2} e^{-pt}f_0(t)dt.$$

**Зсунення**. Якщо $f(t)\to F(p)$ і $p_0>0$ – стала, то

$$e^{-p_0t}\cdot f(t)\to F(p+p_0).$$

*Доведення*. За формулою (2.1)

$$e^{-p_0t}\cdot f(t)\to\int_0^\infty e^{-p_0t}e^{-pt}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(p+p_0)t}f(t)dt=F(p+p_0),\ \operatorname{Re}p>s_0-\operatorname{Re}p_0.$$

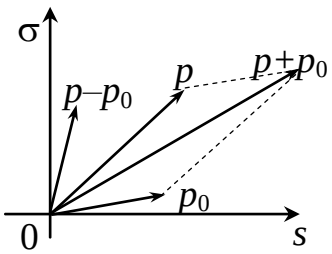
При множенні оригіналу на $e^{\mp p_0t}$ у площині $p$ відбувається зсунення на вектор $\pm p$ (мал.2.11).

Властивість зсунення застосовується при розгляді фізичних явищ, пов'язаних із згасаючими коливаннями.

**Диференціювання оригіналу**. Якщо $f(t)\to F(p)$ і функції $f'(t)$, $f''(t)$,…, $f^{(n)}(t)$ є оригіналами, то

$$f'(t)\to pF(p)-f(0),$$
$$f''(t)\to p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$
$$\ldots,$$
$$f^{(n)}(t)\to p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0),$$

де $f^{(k)}(0)=\lim\limits_{t\to+0}f^{(k)}(t)$, $k=0, 1, \ldots, n-1$.



Мал.2.11

*Доведення*. За означенням зображення маємо (інтегруємо частинами)

$$f'(t)\to\int_0^\infty e^{-pt}f'(t)dt=e^{-pt}f(t)\Big|_0^\infty+p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt.$$

Оскільки $\operatorname{Re}p=s>s_0$, то $|e^{-pt}f(t)|<Me^{-(s-s_0)t}$. Тому $\lim\limits_{t\to\infty}e^{-pt}f(t)=0$. Якщо оригінал $f(t)$ в точці $t=0$ має розрив 1-го роду, то при $t\to0$ функція має границю справа, тобто $\lim\limits_{t\to+0}e^{-pt}\cdot f(t)=f(0)$, а $e^{-pt}\cdot f(t)\Big|_0^\infty=-f(0)$. Таким чином

$$f'(t)\to pF(p)-f(0),\quad \operatorname{Re}p>s_0.$$

Якщо при $t=0$ функція $f(t)$ неперервна, то $f(t)=0$, оскільки $f(t)=0$ при $t<0$. Тому $f'(t)\to pF(p)$. Отже диференціюванню оригіналу відповідає множення зображення на $p$.

Інтегруючи частинами $n$ раз можна довести формулу для будь-якого натурального числа $n$. Якщо при $t=0$ функція $f(t)$ та її похідні $f^{(k)}(t)$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$) неперервні, то $f(0)=f^{(k)}(0)=0$. Тому $f^{(n)}(t) \to p^n F(p)$, а $n$–кратному диференціюванню оригіналу відповідає множення зображення на $p^n$.

**Диференціювання зображення**. Якщо $F(p) \to f(t)$, $\operatorname{Re} p = s > s_0$, то

$$F'(p) \to -t\cdot f(t),$$
$$F''(p) \to (-1)^2 t^2 f(t),$$
$$\ldots,$$
$$F^{(n)}(p) \to (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).$$

*Доведення*. Оскільки $|f(t)| < Me^{s_0 t}$, то при $t > 0$

$$|t^n \cdot f(t)| = t^n \cdot |f(t)| < M \cdot t^n \cdot e^{-\alpha t} e^{(s_0+\alpha)t},$$

де $\alpha > 0$ – мале число. Функція $M \cdot t^n \cdot e^{-\alpha t}$ має при $t = \frac{n}{\alpha}$ єдиний максимум $M_1$. Тому при $t>0$

$$|t^n \cdot f(t)| < M_1 \cdot e^{s_1 t}, \quad s_1 \geq s_0 + \alpha.$$

Таким чином, якщо функція $f(t)$ – оригінал з показником зростання $s_0$, то функція $t^n \cdot f(t)$ також буде оригіналом і її зображення визначено у півплощині $\operatorname{Re} p > s_1$.

Зображення $F(p)$ для функції $f(t)$ у півплощині $\operatorname{Re} p > s_0$ є аналітичною функцією і $F'(p) \to -t\cdot f(t)$ (див. зауваження 2 до теореми 1). Тоді згідно з теорією функцій комплексної змінної функція $F(p)$ має у півплощині $\operatorname{Re} p > s_1$ похідну будь-якого порядку:

$$(F'(p))' \to -t\cdot(-t\cdot f(t)), \text{ або } F''(p) \to (-1)^2 t^2 f(t),$$
$$(F''(p))' \to -t\cdot((-1)^2 t^2 f(t)), \text{ або } F'''(p) \to (-1)^3 t^3 f(t),$$
$$\ldots,$$
$$F^{(n)}(p) \to (-1)^n \cdot t^n \cdot f(t).$$

Таким чином, диференціюванню зображення $F(p)$ відповідає множення оригіналу $f(t)$ на $-t$.

**Інтегрування оригіналу**. Якщо $f(t) \to F(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$, то

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}, \quad \operatorname{Re} p > s_0.$$

*Доведення*. Функція $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ задовольняє умовам 1) і 2) функції-оригіналу, а також умові 3), оскільки

$$\left|\int_0^t f(\tau)d\tau\right| < \int_0^t Me^{s_0\tau}d\tau = \frac{M}{s_0}(e^{s_0 t}-1) < M_1 e^{s_0 t}, \qquad M_1 = \frac{M}{s_0}.$$

Таким чином, функція $\varphi(t)$ є оригіналом з показником зростання $s_0$.

Нехай $\varphi(t) \to \Phi(p)$, $\operatorname{Re} p > s_0$. Тоді за властивістю диференціювання оригіналу маємо

$$\varphi'(t) \to p\Phi(p), \quad \varphi(t) = 0,$$

і оскільки $\varphi'(t)= f(t)$, то $F(p)= p\Phi(p)$. Звідси маємо

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{p}, \qquad \int_0^t f(\tau)d\tau \to \frac{F(p)}{p}.$$

**Інтегрування зображення**. Якщо $f(t) \to F(p)$, Re $p > s_0$, і інтеграл $\int_p^\infty F(p)dp$ збігається у напівплощині Re $p > s_0$, то

$$\int_p^\infty F(p)dp \to \frac{f(t)}{t}, \quad \text{Re } p > s_0.$$

*Доведення*. У напівплощині Re $p > s_0$ інтеграл Лапласа (2.1) збігається рівномірно відносно $p$ (див. зауваження 1 до теореми 1). Проінтегруємо його у цій напівплощині по параметру $p$ від точки $p$ до $\infty$ по променю, який утворює гострий кут із дійсною віссю. Маємо

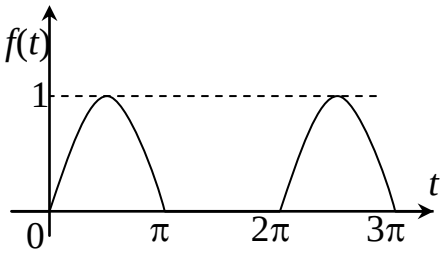
$$\int_p^\infty F(p)dp=\int_p^\infty dp\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt=\int_0^\infty f(t)dt\int_p^\infty e^{-pt}dp=\int_0^\infty e^{-pt}\frac{f(t)}{t}dt.$$

Таким чином, функція $\frac{f(t)}{t}$ є оригіналом з показником зростання $s_0$, а інтегруванню зображення відповідає ділення оригіналу на $t$.

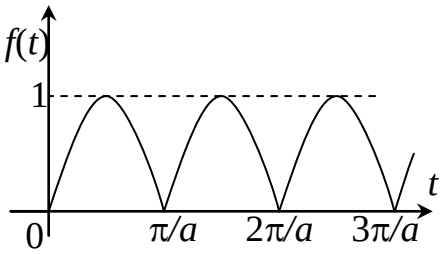
### Розв'язання типових прикладів

**Приклад 1** Користуючись формулою (2.9), знайти зображення періодичних функцій функцій ($n\in N_0$, $a>0$):

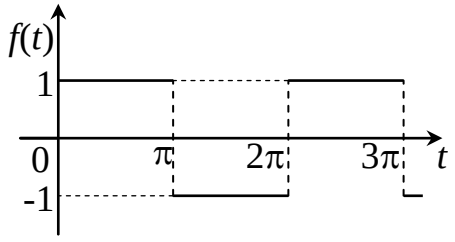
1) $f(t)= f(t+2\pi)=\begin{cases}\sin t, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi,\\ 0, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi,\end{cases}$ (мал.2.12);



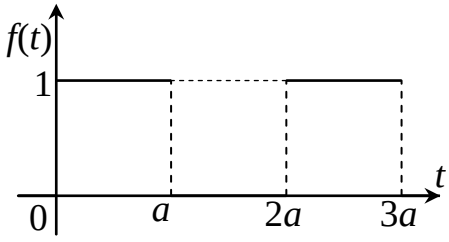

Мал.2.12




Мал.2.13




Мал.2.14




Мал.2.15

2) $f(t)= f(t+\frac{\pi}{a})=|\sin at|$, (мал.2.13);

3) $f(t)=f(t+2\pi)=\dfrac{\sin t}{|\sin t|}$, (мал.2.14);

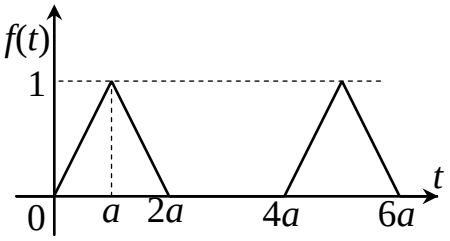
4) $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}1, & 2na<t<(2n+1)a,\\ 0, & (2n+1)a<t<(2n+2)a,\quad t<0,\end{cases}$ (мал.2.15);

5) $f(t)=f(t+4a)=\begin{cases}\frac{t}{a}-4n, & 4na<t<(4n+1)a,\\ -\frac{t}{a}+4n+2, & (4n+1)a<t<(4n+2)a,\\ 0, & (4n+2)a<t<(4n+4)a,\quad t<0.\end{cases}$ (мал.2.16).

*Розв'язання.*_ 1) За формулою (2.9) маємо

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{\pi}e^{-pt}\sin t\,dt=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\cdot\frac{e^{-pt}}{p^2+1}(-p\sin t-\cos t)\Big|_0^{\pi}.$$



Мал.2.16

Таким чином

$$\sin\bigl(t\cdot\mathbf{1}(\sin t)\bigr)\to\frac{1}{1-e^{-\pi p}}\cdot\frac{1}{p^2+1}.$$

2) Маємо

$$|\sin at|\to\frac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}\int_0^{\frac{\pi}{a}}e^{-pt}\sin at\,dt=\frac{1}{1-e^{-p\frac{\pi}{a}}}\cdot\frac{e^{-pt}}{p^2+a^2}(-p\sin at-a\cos at)\Big|_0^{\frac{\pi}{a}}.$$

$$|\sin at|\to\frac{a}{p^2+a^2}\cdot\operatorname{cth}\frac{\pi p}{2a}.$$

3) Функція $\dfrac{\sin t}{|\sin t|}$, що називається *прямокутним синусом*, має багато спільного з функцією sin*t*.

$$\frac{\sin t}{|\sin t|}\to\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\int_0^{2\pi}e^{-pt}f(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(\int_0^{\pi}e^{-pt}dt-\int_{\pi}^{2\pi}e^{-pt}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_0^{\pi}+\frac{e^{-pt}}{p}\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=\frac{1}{1-e^{-2\pi p}}\left(-\frac{e^{-\pi p}}{p}+\frac{1}{p}+\frac{e^{-2\pi p}}{p}-\frac{e^{-\pi p}}{p}\right)=$$

$$=\frac{(1-e^{-\pi p})^2}{p(1-e^{-2\pi p})}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+e^{-\pi p}}.$$

Таким чином

$$\frac{\sin t}{|\sin t|}\to\frac{1}{p}\cdot\operatorname{th}\frac{\pi p}{2}.$$

4) Маємо

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-2ap}}\int_0^{2a}e^{-pt}f(t)\,dt=\frac{1}{1-e^{-2ap}}\int_0^{a}e^{-pt}dt=$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2ap}} \cdot \frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^a = \frac{1}{1-e^{-2ap}} \cdot \left( \frac{e^{-ap}}{-p} + \frac{1}{p} \right).$$

Таким чином

$$f(t) \to \frac{1}{p(1+e^{-ap})}.$$

5) Маємо

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-4ap}} \int_0^{4a} e^{-pt} f(t)\,dt = \frac{1}{1-e^{-4ap}} \left( \int_0^a e^{-pt}\, \frac{t}{a}\, dt + \int_a^{2a} e^{-pt} \left( 2 - \frac{t}{a} \right) dt \right) =$$

$$= \frac{1}{a(1-e^{-4ap})} \cdot \left( \left( -\frac{te^{-pt}}{p} - \frac{e^{-pt}}{p^2} \right)\Big|_0^a + \left( \frac{te^{-pt}}{p} + \frac{e^{-pt}}{p^2} + \frac{2ae^{-pt}}{p} \right)\Big|_a^{2a} \right) = \frac{(1-e^{-ap})^2}{ap^2(1-e^{-4ap})},$$

або

$$f(t) \to \frac{\operatorname{th}\frac{ap}{2}}{ap^2(1+e^{-2ap})}.$$

**Приклад 2** За допомогою властивості зсунення знайти зображення кусково-неперервних функцій: 1) $\sin \omega t$, 2) $\operatorname{sh} \omega t$, 3) $\cos \omega t$, 4) $\operatorname{ch} \omega t$, 5) $t^\alpha e^{\beta t}$, 6) $t^\alpha \sin \beta t$, 7) $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \sin \alpha t$, 8) $\frac{t^n}{n!} \operatorname{sh} \alpha t$, 9) $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \operatorname{sh} \alpha t$, 10) $t^\alpha \cos \beta t$, 11) $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \cos \alpha t$, 12) $\frac{t^n}{n!} \operatorname{ch} \alpha t$, 13) $\frac{t^n}{n!} e^{\beta t} \operatorname{ch} \alpha t$.

*Розв'язання.*

1) $\sin \omega t \to \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \Rightarrow e^{-\alpha t} \sin \omega t \to \frac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$;

2) $\operatorname{sh} \omega t \to \frac{\omega}{p^2-\omega^2} \Rightarrow e^{-\alpha t} \operatorname{sh} \omega t \to \frac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$;

3) $\cos \omega t \to \frac{p}{p^2+\omega^2} \Rightarrow e^{-\alpha t} \cos \omega t \to \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$;

4) $\operatorname{ch} \omega t \to \frac{p}{p^2-\omega^2} \Rightarrow e^{-\alpha t} \operatorname{ch} \omega t \to \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$;

5) $t^\alpha \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \Rightarrow t^\alpha e^{\beta t} \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(p-\beta)^{\alpha+1}}$. При $\alpha = n \in N$, $t^n e^{\beta t} \to \frac{n!}{(p-\beta)^{n+1}}$;

6) $t^\alpha \sin \beta t = \frac{1}{2i}(t^\alpha e^{i\beta t} - t^\alpha e^{-i\beta t}) \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2i} \cdot \frac{(p+i\beta)^{\alpha+1} - (p-i\beta)^{\alpha+1}}{(p^2+\beta^2)^{\alpha+1}}$.

При $\alpha = n$ маємо $\frac{t^n}{n!} \sin \beta t \to \frac{(p+i\beta)^{n+1} - (p-i\beta)^{n+1}}{2i \cdot (p^2+\beta^2)^{n+1}}$.

При $\alpha=-\frac{1}{2}$ маємо $\frac{\sin\beta t}{\sqrt{t}}\to\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{p+i\beta}-\sqrt{p-i\beta}}{\sqrt{p^2+\beta^2}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2i}\cdot\frac{\sqrt{\left(\sqrt{p+i\beta}-\sqrt{p-i\beta}\right)^2}}{\sqrt{p^2+\beta^2}}$.

Таким чином, $\frac{\sin\beta t}{\sqrt{2\pi t}}\ \to\ \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+\beta^2}-p}}{2\sqrt{p^2+\beta^2}}$;

7) $\frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\sin\alpha t\to\frac{(p-\beta+i\alpha)^{n+1}-(p-\beta-i\alpha)^{n+1}}{2i\cdot((p-\beta)^2+\alpha^2)^{n+1}}$;

8) $\frac{t^n}{n!}\operatorname{sh}\alpha t=\frac{1}{2n!}(t^ne^{\alpha t}-t^ne^{-\alpha t})\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}-\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}\right)$,

$$\frac{t^n}{n!}\operatorname{sh}\alpha t\ \to\ \frac{(p+\alpha)^{n+1}-(p-\alpha)^{n+1}}{2(p^2-\alpha^2)^{n+1}};$$

9) $\frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\operatorname{sh}\alpha t\ \to\ \frac{(p-\beta+\alpha)^{n+1}-(p-\beta-\alpha)^{n+1}}{2((p-\beta)^2-\alpha^2)^{n+1}}$;

10) $t^\alpha\cos\beta t=\frac{1}{2}(t^\alpha e^{i\beta t}+t^\alpha e^{-i\beta t})\to\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2}\cdot\frac{(p+i\beta)^{\alpha+1}+(p-i\beta)^{\alpha+1}}{(p^2+\beta^2)^{\alpha+1}}$.

При $\alpha=n$ маємо $\frac{t^n}{n!}\cos\beta t\to\frac{(p+i\beta)^{n+1}+(p-i\beta)^{n+1}}{2\cdot(p^2+\beta^2)^{n+1}}$.

При $\alpha=-\frac{1}{2}$ маємо $\frac{\cos\beta t}{\sqrt{2\pi t}}\ \to\ \frac{\sqrt{\sqrt{p^2+\beta^2}+p}}{2\sqrt{p^2+\beta^2}}$;

11) $\frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\cos\alpha t\to\frac{(p-\beta+i\alpha)^{n+1}+(p-\beta-i\alpha)^{n+1}}{2\cdot((p-\beta)^2+\alpha^2)^{n+1}}$;

12) $\frac{t^n}{n!}\operatorname{ch}\alpha t=\frac{1}{2n!}(t^ne^{\alpha t}+t^ne^{-\alpha t})\to\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-\alpha)^{n+1}}+\frac{1}{(p+\alpha)^{n+1}}\right)$,

$$\frac{t^n}{n!}\operatorname{ch}\alpha t\ \to\ \frac{(p+\alpha)^{n+1}+(p-\alpha)^{n+1}}{2(p^2-\alpha^2)^{n+1}};$$

13) $\frac{t^n}{n!}e^{\beta t}\operatorname{ch}\alpha t\ \to\ \frac{(p-\beta+\alpha)^{n+1}+(p-\beta-\alpha)^{n+1}}{2((p-\beta)^2-\alpha^2)^{n+1}}$.

**Приклад 3** Знайти зображення диференціального виразу

$$x^{(4)}(t)-5x'''(t)-4x''(t)+2x'(t)-x(t)+8$$

при умові $x(0)=5,\ \ x'(0)=0,\ \ x''(0)=-1,\ \ x'''(0)=2.$

*Розв'язання*. Введемо позначення $x(t)\to X(p)$. Тоді за формулою диференціювання оригіналу

$$x'(t)\to pX(p)-5,$$

$$x''(t)\to p^2X(p)-5p,$$
$$x'''(t)\to p^3X(p)-5p^2+1,$$
$$x^{(4)}(t)\to p^4X(p)-5p^3+p-2.$$

Звідси, за властивістю лінійності, одержимо

$$x^{(4)}(t)-5x'''(t)-4x''(t)+2x'(t)-x(t)+8\to$$
$$\to p^4X(p)-5p^3+p-2-5(p^3X(p)-5p^2+1)-$$
$$-4(p^2X(p)-5p)+2(pX(p)-5)-X(p)+\frac{8}{p}=$$
$$=(p^4-5p^3-4p^2+2p-1)X(p)-5p^3+25p^2+21p-17+\frac{8}{p}.$$

**Приклад 4** Знайти зображення для похідної функції $f(t)=\sqrt{t}$.

*Розв'язання*. Маємо за формулами (2.6) та (2.7)

$$f(t)=t^{\frac{1}{2}}\to\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}.$$

Функція $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$ при $t$=0 має нескінченний розрив, однак інтеграл Лапласа збігається. Тобто оригінал і зображення є узагальненими. Тоді за формулою диференціювання оригіналу

$$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\to p\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2p^{\frac{1}{2}}},\quad f(0)=0.$$

Цей результат можна одержати безпосередньо за формулою (2.7).

**Приклад 5** Знайти зображення функцій: 1) $t\cdot\sin\alpha t$, 2) $t\cdot\cos\alpha t$, 3) $t\cdot\mathrm{sh}\alpha t$, 4) $t\cdot\mathrm{ch}\alpha t$.

*Розв'язання*. Скористаємося формулами (розділ 2.1, приклад 3)

$$\sin\alpha t\to\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2},\ \mathrm{sh}\alpha t\to\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2},\ \cos\alpha t\to\frac{p}{p^2+\alpha^2},\ \mathrm{ch}\alpha t\to\frac{p}{p^2-\alpha^2}$$

та формулою диференціювання зображення $-t\cdot f(t)\to F'(p)$:

1) $-t\sin\alpha t\to\left(\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}\right)',\quad t\sin\alpha t\to\frac{2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2};$

2) $-t\cos\alpha t\to\left(\frac{p}{p^2+\alpha^2}\right)',\quad t\cos\alpha t\to\frac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2};$

3) $-t\,\mathrm{sh}\alpha t\to\left(\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}\right)',\quad t\,\mathrm{sh}\alpha t\to\frac{2p\alpha}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2};$

4) $-t\,\mathrm{ch}\alpha t \to \left(\dfrac{p}{p^2-\alpha^2}\right)'$, $\quad t\,\mathrm{ch}\alpha t \to \dfrac{p^2+\alpha^2}{\left(p^2-\alpha^2\right)^2}$.

**Приклад 6** Знайти зображення функцій:

1) $S(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\sin u}{\sqrt{2\pi u}}\,du$ – синус-інтеграл Френеля,

2) $C(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\cos u}{\sqrt{2\pi u}}\,du$ – косинус-інтеграл Френеля.

*Розв'язання*. Скористаємося формулами 6) та 10) прикладу 2 (розділ 2.2) та властивістю інтегрування оригіналу:

1) $\dfrac{\sin t}{\sqrt{2\pi t}} \to \dfrac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2\sqrt{p^2+1}}$, $\quad S(t) \to \dfrac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}-p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$.

2) $\dfrac{\cos t}{\sqrt{2\pi t}} \to \dfrac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2\sqrt{p^2+1}}$, $\quad C(t) \to \dfrac{\sqrt{\sqrt{p^2+1}+p}}{2p\sqrt{p^2+1}}$.

**Приклад 7**. Знайти зображення функції $\mathrm{Si}(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\sin u}{u}\,du$ – інтегральний синус.

*Розв'язання*. Із рівності $\sin t \to \dfrac{1}{p^2+1}$ за властивістю інтегрування зображення маємо:

$$\frac{\sin t}{t} \to \int\limits_p^\infty \frac{dp}{p^2+1} = \mathrm{arctg}\,p\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,p = \mathrm{arctg}\frac{1}{p}.$$

Звідси за властивістю інтегрування оригіналу, одержимо

$$\mathrm{Si}(t) \to \frac{1}{p}\cdot \mathrm{arctg}\frac{1}{p}$$

## Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 1** Знайти зображення періодичних функцій ($n\in N_0$, $a>0$):

1) $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases} 1, & 2na<t<(2n+1)a, \\ -1, & (2n+1)a<t<(2n+2)a, \\ 0, & t<0; \end{cases}$

2) $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases} \frac{t}{a}-2n, & 2na<t<(2n+1)a, \\ -\frac{t}{a}+2(n+1), & (2n+1)a<t<(2n+2)a, \\ 0, & t<0; \end{cases}$

3) $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases} \frac{2t}{a}-(4n+1), & 2na<t<(2n+1)a, \\ -\frac{2t}{a}+4n+3, & (2n+1)a<t<(2n+2)a, \\ 0, & t<0; \end{cases}$

4) $f(t)=f(t+a)=\begin{cases}\frac{2t}{a}-(2n+1), & na<t<(n+1)a,\\ 0, & t<0;\end{cases}$

5) $f(t)=f(t+2a)=\begin{cases}\frac{t}{a}-2n, & 2na<t<(2n+1)a,\\ 0, & (2n+1)a<t<(2n+2)a, \quad t<0;\end{cases}$

6) $f(t)=f(t+a)=\begin{cases}\frac{t}{a}-n, & na<t<(n+1)a,\\ 0, & t<0.\end{cases}$

*Відповідь*. 1) $\frac{1}{p}\cdot\operatorname{th}\frac{ap}{2}$; 2) $\frac{1}{ap^2}\cdot\operatorname{th}\frac{ap}{2}$; 3) $\frac{2}{ap^2}\cdot\operatorname{th}\frac{ap}{2}-\frac{1}{p}$;

4) $\frac{2+ap+(2+ap)e^{-ap}}{ap^2(-1+e^{-ap})}$; 5) $\frac{1-(1+ap)e^{-ap}}{ap^2(1-e^{-2ap})}$; 6) $\frac{ap+1-e^{ap}}{ap^2(1-e^{ap})}$.

**Задача 2** За допомогою властивості зсунення знайти оригінали функцій:

1) $\frac{1}{p^2-4p+20}$, 2) $\frac{p-2}{p^2-4p+13}$, 3) $\frac{3p+19}{2p^2+8p+19}$, 4) $\frac{5p-1}{p^3-1}$, 5) $\frac{p+1}{p^2+2p}$.

*Відповідь*. 1) $\frac{1}{4}\cdot e^{2t}\sin 4t$; 2) $e^{-2t}\cos 3t$;

3) $\frac{3}{2}\cdot e^{-2t}\cos\sqrt{\frac{11}{2}}t+\frac{13}{\sqrt{22}}\cdot e^{-2t}\sin\sqrt{\frac{11}{2}}t$;

4) $\frac{4}{3}e^{t}+\frac{2}{3}\cdot e^{-t}\left(3\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t-2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$; 5) $e^{-t}\operatorname{ch}t$.

**Задача 3**. Знайти зображення функцій: 1) $e^{-4t}\sin 3t\cdot\cos 2t$,

2) $e^{3t}\cos 3t\cdot\cos 4t$, 3) $\operatorname{sh}t\cdot\sin 3t\cdot\cos 2t$, 4) $\operatorname{ch}t\cdot\sin 2t\cdot\sin 3t$, 5) $\operatorname{ch}t\cdot\sin^2 t$.

*Відповідь*. 1) $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+8p+41}+\frac{1}{p^2+8p+17}\right)$; 2) $\frac{1}{2}\left(\frac{p-3}{(p-3)^2+49}+\frac{p-31}{(p-3)^2+1}\right)$;

3) $\frac{p}{p^4+4}+\frac{5p}{p^4+48p^2+676}$; 4) $\frac{1}{2}\left(\frac{p^3}{(p^2+3)^2}-\frac{p^3+24}{p^4+48p^2+676}\right)$;

5) $\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p^2-9}-\frac{p^3+13p}{p^4-10p^2+169}\right)$.

**Задача 4** . Знайти зображення диференціальних виразів:

1) $x^{(4)}(t)+4x'''(t)+4x''(t), \quad x(0)=1, \quad x'(0)=2, \quad x''(0)=-2, \quad x'''(0)=3.$

2) $3x'''(t)-2x''(t)+5, \quad x(0)=-1, \quad x'(0)=2.$

*Відповідь*. 1) $(p^4+4p^3+4p^2)X(p)-p^3-6p^2-10p-3.$;

2) $(3p^3-2p^2)X(p)+3p^2-8p+13+\frac{5}{p}$.

**Задача 5** Знайти зображення функцій: 1) $t^2\cdot\cos\alpha t$, 2) $t^2\cdot\sin\alpha t$, 3) $t\cdot\sin\alpha t\cdot\operatorname{sh}\alpha t$, 4) $t\cdot\cos\alpha t\cdot\operatorname{ch}\alpha t$.

*Відповідь.*

1) $\frac{2p(p^2-3\alpha^2)}{\left(p^2+\alpha^2\right)^3}$; 2) $\frac{2\alpha(3p^2-\alpha^2)}{\left(p^2+\alpha^2\right)^3}$; 3) $\frac{2\alpha^2(3p^4-4\alpha^4)}{\left(p^4+4\alpha^4\right)^2}$; 4) $\frac{p^2(p^4-12\alpha^4)}{\left(p^4+4\alpha^4\right)^2}$.

**Задача 6** Знайти зображення функцій: 1) $\frac{e^{-at}\sin t}{t}$, 2) $\frac{\mathrm{sh}t}{t}$, 3) $\frac{\sin 7t\cdot\sin 3t}{t}$, 4) $\frac{\mathrm{ch}at-\mathrm{ch}bt}{t}$.

*Відповідь.* 1) $\mathrm{arctg}\frac{1}{p+a}$; 2) $\frac{1}{2}\ln\frac{p+1}{p-1}$; 3) $\frac{1}{4}\ln\frac{p^2+100}{p^2+16}$; 4) $\frac{1}{2}\ln\frac{p^2-b^2}{p^2-a^2}$.

## 2.3. Граничні теореми. Згортка функцій. Множення зображень. Інтеграл Дюамеля. Обернене перетворення Лапласа

**Література: [4], гл. 2, §19–23, 25, гл. 4, §32–35.**

### Граничні теореми

**Теорема 1** Якщо $f(t)\to F(p)$, $f'(t)$ – оригінал і існує $\lim\limits_{t\to 0+0} f(t)=f(0)$, то

$$\lim_{p\to\infty} pF(p)=\lim_{t\to 0+0} f(t).$$

*Доведення.* Оскільки $f'(t)$ – оригінал, то $f'(t)\to pF(p)-f(0)$. За необхідною умовою існування зображення маємо $\lim\limits_{p\to\infty}\left(pF(p)-f(0)\right)=0$. Звідси

$$\lim_{p\to\infty} pF(p)=\lim_{t\to 0+0} f(t), \text{ або } f(0)=\lim_{p\to\infty} pF(p).$$

**Теорема 2** Якщо $f(t)\to F(p)$, $f'(t)$ – оригінал і існує $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)=f(\infty)$, то

$$\lim_{p\to 0} pF(p)=\lim_{t\to\infty} f(t).$$

*Доведення.* Оскільки $f'(t)$ – оригінал, то $f'(t)\to pF(p)-f(0)$, тобто

$$\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt \to pF(p)-f(0).$$

Перейдемо в цій рівності до границі при $p\to 0$. Маємо

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt \to \lim_{p\to 0} pF(p)-f(0).$$

Оскільки інтеграл Лапласа збігається рівномірно за $p$, то

$$\lim_{p\to 0}\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,dt=\int_0^\infty \lim_{p\to 0} e^{-pt} f'(t)\,dt=\int_0^\infty f'(t)\,dt=\lim_{t\to\infty}\int_0^t f'(t)\,dt=\lim_{t\to\infty} f(t)-f(0).$$

Таким чином,

$$\lim_{p\to 0} pF(p)=\lim_{t\to\infty} f(t).$$

Отже, для неперіодичних процесів усталене значення оригіналу можна знайти за зображенням по формулі

$$f(\infty)=\lim_{p\to 0} pF(p).$$

## Згортка функцій

***Згорткою неперервних функцій*** $\varphi(t)$ і $f(t)$, $0\le t\le\infty$ (позначається $\varphi(t)*f(t)$) називається інтеграл

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = \varphi * f\,. \qquad (2.10)$$

Одержання згортки називається згортанням функцій.

***1. Комутативність:*** $\varphi(t)*f(t) = f(t)*\varphi(t)$. Замінивши в рівності (2.10) $t-\tau=u$, одержимо

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)f(\tau)\,d\tau = -\int_t^0 \varphi(u)f(t-u)\,du = \int_0^t f(t-u)\varphi(u)\,du\,, \text{ або } \varphi * f = f * \varphi\,.$$

Інші властивості приведемо без доведення.

***2. Асоціативність:*** $(\varphi*f)*\psi = \varphi*(f*\psi)$.

***3. Дистрибутивність:*** $\varphi*(f+\psi) = \varphi*f+\varphi*\psi$.

***4. Абсолютна величина згортки:*** $|\varphi*f| \le |\varphi|*|f|$.

## Згортка оригіналів

**Теорема** Якщо $f(t)$ і $\varphi(t)$ – оригінали, то згортка $f*\varphi$ теж оригінал.

*Доведення*. Для функції $f*\varphi=\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau$ очевидно виконуються умови 1) та 2) означення оригіналу. Доведемо виконання третьої умови. Оскільки

$$|f(t)|< M_0 e^{s_0 t}, \quad |\varphi(t)|< M_1 e^{s_1 t},$$

то

$$f*\varphi \le \int_0^t |f(\tau)|\cdot|\varphi(t-\tau)|\,d\tau < \int_0^t M_0 e^{s_0 t} M_1 e^{s_1(\tau-t)}d\tau\,.$$

Позначимо $M_2=M_0M_1$ і $s=\max(s_0,s_1)$. Тоді

$$f*\varphi < M_2\int_0^t e^{st}e^{s(\tau-t)}d\tau = M_2 t e^{-\alpha t}e^{(s+\alpha)t} \le Me^{(s+\alpha)t}\,.$$

Тут $M=\max(M_2 t e^{-\alpha t})$, $\alpha$ – мале число. Таким чином $f*\varphi$ є оригіналом з показником зростання $s=\max(s_0,s_1)$ ($s$ – точна границя чисел $s+\alpha$).

## Множення зображень

**Теорема Бореля.** Якщо $f(t) \to F(p)$, Re $p>s_0$ і $\varphi(t) \to \Phi(p)$, Re $p>s_1$, то $f*\varphi \to F(p)\,\Phi(p)$.

*Доведення*. Маємо

$$f*\varphi \to \int_0^\infty e^{-pt} f*\varphi dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\,.$$

У двократному інтегралі по області $D$ ($0\le t<\infty$, $0\le\tau\le t$) змінимо порядок інтегрування ($0\le\tau<\infty$, $\tau\le t\le\infty$) і зробимо заміну:

$$f*\varphi \to \int_0^\infty \varphi(\tau)d\tau \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt = \left|t-\tau = u\right| = \int_0^\infty e^{-p\tau}\varphi(\tau)d\tau \int_0^\infty e^{-pu} f(u)du\,,$$

або $f*\varphi \to F(p)\ \Phi(p)$. Згортанню у просторі оригіналів відповідає множення у просторі зображень.

### Інтеграл Дюамеля

**Теорема** Якщо $f*\varphi \to F(p)\ \Phi(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau)\varphi_t(t-\tau)d\tau + f(t)\varphi(0) \to pF(p)\Phi(p)\,.$$

*Доведення*. За властивістю диференціювання оригіналу маємо

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau \to pF(p)\Phi(p)\,.$$

Інтеграл залежить від $t$ як від параметра та як функція верхньої границі. Тому:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau + f(t)\varphi(0) \to pF(p)\Phi(p)\,.$$

*Зауваження 1.* Другий спосіб доведення. За властивістю диференціювання оригіналу: $\varphi'(t) \to p\Phi(p) - \varphi(0)$. За теоремою множення зображень

$$f*\varphi' = \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau \to F(p)\ (\ p\Phi(p) - \varphi(0)\ ) = pF(p)\Phi(p) - F(p)\varphi(0).$$

За властивістю лінійності $pF(p)\Phi(p) \to \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau + f(t)\varphi(0)\,.$

*Зауваження 2.* Використовуючи властивість комутативності згортки, оригінал для зображення $pF(p)\Phi(p)$ можна представити одним із способів:

$$\begin{aligned} pF(p)\Phi(p) &\to f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(\tau)\varphi'(t-\tau)d\tau = \\ &= f(t)\varphi(0) + \int_0^t f(t-\tau)\varphi'(\tau)d\tau = \\ &= f(0)\varphi(t) + \int_0^t f'(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = \\ &= f(0)\varphi'(0) + \int_0^t f'(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\,. \end{aligned} \qquad (2.11)$$

### Обернене перетворення Лапласа

***Теорема*** Якщо функція $F(p)$ аналітична в області $\mathrm{Re}\,p > s_0$ і в цій області $\lim\limits_{\mathrm{Im}\,p\to\infty} F(p) = 0$ і $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(s+i\sigma)|d\sigma$ збігається, то функція є зображенням а її оригінал має вигляд

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-\infty}^{s+\infty}e^{pt}F(p)dp\,, \qquad (2.12)$$

де $s=\mathrm{Re}\,p>s_0$.

Рівність (2.12) називається формулою обернення Рімана-Меліна і визначає обернене перетворення Лапласа. В точках розриву функції інтеграл (2.12) збігається до значення $\frac{1}{2}(f(t-0)+f(t+0))$, а при $t<0$ $f(t)=0$.

**Теорема розкладання.** Розглянемо замкнений контур $\gamma=AB+c_r$, де $c_r$ – дуга кола *DCDEA* радіуса $r$ (мал.2.17). Маємо

$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}e^{pt}F(p)dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}e^{pt}F(p)dp+\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}e^{pt}F(p)dp.$ У цій рівності перейдемо до границі $r\to\infty$.

Згідно з лемою Жордана ($t>0$)

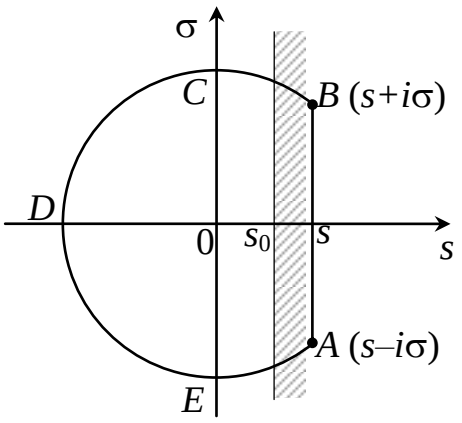
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_r}e^{pt}F(p)dp=0\,,$$

а за формулою (2.12)

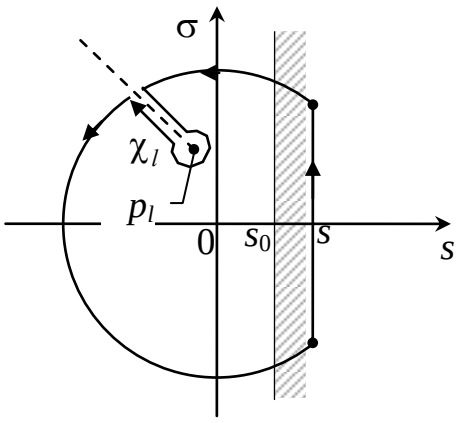
$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}e^{pt}F(p)dp=\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\sigma}^{s+i\sigma}e^{pt}F(p)dp=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}e^{pt}F(p)dp=f(t)\,.$$

Тому

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}e^{pt}F(p)dp\,,\ t>0,\ r\to\infty.$$




Мал.2.17




Мал.2.18

Якщо $p_k$ ($k=1,2,\ldots,n$; $\mathrm{Re}p<s_0$) – особливі точки (полюси або суттєво особливі точки) функції $e^{pt}F(p)$, то за теоремою Коші про лишки інтеграл по замкненому контуру дорівнює сумі лишків підінтегральної функції в особливих точках, що знаходяться всередині контуру інтегрування $\gamma$:

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(e^{pt}F(p),p_k)\,. \qquad (2.13)$$

Якщо серед особливих точок є точки розгалуження $p_l$ ($l=1,2,\ldots,m$), то

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(e^{pt}F(p),p_k)-\frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{m}\int_{\chi_l}e^{pt}F(p)dp, \qquad (2.14)$$

де $\chi_l$ – контур, що складається із кола малого радіуса з центром у точці розгалуження, верхнього на нижнього країв розрізу по променю, проведеного із цієї точки (мал.2.18).

**Знаходження оригіналу дробово-раціонального зображення**

Функція $F(p)$ називається ***дробово-раціональною***, якщо

$$F(p)=\frac{P_m(p)}{Q_n(p)},$$

де $P_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлени степені $m$ та $n$. Якщо $F(p)$ – зображення, то дріб правильний ($m < n$), оскільки $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$.

Корені рівняння $Q_n(p)=0$ у випадку нескоротного дробу є полюсами зображення $F(p)$. Кратність полюса дорівнює кратності кореня. Знайдемо оригінал за формулою (2.13).

А) Всі корені (полюси) $p_k$ ($k$=1,2,…,$n$) прості. Маємо

$$\mathrm{Res}(e^{pt}F(p),p_k)=\lim_{p\to p_k}(p-p_k)e^{pt}F(p)=$$

$$=\lim_{p\to p_k}\frac{e^{pt}P_m(p)}{\dfrac{Q_n(p)-Q_n(p_k)}{p-p_k}}=\frac{e^{pt}P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}. \qquad (2.15)$$

Оригінал дорівнює

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}\cdot e^{p_kt}. \qquad (2.16)$$

Б) Один із простих коренів знаменника дорівнює *нулю*, або $F(p)=\dfrac{P_m(p)}{pQ_n(p)}$.

Оскільки $\left(pQ_n(p)\right)'\Big|_{p=p_k}=Q_n(p_k)+p_kQ_n'(p_k)=p_kQ_n'(p_k)$ і

$\left(pQ_n(p)\right)'\Big|_{p=0}=Q_n(0)+0\cdot Q_n'(0)=Q_n(0)$, то

$$f(t)=\frac{P_m(0)}{Q_n(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{P_m(p_k)}{p_kQ_n'(p_k)}\cdot e^{p_kt}. \qquad (2.17)$$

В) Серед коренів знаменника є *кратні*. Нехай $p_k$ – корінь кратності $s_k$ ($k$=1,2,…,$l$; $s_1+\ldots+s_k+\ldots s_l=n$). Маємо

$$\mathrm{Res}(e^{pt}F(p),p_k)=\frac{1}{(s_k-1)!}\cdot\lim_{p\to p_k}\frac{d^{s_k-1}}{dp^{s_k-1}}\left((p-p_k)^{s_k}e^{pt}F(p)\right), \qquad (2.18)$$

і остаточно

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(s_k-1)!}\cdot\lim_{p\to p_k}\frac{d^{s_k-1}}{dp^{s_k-1}}\left((p-p_k)^{s_k}e^{pt}\frac{P_m(p)}{Q_n(p)}\right). \qquad (2.19)$$

*Зауваження.* Якщо коефіцієнти многочленів $P_m(p)$ і $Q_n(p)$ дійсні, а функція $Q_n(p)$ має комплексно спряжені корені $p=\alpha\pm\beta i$ (комплексно спряжені полюси $F(p)$), то лишки функції в цих точках також будуть комплексно спряженими, а їх сума дорівнює подвоєній дійсній частині:

$$\text{Res}(F(p), \alpha+\beta i) + \text{Res}(F(p), \alpha-\beta i) =$$
$$= 2\text{Re}\,(\text{Res}(F(p), \alpha+\beta i)) = 2\text{Re}\,(\text{Res}(F(p), \alpha-\beta i)).$$

**Зображення, аналітичне у нескінченно віддаленій точці**

***Теорема.*** Якщо функція $F(p)$ аналітична в точці $p=\infty$, $F(\infty)=0$ і в околі цієї точки

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}}$$

то

$$F(p)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{p^{n+1}} \to f(t)\cdot 1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}t^n\ .$$

Теорема встановлює взаємно однозначну відповідність при перетворення Лапласа між цілими функціями експоненціального типу і функціями, аналітичними в нескінченно віддаленій точці і може використовуватись як для знаходження оригіналу, так і зображення.

**Розв'язання типових прикладів**

**Приклад 1** Знайти згортку функцій $\varphi(t)=t$ і $f(t)=e^t$.

*Розв'язання.* Маємо

$$t*e^t=\int_0^t(t-\tau)e^\tau d\tau=t\int_0^t e^\tau d\tau-\int_0^t \tau e^\tau d\tau=(te^\tau-\tau e^\tau+e^\tau)\Big|_0^t=e^t-t-1.$$

**Приклад 2** Знайти зображення функцій: 1) $f(t)= C(t)\cdot\cos t+ S(t)\cdot\sin t$;
2) $f(t)=C(t)\cdot\sin t - S(t)\cdot\cos t$; 3) $f(t)=t^\alpha * t^\beta$, $\alpha>0$, $\beta>0$.

*Розв'язання.*

1) $f(t)= \cos t\cdot\int_0^t\frac{\cos\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau + \sin t\cdot\int_0^t\frac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau = \int_0^t\cos(t-\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau=\cos t*\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$.

За теоремою множення $f(t)= \cos t*\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\to\frac{1}{\sqrt{2p}}\cdot\frac{p}{p^2+1}$;

2) $f(t)= \sin t\cdot\int_0^t\frac{\cos\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau - \cos t\cdot\int_0^t\frac{\sin\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau = \int_0^t\sin(t-\tau)\frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}d\tau=\sin t*\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$.

Отже $f(t)= \sin t*\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\to\frac{1}{\sqrt{2p}}\cdot\frac{1}{p^2+1}$;

3) зображення для $t^\alpha$ та $t^\beta$ мають вигляд: $\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\to\frac{1}{p^{\alpha+1}}$, $\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\to\frac{1}{p^{\beta+1}}$.

За теоремою множення маємо $\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} * \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)} \to \frac{1}{p^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{p^{\beta+1}} = \frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}}$,

або $t^{\alpha} * t^{\beta} \to \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \cdot \frac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}{p^{\alpha+\beta+2}}$. Знайдемо згортку $t^{\alpha} * t^{\beta}$.

Оскільки $\frac{t^{\alpha+\beta+1}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)} \to \frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}}$, то $t^{\alpha} * t^{\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\cdot\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$.

**Приклад 3** Користуючись інтегралом Дюамеля, знайти оригінал для функції $\frac{1}{p^3(p^2+1)}$.

*Розв'язання*. Маємо $\frac{1}{p^3(p^2+1)} = p \cdot \frac{1}{p^4} \cdot \frac{1}{p^2+1}$, $F(p) = \frac{1}{p^4} \to \frac{t^3}{6} = f(t)$,

$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} \to \sin t = \varphi(t)$. По формулі Дюамеля

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \to \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{(t-\tau)^3}{6}\sin\tau d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t (t-\tau)^2 \sin\tau d\tau.$$

Двічі проінтегрувавши частинами, одержимо

$$\frac{1}{p^3(p^2+1)} \to \frac{1}{2}\left((t-\tau)^2(-\cos\tau) - 2(t-\tau)\sin\tau + 2\cos\tau\right)\Big|_0^t = \frac{t^2}{2} + \cos t - 1.$$

**Приклад 4** Знайти оригінали функцій: 1) $F(p) = \frac{p^2+p+1}{(p-2)(p^2-p-20)}$,

2) $F(p) = \frac{p^2-p+2}{(p^2+4)(p^2+1)}$, 3) $F(p) = \frac{1}{(p-1)^3(p^2+1)(p-2)}$.

Таблиця 1

| $p_k$ | $A(p_k)$ | $B'(p_k)$ | $\frac{A(p_k)}{B(p_k)}e^{p_k t}$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 5 | -18 | $-\frac{5}{18}e^{2t}$ |
| 5 | 29 | 27 | $\frac{29}{27}e^{5t}$ |
| -4 | 11 | 54 | $\frac{11}{54}e^{-4t}$ |

Таблиця 2

| $p_k$ | $A(p_k)$ | $B'(p_k)$ | $\frac{A(p_k)}{B(p_k)}e^{p_k t}$ |
|---|---|---|---|
| $2i$ | $-2-2i$ | $-12i$ | $\frac{1-i}{6}e^{2it}$ |
| $i$ | $1-i$ | $6i$ | $-\frac{1+i}{6}e^{it}$ |

*Розв'язання*. 1) Функція $F(p)$ має прості полюси $p_1=2$, $p_2=5$, $p_1=-4$. Позначимо $A(p)=p^2+p+1$, $B(p)=(p-2)(p^2-p-20)$ і $B'(p)=3p^2-6p-18$. Складемо таблицю 1 для знаходження оригіналу за формулою (2.16). Таким чином

$$f(t) = \frac{1}{54}(11e^{-4t} + 58e^{5t} - 15e^{2t}).$$

2) Функція $F(p)$ має прості комплексно спряжені полюси $p=\pm 2i$ і $p=\pm i$. Позначимо $A(p)=p^2-p+2$, $B(p)=(p^2+4)(p^2+1)$ і $B'(p)=4p^3+10p$. Складемо таблицю 2. Користуючись формулою (2.16) та таблицею 2, одержимо

$$f(t)=2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{6}e^{2it}-\frac{1+i}{6}e^{it}-15e^{2t}\right),\ \text{або}\ \ f(t)=\frac{1}{3}(\cos 2t+\sin 2t-\cos t+\sin t).$$

3) Функція $F(p)$ має прості полюси $p=2$, $p=\pm i$ і полюс $p=1$ 3-го порядку. Користуючись формулами (2.15) та (2.18), одержимо

$$\mathrm{Res}\left(F(p)e^{pt},2\right)=\left(\frac{1}{(p-1)^3(p^2+1)}e^{pt}\right)_{p=2}=\frac{1}{5}\cdot e^{2t},$$

$$\mathrm{Res}\left(F(p)e^{pt},i\right)+\mathrm{Res}\left(F(p)e^{pt},-i\right)=2\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{Res}\left(F(p)e^{pt},i\right)\right)=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{(p-1)^3(p+i)(p-2)}e^{pt}\right)_{p=i}=\frac{1}{20}\cdot(\cos t-3\sin t)$$

$$\mathrm{Res}\left(F(p)e^{pt},1\right)=\frac{1}{2!}\left(\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{(p-2)(p^2+1)}e^{pt}\right)\right)_{p=1}=$$

$$\frac{1}{2}\left(2\frac{6p^4-16p^3+15p^2-3}{(p-2)^3(p^2+1)^3}e^{pt}-2\frac{3p^2-4p+1}{(p-2)^2(p^2+1)^2}te^{pt}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(p-2)(p^2+1)}t^2e^{pt}\right)_{p=1}=-\frac{e^t}{4}(t^2+1)$$

Оригінал для функції $F(p)$ знаходимо за формулою (2.13):

$$f(t)=\frac{1}{5}\cdot e^{2t}+\frac{1}{20}(\cos t-3\sin t)-\frac{e^t}{4}(t^2+1).$$

**Приклад 5** Знайти зображення функції $f(t)=\sin 2\sqrt{t}$.

*Розв'язання*. Розкладаючи функцію в ряд, одержимо

$$\sin 2\sqrt{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}t^{n+\frac{1}{2}}\to F(p).$$

За формулами (2.7) і (2.6) знаходимо

$$t^{n+\frac{1}{2}}\to\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{p^{n+\frac{3}{2}}}=\frac{(2n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}n!\,p^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Тоді

$$F(p)\to\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{\pi}}{n!\,p^{n+\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{p\sqrt{p}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{p}\right)^n=\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot e^{-\frac{1}{p}}$$

Функція $F(p)$ – аналітична в нескінченно віддаленій точці, $F(\infty)=0$. Отже

$$\sin 2\sqrt{t}\to\frac{1}{p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot e^{-\frac{1}{p}}.$$

## Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 1** Знайти згортки: 1) $\sin t * \mathrm{sh}\alpha t$, 2) $\sqrt{1+t} * 1$, 3) $e^{\alpha t} * (1-\alpha t)$, 4) $t^2 * t^3$, 5) $e^t * e^t$, 6) $\cdot\cos^2 t * t + t * \sin^2 t * t$, 7) $\cos t * \cos t$.

*Відповідь.* 1) $\frac{1}{2}(\mathrm{sh}\, t - \sin t)$; 2) $\frac{2}{3}\left(\sqrt{(1+t)^3} - 1\right)$; 3) $t$; 4) $\frac{1}{60}t^6$, 5) $te^t$, 6) $\frac{1}{2}t^2$, 7) $\frac{1}{2}(t\cos t + \sin t)$.

**Задача 2** Користуючись теоремою множення, знайти оригінали для функцій:

1) $\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$, 2) $\frac{p^2}{(p^2+9)(p^2+4)}$, 3) $\frac{p}{(p-1)(p^2+4)}$,

4) $\frac{1}{(p^2+6p+13)(p^2-6p+10)}$, 5) $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$, 6) $\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$, 7) $\frac{1}{p^2(p-1)}$.

*Відповідь.* 1) $e^{-t} - (1+t)e^{-2t}$; 2) $\frac{1}{5}(3\sin 3t - 2\sin 2t)$; $\frac{1}{5}(2\sin 2t - \cos 2t + e^t)$;

4) $\frac{1}{6}e^{3t}(2\sin t - \sin 2t)$, $\frac{1}{2}e^{2t}(t^2 - 4t + 6) - e^{-t}(t+3)$, 6) $\frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$, 7) $e^t - t - 1$.

**Задача 3** Користуючись теоремою розкладення, знайти оригінали функцій:

1) $\frac{p+1}{p^2(p-1)(p+2)}$; 2) $\frac{p^2+1}{p(p+1)(p+2)(p+3)}$; 3) $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^2}$;

4) $\frac{1}{(p+1)^3(p+3)}$; 5) $\frac{1}{p^2(p+1)^4}$; 6) $\frac{1}{(p-1)^2(p+2)^3}$; 7) $\frac{a^4}{p(p^2+a^2)^2}$;

8) $\frac{1}{(p-2)^2(p+3)}$; 9) $\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$; 10) $\frac{1}{(p+1)^3(p+1)}$.

*Відповідь.* 1) $-\frac{3}{4} - \frac{1}{2}t + \frac{2}{3}e^t + \frac{1}{12}e^{-2t}$; 2) $\frac{1}{6} - e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t} - \frac{5}{3}e^{-3t}$;

3) $\frac{1}{2}(t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 6e^{2t} - 2te^t - 6e^t)$; 4) $\frac{1}{8}\left((2t^2 - 2t + 1)e^{-t} - e^{-3t}\right)$;

5) $\frac{t^2}{2} - 4t + 10 - e^{-t}\left(\frac{t^3}{6} + \frac{3t^2}{2} + 6t + 10\right)$; 6) $\frac{e^t}{27}(t-1) + \frac{e^{-2t}}{18}\left(t^2 + \frac{3}{4}t + \frac{2}{3}\right)$;

7) $-\cos at - \frac{at}{2}\sin at$; 8) $\frac{1}{25}\left(e^{-3t} + (5t-1)e^{2t}\right)$; 9) $e^t - e^{-t}\left(\cos 2t - \frac{3}{2}\sin 2t\right)$;

10) $\frac{1}{8}\left(e^{-t} - e^{-3t}(2t^2 + 2t + 1)\right)$.

## 2.4 Застосування перетворення Лапласа для розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

**Література: [4], гл. 5, §39.**

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t), \tag{2.20}$$

$t\ge 0$, з початковими умовами

$$x(0)=c_0,\quad x'(0)=c_1,\ldots,x^{(n-1)}(0)=c_{n-1}. \tag{2.21}$$

Коефіцієнти $a_1,a_2,\ldots,a_n$ – дійсні числа. Початкові умови (2.21) дорівнюють граничним значенням функції $x(t)$ та її похідних при $t\to+0$.

Нехай невідома функція $x(t)$, її похідні і функція $f(t)$ задовольняють умовам функції–оригіналу. Позначимо $x(t)\to X(p)$, $f(t)\to F(p)$. За теоремою диференціювання оригіналу маємо

$$x'(t)\to pX(p)-c_0,$$
$$x''(t)\to p^2X(p)-pc_0-c_1,$$
$$\ldots$$
$$x^{(n-1)}(t)\to p^{n-1}X(p)-p^{n-2}c_0-\ldots-c_{n-2},$$
$$x^{(n)}(t)\to p^nX(p)-p^{n-1}c_0-\ldots-c_{n-1}.$$

За теоремами лінійності та єдиності зображення

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)\to p^nX(p)-p^{n-1}c_0-\ldots-c_{n-1}+$$
$$+a_1(p^{n-1}X(p)-p^{n-2}c_0-\ldots-c_{n-2})+\ldots+a_{n-1}(pX(p)-c_0)+a_nX(p)=F(p).$$

Звідси одержимо ***операторне рівняння*** диференціального рівняння (2.20) з початковими умовами (2.21), яке є алгебраїчним відносно функції $X(p)$:

$$\begin{aligned}(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n)X(p)=F(p)+p^{n-1}c_0+\ldots+c_{n-1}+\\ +a_1(p^{n-2}c_0+\ldots+c_{n-2})+\ldots+a_{n-1}c_0.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Із рівняння (2.22) знаходимо

$$X(p)=\frac{F(p)+p^{n-1}c_0+\ldots+a_{n-1}c_0}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}.$$

Якщо права частина $f(t)$ даного рівняння є лінійна комбінація функцій виду $t^me^{kt}$, то розв'язок $X(p)$ його операторного рівняння – це правильна дробово-раціональна функція.

За теоремою розкладання або безпосередньо використовуючи властивості перетворення Лапласа, знаходимо для зображення $X(p)$ функцію $x(t)$, яка є розв'язком рівняння (2.20), який задовольняє початковим умовам (2.21).

**Приклад 1** Знайти розв'язок рівнянь:

1) $x''+4x'+4x=e^{-2t}(\cos t+2\sin t),\qquad x(0)=-1,\quad x'(0)=1.$

2) $x^{(5)}-x'=8\sin t,\qquad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0,\quad x^{(4)}(0)=1.$

*Розв'язання*. 1) Переходячи до зображень, одержимо

$$x \to X, \quad x' \to pX+1, \quad x'' \to p^2X+p-1,$$

$$\cos t+2\sin t \to \frac{p}{p^2+1}+2\frac{1}{p^2+1}=\frac{p+2}{p^2+1}$$

і за теоремою зсунення

$$e^{-2t}(\cos t+2\sin t) \to = \frac{(p+2)+2}{(p+2)^2+1}=\frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Операторне рівняння має вигляд $p^2X+p-1+4pX+4+4X=\frac{p+4}{(p+2)^2+1}$.

Звідси $X=-\frac{p^3+7p^2+16p+11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2}$.

Розкладемо зображення $X(p)$ на елементарні дроби:

$$-\frac{p^3+7p^2+16p+11}{((p+2)^2+1)(p+2)^2}=\frac{Ap+B}{(p+2)^2+1}+\frac{C}{(p+2)^2}+\frac{D}{p+2},$$

або

$$-p^3-7p^2-16p-11=(Ap+B)(p+2)^2+C(p^2+4p+5)+D(p+2)(p^2+4p+5).$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $p$, знаходимо $A=-1$, $B=-4$, $C=1$, $D=0$. Тоді

$$X=-\frac{p+4}{(p+2)^2+1}+\frac{1}{(p+2)^2}.$$

Перейдемо до оригіналу, використавши властивості лінійності та зсунення:

$$x=e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t).$$

Дійсно, підставивши у дане рівняння значення функції $x$ та її похідних $x'=e^{-2t}(-2t+5\sin t+1)$, $x''=e^{-2t}(4t+5\cos t-10\sin t-4)$ одержимо тотожність

$$e^{-2t}(4t+5\cos t-10\sin t-4)+4e^{-2t}(-2t+5\sin t+1)+$$
$$+4e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)\equiv e^{-2t}(\cos t+2\sin t).$$

Крім того,

$$x(0)=\lim_{t\to+0}x=\lim_{t\to+0}\left(e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)\right)=-1,$$

$$x'(0)=\lim_{t\to+0}x'=\lim_{t\to+0}\left(e^{-2t}(-2t+5\sin t+1)\right)=1.$$

Таким чином $x=e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)$ є розв'язком рівняння.

2) Маємо $x\to X$, $x' \to pX$, $x^{(5)} \to p^5X-1$, $\sin t \to \frac{p}{p^2+1}$.

Операторне рівняння має вигляд

$p^5X-1-pX=\frac{8}{p^2+1}$. Звідси $X=-\frac{p^2+9}{p(p^2-1)(p^2+1)^2}$.

Функція $X$ має прості полюси $p=0$, $p=\pm1$ і полюси другого порядку $p=\pm i$.

Користуючись рівностями (2.17) і (2.19), знаходимо

$$x=\left(\frac{p^2+9}{(p^2-1)(p^2+1)^2}e^{pt}\right)_{p=0}+\left(\frac{p^2+9}{p((p^2-1)(p^2+1)^2)'}e^{pt}\right)_{p=1}+$$

$$+\left(\frac{p^2+9}{p((p^2-1)(p^2+1)^2)'}e^{pt}\right)_{p=-1}+2\,\mathrm{Re}\lim_{p\to i}\left(\frac{(p-i)^2(p^2+9)}{p(p^2-1)(p^2+1)^2}e^{pt}\right)'=$$

$$=-9+\left(\frac{p^2+9}{p(6p^5+4p^3-2p)}e^{pt}\right)_{p=1}+\left(\frac{p^2+9}{p(6p^5+4p^3-2p)}e^{pt}\right)_{p=-1}+$$

$$+2\,\mathrm{Re}\frac{d}{dp}\left(\frac{(p^2+9)}{p(p^2-1)(p+i)^2}e^{pt}\right)_{p=i},$$

$$x=-9+\frac{5}{4}e^{t}+\frac{5}{4}e^{-t}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{-3p^5-44p^3+27p-p^4i-28p^2i+9i}{p^2(p^2-1)^2(p+i)^3}e^{pt}+\right.$$

$$\left.+\frac{(p^2+9)t}{p(p^2-1)(p+i)^2}e^{pt}\right)_{p=i},\ \text{або}\ x=-9+\frac{5}{2}\mathrm{ch}\,t+2\,\mathrm{Re}\left(\left(\frac{13}{4}+\frac{t}{i}\right)e^{it}\right).$$

Отже $x=-9+\frac{5}{2}\mathrm{ch}\,t+\frac{13}{2}\cos t+2t\sin t$ – шуканий розв'язок.

### Рівняння з нульовими початковими умовами

Знайдемо розв'язок диференціального рівняння

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}x'(t)+a_nx(t)=f(t), \qquad (2.23)$$

$t\ge 0$, з нульовими початковими умовами

$$x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0.$$

Розглянемо рівняння

$$h^{(n)}(t)+a_1h^{(n-1)}(t)+\ldots+a_{n-1}h'(t)+a_nh(t)=1(t), \qquad (2.24)$$

$$h(0)=h'(0)=\ldots=h^{(n-1)}(0)=0.$$

Розв'язок цього рівняння $h(t)$ називається ***перехідною функцією*** і дозволяє за допомогою інтеграла Дюамеля знайти розв'язок (2.23). Дійсно, оскільки

$$x(t)\to X(p), \qquad h(t)\to H(p),$$
$$x'(t)\to pX(p), \qquad h'(t)\to pH(p),$$
$$x''(t)\to p^2X(p), \quad h''(t)\to p^2H(p),$$
$$\ldots$$
$$x^{(n)}(t)\to p^nX, \qquad h^{(n)}(t)\to p^nH,$$
$$f(t)\to F(p), \qquad 1(t)\to\frac{1}{p},$$

то для рівнянь (2.23) та (2.24) одержимо операторні рівняння

$$Q(p)\cdot X=F(p), \qquad Q(p)\cdot H=\frac{1}{p},$$

де $Q = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$. Звідси маємо

$$H = \frac{1}{pQ(p)}, \qquad X = \frac{F(p)}{Q(p)} = pH(p)F(p).$$

Тоді, використовуючи формулу Дюамеля (2.11), одержимо

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h'(t-\tau) d\tau.$$

В задачах авторегулювання функція $f(t)$ – вхідний, а $x(t)$ – вихідний сигнали. Відношення

$$K(p) = \frac{1}{Q(p)} = \frac{X(p)}{F(p)}$$

називається ***передаточною функцією***.

**Приклад 2** Знайти розв'язок рівняння

$$x^{(4)} + 2x'' + x = \cos t, \qquad x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0.$$

*Розв'язання*. Знайдемо передаточну функцію із рівняння

$$h^{(4)} + 2h'' + h = 1, \qquad h(0) = h'(0) = h''(0) = h'''(0) = 0.$$

Маємо $h \to H$, $h'' \to p^2 H$, $h^{(4)} \to p^4 H$, $1 \to \frac{1}{p}$. Операторне рівняння

$$p^4 H + 2p^2 H + H = \frac{1}{p}.$$

Звідси

$$H = \frac{1}{p(p+1)^2}.$$

Функція $H$ має простий полюс $p=0$ і полюси $p=\pm i$ 2-го порядку. Таким чином,

$$h = \left( \frac{e^{pt}}{p(p+1)^2} \right)_{p=0} + 2\,\mathrm{Re}\left( \frac{d}{dp}\left( (p-i)^2 \frac{e^{pt}}{p(p+1)^2} \right) \right)_{p=i} =$$

$$= 1 + 2\,\mathrm{Re}\left( \frac{tp^2 - 3p + (tp-1)i}{p^2(p+i)^2} e^{pt} \right)_{p=i} = 1 - \cos t - \frac{t}{2}\sin t.$$

Частинний розв'язок рівняння дорівнює

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) h'(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \cos\tau \cdot (\sin(t-\tau) - (t-\tau)\cos(t-\tau)) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( \tau \sin t + \frac{1}{2}\cos(t-2\tau) - (t-\tau)\left( \tau \sin t - \frac{1}{2}\sin(t-2\tau) \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\tau^2}{2}\cos t + \frac{1}{4}\cos(t-2\tau) \right)\Bigg|_0^t = \frac{1}{8} t(\sin t - t\cos t).$$

## Системи рівнянь.

Розв'язання системи розглянемо на прикладі.

**Приклад 3**. Знайти розв'язок системи

$$\begin{cases} 2x'' + x' + y'' - y = e^{t}, \\ x' + 2x - y' + y = e^{-t}, \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = y'(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$$

*Розв'язання*. Маємо

$$x \to X, \quad x' \to pX, \quad x'' \to p^2 X - 1, \quad e^{t} \to \frac{1}{p-1},$$

$$y \to Y, \quad y' \to pY, \quad y'' \to p^2 Y, \quad e^{-t} \to \frac{1}{p+1},$$

Запишемо систему операторних рівнянь

$$\begin{cases} p^2 X - 1 + pX + p^2 Y - Y = \dfrac{1}{p-1}, \\ pX + 2X - pY + Y = \dfrac{1}{p+1}. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержимо

$$X = \frac{1}{8(p-1)} + \frac{3}{4(p+1)^2} - \frac{1}{8(p+1)}; \quad Y = \frac{3p}{2(p^2-1)^2}.$$

Із рівностей $\dfrac{1}{p+1} \to e^{-t}$ і $\dfrac{1}{p^2-1} \to \operatorname{sh} t$ за теоремою диференціювання зображення знаходимо

$$\left(\frac{1}{p+1}\right)' \to -te^{-t} \text{ і } \left(\frac{1}{p^2-1}\right)' \to -t\operatorname{sh} t,$$

або

$$\frac{1}{(p+1)^2} \to te^{-t} \text{ і } \frac{2p}{(p^2-1)^2} \to t\operatorname{sh} t.$$

Таким чином, розв'язок системи

$$x = \frac{1}{4}\operatorname{sh} t + \frac{3}{4}te^{-t} \text{ і } y = \frac{3}{4}t\operatorname{sh} t.$$

## Задачі для самостійного розв'язання

**Задача 1** Знайти розв'язки рівнянь:

1) $4x'' + 12x' + 9x = 144e^{-\frac{3}{2}t}, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.5;$

2) $x'' - 2x' = e^{t}(t^2 + t - 3), \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 2;$

3) $x'' + 2x' + x = e^{-t}(\cos t + t), \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2;$

4) $x'' + 2x' + 2x = 2e^{-t}\sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1;$

5) $x''' - 3x' + 2x = 8te^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = 0, \quad x''(0) = 1.$

*Відповідь*. 1) $e^{-\frac{3}{2}t}(18t^2+2t+1)$; 2) $e^t(e^t-t^2-t+1)$;

3) $2e^{-t}+\frac{1}{6}e^{-t}t^3-e^{-t}\cos t$; 4) $e^{-t}(3\sin t+(1-t)\cos t)$; 5) $2te^{-t}+te^t-e^t+e^{-2t}$.

**Задача 2** Знайти розв'язки рівнянь:

1) $x''+3x'+2x=e^t,\quad x(0)=x'(0)=0$;

2) $x''-4x'+4x=8(t^2+e^{2t}+\sin 2t),\quad x(0)=x'(0)=0$;

3) $x^{(4)}-2x''+x=24t\cos t,\quad x(0)=x'(0)=x''(0)=x'''(0)=0$.

*Відповідь*. 1) $\frac{1}{6}e^t+\frac{1}{2}e^{-t}-\frac{2}{3}e^{-2t}$; 2) $2t^2+4t+3+4e^{2t}(t^2+t-1)+\cos 2t$;

3) $3(-4\sin t+2t\cos t+2\operatorname{sh} t)$.

**Задача 3** Знайти розв'язки систем:

1) $\begin{cases}2x''-x'+9x-y''-y'-3y=0,\\ 2x''+x'+7x-y''+y'-5y=0,\end{cases}\quad x(0)=x'(0)=1,\quad y(0)=y'(0)=0$;

2) $\begin{cases}x''-x+y+z=0,\\ x+y''-y+z=0,\\ x+y+z''-z=0,\end{cases}\quad x(0)=1,\quad x'(0)=y(0)=y'(0)=z(0)=z'(0)=0$;

3) $\begin{cases}x'+2x+y=\sin t,\\ y'-4x-2y=\cos t,\end{cases}\quad x(0)=0,\quad y(0)=1$.

*Відповідь*. 1) $x=\frac{1}{3}(e^t+2\cos 2t+\sin 2t),\quad y=\frac{1}{3}(2e^t-2\cos 2t-\sin 2t)$;

2) $x=\frac{1}{3}\cos t+\frac{2}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t,\quad y=z=\frac{1}{3}\cos t-\frac{1}{3}\operatorname{ch}\sqrt{2}t$;

3) $x=2\sin t-3t,\quad y=6t+3-2\cos t-3\sin t$.

## ДОДАТОК А

Таблиця А.1 – Формули перетворення Лапласа

| № | Оригінал | Зображення |
|---|---|---|
| 1 | 2 | **3** |
| 1 | $\mathbf{1}(t)$ | $\frac{1}{p}$ |
| 2 | $e^{\alpha t}$ | $\frac{1}{p-\alpha}$ |
| 3 | $t^{\alpha}, \quad \alpha > -1$ | $\frac{1}{p^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha+1)$ |
| 4 | $t^{n+\frac{1}{2}}$ | $\frac{(2n+1)!\cdot\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}\cdot n!}\cdot\frac{1}{p^{\frac{3}{2}+n}}$ |
| 5 | $\sqrt{t}$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{p^3}}$ |
| 6 | $\frac{1}{t^{n+\frac{1}{2}}}$ | $\frac{(-1)^n\cdot 2^{2n}\cdot n!\cdot\sqrt{\pi}}{(2n)!}\cdot\frac{1}{p^{-n+\frac{1}{2}}}$ |
| 7 | $\frac{1}{\sqrt{t}}$ | $\sqrt{\frac{\pi}{p}}$ |
| 8 | $\sin\alpha t$ | $\frac{\alpha}{p^2+\alpha^2}$ |
| 9 | $\mathrm{sh}\alpha t$ | $\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$ |
| 10 | $\cos\alpha t$ | $\frac{p}{p^2+\alpha^2}$ |
| 11 | $\mathrm{ch}\alpha t$ | $\frac{p}{p^2-\alpha^2}$ |
| 12 | $\mathbf{1}(t-t_0)$ | $\frac{e^{-pt_0}}{p}$ |

Продовження таблиці А.1

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 13 | $\sin(\omega t-\varphi_0)$. | $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$. |
| 14 | $\mathrm{sh}(\omega t-\varphi_0)$ | $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$. |
| 15 | $\cos(\omega t-\varphi_0)$ | $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{p}{p^2+\omega^2}$ |
| 16 | $\mathrm{ch}(\omega t-\varphi_0)$ | $e^{-\frac{\varphi_0}{\omega}p}\frac{p}{p^2-\omega^2}$. |
| 17 | $(at-b)^{\alpha}$ | $\frac{\alpha^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}e^{-\frac{b}{a}p}$. |
| 18 | $\lvert\sin at\rvert$ | $\frac{a}{p^2+a^2}\cdot\mathrm{cth}\frac{\pi p}{2a}$ |
| 19 | $\frac{\sin t}{\lvert\sin t\rvert}$ | $\frac{1}{p}\cdot\mathrm{th}\frac{\pi p}{2}$ |

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ


1 Бугров Я.С., Никольский С.М., Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.:Наука, 1961.– 448 с.

2 Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.– 416 с.

3 Шахно К.У. Элементы теории функции комплексного переменного и операционное исчисление. – Мн.: Вышэйшая школа, 1975.– 400 с.

4 В.С. Мартыненко. Операционное исчисление. – Киев: Выща школа, 1990. – 356 с.

# ЗМІСТ

Вступ ..... 3
1 Теорія Функцій комплексної змінної ..... 3
1.1 Лінії та області на комплексній площині ..... 3
1.2 Функція комплексної змінної, її геометричний зміст. Границя. Неперервність. Основні елементарні функції ..... 8
1.3 Диференційовність функції. Аналітичні функції ..... 16
1.4 Інтеграл від функції комплексної змінної. Теорема Коші. Формула Коші ..... 20
1.5 Степеневі ряди. Розвинення функцій у ряди Тейлора і Лорана ..... 27
1.6 Изольовані особливі точки аналітичної функції. Лишки та їх застосування ..... 35
2 Операційне числення ..... 44
2.1 Перетворення Лапласа. Зображення деяких функцій. Властивості перетворення Лапласа: лінійність, подібність, запізнення, випередження. ..... 44
2.2 Властивості перетворення Лапласа: зображення періодичного оригіналу, зсунення, диференціювання та інтегрування оригіналу і зображення ..... 53
2.3 Граничні теореми. Згортка функцій. Множення зображень. Інтеграл Дюамеля. Обернене перетворення Лапласа ..... 63
2.4 Застосування перетворення Лапласа для розв’язання лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. ..... 72
Додаток А ..... 78
Список джерел інформації ..... 79

Навчальне видання

**НЕСВІТ Марина Ігорівна**
**ПОКЛОНСЬКИЙ Євген Васильович**
**ХАРЧЕНКО Анатолій Петрович**

# ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

**Навчально–методичний посібник**

Роботу до видання рекомендував О.М. Стасенко

Редактор Л.І. Христенко

План 2010, поз.7 Формат 60х84 1/16.
Підп. до друку Обл..-вид.арк. 4,7
Надруковано на ризографі. Умовн. друк. арк.4,5 Папір друк. № 2.
Тираж 50 прим. Зам. № 1722 Безкоштовно.

ХНУБА, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури