Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 192

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольної роботи з теми

ВИЩА МАТЕМАТИКА У НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Харків 2017

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 192

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до виконання контрольної роботи з теми

ВИЩА МАТЕМАТИКА У НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики.
Протокол № 7 від 07.02.2015

Харків 2017

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з курсу «Вища математика у наукових дослідженнях» для студентів-магістрів спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» заочної форми навчання.
/Укладачі: О.О. Аршава, А.П. Харченко, Н.Ю. Іохвідович, В.О. Гаєвська, Є.В. Поклонський. – Х: ХНУБА, 2017. - 74с.

Рецензент А.Ю. Петрова

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Методичні вказівки призначаються для використання студентами-магістрами заочної форми навчання зі спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» під час вивчення нормативної дисципліни „Вища математика в наукових дослідженнях”.

Дисципліна „Вища математика в наукових дослідженнях” є сполучною ланкою між фундаментальними та професійно-орієнтованими дисциплінами, вона закладає підґрунтя для вивчення базових дисциплін, для формування інженера-будівельника, наукового співробітника.

Розв’язання багатьох прикладних задач зводиться до вивчення математичних моделей, що описують фізичні процеси. Рівняння, які використовуються для опису реальних фізичних процесів, можуть бути диференціальними з частинними похідними, інтегральними та їх комбінаціями. Найбільш загальні результати були отримані для лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними.

Вказівки присвячуються вивченню різноманітних методів розв’язку саме таких рівнянь. У якості основних інструментів для розв’язку лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з частинними похідними авторами обрані: метод Фур’є, метод Даламбера, перетворення Лапласа та Фур`є.

Мета пропонованого видання – надати допомогу магістрам в організації самостійної роботи для освоєння однієї з найважливіших дисциплін „Вища математика в наукових дослідженнях”.

Вказівки містять 30 варіантів контрольних робіт і достатню кількість детально розібраних прикладів, розв’язок кожного з яких супроводжується аналізом, який приводить до вибору методу розв’язання.

1 РІВНЯННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ

1.1 Поняття диференціального рівняння з частинними похідними

У розділі звичайних диференціальних рівнянь вивчаються диференціальні рівняння, розв'язками яких були функції одного аргументу. Проте велика кількість задач природознавства приводить до диференціальних рівнянь відносно функції двох, трьох і більшого числа змінних.

Означення. Рівняння, яке зв'язує змінні $x_1, x_2, ..., x_n$, невідому функцію $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ і частинні похідні цієї функції називають диференціальним рівнянням з частинними похідними.

Таке рівняння має вигляд

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial^{k_1+k_2+...+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}\right) = 0. \qquad (1.1)$$

Означення. Порядок старшої (вищої) похідної, яка входить в рівняння (1.1), називають порядком диференціального рівняння з частинними похідними.

Означення. Рівняння з частинними похідними називається квазілінійним, якщо воно лінійне відносно всіх старших похідних від невідомої функції.

Так, наприклад, рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + f\left(x_1, x_2, ..., x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (1.2)$$

є квазілінійним рівнянням другого порядку.

Означення. Диференціальне рівняння з частинними похідними називається лінійним, якщо воно лінійне відносно невідомої функції і всіх її частинних похідних.

Так, наприклад, рівняння

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1, x_2, ..., x_n, u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x_1, x_2, ..., x_n) u = f(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (1.3)$$

є лінійним рівнянням другого порядку.

Означення. Якщо в рівнянні (1.3) $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, тоді його називають однорідним.

Означення. Якщо коефіцієнти a_{ij}, b_i, c – сталі, то рівняння (1.3) називається лінійним диференціальним рівнянням з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами.

Означення. Розв'язком диференціального рівняння з частинними похідними (1.1) називається будь-яка функція $u(x_1, x_2, ..., x_n)$, підстановка якої в рівняння замість невідомої функції перетворює це рівняння на тотожність відносно незалежних змінних.

Багато задач механіки та фізики приводять до дослідження диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку. Так, наприклад:

1) під час вивчення різних видів хвиль – пружних, звукових, електромагнітних, а також інших коливальних явищ – приходимо до

хвильового рівняння:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t), \tag{1.4}$$

де a – сталий коефіцієнт, $f(x, y, z, t)$ – задана функція;

2) процеси поширення тепла в однорідному ізотропному тілі, явища дифузії описуються рівнянням теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + f(x, y, z, t); \tag{1.5}$$

3) у процесі розгляду всталеного (стаціонарного) теплового стану в однорідному ізотропному тілі приходимо до рівняння Пуассона:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z, t). \tag{1.6}$$

У разі відсутності джерел тепла всередині тіла рівняння (1.6) переходить в рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Потенціали поля тяжіння і стаціонарного електричного поля також задовольняють рівнянню Лапласа в точках, в яких відсутні маси і відповідно електричні заряди.

Рівняння (1.4) – (1.6) часто називають основними рівняннями математичної фізики. Їх докладне вивчення дає можливість будувати теорію широкого кола фізичних явищ і розв’язати низку фізичних і технічних задач.

1.2 Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

Усе різноманіття лінійних (а також квазілінійних) рівнянь можна поділити на три класи (типи). В кожному класі є найпростіші рівняння, які називають канонічними. Розв’язки рівнянь одного і того самого типу мають багато спільних властивостей. Для вивчення цих властивостей досить розглянути канонічні рівняння, оскільки інші рівняння даного класу можуть бути зведені до канонічного вигляду.

Належність рівняння до того чи іншого класу – класифікація рівнянь – визначається коефіцієнтами при старших похідних.

Наведемо класифікацію лінійних (квазілінійних) рівнянь другого порядку, в яких шукана функція u залежить від двох змінних $u = u(x, y)$. У цьому випадку квазілінійне рівняння можна записати у вигляді

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0, \tag{1.7}$$

а лінійне – у вигляді

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} cu = f(x, y), \tag{1.8}$$

де a_{ij}, b_i, c – функції незалежних змінних x, y.

У залежності від знака дискримінанта $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ рівняння (1.7), а також (1.8) можуть належати до трьох типів.

- Якщо в деякій області D дискримінант додатний $(\Delta > 0)$, то рівняння (1.7) та (1.8) належать до гіперболічного типу в області D.
- Якщо $\Delta = 0$ в деякій області D, то рівняння (1.7) та (1.8) належать до параболічного типу в області D.
- Якщо $\Delta < 0$ в усіх точках області D, то рівняння (1.7) та (1.8) належать до еліптичного типу в області D.

Якщо коефіцієнти a_{ij} сталі, то належність рівняння до того чи іншого типу не залежить від значень незалежних змінних.

Приклад 1.1 Визначте тип основних рівнянь математичної фізики.

Розв'язання. Запишемо основні рівняння математичної фізики для випадку двох змінних у вигляді

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + f(x,t) = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x,y) = 0, \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - f(x,t) = 0. \tag{1.11}$$

У рівнянні (1.9) $a_{11} = a^2$, $a_{12} = a_{22} = 0$. Отже $\Delta = 0$. Таким чином, рівняння теплопровідності належить до параболічного типу.

У рівнянні (1.10) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $\Delta = -1 < 0$. Отже, рівняння Пуассона, як і відповідне рівняння Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, належать до еліптичного типу.

У рівнянні (1.11) $a_{11} = 1$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = -a^2$, $\Delta = a^2 > 0$. Це означає, що рівняння коливань належить до гіперболічного типу.

Приклад 1.2 Визначте тип диференціального рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Розв'язання. У цьому рівнянні $a_{11} = 1$, $a_{12} = -\sin x,$, $a_{22} = -\cos^2 x$. Тому $\Delta = \sin^2 x + \cos^2 x = 1 > 0$. Отже, це рівняння належить до гіперболічного типу.

Приклад 1.3 Визначте тип диференціального рівняння

$$tg^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2y tgx \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + tg^3 x \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Розв'язання. У цьому рівнянні $a_{11} = tg^2 x$, $a_{12} = -y$, $a_{22} = y^2$, тому $\Delta = y^2 tg^2 x - y^2 tg^2 x = 0$. Отже, маємо рівняння параболічного типу.

Приклад 1.4 Визначте тип диференціального рівняння

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

Розв'язання. Маємо $a_{11}=1+x^2,\ a_{12}=0,\ a_{22}=1+y^2,$ $\Delta=-(1+x^2)(1+y^2)<0.$ Отже, це рівняння є рівнянням еліптичного типу.

1.3 Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними

Раніше було вказано, що в кожному класі є найпростіші рівняння, які називають канонічними. Виникає питання: як добрати нові змінні ξ і η так, щоб перетворені рівняння (1.7) і (1.8) набули канонічного вигляду. Виявляється, що ця задача пов'язана із розв'язанням такого звичайного диференціального рівняння:

$$a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2=0.$$

Це рівняння називають характеристичним рівнянням для вихідного диференціального рівняння з частинними похідними (1.7) або (1.8), а його інтеграли – характеристиками. Рівняння характеристик має два загальних інтеграли: $\varphi(x,y)=C_1$ і $\psi(x,y)=C_2$.

Рівняння (1.7), (1.8) за допомогою змінних приводяться до канонічного вигляду, який залежить від знака дискримінанта Δ.

Нехай рівняння (1.7), (1.8) є гіперболічними ($\Delta>0$). Тоді заміна змінних $\xi=\varphi(x,y)$ і $\eta=\psi(x,y)$ приводить ці рівняння до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+f_1\left(\xi,\mu,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$$

У разі параболічного типу (Δ=0) рівняння (1.7), (1.8) зводяться до канонічного вигляду за допомогою заміни $\xi=\varphi(x,y),\eta=\omega(x,y).$ Канонічний вигляд рівнянь буде таким:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$$

Функція $\omega(x,y)$ обирається довільно за однією лише умовою

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\omega}{\partial x} & \dfrac{\partial\omega}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0.$$

Якщо рівняння (1.7), (1.8) належать до еліптичного типу ($\Delta<0$), тоді функції $\varphi(x,y),\psi(x,y)$ будуть комплексно спряженими:

$$\varphi(x,y)=\alpha(x,y)+i\beta(x,y),\ \psi(x,y)=\alpha(x,y)-i\beta(x,y).$$

У цьому разі заміна $\xi=\alpha(x,y),\eta=\beta(x,y)$ приводить рівняння до канонічного вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+f_1\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$$

Приклад 1.5 Визначте тип і зведіть до канонічного вигляду рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Розв'язання. Для визначення типу рівняння складемо дискримінант. У даному рівнянні $a_{11}=x^2$, $a_{12}=0$, $a_{22}=-y^2$, $\Delta=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=x^2y^2>0$. Отже, рівняння належить до гіперболічного типу. Зведемо його до канонічного вигляду.

Характеристичне рівняння має вигляд $x^2dy^2-y^2dx^2=0$, або $xdy-ydx=0$ і $xdy+ydx=0$. Його загальні інтеграли $xy=C_1$ і $\frac{y}{x}=C_2$.

Введемо нові змінні: $\xi=xy$, та $\eta=\frac{y}{x}$. Тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Підставляючи у вихідне рівняння знайдені похідні, отримаємо його канонічний вигляд:

$$2\xi\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

Приклад 1.6 Визначте тип і зведіть до канонічного вигляду рівняння

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Розв'язання. Маємо $a_{12}=xy$, $a_{22}=y^2$, $\Delta=0$. Отже, це рівняння параболічного типу. Для зведення його до канонічного вигляду складемо характеристичне рівняння

$$x^2dy^2-2xydxdy+y^2dx^2=0,$$

або

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy\left(\frac{dy}{dx}\right)+y^2=0.$$

Його загальний інтеграл

$$\frac{y}{x}=C.$$

Зробимо заміну змінних

$$\xi=\frac{y}{x},\ \eta=y.$$

Зауважимо, що в якості η можна взяти яку-небудь функцію від x та y, для якої

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y}-\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\neq 0.$$

Знайдемо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial \xi};\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Підстановка їх у рівняння дає

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

Це і є шуканий вигляд даного рівняння.

Приклад 1.7 Визначте тип і зведіть до канонічного вигляду рівняння

$$\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Розв'язання. У даному випадку $a_{11}=1/x^2$, $a_{12}=0$, $a_{22}=1/y^2$, $\Delta=-\frac{1}{x^2y^2}<0$. Отже, це рівняння еліптичного типу.

Диференціальне рівняння характеристик має вигляд

$$\frac{1}{x^2}dy^2+\frac{1}{y^2}dx^2=0,$$

або

$$\frac{dy}{dx}=-i\frac{x}{y},\ \frac{dy}{dx}=i\frac{x}{y}.$$

Інтегруючи, знаходимо характеристики $y^2+ix^2=C_1$, $y^2-ix^2=C_2$.

Нові змінні $\xi=y^2+ix^2$, $\eta=y^2-ix^2$ – комплексні. Тому вводимо дійсні змінні за формулами

$$\rho=\frac{1}{2}(\xi+\eta)=y^2,$$

$$\sigma=\frac{1}{2i}(\xi-\eta)=x^2.$$

Тоді

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x^2\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}+2\frac{\partial u}{\partial \sigma},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+2\frac{\partial u}{\partial \rho}$$

і рівняння набуває вигляду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial \sigma}\right)=0.$$

1.4 Постановка задач математичної фізики

Розглянемо питання, як проводиться дослідження фізичних задач за допомогою диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Вихідним моментом є те, що досліджується не сам фізичний процес, а

деяка його модель (ідеальний процес), від якої вимагається, щоб вона зберігала основні риси процесу, який розглядається, і в той же час була настільки простою, щоб підлягала вивченню такими методами, які є в наявності.

При дослідженні ідеального процесу можна виділити наступні основні моменти:

1 Обирається величина, яка характеризує процес. Звичайно ця величина u є функцією змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ і часу t : $u = u(x_1, x_2, ..., x_n, t)$.

2 На основі законів, яким підпорядковується ідеальний процес, виводиться диференціальне рівняння з частинними похідними відносно функції $u(x_1, x_2, ..., x_n, t)$.

3 Оскільки диференціальне рівняння має нескінченну множину розв'язків, то самого рівняння недостатньо для опису конкретного процесу. Тому вводять деякі додаткові умови, які характеризують процес.

Такими додатковими умовами є граничні умови, тобто умови задані на межі середовища, що розглядається, і початкові умови, які відносяться до моменту часу, з якого починається процес.

Означення. Сукупність диференціального рівняння і додаткових умов являє собою математичне формулювання фізичної задачі і називається задачею математичної фізики.

Та обставина, що задача математичної фізики повинна відбивати (хоча б наближено) деякий фізичний процес, накладає на неї низку вимог.

Задача вважається коректно поставленою, якщо її розв'язок:

а) існує;

б) єдиний;

в) стійкий, тобто малі зміни будь-яких даних задачі викликають малі зміни розв'язку.

1.5 Рівняння коливань струни

Розглянемо натягнуту струну, закріплену на кінцях. Якщо її вивести із положення рівноваги, то вона почне коливатися. Побудуємо математичну модель цього процесу.

Під струною розуміють гнучку пружну нитку. Властивість пружності означає, що струна підпорядковується закону Гука, тобто напруження пропорційне розтягу струни.

Оберемо вектор відхилення точок струни від положення рівноваги як величину, що характеризує процес коливання струни.

Будемо розглядати так звані поперечні коливання, тобто такі, коли рух усіх точок струни відбувається в одній площині й в напрямку перпендикулярному до прямолінійного положення рівноваги струни. Якщо положення рівноваги обрано за вісь OX, то процес буде характеризуватися однією незалежною величиною $u = u(x,t)$ – відхилення положення рівноваги точки струни з абсцисою x в момент часу t. При кожному фіксованому значенні t графік функції $u = u(x,t)$ буде давати форму струни в цей момент часу (рис.1.1).

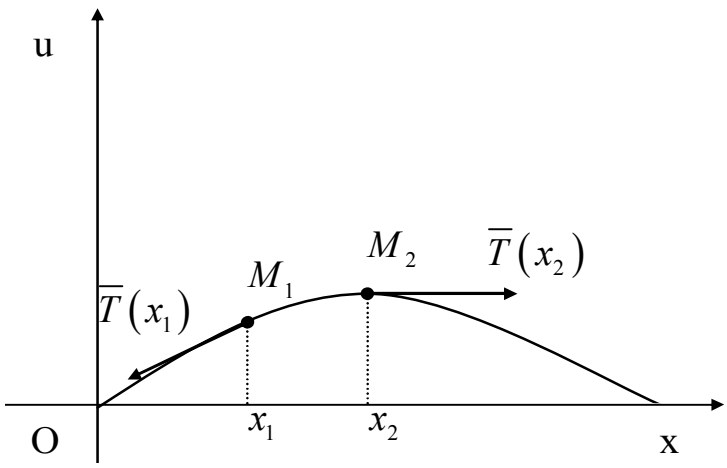


Рисунок 1.1

Розглянемо лише малі коливання, тобто такі, при яких відхилення $u(x,t)$, а також похідна u_x настільки малі, що їх квадратами можна знехтувати.

Виділимо довільну ділянку (x_1, x_2) струни (див. рисунок 1.1), яка при коливанні деформується в ділянку M_1M_2. Довжина дуги цієї ділянки в момент часу t дорівнює:

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\,dx \approx x_2 - x_1 = S,$$

внаслідок чого можна вважати, що в процесі малих коливань видовження ділянок струни не відбувається. Тоді з закону Гука випливає, що величина натягу T в кожній точці струни не змінюється з часом. Покажемо, що величину натягу можна вважати незалежною від x, тобто $T \approx T_0$. Дійсно, на ділянці M_1M_2 струни діють сили натягу, спрямовані вздовж дотичних до струни в точках M_1 і M_2, зовнішні сили, сили інерції.

Сума проекцій на вісь Ox усіх цих сил повинна дорівнювати нулю (принцип Даламбера). Оскільки розглядаємо лише поперечні коливання, то сили інерції і зовнішні сили спрямовані паралельно осі Ou, тоді

$$T(x_1)\cos\alpha(x_1) - T(x_2)\cos\alpha(x_2) = 0,$$

де $\alpha(x)$ – кут між дотичною в точці з абсцисою x до струни в момент часу t і додатним напрямком осі Ox. Внаслідок малості коливань

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

і, отже, $T(x_1) = T(x_2)$.

Звідки, у зв'язку з довільністю x_1 і x_2 випливає, що величина натягу T не залежить від x. Таким чином, можна вважати, що $T \approx T_0$ для всіх x і t.

Виведемо рівняння коливань струни.

Розглянемо проекції всіх сил, які діють на ділянку M_1M_2 струни, на вісь Ou. Сума проекцій на вісь Ou сил натягу становить:

$$Y = T_0\left(u_x\left(x_2,t\right) - u_x\left(x_1,t\right)\right).$$

Звідки, помічаючи, що

$$u_x\left(x_2,t\right) - u_x\left(x_1,t\right) = \int_{x_1}^{x_2} u_{xx}\left(x,t\right)dx,$$

остаточно отримаємо:

$$Y = T_0\int_{x_1}^{x_2} u_{xx}\left(x,t\right)dx. \tag{1.12}$$

Нехай $P\left(x,t\right)$ щільність зовнішніх сил, які діють на струну паралельно осі Ou. Тоді проекція зовнішніх сил, які діють на ділянку M_1M_2 струни буде

$$\int_{x_1}^{x_2} P\left(x,t\right)dx. \tag{1.13}$$

Крім того, нехай $\rho\left(x\right)$ – лінійна густина струни. Тоді сила інерції ділянки M_1M_2 струни дорівнює

$$-\int_{x_1}^{x_2} \rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right)dx. \tag{1.14}$$

Згідно з принципом Даламбера з (1.12)–(1.14) отримуємо:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[T_0u_{xx}\left(x,t\right) - \rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right) + P\left(x,t\right)\right]dx = 0. \tag{1.15}$$

Припустивши існування та неперервність похідних другого порядку функції $u(x,t)$ і використовуючи теорему про середнє, з (1.15) маємо

$$\left(T_0u_{xx}\left(x,t\right) - \rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right) + P\left(x,t\right)\right)\Big|_{x=x_0}\Delta x = 0, \tag{1.16}$$

де $x_0 \in \left(x_1,x_2\right)$, $\Delta x = x_2 - x_1$.

Скорочуючи на Δx і переходячи до границі при $x_2 \to x_1$, остаточно отримаємо:

$$T_0u_{xx}\left(x,t\right) - \rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right) + P\left(x,t\right) = 0,$$

або

$$\rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right) = T_0u_{xx}\left(x,t\right) + P\left(x,t\right). \tag{1.17}$$

Рівняння (1.17) і є шукане рівняння коливань струни.

Якщо струна однорідна $\left(\rho = const\right)$, то рівняння малих коливань струни (1.17) записується таким чином:

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f\left(x,t\right), \tag{1.18}$$

де $a^2 = T_0/\rho$, $f\left(x,t\right) = P\left(x,t\right)/\rho$.

Означення. Рівняння (1.18) при $f(x,t) \neq 0$ називають рівнянням вимушених коливань струни. При $f\left(x,t\right) \equiv 0$ отримуємо рівняння вільних коливань струни:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{1.19}$$

1.6 Постановка крайових задач для рівнянь коливань

Рівняння коливань, як рівняння з частинними похідними, має нескінчену множину розв'язків. Тому для однозначного моделювання конкретного коливального процесу необхідно задати початкові і крайові умови.

Процес коливань істотно залежить від того, яким чином струна виводиться із стану рівноваги. Припустимо, що це досягається тим, що в початковий момент часу $t=0$ всім точкам струни надаються деякі зміщення й швидкості. Це приводить до наступних умов:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_i(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le l, \tag{1.20}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – задані функції, l – довжина струни. Умови (1.20) є початковими умовами.

Основними типами крайових умов для рівняння коливань (1.18) є

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t); \tag{1.21}$$

$$u_x(0,t)=\nu_1(t),\ u_x(l,t)=\nu_2(t); \tag{1.22}$$

$$u_x(0,t)-h_1u(0,t)=\omega_1(t),\quad u_x(l,t)+h_2u(l,t)=\omega_2(t), \tag{1.23}$$

де μ,ν,ω – відомі функції, h_1,h_2 – відомі додатні сталі.

Умови (1.21) мають місце у випадку, коли кінці об'єкта (струни, стержня і т. ін.) переміщаються за заданим законом; умови (1.22) – у випадку, коли до кінців струни прикладені задані сили; умови (1.23) – у випадку пружного закріплення кінців.

Для рівняння (1.18) відповідно до типу крайових умов ставляться три основні крайові задачі: знайти розв'язок рівняння при $0<x<l$, який задовольняє одній із крайових умов (1.21)–(1.23) при $t\ge 0$ і початкові умови (1.20).

Для рівняння (1.18) може бути поставлена й інша задача.

Нехай струна досить довга і нас цікавить коливання її точок достатньо віддалених від кінців, причому за досить малий проміжок часу. В цьому випадку режим на кінцях не буде виявляти суттєвого впливу й тому його не враховують; струну при цьому вважають нескінченною.

Задача ставиться таким чином: знайти розв'язок рівняння при $-\infty<x<\infty$, $t>0$ так, щоб він задовольняв початкові умови:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<\infty.$$

Поставлена задача називається задачею Коші.

1.7 Розв'язання задачі Коші для рівняння коливань струни методом характеристик (методом Даламбера)

Розглянемо задачу Коші: знайти розв'язок рівняння

$$u_{tt}=a^2u_{xx} \text{ при } t>0,\ -\infty<x<\infty,$$

який задовольняє початкові умови

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ -\infty<x<\infty,$$

де $\varphi(x)$ – початкове відхилення; $\psi(x)$ – початкова швидкість точок струни.

Зведемо рівняння до канонічного вигляду. Рівняння характеристик

$$\frac{dx}{dt}=-a,\ \frac{dx}{dt}=a$$

мають загальні інтеграли

$$x+at=C_1,\ x-at=C_2.$$

Отже, для зведення до канонічного вигляду необхідно виконати заміну незалежних змінних

$$\xi=x+at,\ \eta=x-at.$$

Маємо:

$$u_{tt}=a^2u_{\xi\xi}-2a^2u_{\xi\eta}+a^2u_{\eta\eta};$$

$$u_{xx}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}.$$

Підстановка знайдених похідних у рівняння $u_{tt}=a^2u_{xx}$ дає

$$u_{\xi\eta}=0, \tag{1.24}$$

або $(u_\xi)_\eta=0.$ Це означає, що u_ξ не залежить від η, тобто $u_\xi=f(\xi)$, де $f(\xi)$– довільна функція.

Інтегруючи по ξ отриману рівність, знаходимо:

$$u=\int f(\xi)d\xi+\theta_1(\eta),$$

де $\theta_1(\eta)$– довільна функція.

Таким чином,

$$u=\theta_1(\eta)+\theta_2(\xi),$$

де $\theta_2(\xi)=\int f(\xi)d\xi$.

Повертаючись до змінних x і t, отримаємо загальний розв'язок рівняння $u_{tt}=a^2u_{xx}$:

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at), \tag{1.25}$$

де θ_1 і θ_2 – довільні двічі неперервно диференційовні функції.

Для знаходження функцій θ_1 і θ_2 використовуємо початкові умови. При $t=0$ із (1.25) одержимо:

$$\varphi(x)=\theta_1(x)+\theta_2(x). \tag{1.26}$$

Далі продиференціюємо обидві частини рівності (1.25) по t:

$$u_t(x,t)=\theta_1'(x-at)(-a)+\theta_2'(x+at)a.$$

Задаючи в цій рівності $t=0$, дістанемо:

$$\psi(x)=-a\theta_1'(x)+a\theta_2'(x).$$

Ця рівність справедлива при будь-яких x. Інтегруючи її в межах від 0 до x, отримаємо:

$$-a\theta_1(x)+a\theta_2(x)=\int_0^x \psi(x)dx+aC,$$

де $C=\theta_2(0)-\theta_1(0)$.

Розв'яжемо систему

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x),$$

$$-\theta_1(x)+\theta_2(x)=\frac{1}{a}\int_0^x \psi(x)dx+C$$

відносно невідомих функцій θ_1 і θ_2. Отримаємо:

$$\theta_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(x)dx-\frac{C}{2},$$

$$\theta_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(x)dx+\frac{C}{2}. \qquad (1.27)$$

Рівності (1.27) справедливі при будь-якому x, тому

$$\theta_1(x-at)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(x)dx-\frac{C}{2},$$

$$\theta_2(x+at)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(x)dx+\frac{C}{2}. \qquad (1.28)$$

Таким чином, із (1.26) та (1.28) отримаємо:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(x)dx-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(x)dx,$$

або

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(x)dx. \qquad (1.29)$$

Співвідношення (1.29) називають формулою Даламбера. Воно дає розв'язок задачі Коші, якщо $\varphi(x)$ має неперервні похідні до другого порядку включно, а $\psi(x)$ – до першого.

Розв'язок (1.29) використовується тоді, коли цікавляться рухом далеких кінців ділянок струни зі зміною часу, малою порівняно з часом поширення сигналу від одного кінця струни до іншого.

Розглянемо фізичний зміст розв'язку (1.29). Спочатку зазначимо, що розв'язок (1.29) представляє собою суму двох функцій:

$$u(x,t)=\varphi(x-at)+\psi(x+at).$$

Покладемо тут $\psi=0$. Тоді зміщення струни в точці x в момент часу t дорівнює: $u_1=\varphi(x-at)$.

Покажемо, що таке саме зміщення буде спостерігатися в іншій точці з абсцисою $x+\Delta x$ через проміжок часу $\Delta t=\Delta x/a$. Знайдемо аргумент функції φ в момент часу $t+\Delta t$:

$$x+\Delta x-a(t+\Delta t)=x+\Delta x-at-a\Delta t=x-at+a\Delta t-a\Delta t=x-at.$$

Тобто аргумент функції φ залишається незмінним, звідки випливає, що

$$u_2 = \varphi\left[x + \Delta x - a\left(t + \Delta t\right)\right] = \varphi\left(x - at\right) = u_1.$$

Це означає, що відбувається поширення зміщення вздовж осі струни зі швидкістю $a = \Delta x / \Delta t$. Цей процес і є хвильовим.

Таким чином, якщо на ділянці струни відбувається зміщення, яке задовольняє співвідношенню $u\left(x,t\right) = \varphi\left(x\right)$, то за час t цей розподіл зміщення просувається вздовж осі струни із швидкістю a не змінюючи своєї форми. Тому прийнято говорити про поширення прямої плоскої хвилі зміщення в додатному напрямку осі Ox.

Аналогічно можна показати, що функція $\psi\left(x + at\right)$ відповідає поширенню зворотної хвилі у від'ємному напрямку осі Ox.

Приклад 1.8 Знайдіть розв'язок рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0,$$

який задовольняє початкові умови

$$u\big|_{t=0} = 3x^2, \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0.$$

Розв'язання. У цьому рівнянні $a_{11} = 1, a_{12} = 1, a_{22} = -3,$ тому $\Delta = 4 > 0.$ Отже, задане рівняння є рівняння гіперболічного типу. Для приведення його до канонічного вигляду складемо характеристичне рівняння:

$$dt^2 - 2dxdt - 3dx^2 = 0,$$

або

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 2\frac{dt}{dx} - 3 - 0,$$

звідки

$$\frac{dt}{dx} = 1 \pm 2.$$

Знайдемо два диференціальних рівняння характеристик:

$$\frac{dt}{dx} = -1 \text{ та } \frac{dt}{dx} = 3,$$

після їх інтегрування отримаємо:

$$t = -x + C_1, t = 3x - C_2$$

або

$$x + t = C_1, 3x - t = C_2.$$

Введемо нові змінні: $\xi = x + t$ та $\eta = 3x - t.$ Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + 3\frac{\partial u}{\partial \eta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Знайдемо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

Підставимо останні вирази у вихідне рівняння та отримаємо його канонічну форму:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0.$$

Інтегруючи це рівняння спочатку по η, потім по ξ, маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial\xi}=\psi_1(\xi), u(\xi,\eta)=\int\psi_1(\xi)d\xi+\phi_2(\eta)=\phi_1(\xi)+\phi_2(\eta),$$

де ψ_1, ϕ_1, ϕ_2 – довільні функції.

Таким чином, розв'язок приймає вигляд

$$u(x,t)=\phi_1(x+t)+\phi_2(3x-t).$$

Для визначення функцій ϕ_1, ϕ_2 треба використати початкові умови:

$$u\Big|_{t=0}=\phi_1(x)+\phi_2(3x)=3x^2, \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\phi_1'(x+t)-\phi_2'(3x-t)\big|_{t=0}=\phi_1'(x)-\phi_2'(3x)=0.$$

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases}\phi_1(x)+\phi_2(3x)=3x^2,\\ \phi_1'(x)-\phi_2'(3x)=0,\end{cases}$$

для цього спочатку інтегруємо друге рівняння:

$$\begin{cases}\phi_1(x)+\phi_2(3x)=3x^2,\\ \phi_1(x)-\frac{1}{3}\phi_2(3x)=C.\end{cases}$$

Отже,

$$\phi_1(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}C,\ \phi_2(3x)=\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{4}C,$$

звідки

$$\phi_1(x+t)=\frac{3}{4}(x+t)^2+\frac{3}{4}C=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}xt+\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}C,$$

$$\phi_2(3x-t)=\phi_2\left(3\left(x-\frac{t}{3}\right)\right)=\frac{9}{4}\left(x-\frac{t}{3}\right)^2+\frac{3}{4}C=\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{2}xt+\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{4}C.$$

Остаточно

$$u(x,t)=\phi_1(x+t)+\phi_2(3x-t)=3x^2+t^2.$$

1.8 Розв'язання крайової задачі для рівняння коливань струни методом відокремлення змінних (метод Фур'є)

Метод Фур'є полягає в знаходженні розв'язку рівнянь у вигляді добутку двох функцій. Цей метод особливо зручний для розв'язування диференціальних рівнянь з частинними похідними, в яких невідомою є функція двох змінних $u(x, y)$. Тоді частинний розв'язок рівняння шукають у вигляді

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \tag{1.30}$$

Задовольняючи граничні та початкові умови, вдається знайти цей розв'язок. Запропонованим методом можна розв'язати хвильове рівняння.

Приклад 1.9 Однорідна струна завдовжки *l,* лівий кінець якої є нерухомо закріплений, натягнута за кінець $x = l$ до довжини l_1. Знайдіть закон коливання струни, якщо у момент $t = 0$ кінець $x = l$ відпущений без початкової швидкості.

Відповідна математична модель задачі – знайти розв'язок рівняння коливань струни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.31}$$

який задовольняє крайові умови:

$$u\big|_{x=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0, \tag{1.32}$$

початкові умови:

$$u\big|_{t=0} = f(x) = \frac{l_1 - l}{l}x, \ \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0. \tag{1.33}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{1.34}$$

Нагадаємо, що $u \neq 0$ (при будь-яких x). Підставивши співвідношення (1.34) у рівність (1.31), отримаємо:

$$T''X = a^2 X''T.$$

Звідки, після відокремлення змінних знайдемо:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}.$$

Остання рівність (зліва – функція аргументу x або стала, справа – функція аргументу t або стала) можлива тільки за умови, що ліва й права частини дорівнюють сталій.

Позначимо цю сталу через $-\lambda^2$. У результаті отримаємо два рівняння

$$X'' + \lambda^2 X = 0,$$

$$T'' + \lambda^2 a^2 T = 0,$$

розв'язки яких мають вигляд

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x;$$

$$T(t) = D_1 \cos a\lambda t + D_2 \sin a\lambda t.$$

Обчислимо першу похідну

$$X'(x) = -C_1\lambda \sin\lambda x + C_2\lambda \cos\lambda x.$$

Застосовуючи крайові умови (1.32), дістанемо:

$$C_1 + C_2 \cdot 0 = 0,$$

звідки

$$C_1 = 0,$$

$$C_2\lambda \cos\lambda l = 0.$$

Оскільки $C_2 \neq 0$ (у противному випадку $u \equiv 0$), слід покласти $\cos\lambda l = 0$, звідки

$$\lambda l = \pi/2 + \pi n \text{ і } \lambda = \lambda_n = \frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{l}, n \in N \cup \{0\}.$$

Таким чином, для кожного n маємо розв'язки

$$X_n(x) = C_2 \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right),$$

$$T_n(t) = D_1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right) + D_2 \sin\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right), n \in N.$$

Після підстановки функцій $X_n(x)$ і $T_n(t)$ у рівність (1.31) знаходимо відповідний розв'язок

$$u_n(x,t) = C_2\left[D_1 \cos\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right) + D_2 \sin\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\right]\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right).$$

Внаслідок лінійності рівняння коливань струни сума u_n також є його розв'язком, тобто

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\right]\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right), \quad (1.35)$$

де

$$a_n = C_2 D_2, \; b_n = C_2 D_2.$$

Для знаходження коефіцієнтів a_n і b_n скористаємося початковими умовами (1.33). Спочатку отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[-a_n \sin\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right) + b_n \cos\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right)\right]\frac{(2n+1)\pi a}{2l}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right),$$

а з умови $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ маємо:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[b_n \frac{(2n+1)\pi a}{2l}\right]\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right) = 0.$$

Ця рівність виконується лише за умовою $b_n = 0$ (в іншому випадку права частина буде змінною).

Також при $t = 0$ з рівності (1.35) дістанемо:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right).$$

Остання рівність являє собою розвинення в ряд Фур'є за синусами функції $f(x)=\frac{l_1-l}{l}x,$ яка задана на $[0,l]$. Скориставшись загальними формулами для коефіцієнтів Фур'є, в цьому випадку маємо:

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)dx=\frac{2(l_1-l)}{l^2}\int_0^l x\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)dx.$$

Обчислимо цей інтеграл:

$$\int_0^l x\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)dx=\left|\begin{matrix} u=x & du=dx \\ dv=\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)dx & v=-\frac{2l}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\end{matrix}\right|=$$

$$=-\frac{2lx}{(2n+1)\pi}\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\Bigg|_0^l+\frac{2l}{(2n+1)\pi}\int_0^l\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)dx=$$

$$=-\frac{2l^2}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}+\frac{4l^2}{(2n+1)^2\pi^2}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\Bigg|_0^l=-\frac{2l^2}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi}{2}+$$

$$+\frac{4l^2}{(2n+1)^2\pi^2}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}=(-1)^n\frac{4l^2}{(2n+1)^2\pi^2}$$

(оскільки $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=0,\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=(-1)^n$) .

Звідки

$$a_n=(-1)^n\frac{8(l_1-l)}{(2n+1)^2\pi^2}.$$

Таким чином, розв'язок задачі (1.31) – (1.33) має вигляд

$$u(x,t)=\frac{8(l_1-l)}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right)\cos\left(\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t\right).$$

1.9 Рівняння теплопровідності

Нехай на осі Ox лежить однорідний стержень, теплоізольований від зовнішнього середовища і нерівномірно нагрітий. При цьому в стержні буде відбуватися теплообмін між більш та менш нагрітими частинами.

Позначимо через $u(x,t)$ температуру в перерізі стержня з абсцисою x в момент t. При цьому частинна похідна $u_t'(x,t)$ дорівнює швидкості підвищення температури в момент часу t в даному перерізі стержня, а частинна похідна $u_x'(x,t)$– швидкість зміни температури в залежності від точки x стержня. Ця величина характеризує перепад температур.

Якщо $u_t'(x,t)<0$, то правіші точки стержня мають нижчу температуру. За законами фізики (закон Фур'є, закон збереження тепла, закон конвективного теплообміну Ньютона) потік тепла через переріз стержня пропорційний площі S перерізу стержня, перепаду температур і проміжку часу. Іншими словами, за

малий проміжок часу Δt через переріз стержня з абсцисою x пройде потік тепла $Q(x)$:

$$Q(x) = -kS\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Delta t. \tag{1.36}$$

Знак „мінус” пояснюється тим, що під час руху тепла в додатному напрямку осі Ox похідна $u_t^{'}(x,t)$ – від’ємна, а кількість тепла Q, пройденого через переріз в додатному напрямку, – додатна. Число k називається коефіцієнтом теплопровідності стержня і характеризує матеріал стержня.

Простежимо за зміною кількості тепла і температури в тій частині стержня, яка знаходиться між перерізами з абсцисами x і $x+\Delta x$, за час Δt, яка визначається формулою (1.36). Згідно з цією ж формулою кількість тепла, яке виходить через переріз з абсцисою $x+\Delta x$ за той самий час Δt, дорівнює:

$$Q(x+\Delta x) = -kS\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x}\Delta t. \tag{1.37}$$

Різниця величин вхідного і вихідного теплових потоків дає кількість тепла ΔQ, надану обраній ділянці стержня за час Δt:

$$\Delta Q = kS\left(\frac{\partial u(x+\Delta x,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\Delta t. \tag{1.38}$$

Звідки, застосовуючи формулу Лагранжа $\left((f(a)-f(b))/(b-a) = f'(c)\right)$, отримаємо:

$$\Delta Q = kS\frac{\partial^2 u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial x^2}\Delta t\Delta x, \tag{1.39}$$

де $0<\theta_1<1$.

Будемо вважати виділену ділянку стержня (між перерізами з абсцисами x та $x+\Delta x$) настільки малою, що в кожний даний момент температуру його перерізів можна вважати однаковою. Тоді, з іншого боку, надана за час Δt обраній ділянці кількість тепла становить:

$$\Delta Q = c\rho S\left[u(x,t+\Delta t) - u(x,t)\right]\Delta x, \tag{1.40}$$

де c – питома теплоємність речовини стержня, ρ – густина стержня.

Звідки, знову за формулою Лагранжа будемо мати

$$\Delta Q = c\rho S\frac{\partial u(x,t+\theta_2\Delta t)}{\partial t}\Delta x\Delta t, \tag{1.41}$$

де $0<\theta_2<1$.

Із формул (1.39) та (1.41) отримаємо

$$c\rho\frac{\partial u(x,t+\theta_2\Delta t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u(x+\theta_1\Delta x,t)}{\partial x^2}.$$

Переходячи тут до границі $\Delta x\to 0$ та $\Delta t\to 0$, отримаємо:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1.42}$$

де $a^2 = k/c\rho$. Рівняння (1.42) називають рівнянням теплопровідності

однорідного стержня.

1.10 Розв'язання крайової задачі для рівняння теплопровідності методом Фур'є

Розглянемо задачу: знайти функцію $u(x,t)$, яка задовольняє рівняння (1.42) і наступні умови:

$$u(x,0)=u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x) \text{ – початкова умова;} \tag{1.43}$$

$$u(0,t)=u(x,t)\big|_{x=0}=0,\ u(l,t)=u(x,t)\big|_{x=l}=0, \text{ – крайові умови.} \tag{1.44}$$

Розв'язок будемо шукати у вигляді

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{1.45}$$

де $X(x)$– невідома функція змінної x, а $T(t)$ – невідома функція змінної t. Для того, щоб функція $u(x,t)$ задовольняла рівнянню (1.42), необхідно і достатньо, щоб

$$T'(t)X(x)=a^2T(t)X''(x),$$

тобто

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{1.46}$$

Оскільки ліва частина співвідношення (1.46) являє собою функцію від t, а права – від x, то насправді ліва і права частина цього співвідношення дорівнюють сталій величині. Поклавши значення цієї сталої рівним $-\lambda^2$, $\lambda>0$, отримаємо:

$$T'=-\lambda^2a^2T, \tag{1.47}$$

$$X''=-\lambda^2X. \tag{1.48}$$

Рівності (1.47), (1.48) являють собою звичайні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Загальні розв'язки цих рівнянь мають вигляд

$$T_\lambda(t)=A\exp(-\lambda^2a^2t), \tag{1.49}$$

$$X_\lambda(x)=B\cos\lambda x+C\sin\lambda x. \tag{1.50}$$

Для того, щоб ненульова функція $u(x,t)=T_\lambda(t)X_\lambda(x)$ задовольняла умови $u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,$ необхідно, щоб

$$X(x)=C\sin\frac{\pi nx}{l}. \tag{1.51}$$

Це означає, що λ в рівностях (1.49), (1.50) має вигляд $\lambda=\dfrac{\pi n}{l}$ і $B=0$.

Послідовність функцій

$$u_n(x,t)=\sin\frac{\pi nx}{l}\exp\left(-\frac{\pi^2n^2a^2}{l^2}t\right), n=1,2,... \tag{1.52}$$

задовольняє рівняння (1.42) і умови

$$u_n(0,t)=0,\ u_n(l,t)=0. \tag{1.53}$$

Однак, взагалі кажучи, функція (1.52) не задовольняє умовам (1.43).

Ясно, що лінійна комбінація

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t) \tag{1.54}$$

є розв'язком рівняння (1.42) і задовольняє умови (1.44) при будь-яких b_n (за умови, що сума ряду є неперервною функцією і ряд (1.54) можна почленно диференціювати). Виявляється, що можна обрати такі коефіцієнти b_n ($n=1,2,...$), що функція (1.54) буде задовольняти не тільки рівняння (1.42) і умови (1.44), а також і умови (1.43), і, отже, буде розв'язком поставленої задачі.

Покажемо, що добір коефіцієнтів b_n таких, що $u(x,t)$ має властивість (1.43) можливий, і вкажемо явні формули, які виражають ці коефіцієнти через задану функцію $\varphi(x)$. З виразів (1.43), (1.52), (1.54) випливає:

$$u(x,0)=\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}. \tag{1.55}$$

Із теорії рядів Фур'є відомо, що будь яка функція $\varphi(x)$, яка визначена на відрізку $[0;l]$ і задовольняє деяким умовам, може бути однозначно подана у вигляді (1.55) – розвинена в ряд Фур'є за синусами.

Відомо, що в формулі (1.55) коефіцієнти b_n виражаються через функцію $\varphi(x)$ таким чином:

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\,dx. \tag{1.56}$$

Отже, існує єдина функція $u(x,t)$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

і умови $u(0,t)=u(l,t)=0,\ u(x,0)=\varphi(x)$. Такою функцією є

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t\right). \tag{1.57}$$

Приклад 1.10 Застосувавши метод Фур'є, знайдіть розв'язок рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ 0<x<l;\ t>0, \tag{1.58}$$

який задовольняє крайові умови

$$u(0,t)=u(l,t)=0, \tag{1.59}$$

і початкову умову

$$u(x,0)=\begin{cases} x, & 0<x\le\frac{1}{2} \\ l-x, & \frac{1}{2}\le x\le l. \end{cases} \tag{1.60}$$

Розв'язання. Шукатимемо розв'язок у вигляді

$$u(x,t) = X(x)T(t).$$

Підставивши $u(x,t)$ у рівняння (1.58), дістанемо:

$$\frac{T'}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

тобто

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \qquad T' + a^2\lambda^2 T = 0.$$

Розв'язок цих рівнянь отримаємо у вигляді

$$X = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x, \qquad T = C\exp(-\lambda^2 a^2 t).$$

Отже,

$$u = (M\cos\lambda x + N\sin\lambda x)\exp(-\lambda^2 a^2 t),$$

де

$$M = A\cdot C,\ N = B\cdot C.$$

Із умов (1.59) випливає, що $M = 0,\ N \neq 0,\ \sin\lambda l = 0,$ звідки

$$\lambda = \frac{n\pi}{l}, n \in N.$$

Для кожного n маємо:

$$u_n(x,t) = N_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right).$$

Внаслідок лінійності рівняння теплопровідності сума u_n також є розв'язком рівняння, тобто

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \exp\left(-\frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Користуючись рівністю (1.60), отримаємо:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n \sin(\frac{\pi n x}{l}).$$

Отримали розвинення функції $f(x)$ у ряд Фур'є за синусами, де

$$N_n = \frac{2}{l}\int_0^1 f(x)\sin(\frac{\pi n x}{l})dx.$$

Визначимо N_n:

$$N_n = \frac{2}{l}\left[\int_0^l x\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx + \int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{l}\left[-\frac{xl}{n\pi}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Bigg|_0^{l/2} + \frac{l}{n\pi}\int_0^{l/2}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx - \frac{(l-x)l}{n\pi}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Bigg|_{l/2}^{l} - \frac{l}{n\pi}\int_{l/2}^{l}\cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right)dx\right] =$$

$$= \frac{2}{l}\left[-\frac{l^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right) + \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Bigg|_0^{l/2} + \frac{l^2}{2n\pi}\cos\left(\frac{\pi n}{l}\right) - \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\Bigg|_{l/2}^{l}\right] = \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\left(\frac{\pi n}{l}\right).$$

Оскільки $\sin(\frac{\pi n}{2}) = 0$ при $n = 2k$ і $\sin(\frac{\pi n}{2}) = (-1)^k$ при $n = 2k + 1$, дістаємо:

$$N_{2k+1} = (-1)^k \frac{4l}{(2k+1)^2 \pi^2}.$$

Остаточно

$$u(x,t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \exp\left(-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t \right) \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{l} x \right).$$

1.11 Рівняння Лапласа. Розв'язання задачі Діріхле для круга методом Фур'є

Нехай у площині xOy є круг радіуса R з центром в початку координат і на його колі задана деяка функція $f(\varphi)$, де φ – полярний кут. Треба знайти функцію $u(r,\varphi)$ неперервну в цьому крузі, включаючи його межу, яка задовольняє всередині цього круга рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \tag{1.61}$$

і яка на межі даного круга набуває заданих значень

$$u\big|_{r=R} = f(\varphi). \tag{1.62}$$

Рівняння (1.52) у полярній системі координат записується у вигляді

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{1.63}$$

Будемо шукати розв'язок цього рівняння методом відокремлювання змінних, поклавши

$$u = \Phi(\varphi) R(r). \tag{1.64}$$

Підставляючи (1.64) у рівняння (1.63), отримаємо:

$$r^2 \Phi(\varphi) R''(r) + r\Phi(\varphi) R'(r) + \Phi''(\varphi) R(r) = 0,$$

або

$$\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)}. \tag{1.65}$$

Оскільки ліва частина рівності (1.65) не залежить від r, а права – від φ, то вони дорівнюють сталій величині. Позначаючи цю сталу через $-k^2$ (нижче пояснимо чому не $+k^2$), отримаємо

$$\Phi''(\varphi) + k^2 \Phi(\varphi) = 0, \tag{1.66}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - k^2 R(r) = 0. \tag{1.67}$$

Загальний розв'язок рівняння (1.66):

$$\Phi = A\cos k\varphi + B\sin k\varphi. \tag{1.68}$$

Розв'язок рівняння (1.67) будемо шукати у вигляді $R(r) = r^m$. Підставляючи цей вираз у (1.67), отримаємо:

$$r^2 m(m-1) r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0,$$

або

$$m^2 - k^2 = 0 \;\Rightarrow\; m_1 = k, m_2 = -k.$$

Звідки маємо:

$$R(r) = Cr^k + Dr^{-k}. \tag{1.69}$$

Вирази (1.68), (1.69) підставляємо в рівність (1.64):

$$u_k = \left(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi\right)\left(C_k r^k + D_k r^{-k}\right). \tag{1.70}$$

Функція (1.70) буде розв'язком рівняння (1.63) при будь-якому значенні k, відмінному від нуля. Якщо $k = 0$, то рівняння (1.66), (1.67) набувають вигляду

$$\Phi''(\varphi) = 0,\; rR''(r) + R'(r) = 0.$$

Їх загальні розв'язки мають вигляд

$$\Phi = A_0 + B_0\varphi,$$

$$R(r) = C_0 + D_0 \ln r,$$

і, отже,

$$u_0 = \left(A_0 + B_0\varphi\right)\left(C_0 + D_0 \ln r\right). \tag{1.71}$$

Цей розв'язок рівняння (1.63) повинен бути періодичною функцією від φ, бо при одному і тому самому значенні r при φ і $\varphi + 2\pi$ ми повинні мати одне і те саме значення розв'язку, тому що розглядається одна і та сама точка круга. Тому в формулі (1.71) повинно $B_0 = 0$. Далі шукаємо розв'язок, неперервний в крузі. Отже, в рівностях (1.70) і (1.71) повинно відповідно $D_k = 0$ і $D_0 = 0$.

Таким чином, при $k = 0$ права частина рівності (1.70) перетворюється в добуток $A_0 C_0$, який позначимо через $A_0 / 2$, тобто $u_0 = A_0 / 2$.

Будемо шукати розв'язок нашої задачі у вигляді суми розв'язків виду (1.70), бо сума розв'язків є також розв'язком рівняння. Сума повинна бути періодичною функцією від φ. Це буде так, якщо кожний доданок буде періодичною функцією від φ. Для цього k повинно набувати цілих значень (якби у рівностях (1.66), (1.67) взяли $+k^2$, то не отримали б періодичні розв'язки – в $\Phi(\varphi)$ не ввійшли б $\sin k\varphi$ і $\cos k\varphi$). Ми можемо обмежитися лише додатними значеннями $k = 1, 2, ...,$ бо внаслідок довільності сталих A, B, C від'ємні значення k нових частинних розв'язків не дають.

Отже,

$$u(r,\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) r^n. \tag{1.72}$$

Обираємо A_n і B_n так, щоб задовольнялась крайова умова (1.62). Підставляючи в рівність (1.72) $r = R$, отримаємо

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right) R^n.$$

Це розвинення функції $f(\varphi)$ у ряд Фур'є, де

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt, \qquad (1.73)$$

$$B_n = \frac{1}{\pi R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt.$$

Підставляючи замість A_0, A_n, B_n їх вирази в (1.72) і виконуючи тригонометричні перетворення, отримаємо:

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi)\right)dt,$$

але

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \cos n(t-\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n \left[e^{in(t-\varphi)} + e^{-in(t-\varphi)}\right] =$$

$$= \frac{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - 2\frac{r}{R}\cos(t-\varphi) + \left(\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}.$$

Тому

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\varphi) + r^2}dt.$$

Цю формулу називають інтегралом Пуасона.

Приклад 1.11 Знайдіть стаціонарний розподіл температури $u(r)$ у плоскому кільці, обмеженому колами радіусів R_0, R_1, якщо на його границях підтримується температура u_0 і u_1.

Розв'язання. Із рівняння Лапласа для $u = u(r)$ маємо:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = 0.$$

Звідки

$$r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \text{або} \quad ru'' + u' = 0.$$

Позначимо $u' = p(r), u'' = p'(r)$. Тоді отримаємо рівняння першого порядку

$$rp' + p = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$r\frac{dp}{dr} = -p, \qquad \int\frac{dp}{p} = -\int\frac{dr}{r},$$

тобто $pr = A$, а оскільки $p = \frac{du}{dr}$, то

$$u = A\ln r + B.$$

Із початкових умов знаходимо:

$$u_0 = A\ln R_0 + B,\ \ u_1 = A\ln R_1 + B.$$

Тоді

$$A = \frac{u_1 - u_0}{\ln(R_1 / R_0)}; \qquad B = u_0 - \frac{u_1 - u_0}{\ln(R_1 / R_0)}\ln R_0.$$

Остаточно

$$u = u_0 + \frac{u_1 - u_0}{\ln\left(R_1 / R_0\right)}\ln\frac{r}{R_0}.$$

Варіанти індивідуальних завдань

1. Вкажіть тип рівняння та приведіть його до канонічного вигляду

1. $4U_{xx}+8U_{xy}+3U_{yy}=0$	2. $3U_{xx}+8U_{xy}+4U_{yy}=0$	3. $3U_{xx}+4U_{xy}+U_{yy}=0$
4. $U_{xx}+4U_{xy}+3U_{yy}=0$	5. $16U_{xx}+16U_{xy}+3U_{yy}=0$	6. $3U_{xx}+16U_{xy}+16U_{yy}=0$
7. $25U_{xx}+20U_{xy}+3U_{yy}=0$	8. $U_{xx}+8U_{xy}+12U_{yy}=0$	9. $12U_{xx}+8U_{xy}+U_{yy}=0$
10. $49U_{xx}+28U_{xy}+3U_{yy}=0$	11. $64U_{xx}+32U_{xy}+3U_{yy}=0$	12. $3U_{xx}+20U_{xy}+25U_{yy}=0$
13. $U_{xx}+3U_{xy}+2U_{yy}=0$	14. $2U_{xx}+3U_{xy}+U_{yy}=0$	15. $U_{xx}+12U_{xy}+27U_{yy}=0$
16. $U_{xx}+16U_{xy}+48U_{yy}=0$	17. $U_{xx}+20U_{xy}+75U_{yy}=0$	18. $U_{xx}+24U_{xy}+108U_{yy}=0$
19. $U_{xx}+28U_{xy}+147U_{yy}=0$	20. $U_{xx}+32U_{xy}+192U_{yy}=0$	21. $U_{xx}+36U_{xy}+243U_{yy}=0$
22. $3U_{xx}+28U_{xy}+49U_{yy}=0$	23. $3U_{xx}+32U_{xy}+64U_{yy}=0$	24. $27U_{xx}+12U_{xy}+U_{yy}=0$
25. $48U_{xx}+16U_{xy}+U_{yy}=0$	26. $75U_{xx}+20U_{xy}+U_{yy}=0$	27. $108U_{xx}+24U_{xy}+U_{yy}=0$
28. $147U_{xx}+28U_{xy}+U_{yy}=0$	29. $192U_{xx}+32U_{xy}+U_{yy}=0$	30. $4U_{xx}+32U_{xy}-U_{yy}=0$

2. Розв'яжіть мішані рівняння

1. $u_{tt} = 81u_{xx}$, $u(0,t)=u(5,t)=0$, $u(x,0)=\sin\pi x$, $u_t(x,0) = 18\pi\sin 2\pi x$.
2. $u_{tt} = 64u_{xx}$, $u(0,t) = u(6,t) = 0$, $u(x,0) = 2\sin\pi x$, $u_t(x,0) = 8\pi\sin\pi x$.
3. $u_{tt} = 49u_{xx}$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$, $u(x,0)=3\sin 2\pi x$, $u_t(x,0) = 21\pi\sin 3\pi x$.
4. $u_{tt} = 36u_{xx}$, $u(0,t) = u(5,t) = 0$, $u(x,0)=4\sin 2\pi x$, $u_t(x,0) = 12\pi\sin 2\pi x$.
5. $u_{tt} = 25u_{xx}$, $u(0,t) = u(3,t) = 0$, $u(x,0) = 5\sin 3\pi x$, $u_t(x,0) = 20\pi\sin 4\pi x$.
6. $u_{tt} = 16u_{xx}$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$, $u(x,0) = 6\sin 3\pi x$, $u_t(x,0) = 12\pi\sin 3\pi x$.
7. $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u(0,t) = u(2,t) = 0$, $u(x,0) = 7\sin 4\pi x$, $u_t(x,0) = 15\pi\sin 5\pi x$.
8. $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(0,t) = u(3,t) = 0$, $u(x,0) = 8\sin 4\pi x$, $u_t(x,0) = 8\pi\sin 4\pi x$.
9. $u_{tt} = u_{xx}$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 9\sin 5\pi x$, $u_t(x,0) = 6\pi\sin 6\pi x$.
10. $u_{tt} = u_{xx}$, $u(0,t) = u(3,t) = 0$, $u(x,0) = 10\sin 5\pi x$, $u_t = (x,0) = 5\pi\sin 5\pi x$.
11. $u_{tt} = 4u_{xx}$, $u(0,t) = u(2,t) = 0$, $u(x,0) = 11\sin 6\pi x$, $u_t(x,0) = 12\pi\sin 6\pi x$.
12. $u_{tt} = 9u_{xx}$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 12\sin 6\pi x$, $u_t(x,0) = 18\pi\sin 6\pi x$.

13. $u_{tt}=16u_{xx}$, $u(0,t)=u(3,t)=0$, $u(x,0)=13\sin 5\pi x$, $u_t x(x,0)=20\pi\sin 5\pi x$.
14. $u_{tt}=25u_{xx}$, $u(0,t)=u(2,t)=0$, $u(x,0)=14\sin 5\pi x$, $u_t(x,0)=25\pi\sin 5\pi x$.
15. $u_{tt}=36u_{xx}$, $u(0,t)=u(4,t)=0$, $u(x,0)=15\sin 4\pi x$, $u_t(x,0)=24\pi\sin 4\pi x$.
16. $u_{tt}=49u_{xx}$, $u(0,t)=u(3,t)=0$, $u(x,0)=16\sin 4\pi x$, $u_t(x,0)=28\pi\sin 4\pi x$.
17. $u_{tt}=64u_{xx}$, $u(0,t)=u(5,t)=0$, $u(x,0)=17\sin 3\pi x$, $u_t(x,0)=24\pi\sin 3\pi x$.
18. $u_{tt}=81u_{xx}$, $u(0,t)=u(4,t)=0$, $u(x,0)=18\sin 3\pi x$, $u_t(x,0)=27\pi\sin 3\pi x$.
19. $u_{tt}=u_{xx}$, $u(0,t)=u(2,t)=0$, $u(x,0)=19\sin 7\pi x$, $u_t(x,0)=7\pi\sin 7\pi x$.
20. $u_{tt}=4u_{xx}$, $u(0,t)=u(1,t)=0$, $u(x,0)=20\sin 7\pi x$, $u_t(x,0)=14\pi\sin 7\pi x$.
21. $u_{tt}=9u_{xx}$, $u(0,t)=u(3,t)=0$, $u(x,0)=21\sin 6\pi x$, $u_t(x,0)=18\pi\sin 6\pi x$.
22. $u_{tt}=16u_{xx}$, $u(0,t)=u(2,t)=0$, $u(x,0)=22\sin 6\pi x$, $u_t(x,0)=24\pi\sin 6\pi x$.
23. $u_{tt}=25u_{xx}$, $u(0,t)=u(4,t)=0$, $u(x,0)=23\sin 5\pi x$, $u_t(x,0)=25\pi\sin 5\pi x$.
24. $u_{tt}=36u_{xx}$, $u(0,t)=u(3,t)=0$, $u(x,0)=24\sin 5\pi x$, $u_t(x,0)=30\pi\sin 5\pi x$.
25. $u_{tt}=49u_{xx}$, $u(0,t)=u(5,t)=0$, $u(x,0)=25\sin 4\pi x$, $u_t(x,0)=28\pi\sin 4\pi x$.
26. $u_{tt}=64u_{xx}$, $u(0,t)=u(4,t)=0$, $u(x,0)=26\sin 4\pi x$, $u_t(x,0)=32\pi\sin 4\pi x$.
27. $u_{tt}=81u_{xx}$, $u(0,t)=u(6,t)=0$, $u(x,0)=27\sin 3\pi x$, $u_t(x,0)=27\pi\sin 3\pi x$.
28. $u_{tt}=u_{xx}$, $u(0,t)=u(5,t)=0$, $u(x,0)=28\sin 3\pi x$, $u_t(x,0)=3\pi\sin 3\pi x$.
29. $u_{tt}=4u_{xx}$, $u(0,t)=u(7,t)=0$, $u(x,0)=29\sin 2\pi x$, $u_t(x,0)=4\pi\sin 2\pi x$.
30. $u_{tt}=9u_{xx}$, $u(0,t)=u(6,t)=0$, $u(x,0)=30\sin 2\pi x$, $u_t(x,0)=6\pi\sin 2\pi x$.

3. Розв'яжіть мішану задачу

1 $u_t = 2u_{xx}$, $u(x,0) = \sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(8,t)$
2 $u_t = 9u_{xx}$, $u(x,0) = 2\sin\pi x + 3\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$
3 $u_t = 3u_{xx}$, $u(x,0) = 3\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(7,t) = 0$
4 $u_t = 3u_{xx}$, $u(x,0) = 4\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$, $u(0,t) = u(2,t) = 0$
5 $u_t = 4u_{xx}$, $u(x,0) = 5\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(6,t) = 0$
6 $u_t = 7u_{xx}$, $u(x,0) = 6\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(3,t) = 0$
7 $u_t = 5u_{xx}$, $u(x,0) = 7\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(5,t) = 0$
8 $u_t = 6u_{xx}$, $u(x,0) = 8\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$
9 $u_t = 6u_{xx}$, $u(x,0) = 9\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$
10 $u_t = 5u_{xx}$, $u(x,0) = 10\sin 2\pi x + 3\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(5,t) = 0$
11 $u_t = 7u_{xx}$, $u(x,0) = 11\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(3,t) = 0$
12 $u_t = 4u_{xx}$, $u(x,0) = 12\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$, $u(0,t) = u(6,t) = 0$
13 $u_t = 8u_{xx}$, $u(x,0) = 13\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(2,t) = 0$
14 $u_t = 3u_{xx}$, $u(x,0) = 14\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(7,t) = 0$
15 $u_t = 9u_{xx}$, $u(x,0) = 15\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$
16 $u_t = 2u_{xx}$, $u(x,0) = 16\sin 3\pi x + 9\sin 4\pi x$, $u(0,t) = u(8,t) = 0$
17 $u_t = 2u_{xx}$, $u(x,0) = 17\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(2,t) = 0$
18 $u_t = 3u_{xx}$, $u(x,0) = 18\sin 3\pi x + 3\sin 4\pi x$, $u(0,t) = u(7,t) = 0$
19 $u_t = 3u_{xx}$, $u(x,0) = 19\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(3,t) = 0$
20 $u_t = 8u_{xx}$, $u(x,0) = 20\sin 2\pi x + 7\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(6,t) = 0$
21 $u_t = 4u_{xx}$, $u(x,0) = 21\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$

22 $u_t = 4u_{xx}$, $u(x,0) = 22\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$, $u(0,t) = u(5,t) = 0$
23 $u_t = 5u_{xx}$, $u(x,0) = 23\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(5,t) = 0$
24 $u_t = 6u_{xx}$, $u(x,0) = 24\sin 2\pi x + 9\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$
25 $u_t = 6u_{xx}$, $u(x,0) = 25\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(6,t) = 0$
26 $u_t = 5u_{xx}$, $u(x,0) = 26\sin 3\pi x + 3\sin 4\pi x$, $u(0,t) = u(3,t) = 0$
27 $u_t = 7u_{xx}$, $u(x,0) = 27\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(7,t) = 0$
27 $u_t = 4u_{xx}$, $u(x,0) = 28\sin 2\pi x + 5\sin 3\pi x$, $u(0,t) = u(7,t) = 0$
28 $u_t = 8u_{xx}$, $u(x,0) = 29\sin 2\pi x$, $u(0,t) = u(8,t) = 0$
30 $u_t = 3u_{xx}$, $u(x,0) = 30\sin 3\pi x + 7\sin 4\pi x$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$

4. Розв'яжіть задачу Діріхле для рівняння Лапласа $\Delta U=0$ в крузі $0\le r<1$, $0\le\varphi<\pi$ (r,φ – полярні координати), на границі якого шукана функція $U(r,\varphi)$ має такі значення:

1. $U(1,\varphi) = \cos 9\varphi$	2. $U(1,\varphi) = 2\sin 8\varphi$	3. $U(1,\varphi) = 3\cos 7\varphi$
4. $U(1,\varphi) = 4\sin 6\varphi$	5. $U(1,\varphi) = 5\cos 5\varphi$	6. $U(1,\varphi) = 6\sin 4\varphi$
7. $U(1,\varphi) = 7\cos 3\varphi$	8. $U(1,\varphi) = 8\sin 2\varphi$	9. $U(1,\varphi) = 9\cos 2\varphi$
10. $U(1,\varphi) = 10\sin 3\varphi$	11. $U(1,\varphi) = 11\cos 4\varphi$	12. $U(1,\varphi) = 12\sin 5\varphi$
13. $U(1,\varphi) = 13\cos 6\varphi$	14. $U(1,\varphi) = 14\sin 7\varphi$	15. $U(1,\varphi) = 15\cos 8\varphi$
16. $U(1,\varphi) = 16\sin 9\varphi$	17. $U(1,\varphi) = 17\cos 9\varphi$	18. $U(1,\varphi) = 18\sin 8\varphi$
19. $U(1,\varphi) = 19\cos 7\varphi$	20. $U(1,\varphi) = 20\sin 6\varphi$	21. $U(1,\varphi) = 21\cos 5\varphi$
22. $U(1,\varphi) = 22\sin 4\varphi$	23. $U(1,\varphi) = 23\cos 3\varphi$	24. $U(1,\varphi) = 24\sin 2\varphi$
25. $U(1,\varphi) = 25\cos 2\varphi$	26. $U(1,\varphi) = 26\sin 3\varphi$	27. $U(1,\varphi) = 27\cos 4\varphi$
28. $U(1,\varphi) = 28\sin 5\varphi$	29. $U(1,\varphi) = 29\cos 6\varphi$	30. $U(1,\varphi) = 30\sin 7\varphi$

Питання для самоперевірки

1 Сформулюйте означення диференціального рівняння з частинними похідними. Дайте класифікацію лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними 2-го порядку з двома незалежними змінними.

2 Яким чином можна звести до канонічного вигляду диференціальне рівняння з частинними похідними 2-го порядку з двома незалежними змінними.

3 Виведіть рівняння коливань струни.

4 Розв'яжіть крайову задачу для рівняння коливань струни методом Фур'є.

5 Викладіть метод Даламбера розв'язання задачі Коші для рівняння коливань струни.

6 Виведіть рівняння теплопровідності. Викладіть метод Фур'є розв'язання крайової задачі для рівняння теплопровідності.

7 Викладіть метод Фур'є розв'язання задачі Діріхле для круга.

2 ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є

2.1 Ряд Фур'є

2.1.1 Тригонометрична система функцій. Коефіцієнти ряду Фур'є. Розвинення періодичної функції в ряд Фур'є. Теорема Діріхле

Система функцій $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ...\varphi_{n1}(x), ...$ називається ортогональною на відрізку $[a;b]$, якщо виконується умова

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ c, i = j, \end{cases} (i, j = \overline{1,n}), \tag{2.1}$$

де $c \neq 0$ – дійсне число

При $c = 1$ наведена система функцій називається ортонормованою. Якщо система ортогональна, то можна її пронормувати, тобто привести до ортонормованої.

Тригонометрична система функцій

$$1;\ \sin x;\ \cos x;\ \sin 2x;\ \cos 2x; ...\sin kx;\ \cos kx;\ ...,$$

де *к* – ціле число, є ортогональною на відрізку $[-\pi;\pi]$.

$$\int_{\pi}^{\pi} \sin kx dx = -\frac{1}{k}\cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{k}\left[\cos k\pi - \cos(-k\pi)\right] = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{1}{k}\sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{k}\left(\sin k\pi + \sin k\pi\right) = 0.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi, & k = m. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \pi, & k = m. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos mx dx = 0.$$

Ряд вигляду

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{2.3}$$

називають тригонометричним. Сталі числа a_0, a_n, b_n називають коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Якщо ряд (2.3) збігається, то його сума є періодичною функцією $f(x)$ з періодом 2π, оскільки $\sin nx$ і $\cos nx$ є періодичними функціями з періодом 2π: $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Тригонометричний ряд (2.3) називають рядом Фур'є для функції $f(x)$, якщо його коефіцієнти визначені формулами Ейлера-Фур'є для інтервалу $(-\pi; \pi)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad (2.4)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Достатні умови розвинення функції в ряд Фур'є формулюються **теоремою Діріхле:** якщо періодична функція $f(x)$ з періодом 2π - кусково – монотонна й обмежена на відрізку $[-\pi;\pi]$, то таку функцію можна розвинути в збіжний в усіх точках ряд Фур'є, при цьому

1) сума $S(x)$ отриманого ряду дорівнює значенню функції $f(x)$ в точках неперервності:

$$S(x)=f(x); \qquad (2.5)$$

2) у кожній точці $x = c$ скінченого розриву функції $f(x)$ ряд збігається до півсуми односторонніх границь зліва і справа:

$$S(x=c) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to c-0} f(x) + \lim_{x\to c+0} f(x)\right), \qquad (2.6)$$

3) на обох кінцях інтервалу $(-\pi;\pi)$ ряд збігається до півсуми односторонніх границь функції при прямуванні аргументу x до цих точок в середині інтервалу:

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim_{x\to -\pi+0} f(x) + \lim_{x\to \pi-0} f(x)\right). \qquad (2.7)$$

2.1.2 Ряд Фур'є з періодом 2*l*. Розвинення функцій у ряд за синусами й косинусами

Досить часто виникає потреба розвинути в тригонометричний ряд функції періода, що відрізняється від 2π. В цьому випадку, якщо $f(x)$ – періодична функція з періодом $2l$, для якої виповнюються на сегменті $[-l,l]$ умови Діріхле, то задана функція $f(x)$може бути надана у вигляді сумми ряда Фур'є. Для періодичної функції з періодом $2l$ в загальному випадку, відмінної від 2π, і заданої в інтервалі $(-l;l)$, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{\pi n x}{l} + b_n \sin\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad (2.8)$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx.$$

Якщо функція $f(x)$ є непарною, то ряд Фур'є (2.8) містить тільки синуси:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n x}{l}, \qquad (2.9)$$

де

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}dx. \qquad (2.10)$$

Якщо $f(x)$ – парна функція, то ряд Фур'є буде представлений тільки косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{\pi n x}{l}, \qquad (2.11)$$

де

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}dx. \qquad (2.12)$$

2.1.3 Розвинення функцій у ряд Фур'є

Нехай на деякому відрізку $[a;b]$ задана кусково-монотонна й обмежена неперіодична функція $f(x)$ (рис. 2.1).

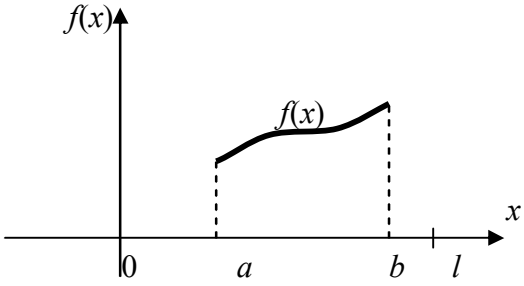


Рисунок 2.1

Покажемо, що дану функцію $f(x)$ в точках її неперервності можна подати у вигляді суми ряду Фур'є на відрізку $[a;b]$. Для цього розглянемо довільну періодичну кусково-монотонну функцію $f_l(x)$ з періодом $2l \ge |b-a|$, яка співпадає з функцією $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

Для визначеності покладаємо, що $a \ge 0$ і $b \ge 0$, і приймемо відрізок $[0;l]$ таким, щоб $[a;b]$ був розміщеним у середині нього. Якщо $a \ne 0$ і $b \ne 0$, то на відрізках $[0;a]$ і $[b;l]$ функцію можна задати довільно, можна покласти її рівною нулю, тобто $f(x) = 0$ (рис. 2.1). Тоді отримаємо функцію

$$f_1(x)=\begin{cases} 0, & 0 \le x < a, \\ f(x), & a \le x \le b, \\ 0, & b < x \le l. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Припустимо, що виконано розвинення функції $f_l(x)$ в ряд Фур'є. Сума цього ряду в усіх точках відрізка $[a;b]$ (крім точок розриву) співпадає з заданою функцією $f(x)$, тим самим подамо розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є на відрізку $[a;b]$.

При $a = 0$ і $b = l$ функцію не треба додатково задавати на відрізках $[0;a]$ і $[b;l]$, отримаємо наступний важливий випадок: функція $f(x)$ задана на відрізку $[0;l]$. Для розвинення цієї функції в ряд Фур'є її можна продовжити в інтервал $(-l;0)$ (без порушення кускової монотонності) двома способами:

1) парним чином (рис. 2.2) за виконання умови $f(-x) = f(x)$; в цьому випадку отримаємо парну функцію і її ряд Фур'є буде містить тільки косинуси;

2) непарним чином (рис. 2.3) за виконання умови $f(-x) = -f(x)$; при цьому отримаємо непарну функцію і її ряд Фур'є буде містить тільки синуси.

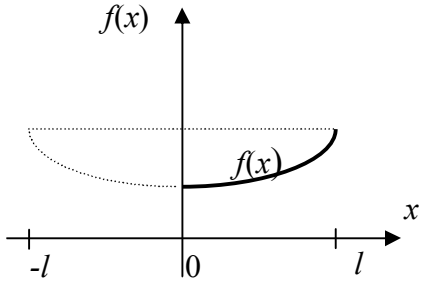


Рисунок 2.2

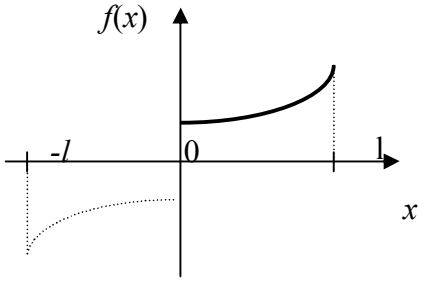


Рисунок 2.3

Таким чином, якщо на відрізку $[0;l]$ задана деяка кусково-монотонна функція $f(x)$, то її можна розвинути в ряд Фур'є як за синусами, так і за косинусами.

2.1.4 Приклади

Приклад 2.1 Розвиньте періодичну з періодом $2l$ функцію $f(x)=2x-3$ в ряд Фур'є в інтервалі (–3;3).

Розв'язання. Подамо функцію графічно (рис. 2.4).

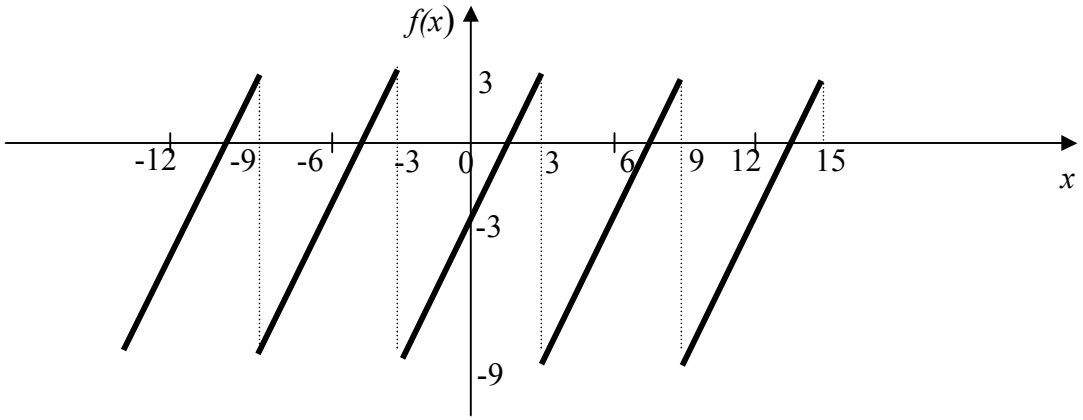


Рисунок 2.4

У цьому випадку $2l = 6$, $l = 3$.

Знаходимо коефіцієнти Ейлера-Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)dx = \frac{1}{3}\left(x^2-3x\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{1}{3}\left[(9-9)-(9+9)\right] = -6,$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)\cos\frac{\pi nx}{3}dx = \left|\begin{matrix} u = 2x-3, & du = 2dx \\ dv = \cos\frac{\pi nx}{3}dx, & v = \frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(2x-3)\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3} - \int_{-3}^{3}\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}2dx\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)\sin\frac{\pi nx}{3}dx = \left|\begin{matrix} u = 2x-3, & du = 2dx \\ dv = \sin\frac{\pi nx}{3}dx, & v = -\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-(2x-3)\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3} - \int_{-3}^{3}\left(-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}2dx\right.\right] =$$

$$=\frac{1}{3}\left[-3\cdot\frac{3}{\pi n}(-1)^n-9\cdot\frac{3}{\pi n}(-1)^n+\frac{6}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Bigg|_{-3}^{3}\right]=-\frac{12}{\pi n}(-1)^n=\frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}.$$

Таким чином, ряд Фур`є для даної функції має вигляд

$$f(x)=-3+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi n x}{3}$$

або

$$f(x)=-3+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}.$$

Приклад 2.2 Розвиньте в ряд Фур'є функцію з періодом $T=4$ в інтервалі (-0;4) формулою

$$f(x)=\begin{cases}6, & 0<x<2,\\ 3x, & 2<x<4.\end{cases}$$

Розв'язання. Подамо функцію графічно (рис. 2.5).

Покладаючи l=2 і розбиваючи інтервал інтегрування точкою $x=2$ на дві частини, оскільки в кожній з них них функція задана різними формулами, отримаємо:

$$a_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\cos\frac{n\pi x}{2}dx+\int_2^4 3x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{12}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+3\left(\frac{2\pi}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}+\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_2^4\right]=\frac{6}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi),\quad n\neq 0.$$

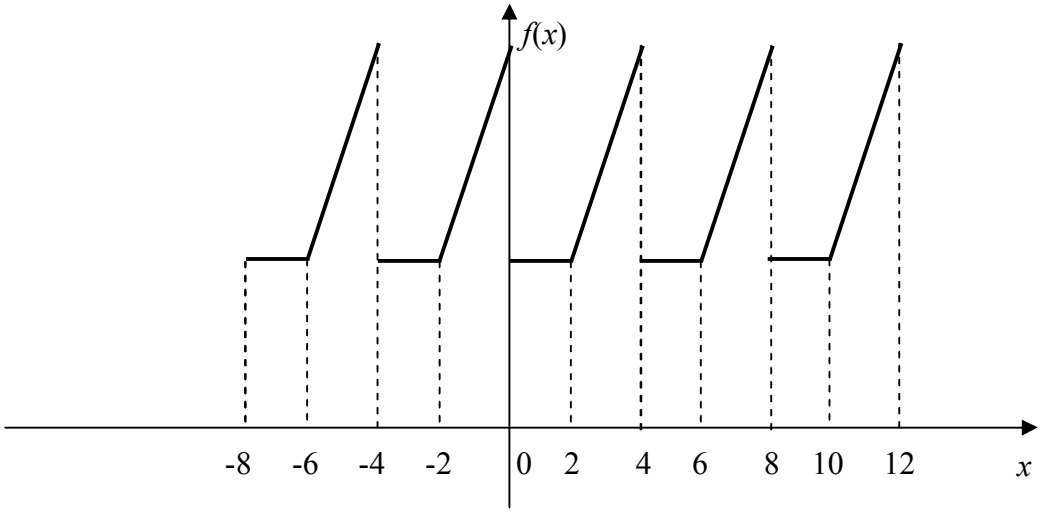


Рисунок 2.5

При парному n – $\cos n\pi=1$ і $a_n=0$, при непарному n – $\cos n\pi=-1$ і $a_n=\dfrac{12}{n^2\pi^2}$.

При n=0

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\,dx+\int_2^4 3x\,dx\right)=\frac{1}{2}\left(6x\Big|_0^2+\frac{3x^2}{2}\Big|_2^4\right)=15,$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int_0^2 6\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx+\int_2^4 3x\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{12}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+3\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}-\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_2^4\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi n}\cdot 12\cos\frac{\pi n x}{2}\Bigg|_2^0+\frac{3}{2}\left[\frac{2x}{\pi n}\left(-\cos\frac{\pi n x}{2}\right)\Bigg|_2^4+\underbrace{\int_2^4\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{2}dx}_{0}\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12(1-\cos n\pi)-3(2\cdot 4\cos 2\pi n-4\cos\pi n)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n\pi}\left[12-\cancel{12\cos n\pi}+24+\cancel{12\cos n\pi}\right]=\frac{-12}{2n\pi}=-\frac{6}{n\pi}.$$

Шукане розвинення даної функції має вигляд

$$f(x)=\frac{15}{2}+\frac{12}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{25}\cos\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right)-$$

$$-\frac{6}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\ldots\right).$$

Воно є справедливим в усій області визначення даної функції: в інтервалі $(0,2)$ сума ряду $S(x)=6$, в інтервалі $(2,4)$ сума ряду $S(x)=3x$. В точці розриву $x=2$,

$$S(x)=\frac{1}{2}\left[f(2-0)+f(2+0)\right]=6.$$

Приклад 2.3 Розвиньте в ряд Фур'є функцію з періодом $T=2$ задану в інтервалі $(-1,1)$ формулою $f(x)=|\,x\,|$ (рис. 2.6).

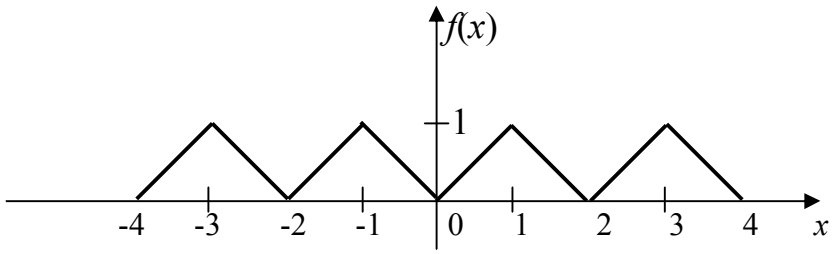


Рисунок 2.6

Розв'язання. Функція задовольняє умовам Діріхле, і є парна. Покладаючи l=1, отримаємо $a_0=2\int_0^1 x\,dx=2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=1$,

$$a_n=2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx=2\left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x+\frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}0, & n-\text{парне},\\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n-\text{непарне}.\end{cases}$$

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

Приклад 2.4 Розвиньте в ряд Фур'є функцію $f(x)$, задану на відрізку $[0,2]$ рівнянням $f(x)=x-\frac{x^2}{2}$.

Розв'язання. Функція може бути розвинутою в ряд Фур'є нескінченою кідькістю способів. Розглянемо два найбільш важливих варіанти розвинення.

А. Довизначимо функцію $f(x)$ на відрізку $[-2,0]$ парним чином (рис. 2.7). Маємо l=2.

$$a_0=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}x^3\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3};$$

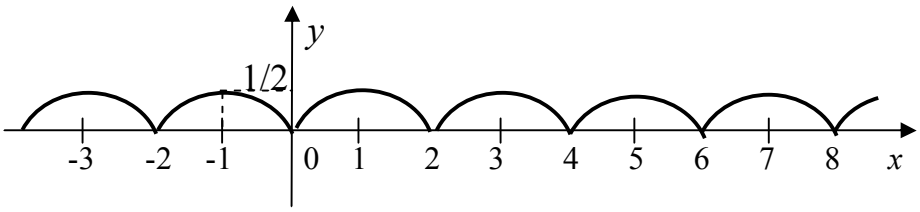


Рисунок 2.7

$$a_n=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\overset{=0}{\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2}-\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx.$$

$$a_n=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\overset{=0}{\cos\frac{n\pi x}{2}}dx=$$

$$=-\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi-\frac{4}{n^2\pi^2}=-\frac{4}{n^2\pi^2}\left[1+(-1)^n\right]\qquad b_n=0.$$

Таким чином,

$$f(x)=\frac{1}{3}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{2}=\frac{1}{3}-\frac{8}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\pi x+\frac{1}{4^2}\cos 2\pi x+\frac{1}{6^2}\cos 3\pi x+\ldots\right)$$

Б. Довизначимо функцію $f(x)$ на відрізку $[-2,0]$ непарним чином (рис. 2.8).

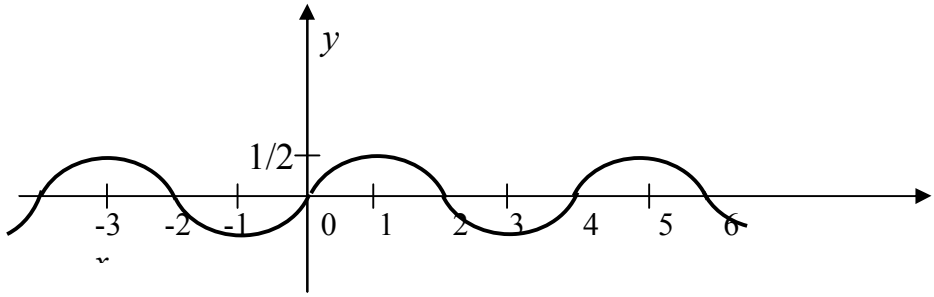


Рисунок 2.8

$$b_n=\int_0^2\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=-\frac{2}{n\pi}\overset{=0}{\left(x-\frac{1}{2}x^2\right)}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\left[(1-x)\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2-\int_0^2\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}(-dx)\right]=$$

$$=\frac{4}{n^2\pi^2}(1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2+\frac{4}{n^2\pi^2}\int_0^2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=$$

$$=\frac{-8}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^2=-\frac{8}{n^3\pi^3}\left[\cos n\pi-1\right]=\frac{8}{n^3\pi^3}\left[1-(-1)^n\right].$$

Таким чином, $a_n=0,\ a_0=0$.

$$f(x)=\frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\left(-1^0\right)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{2}=\frac{16}{\pi^3}\left(\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}+\ldots\right).$$

2.2 Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є

Нехай функція $y=f(t)$ описує деякий періодичний процес. З метою дослідження цього процесу досить часто представляють функцію $f(t)$ у вигляді суми сталого члена и гармонічних складових з частотами $\omega_0,\ \omega_1=2\omega_0,\ldots$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t\right),\ \omega_0=\frac{\pi}{l}. \qquad (2.14)$$

Сукупність коефіцієнтів Фур'є періодичної функції називається її спектром. Спектр періодичної функції – *дискретний*. З точки зору фізики розвинення в ряд Фур'є можна трактувати як представлення періодичного сигналу у вигляді суми гармонічних коливань.

Якщо на числовій осі $(-\infty,\infty)$ задано *неперіодичний* сигнал $f(t)$, то для дослідження такого процесу представимо $f(t)$ на проміжку $[-l,l]$ у вигляді ряду (2.14)

За межами розглядаємого проміжку сума тригонометричного ряду буде повторювати значення функції $f(t)$ на проміжку $[-l,l]$. Після цього природно зробити граничний перехід при $l\to+\infty$. Можна побачити, що в результаті такого граничного переходу трапиться якісний стрибок. Неперіодична функція, яка є заданою на усій осі, буде представлена у вигдяді інтеграла, який є неперервним аналогом ряду Фур'є і представляє собою "суму гармонійних складових", частоти яких заповнюють усю дійсну напіввісь $0\le\omega<\infty$. А саме, є справедливою наступна теорема.

Теорема. (Про представлення функції інтегралом Фур'є).

Якщо функція $f(t)$ абсолютно інтегровна на всій числовій вісі, тобто $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ і задовольняє умовам Діріхле на будь-якому скінченому проміжку цієї осі, то при всіх t має місце рівність

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau\,. \qquad (2.15)$$

Якщо t_0 – точка розриву першого роду функції $f(t)$, то ліву частину формули (2.15) треба розуміти як $\frac{f(t_0-0)+f(t_0+0)}{2}$, що ми завжди будемо мати на увазі.

Формула (2.15) називається інтегральною формулою Фур'є, а її права частина – подвійним інтегралом Фур'є.

Позначаючи

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\ d\tau \ \text{ і } \ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\sin\omega\tau\ d\tau\,, \qquad (2.16)$$

запишемо інтегральну формулу Фур'є (2.16) у вигляді

$$f(t)=\int_0^{\infty}\left[A(\omega)\cos\omega t+B(\omega)\sin\omega t\right]d\omega\,. \qquad (2.17)$$

Інтегральна формула Фур'є (2.17) аналогічна розвиненню періодичної функції в ряд Фур'є. Підентегральна функція формули (2.17) нагадує загальний член ряду Фур'є, тут частота ω, непрервно змінюючись, пробігає всі значення від 0 до ∞, і тому сумування замінюється інтегруванням від 0 до ∞. Функції $A(\omega)$, $B(\omega)$, що визначені формулами (2.16), аналогічні формулам для коефіцієнтів ряду Фур'є, складають закон розподілення амплітуд і початкових фаз в залежності від частоти ω.

Сенс інтегральної формули Фур'є полягає в наступному: інтегральна формула Фур'є представляє неперіодичну функцію як накладення гармонік з непрервною послідовністю частот.

З точки зору фізики це означає, що неперіодиний процес вже неможна побудувати із гармоничних коливань лише з визначеними ізольованими частотами $\omega_n=n\frac{\pi}{\ell}$, тепер для його побудови необхідні гармонічні коливання всіх частот.

Розглянемо часткові випадки застосування формули (2.17).

1 Нехай $f(t)$ – парна функція. Тоді $A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\ d\tau$, $B(\omega)=0$. Формула (2.17) в цьому випадку приймає вигляд

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\int_0^{\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\ d\tau\right)\cos\omega t\ d\omega\,. \qquad (2.18)$$

Запишемо цю формулу в симетричному вигляді, поклавши

$$f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}F_C(\omega)\cos\omega\,t\ d\omega\,,\ \text{де}\ \ F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f(\tau)\cos\omega\tau\ d\tau\,.$$

$F_C(\omega)$ називається *косинус-перетворенням* Фур'є функції $f(t)$.

2 Нехай $f(t)$ – непарна функція. Тоді $A(\omega)=0$,

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)\sin\omega\tau\ d\tau\ ,$$

звідки

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(\tau)\sin\ \omega\tau\ d\tau\right)\sin\ \omega t\ d\omega. \qquad (2.19)$$

Введемо *синус-перетворення* Фур'є, поклавши $F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\tau)\sin\ \omega\tau\ d\tau$, тоді формула (2.19) приймає вигляд $f(t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_S(\omega)\sin\ \omega\ t\ d\omega$.

Нехай $f(t)$ визначена лише в інтервалі $(0,\infty)$. Тоді її можна представити при $t>0$ як формулою (2.18), так и формулою (2.19). Для цього треба функцію $f(t)$ подовжити на проміжок $(-\infty,0)$ таким чином, щоб вона стала або парною або непарною на всій дійсній осі.

Інтегральну формулу Фур'є можна записати у вигляді

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{i\omega(t-\tau)}\,d\tau\,. \qquad (2.20)$$

Це є комплексна форма интеграла Фур'є. Впровадимо функцію

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \qquad (2.21)$$

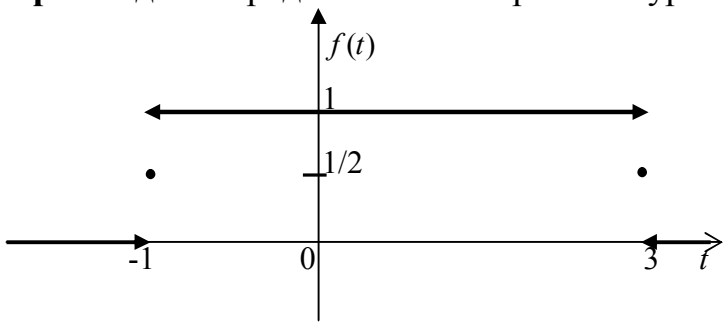
і отримаємо:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega\,. \qquad (2.22)$$

Перехід від $f(\tau)$ до $F(\omega)$ за формулою (2.21) називається прямим перетворенням Фур'є. Відновлення $f(t)$ по $F(\omega)$ за допомогою формули (2.22) називається *оберненим перетворенням* Фур'є.

Тепер розглянемо приклади представлення неперіодичних функцій інтегралом Фур'є.

Приклад 2.5 Представити інтегралом Фур'є функцію



$$f(t)=\begin{cases}1, & -1<t<3,\\ \frac{1}{2}, & t=-1,\ t=3,\\ 0, & t<-1,\ t>3.\end{cases}$$

Рисунок 2.8

Розв'язання. Графік функції представлено на рисунку 2.8.

Дана функція на будь-якому пороміжку числової осі $(-\infty,\infty)$ задовольняє умовам Діріхле. Можна побачити, що $f(t)$ є абсолютно інтегровною функцією на всій числовій осі, оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{-1}^{3} 1\cdot dt = t\Big|_{1}^{3} = 4 < \infty.$$

Тобто, дана функція може бути представлена інтегралом Фур'є; маємо:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)d\tau = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega \int_{-1}^{3} 1\cdot\cos\omega(t-\tau)d\tau =$$

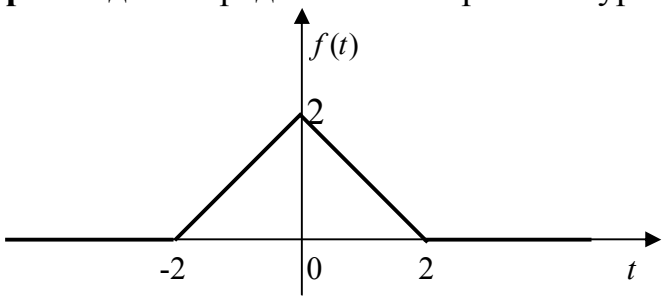
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{-\sin\omega(t-\tau)}{\omega}\Bigg|_{-1}^{3} d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{-\sin\omega(t-3)+\sin\omega(t+1)}{\omega} d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos\omega(t-1)\cdot\sin 2\omega}{\omega} d\omega.$$

В точках розриву $f(t)$, тобто при $t=-1$ і $t=3$, отриманий вираз зберігається, оскільки в цих точках $\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)] = \frac{1}{2}f(t)$.

При $t=3$ маємо $f(3) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos 2\omega\cdot\sin 2\omega}{\omega} d\omega = \frac{1}{2}$, звідки легко знаходимо значення інтеграла: $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2.6 Представте інтегралом Фур'є функцію



$$f(t) = \begin{cases} t+2, & -2 < t < 0, \\ -t+2, & 0 \le t < 2, \\ 0, & |t| \ge 2. \end{cases}$$

Рисунок 2.9

Розв'язання. Графік функції представлено на рисунку 2.9.

Умови представлення даної функції інтегралом Фур'є виконуються. Ця функція – парна, тому:

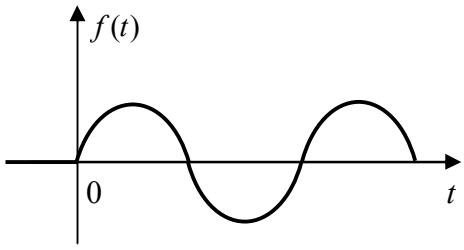
$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau\right)\cos\omega t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{2}[2-\tau]\cdot\cos\omega\tau\, d\tau\right)\cdot\cos\omega t\, d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(2\cdot\frac{\sin\omega\tau}{\omega}\Bigg|_{0}^{2} - \frac{\cos\omega\tau}{\omega^2}\Bigg|_{0}^{2} - \frac{\tau\sin\omega\tau}{\omega}\Bigg|_{0}^{2}\right)\cos\omega t\, d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos 2\omega}{\omega^2}\cos\omega t\, d\omega =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2\cos\omega t\, d\omega\ .$$

Покладаючи $t=0$, знайдемо $\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2 d\omega = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2.7 Представте інтегралом Фур'є функцію



$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0<t<\pi n,\\ 0, & t<0,\ t>\pi n,\end{cases}$$

n - ціле число

Рисунок 2.10

Розв'язання. Графік функції представлено рисунком 2.10.

Функція $f(t)$ неперервна на усій числовій осі і абсолютно інтегрована, оскільки

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt=\int_{0}^{\pi n}|\sin t|\,dt<\pi n<\infty.$$

Тобто, є можливим представлення цієї функції інтегралом Фур'є:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}d\omega\int_{0}^{\pi n}\sin\tau\cdot\cos\omega(t-\tau)d\tau.$$

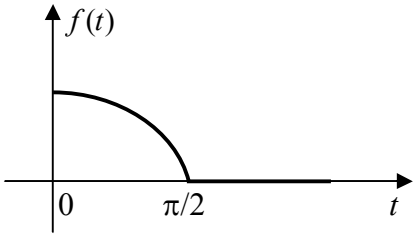
Використовуючи рівність

$$\sin\tau\cdot\cos\omega(t-\tau)=\frac{1}{2}[\sin(\tau-\omega t+\omega\tau)+\sin(\tau+\omega t-\omega\tau)],$$

інтегруючи і виконуючи нескладні перетворення, отримаємо:

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos\omega t+(-1)^{n+1}\cos\omega(t-\pi n)}{1-\omega^2}d\omega.$$

Приклад 2.8 Представте інтегралом Фур'є функцію, подовживши її на всю числову вісь: а) парним, б) непарним чином.



$$f(t)=\begin{cases}\cos t, & 0\le t\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & t>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Рисунок 2.11

Розв'язання. Графік функції представлено на рисунку 2.11.

Функції, які отримані подовженням $f(t)$ на $(-\infty,0)$ парним і непарним чином, задовольняють умовам теореми. Для подовження парним чином обчислимо:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\pi/2}\cos\tau\cdot\cos\omega\tau\ d\tau\right)\cos\omega t\ d\omega.$$

Обчислимо окремо внутрішній інтеграл:

$$\int_{0}^{\pi/2}\cos\tau\cdot\cos\omega\tau\ d\tau=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}\cos(1-\omega)\tau\ d\tau+\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}\cos(1+\omega)\tau\ d\tau=$$

$$=\frac{\sin(1-\omega)\tau}{2(1-\omega)}\Bigg|_{0}^{\pi/2}+\frac{\sin(1+\omega)\tau}{(1+\omega)}\Bigg|_{0}^{\pi/2}=\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\omega\right)}{2(1-\omega)}+$$

$$+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\omega\right)}{2(1+\omega)}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{2(1-\omega)}+\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{2(1+\omega)}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{(1-\omega^2)}.$$

У разі подовження парним чином маємо:

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\cos\omega t\,d\omega.$$

Якщо $f(t)$ подовжена непарним чином, то

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_0^{\pi/2}\cos\tau\cdot\sin\omega\tau\,d\tau\right)\sin\omega t\,d\omega.$$

Аналогічно

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\sin\omega t\,d\omega.$$

Таким чином, якщо $t>0$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\sin\omega t\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\frac{\pi}{2}\omega}{1-\omega^2}\cos\omega t\,d\omega.$$

Приклад 2.9 Знайдіть косинус- і синус-перетворення Фур'є функції

$$f(t)=e^{-at},\ a>0,\ t\ge 0.$$

Розв'язання. $F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(\tau)\cos\omega\tau\,d\tau$,

$$F_C(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-a\tau}\cos\omega\tau d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left[\frac{e^{-a\tau}}{(a^2+\omega^2)}\left(-a\cos\omega\tau+\omega\sin\omega\tau\right)\right]_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{a^2+\omega^2}.$$

Аналогічно

$$F_S(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-a\tau}\sin\omega\tau d\tau=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\left[\frac{e^{-a\tau}}{(a^2+\omega^2)}\left(-a\sin\omega\tau-\omega\cos\omega\tau\right)\right]_0^\infty=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Якщо тепер до отриманих функцій застосувати обернені косинус- и синус-перетворення Фур'є, то знайдемо:

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega=e^{-at},\quad t>0,$$

та

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\omega\sin\omega t}{a^2+\omega^2}d\omega=e^{-at},\quad t>0.$$

Застосувавши косинус- і синус-перетворення Фур'є, можна отримати таблицю значень невласних інтегралів, які залежать від параметра. Однак основне призначення косинус- и синус-перетворень Фур'є полягає в застосуваннях до розв'язання задач математичної фізики.

Приклад 2.10 Знайдіть функцію $\varphi(t)$, якщо $\int\limits_0^\infty \varphi(\tau)\sin\,\omega\tau\;d\tau = e^{-\omega}, \quad \omega > 0$.

Розв'язання. Функція $F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-\omega}$, виходячи з наданого рівняння, є синус-перетворенням Фур'є функції $\varphi(t)$. Тому користуючись формулою оберненого синус-перетворення Фур'є, знаходимо:

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\;e^{-\omega}\sin\,\omega\,t\;d\omega = \frac{2}{\pi}\frac{e^{-\omega}}{t^2+1}\left[-\sin\,\omega\,t - t\cos\,\omega\,t\right]\Big|_0^\infty = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{t}{t^2+1}.$$

Приклад 2.11 Обчисліть інтеграл $\mathrm{I} = \int\limits_0^\infty \frac{\sin\,\alpha\,\omega}{\omega}\cos\,\omega t\;d\omega$.

Розв'язання. Помічаючі, що $\frac{\sin\,\alpha\,\omega}{\omega} = \int\limits_0^\alpha \cos\,\omega\,\tau\;d\tau$, можемо записати

$$\frac{1}{\pi}\cdot\mathrm{I} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_0^\alpha \cos\,\omega\,\tau\;d\tau\right)\cdot\cos\,\omega\,t\;d\omega.$$

Якщо впровадити функцію $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \alpha, \\ 0, & t \ge \alpha,\, t \le 0, \end{cases}$ то попередня рівність набуде вигляду

$$\frac{1}{\pi}\cdot\mathrm{I} = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_{-\infty}^\infty f(\tau)\cos\,\omega\,\tau\;d\tau\right)\cdot\cos\,\omega\,t\;d\omega = f(t), \text{ тобто}$$

$$\mathrm{I} = \begin{cases} \pi, & 0 < t < \alpha, \\ 0, & t \ge \alpha,\, t \le 0. \end{cases}$$

2.3 Застосування рядів Фур'є та інтегралів Фур'є до теорії теплопровідності

Функція $u(x,t)$ розповсюдження тепла у стержні з теплоізольованою бічною поверхнею за умови відсутності джерела тепла визначається з рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2.23}$$

де a – коефіцієнт теплопровідності (надалі припускається, що a – стала величина). До рівняння (11.70) приєднуються граничні та початкові умови.

Початкова умова має вигляд:

$$u(x,0) = f(x). \tag{2. 24}$$

Однорідні граничні умови стержнів скінченної довжини $0 \le x \le 1$ мають вигляд:

1) якщо кінці стержня перебувають при нульовій температурі, то

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ u(l,t) &= 0; \end{aligned} \tag{2. 25}$$

2) якщо кінці стержня теплоізольовані, то

$$u'_x(0,t)=0,$$
$$u'_x(l,t)=0; \qquad (2.\ 26)$$

3) якщо один кінець стержня теплоізольований, а другий знаходиться при нульовій температурі, то

$$u'_x(0,t)=0,$$
$$u(l,t)=0. \qquad (2.\ 27)$$

Рівняння теплопровідності (2.23) з початковою умовою (2.24) і з однією з граничних умов (2.25)-(2.27) розв'язуються методом розподілу змінних (методом Фур'є).

1 Якщо розглядаються умови (2.25), то розв'язок рівняння теплопровідності (2.23) має вигляд:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\sin\lambda_n x \qquad (2.28)$$

де $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$ – власні числа, $\sin\lambda_n x$ – власні функції;

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{\pi n}{l}x dx, \quad n=1,2,... \qquad (2.29)$$

Тобто b_n – коефіцієнти Фур'є розкладу функції $f(x)$ в ряд за синусами.

2 Розв'язок задачі з граничними умовами (2.26) буде таким:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\lambda_n x+\frac{a}{2} \qquad (2.30)$$

де $\lambda_n=\dfrac{\pi n}{l}$, $\cos\lambda_n x$ – власні числа і власні функції;

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx, n=0,1,2,... \qquad (2.31)$$

тобто a_n – коефіцієнти Фур'є розкладу функції $f(x)$ в ряд Фур'є за косинусами.

3 Розглядаючи задачу теплопровідності стержня з граничними умовами (2.27), отримаємо розв'язок у вигляді

$$u(x,t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\lambda_n x, \qquad (2.32)$$

де $\lambda_n=\dfrac{(2n-1)\pi}{2l}$, $\cos\lambda_n x$ – власні числа і власні функції; a_n – коефіцієнти Фур'є розкладу функції $f(x)$ в ряд Фур'є за косинусами;

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x\,dx. \qquad (2.33)$$

Приклад 2.12 Знайдіть функцію $u(x,t)$ розповсюдження тепла у стержні скінченної довжини $0\le x\le 2$ з теплоізольованою бічною поверхнею, якщо в початковий момент часу

$$u(x,0)=f(x)=\begin{cases} u_0 x, & \text{при} \quad 0<x\le 1, \\ u_0(2-x), & \text{при} \quad 1\le x<2. \end{cases}$$

Кінці стрержня теплоізольовані.

Розв'язання. Граничні умови визначаються виразами (2.26). Розв'язок знаходиться за формулами (2.30) та (2.31). Маємо:

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx=\int_0^1 u_0 x dx+\int_0^2 u_0(2-x)dx=u_0\,;$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}xdx=u_0\int_0^1 x\cos\frac{\pi n}{2}xdx+u_0\int_0^2(2-x)\cos\frac{\pi n}{2}xdx$$

Інтегруючи частинами, отримаємо:

$$a_{4k+2}=-\frac{4u_0}{(2k+1)^2\pi^2};k=0,1,2,...$$

Всі інші коефіцієнти a_n дорівнюють нулю. Підставляючи у формулу (2.30), маємо:

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}-\frac{4u_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}e^{-(2k+1)^2\pi^2a^2t}.$$

Задача визначення функції $u(x,t)$ розповсюдження тепла у нескінченному стержні з теплоізольованою бічною поверхнею зводиться до розв'язку рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},-\infty<x<\infty,0\le t<\infty \tag{2.34}$$

з початковою умовою

$$u(x,0)=f(x). \tag{2.35}$$

Рівняння теплопровідності розв'язується за допомогою інтегрального перетворення Фур'є (2.21) для функції $u(x,t)$:

$$\overline{u}(\lambda,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(\xi,t)e^{-i\lambda\xi}d\xi\,. \tag{2.36}$$

За формулою оберненого перетворення (2.22) знаходимо:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{u}(\lambda,t)e^{i\lambda x}d\lambda\,. \tag{2.37}$$

Замінюючи x на ξ у рівнянні (2.34) та інтегруючи обидві частини по ξ від $-\infty$ до ∞ після множення на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-i\lambda\xi}$ оторимаємо рівняння:

$$\frac{d\overline{u}}{dt}+a^2\lambda^2\overline{u}=0 \tag{2.38}$$

За допомогою формули (2.21) початкова умова (2.35) запишеться у вигляді

$$\overline{u}(\lambda,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi=\overline{f}(\lambda)\,. \tag{2.39}$$

Розв'язком рівняння (2.38) з початковою умовою (2.39) є

$$\bar{u}(\lambda,t)=\bar{f}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Використовуючи формулу (2.37), визначимо:

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}e^{i\lambda x}d\lambda. \qquad (2.40)$$

Після спрощення отримаємо остаточно функцію

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (2.41)$$

Якщо функція $f(\xi)$ задана, її підставляють у співвідношення (2.41) і отримують розв'язок задачі.

Математично задачу визначення функції $u(x,t)$ для напівнескінченного стержня з теплоізольованою бічною поверхнею ставлять так. Розв'язати рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad 0\le x<\infty \qquad (2.42)$$

з початковою умовою

$$u(x,0)=f(x) \qquad (2.43)$$

та однією з граничних умов

$$u(0,t)=0, \qquad (2.44)$$

$$u'_x(0,t)=0. \qquad (2.45)$$

1 Розв'язок рівняння (2.42) з початковою (2.43) та граничною (2.44) умовами здійснюється за допомогою синус-перетворення Фур'є (2.19).
Функція $u(x,t)$ визначається за формулою

$$u_s(\lambda,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u(\xi,t)\cos\lambda\xi\, d\xi;\quad u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_s(\lambda,t)\sin\lambda x\, d\lambda.$$

Розв'язок цієї задачі має вигляд

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}f(\xi)\left[e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi. \qquad (2.46)$$

2 Розв'язок рівняння (2.42) з початковою умовою (2.43) та граничною (2.45) умовами визначається за допомогою косинус-перетоворення Фур'є (2.18):

$$u_c(\lambda,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u(\xi,t)\cos\lambda\xi d\xi;\quad u(x,t)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}u_c(\lambda,t)\cos\lambda x dx.$$

Розв'язок задачі має вигляд:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty}f(\xi)\left[e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{\frac{-(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right]d\xi. \qquad (2.47)$$

Варіанти індивідуальних завдань

1 Побудуйте графік функції та представте її інтегралом Фур'є в дійсній і комплексній формах. Знайдіть значення інтеграла Фур'є в точках розриву функції.

1) $f(x)=\begin{cases}-2e^{x}, & x\le 0,\\ 0, & x>0;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}x^{2}+1, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \operatorname{sh}x, & -2\le x\le 0,\\ 0, & x>0;\end{cases}$

6) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \operatorname{ch}x, & -1\le x\le 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \sin x, & -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{4},\\ \cos 2x, & -\dfrac{\pi}{4}\le x\le 0,\\ 0, & x>0;\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\dfrac{\pi}{6},\\ \sin 3x, & -\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{3};\end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi,\\ \sin\dfrac{x}{2}, & -\pi\le x\le 0,\\ 0, & x>0;\end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ \operatorname{sh}\dfrac{x}{2}, & -2\le x\le 0,\\ 0, & x>0;\end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ -x^{2}+1, & -2\le x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x<0,\\ x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ 2x, & -2\le x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \operatorname{sh}3x, & 0\le x\le 3,\\ 0, & x>3;\end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases}e^{-3x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases}2x+3, & |x|\le 3,\\ 0, & |x|>3;\end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases}2e^{3x}, & x\le -1,\\ 0, & x>-1;\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases}1-2x, & |x|\le\frac{1}{2},\\ 0, & |x|>\frac{1}{2};\end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-1, & |x|\le\frac{3}{2},\\ 0, & |x|>\frac{3}{2};\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases}1-\sin x, & |x|\le\frac{\pi}{4},\\ 0, & |x|>\frac{\pi}{4};\end{cases}$

22) $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases}2-x, & 0\le x\le 1,\\ 1, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

24) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & 0\le x\le \pi,\\ 1, & \pi<x\le 2\pi,\\ 0, & x>2\pi;\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$

26) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\frac{\pi}{6},\\ \sin 3x, & -\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3},\\ 0, & x>\frac{\pi}{3};\end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases}0, & x<-2,\\ -x^2+1, & -2\le x\le 1,\\ 0, & x>1;\end{cases}$

28) $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 3x}{x}, & x>0,\\ 3, & x=0;\end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{4}, & 0\le x\le 2\pi,\\ 0, & x>2\pi;\end{cases}$

30) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$

2 Знайдіть синус і косинус – перетворення Фур'є для функцій

1) $f(x)=\begin{cases}\cos\frac{x}{2}, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi;\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}3-2x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}5-x, & 0\le x<5,\\ 0, & x\ge 5;\end{cases}$

4) $f(x)=3e^{-2x},\ x\ge 0;$

5) $f(x)=3e^{-7x},\ x\ge 0;$

6) $f(x)=5e^{-4x},\ x\ge 0;$

7) $f(x)=\begin{cases}2-x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}4-2x, & 0\le x<4,\\ 0, & x\ge 4;\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}2-x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1,\\ 2-x, & 1\le x\le 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} 2, & 0\le x\le 1,\\ 4-x, & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4;\end{cases}$

12) $f(x)=\begin{cases} 2-x, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x\le 2,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x}, & x>0,\\ \dfrac{1}{2}x, & x=0;\end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2\pi,\\ 0, & x>2\pi;\end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases} \sin 4x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

16) $f(x)=\begin{cases} 2x-3, & 0\le x\le \dfrac{3}{2},\\ 0, & x>\dfrac{3}{2};\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

18) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x}, & x>0,\\ 2, & x=0;\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases} 3-x, & 0\le x\le 3,\\ 0, & x>2;\end{cases}$

20) $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & 0\le x\le \dfrac{5}{2},\\ 0, & x>\dfrac{3}{2};\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi;\end{cases}$

22) $f(x)=\begin{cases} 4-x, & 0\le x\le 4,\\ 0, & x>4;\end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases} \sin x, & 0\le x\le \pi,\\ 0, & x>\pi;\end{cases}$

24) $f(x)=\begin{cases} 8-x, & 0\le x\le 8,\\ 0, & x>8;\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{x}, & x>0,\\ 3, & x=0;\end{cases}$

26) $f(x)=\begin{cases} \cos 2x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{4},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4};\end{cases}$

28) $f(x)=\begin{cases} \cos x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2};\end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{5}{2}-x, & 0\le x\le \dfrac{5}{2},\\ 0, & x>\dfrac{5}{2};\end{cases}$

30) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{x}{4}, & 0\le x<2\pi,\\ 0, & x\ge 2\pi.\end{cases}$

3 Знайдіть обернене косинус-перетворення Фур'є для функцій, якщо

1) $F(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha^2+9}$; 2) $F(\alpha)=\dfrac{4}{3+\alpha^2}$; 3) $F(\alpha)=\dfrac{4}{\alpha^2+81}$;

4) $F(\alpha)=\dfrac{1}{4+\alpha^2}$; 5) $F(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha^2+2}$; 6) $F(\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{\alpha^2+1}$;

7) $F(\alpha)=\dfrac{1}{1+16\alpha^2}$; 8) $F(\alpha)=\dfrac{1}{25+\alpha^2}$; 9) $F(\alpha)=\dfrac{1}{16+\alpha^2}$;

10) $F(\alpha)=\dfrac{1}{4\alpha^2+1}$; 11) $F(\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{\alpha^2+49}$; 12) $F(\alpha)=\dfrac{1}{1+9\alpha^2}$;

13) $F(\alpha)=\dfrac{\cos 2\alpha}{\alpha^2+4}$; 14) $F(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha^2+8}$; 15) $F(\alpha)=\dfrac{4}{3\alpha^2+4}$;

16) $F(\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{4\alpha^2+1}$; 17) $F(\alpha)=\dfrac{2}{8\alpha^2+1}$; 18) $F(\alpha)=\dfrac{\cos 2\alpha}{4\alpha^2+3}$;

19) $F(\alpha)=\dfrac{\cos\alpha}{9\alpha^2+4}$; 20) $F(\alpha)=\dfrac{1}{25\alpha^2+1}$; 21) $F(\alpha)=\dfrac{1}{4+25\alpha^2}$;

22) $F(\alpha)=\dfrac{1}{10+\alpha^2}$; 23) $F(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha^2+5}$; 24) $F(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha^2+6}$;

25) $F(\alpha)=\dfrac{\cos 3\alpha}{\alpha^2+5}$; 26) $F(\alpha)=\dfrac{3}{9\alpha^2+2}$; 27) $F(\alpha)=\dfrac{3}{\alpha^2+64}$;

28) $F(\alpha)=\dfrac{\cos 4\alpha}{1+4\alpha^2}$; 29) $F(\alpha)=\dfrac{4}{3+5\alpha^2}$; 30) $F(\alpha)=\dfrac{3}{\alpha^2+7}$.

4 Знайдіть обернене синус-перетворення Фур'є для функцій, якщо

1) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+64}$; 2) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2+9}$; 3) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+100}$;

4) $\Phi(\alpha)=\dfrac{3\alpha}{\alpha^2+10}$; 5) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{1+64\alpha^2}$; 6) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{1+36\alpha^2}$;

7) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+4}$; 8) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{\alpha^2+6}$; 9) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{1+36\alpha^2}$;

10) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2+16}$; 11) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{1+49\alpha^2}$; 12) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{36+\alpha^2}$;

13) $\Phi(\alpha)=\dfrac{3\alpha}{49+4\alpha^2}$; 14) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{1+9\alpha^2}$; 15) $\Phi(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+8}$;

16) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{3\alpha^2+1}$; 17) $\Phi(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+7}$; 18) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{1+25\alpha^2}$;

19) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{9\alpha^2+16}$; 20) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2+1}$; 21) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{1+81\alpha^2}$;

22) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{3+4\alpha^2}$; 23) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha}{1+5\alpha^2}$; 24) $\Phi(\alpha)=\dfrac{3\alpha}{\alpha^2+2}$;

25) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{2\alpha^2+1}$; 26) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\alpha}{5\alpha^2+8}$; 27) $\Phi(\alpha)=\dfrac{4\alpha}{\alpha^2+36}$;

28) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\sin 2\alpha}{\alpha^2+5}$; 29) $\Phi(\alpha)=\dfrac{5\alpha}{\alpha^2+6}$; 30) $\Phi(\alpha)=\dfrac{\sin 4\alpha}{3\alpha^2+2}$.

5 Знайдіть перетворення Фур'є для функцій , якщо

1) $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}\sin x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases} e^{-2x}\cos x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} xe^{-2x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 4) $f(x)=\begin{cases} e^{-4x}\cos x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} xe^{-8x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 6) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}\cos x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases} xe^{-4x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 8) $f(x)=\begin{cases} 5e^{-6x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} 4e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 10) $f(x)=\begin{cases} e^{-7x}\operatorname{sh}3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 12) $f(x)=\begin{cases} e^{-7x}\sin 2x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

13) $f(x)=\begin{cases} e^{-4x}\operatorname{ch}2x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 14) $f(x)=\begin{cases} xe^{-6x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

15) $f(x)=\begin{cases} xe^{-10x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 16) $f(x)=\begin{cases} e^{-5x}\operatorname{sh}3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

17) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-3x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 18) $f(x)=\begin{cases} x^2e^{-2x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

19) $f(x)=\begin{cases} e^{-8x}\operatorname{sh}4x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 20) $f(x)=\begin{cases} e^{-10x}\operatorname{sh}x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

21) $f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 22) $f(x)=\begin{cases} 4e^{-5x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

23) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}\cos 3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 24) $f(x)=\begin{cases} 4e^{-4x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

25) $f(x)=\begin{cases} e^{-x}\sin 3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$ 26) $f(x)=\begin{cases} x^3e^{-x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

27) $f(x)=\begin{cases} e^{-4x}\operatorname{ch}3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

28) $f(x)=\begin{cases} e^{-5x}\sin 5x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

29) $f(x)=\begin{cases} e^{-7x}\operatorname{ch}3x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

30) $f(x)=\begin{cases} e^{-3x}\operatorname{sh}4x, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

6 Знайдіть обернене перетворення Фур'є для функцій, якщо

1) $F^*(\alpha)=\dfrac{\alpha i}{4-\alpha^2+2i\alpha}$;

2) $F^*(\alpha)=\dfrac{\alpha i}{3+i\alpha-\alpha^2}$;

3) $F^*(\alpha)=\dfrac{3i}{6+2i\alpha-\alpha^2}$;

4) $F^*(\alpha)=\dfrac{3i\alpha}{5+4i\alpha-4\alpha^2}$;

5) $F^*(\alpha)=\dfrac{\alpha i}{14+6i\alpha-\alpha^2}$;

6) $F^*(\alpha)=\dfrac{3}{4+i\alpha}$;

7) $F^*(\alpha)=\dfrac{3i\alpha}{26+10i\alpha-\alpha^2}$;

8) $F^*(\alpha)=\dfrac{4}{84-\alpha^2+20i\alpha}$;

9) $F^*(\alpha)=\dfrac{\alpha i}{\alpha^2+16}$;

10) $F^*(\alpha)=\dfrac{4}{4-\alpha^2+8i\alpha}$;

11) $F^*(\alpha)=\dfrac{4}{(1+i\alpha)^2+6}$;

12) $F^*(\alpha)=\dfrac{1}{26-\alpha^2+8i\alpha}$;

13) $F^*(\alpha)=\dfrac{3\alpha i}{84-\alpha^2+20i\alpha}$;

14) $F^*(\alpha)=\dfrac{7}{3+i\alpha}$;

15) $F^*(\alpha)=\dfrac{2i\alpha}{5-4\alpha^2+4i\alpha}$;

16) $F^*(\alpha)=\dfrac{2}{26-\alpha^2+10i\alpha}$;

17) $F^*(\alpha)=\dfrac{4}{60+16i\alpha-\alpha^2}$;

18) $F^*(\alpha)=\dfrac{1}{6+8i\alpha-\alpha^2}$;

19) $F^*(\alpha)=\dfrac{4}{2-\alpha^2+i\alpha}$;

20) $F^*(\alpha)=\dfrac{i\alpha}{26+8i\alpha-\alpha^2}$;

21) $F^*(\alpha)=\dfrac{i\alpha}{18+8i\alpha-\alpha^2}$;

22) $F^*(\alpha)=\dfrac{i\alpha}{7+4i\alpha-\alpha^2}$;

23) $F^*(\alpha)=\dfrac{3i\alpha}{2+2i\alpha-\alpha^2}$;

24) $F^*(\alpha)=\dfrac{\sin 3\alpha}{\alpha-i}$;

25) $F^*(\alpha)=\dfrac{5}{116-\alpha^2+20i\alpha}$;

26) $F^*(\alpha)=\dfrac{5i\alpha}{14+6i\alpha-\alpha^2}$;

27) $F^*(\alpha)=\dfrac{1}{18+8i\alpha-\alpha^2}$;

28) $F^*(\alpha)=\dfrac{5}{2-\alpha^2+2i\alpha}$;

29) $F^*(\alpha)=\dfrac{2}{3-\alpha^2+i\alpha}$;

30) $F^*(\alpha)=\dfrac{i\alpha}{6-\alpha^2+2i\alpha}$.

3 ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

3.1 Зображення і оригінал

Оригіналом або початковою функцією називається функція $f(t)$, що задовольняє наступним властивостям:

– $f(t)$ – кусково-неперервна функція, тобто на будь-якому кінцевому інтервалі $f(t)$ має кінцеву кількість точок розриву першого роду;

– $f(t)=0$ при $t<0$;

– $f(+0)=\lim\limits_{t\to+0} f(t), \lim\limits_{t\to-0} f(t)=0$;

– існують сталі числа M і a такі, що при $0<t<\infty$

$$|f(t)|<M\,exp(at).$$

Такі $f(t)$ називаються функціями експоненціального росту з показником росту a. Остання вимога обмежує клас функцій, до яких може застосовуватися операційне числення. Наприклад, $f(t)=\mathrm{ctg}t$ цій вимозі не задовольняє.

Уведемо в розгляд функцію $1(t)$, що дорівнює

$$1(t)=\begin{cases}1, & t\ge 0;\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Ця функція називається одиничною функцією або функцією Хевісайда. Будь-яка функція, що є оригіналом, має вигляд $f(t)\cdot 1(t)$.

Перетворенням Лапласа оригіналу $f(t)$ або зображенням оригіналу називається функція комплексної змінної $p=\sigma+i\tau$, обумовлена формулою

$$F(p)=\int\limits_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \tag{3.1}$$

де $\sigma>a$.

Зауважимо, що умова $\sigma>a$ гарантує абсолютну збіжність невласного інтеграла 1-го роду в (3.1).

Знайдемо для прикладу зображення одиничної функції Хевісайда $1(t)$.

$$F(p)=\int\limits_0^\infty 1(t)e^{-pt}\,dt=\int\limits_0^\infty e^{-pt}\,dt=\frac{1}{p}.$$

Той факт, що оригіналу $f(t)$ відповідає зображення $F(p)$, записується так:

$$f(t)\div F(p) \text{ або } L(f(t))=F(p),$$

де L – оператор виду (3.1).

Існує і формула обертання, тобто можливість за зображенням $F(p)$ знайти оригінал $f(t)$:

$$f(t)1(t)=\frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\sigma-i\tau}^{\sigma+i\tau} F(p)e^{pt}dp. \tag{3.2}$$

Зазвичай знаходження оригіналу за формулою (3.2) використовується рідко. Перехід від $F(p)$ до $f(t)$ здійснюється на підставі властивостей перетворення Лапласа з урахуванням зображення невеликого числа основних оригіналів, зведених у таблицю.

3.2 Властивості перетворення Лапласа

3.2.1 Лінійність. Якщо $f(t) \div F_k(p),\ k = 1, 2, \ldots, n$, то для будь-яких сталих c_k

$$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k(t) \div \sum_{k=1}^{n} c_k F_k(p).$$

3.2.2 Теорема подібності.

$$f(at) \div \frac{1}{a} F(\frac{p}{a}).$$

3.2.3 Зображення похідної.

$$f'(t) \div pF(p) - f(+0). \tag{3.3}$$

Обчислимо зображення $f''(t)$:

$$f''(t) \div p(pF(p) - f(+0)) - f'(+0) = p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0).$$

Аналогічно можна довести, що

$$f^{(n)}(t) \div p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0).$$

3.2.4 Зображення інтеграла.

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \div \frac{F(p)}{p} = \Phi(p).$$

3.2.5 Теорема зсунення.

$$e^{P_0 t} f(t) \div F(p - p_0).$$

3.2.6 Теорема запізнення. При $t_0 > 0$

$$f(t - t_0) \div e^{-pt_0} F(p).$$

3.2.6а. Теорема випередження. При $t_0 > 0$

$$f(t + t_0) \div e^{pt_0} (F(p) - \int_0^{t_0} e^{-pt} f(t) dt).$$

Визначення. Згорткою функції $f(t)$ і $g(t)$ називається функція $q(t)$, визначена за формулою

$$q(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \tag{3.4}$$

3.2.7 Теорема Бореля про згортку.

$$f_1(t) f_2(t) \div F_1(p) F_2(p).$$

Наслідок (інтеграл Дюамеля):

$$pF_1(p) F_2(p) \div f_1(0) f_2(t) + \int_0^t f_1'(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

3.2.8 Теорема про диференціювання зображення.

$$t^n f(t) \div (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

3.2.9 Теорема про інтегрування зображення.

$$\frac{f(t)}{t} \div \int_p^{\infty} F(z)dz.$$

3.2.10 Теорема про початкове значення.

Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$, що справедливо, якщо $\lim\limits_{t\to 0} f(t)$ існує. Остання обставина визначає умову застосування теореми.

3.2.11 Теорема про кінцеве значення.

Якщо $f(t) \div F(p)$, то $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$, що справедливо, якщо $\lim\limits_{t\to\infty} f(0)$ існує.

3.2.12 Формули розкладання.

А. Нехай

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)},$$

де $P(p)$ і $Q(p)$ – многочлени ступенів m і n відповідно, причому $m < n$. Якщо $p_k\,(k = 1,2,\ldots n)$ – прості корені рівняння $Q(p) = 0$, то має місце

$$F(p) = \frac{P(p)}{Q(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} \frac{1}{p - p_k}.$$

Після переходу від зображення $F(p)$ до оригіналу $f(t)$, маємо:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}.$$

Б. Нехай

$$F(p) = \frac{P(p)}{pQ(p)},$$

причому поліноми $P(p)$ і $Q(p)$ не мають нульових коренів.

Тоді

$$F(p) = \frac{P(p)}{pQ(p)} = \frac{P(0)}{Q(0)} \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{p_k Q'(p_k)} \cdot \frac{1}{p - p_k},$$

де $p_k\,(k = 1,2,\ldots n)$ – прості корені рівняння $Q(p) = 0$.

Здійснюючи перехід від зображення $F(p)$ до оригіналу $f(t)$, отримаємо:

$$f(t) = \frac{P(0)}{Q(0)} + \sum_{k=1}^{n} \frac{P(p_k)}{Q'(p_k)} e^{p_k t}.$$

В. Нехай

$$F(p) = \frac{P(p)}{p^2 Q(p)},$$

причому поліноми $P(p)$ і $Q(p)$ не мають нульових коренів.

Тоді справедливо

$$P(p)=\frac{P(0)}{Q(0)}\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{d}{dp}\left(\frac{P(p)}{Q(p)}\right)\Bigg|_{p=0}\cdot\frac{1}{p}+\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{p_k^2Q'(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k},$$

де $p_k\,(k=1,2,\ldots n)$ – прості корені рівняння $Q(p)=0$.

Переходячи до оригіналу $f(t)$, маємо

$$f(t)=\frac{P(0)}{Q(0)}t+\frac{d}{dp}\left(\frac{P(p)}{Q(p)}\right)\Bigg|_{p=0}+\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{p^2{}_kQ'(p_k)}e^{p_kt}.$$

Примітка. Наявність кратного кореня рівняння $Q(p)=0$ суттєво ускладнює вигляд формул розкладання.

3.3 Зображення найпростіших функцій

Покажемо, як, використовуючи властивості перетворення Лапласа, отримати зображення багатьох функцій.

Використовуємо теорему зсунення (властивість 3.2.5):

$$e^{at}f(t)\div F(p-a)$$

і той факт, що $1(t)\div\dfrac{1}{p}$.

Нехай $f(t)=1(t)$, тоді

$$e^{at}1(t)\div\frac{1}{p-a}.$$

Нагадаємо формули Ейлера:

$$\cos at=\frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2};\ \sin at=\frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i}.$$

Тоді

$$\cos at\cdot 1(t)=\frac{1}{2}(e^{iat}+e^{-iat})\cdot 1(t)\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-ia}+\frac{1}{p+ia}\right)=\frac{p+ia+p-ia}{2(p-ia)(p+ia)}=\frac{p}{p^2+a^2};$$

$$\sin at\cdot 1(t)=\frac{1}{2i}(e^{iat}-e^{-iat})\cdot 1(t)\div\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ia}+\frac{1}{p+ia}\right)=\frac{p+ia-p+ia}{2i}=\frac{a}{p^2+a^2}.$$

Дамо визначення гіперболічного косинуса $\mathrm{ch}\,t$ і гіперболічного синуса $\mathrm{sh}\,t$:

$$\mathrm{ch}\,t=\frac{e^t+e^{-t}}{2};\ \mathrm{sh}\,t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

Тоді

$$\mathrm{ch}at\cdot 1(\mathrm{t})=\frac{1}{2}\left(e^{at}+e^{-at}\right)\cdot 1(t)\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right)=\frac{1}{2}\frac{p+a+p-a}{p^2-a^2}=\frac{p}{p^2-a^2};$$

$$\mathrm{sh}at\cdot 1(\mathrm{t})=\frac{1}{2}\left(e^{at}-e^{-at}\right)\cdot 1(t)\div\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right)=\frac{1}{2}\frac{p+a-p+a}{p^2-a^2}=\frac{a}{p^2-a^2}.$$

Знайдемо зображення функцій $e^{bt}\sin at$ і $e^{bt}\cos at$.

Використовуючи, як і раніше, теорему зсунення й зображення для $\sin at$ і $\cos at$, знайдемо:

$$e^{bt}\sin at\cdot 1(t)\div\frac{a}{(p-b)^2+a^2};\quad e^{bt}\cos at\cdot 1(t)\div\frac{p-b}{(p-b)^2+a^2}.$$

Далі використаємо теорему про диференціювання зображення (властивість 3.2.9).

$$t^n f(t)\div(-1)^n\frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

Нехай $n=1, f(t)=1(t)\div\frac{1}{p}$, тоді

$$t\cdot 1(t)\div-\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p^2}.$$

Знайдемо зображення функції te^{at}:

$$te^{at}\cdot 1(t)\div-\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-a}\right)=\frac{1}{(p-a)^2}.$$

Цей результат можна отримати, застосувавши теорему зсунення до функції

$$f(t)=t\cdot 1(t)$$

Знайдемо зображення функцій $t\cos at$ і $t\sin\ at$:

$$t\cos at\cdot 1(t)\div-\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)=-\frac{p^2+a^2-2p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}=\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2};$$

$$t\sin at\cdot 1(t)\div-\frac{d}{dp}\left(\frac{a}{p^2+a^2}\right)=-\frac{-2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}=\frac{2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}.$$

І, нарешті,

$$t^n 1(t)\div(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}\left(\frac{1}{p}\right)=(-1)^n\frac{(-1)^n n!}{p^{n+1}}=\frac{n!}{p^{n+1}},$$

а зважаючи на теорему зсунення:

$$t^n e^{at}1(t)\div\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

Далі використаємо теорему запізнення (властивість 3.2.6):

$$f(t-t_0)\div e^{-pt_0}F(p).$$

Знайдемо зображення $1(t-t_0)$:

$$1(t-t_0)\div\frac{e^{-pt_0}}{p}.$$

Оскільки $e^{at}1(t)\div\frac{1}{p-a}$, то

$$e^{a(t-t_0)}1(t-t_0)\div\frac{e^{-pt_0}}{p-a}.$$

Оскільки $\sin at \cdot 1(t) \div \dfrac{a}{p^2 + a^2}$, то

$$\sin a(t - t_0) \cdot 1(t - t_0) \div \frac{ae^{-pt_0}}{p^2 + a^2}.$$

Оскільки $\cos at \cdot 1(t) \div \dfrac{p}{p^2 + a^2}$, то

$$\cos a(t - t_0) \cdot 1(t - t_0) \div \frac{pe^{-pt_0}}{p^2 + a^2}.$$

Зведемо всі отримані формули в табл. 1.

Таблиця оригіналів і відповідних їм зображень Таблиця 1

	Оригінал $f(t)$	Зображення $F(p)$
1	$1(t)$	$\dfrac{1}{p}$
2	$e^{at}1(t)$	$\dfrac{1}{p-a}$
3	$\sin at \cdot 1(t)$	$\dfrac{a}{p^2 + a^2}$
4	$\cos at \cdot 1(t)$	$\dfrac{p}{p^2 + a^2}$
5	$e^{bt} \sin at \cdot 1(t)$	$\dfrac{a}{(p-b)^2 + a^2}$
6	$e^{bt} \cos at \cdot 1(t)$	$\dfrac{p-b}{(p-b)^2 + a^2}$
7	$\mathrm{sh}\, at \cdot 1(t)$	$\dfrac{a}{p^2 - a^2}$
8	$\mathrm{ch}\, at \cdot 1(\mathrm{t})$	$\dfrac{p}{p^2 - a^2}$
9	$t \cdot 1(t)$	$\dfrac{1}{p^2}$
10	$te^{at} \cdot 1(t)$	$\dfrac{1}{(p-a)^2}$
11	$t \sin at \cdot 1(t)$	$\dfrac{2pa}{(p^2 + a^2)^2}$
12	$t \cos at \cdot 1(t)$	$\dfrac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}$

13	$t^n \cdot 1(t),\ n \in N$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
14	$t^n e^{at} \cdot 1(t)$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
15	$1(t-t_0)$	$\dfrac{e^{-pt_0}}{p}$
16	$e^{a(t-t_0)} \cdot 1(t-t_0)$	$\dfrac{e^{-pt_0}}{p-a}$
17	$\sin a(t-\ t_0) \cdot 1(t-t_0)$	$\dfrac{ae^{-pt_0}}{p^2+a^2}$
18	$\cos a(t-\ t_0) \cdot 1(t-t_0)$	$\dfrac{pe^{-pt_0}}{p^2+a^2}$

3.4 Відновлення оригіналу за зображенням

Припустимо, що зображення $F(p)$ є правильним раціональним дробом. Тоді оригінал f(t) може бути знайдений шляхом розкладання дробу на найпростіші й знаходження оригіналу, відповідного до кожного доданка з використанням таблиці оригіналів і зображень, а також властивостей перетворення Лапласа. Крім того, під час знаходження оригіналу за зображенням використовують теореми розкладання, викладені в розділі 3.2.

Приклад 3.1 Знайдіть оригінал, відповідний до зображення

$$F(p) = \frac{p^2+2}{p(p^2+1)}.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб на найпростіші:

$$\frac{p^2+2}{p(p^2+1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{p^2+1} = \frac{A(p^2+1)) + (Bp+C)p}{p(p^2+1)},$$

тобто

$$p^2+2 = A(p^2+1) + (Bp+C)p;$$

$$\begin{array}{c|c} p=0 & 2=A; \\ p^2 & 1=A+B \to B=-1; \\ p & 0=C. \end{array}$$

Отже, $F(p) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{p}{p^2+1}$.

Використовуючи табл.1, отримаємо оригінал

$$f(t) = 2 \cdot 1(t) - \cos t \cdot 1(t).$$

Приклад 3.2 Знайдіть оригінал, відповідний до зображення

$$F(p) = \frac{p}{(p+2)(p-1)^2}.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб на найпростіші:

$$\frac{p}{(p+2)(p-1)^2}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p-1}+\frac{C}{(p-1)^2}=\frac{A(p-1)^2+B(p+2)(p-1)+C(p+2)}{(p+2)(p-1)^2};$$

$$p=A(p-1)^2+B(p+2)(p-1)+C(p-2);$$

$p=-2$	$-2=9A\to A=-\frac{2}{9};$
$p=1$	$1=3C\to C=\frac{1}{3};$
p^2	$0=A+B\to B=\frac{2}{9}$

Отже,

$$\frac{p}{(p+2)(p-1)^2}=-\frac{2}{9(p+2)}+\frac{2}{9(p-1)}+\frac{1}{3(p-1)^2}.$$

Використовуючи табл.1, отримаємо

$$f(t)=\left(-\frac{2}{9}e^{-2t}+\frac{2}{9}e^{t}+\frac{1}{3}te^{t}\right)\cdot 1(t).$$

Приклад 3.3 Знайдіть оригінал, відповідний до зображення

$$F(p)=\frac{p-3}{p(p^2-2p+2)}.$$

Розв'язання. Розкладемо дріб на найпростіші:

$$\frac{p-3}{p(p^2-2p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p(p^2-2p+2)}=\frac{A(p^2-2p+2)+(Bp+C)p}{p(p^2-2p+2)};$$

$$p-3=A(p^2-2p-2)+(Bp+C)p;$$

$p=0$	$-3=2A\to A=-\frac{3}{2};$
p^2	$0=A+B\to B=\frac{3}{2};$
p	$1=-2A+C\to C=1+2\left(-\frac{3}{2}\right)=-2.$

Отже,

$$F(p)=-\frac{3}{2p}+\frac{\frac{3}{2}p-2}{p^2-2p+2}=-\frac{3}{2p}+\frac{3}{2}\cdot\frac{p-\frac{4}{3}}{(p-1)^2+1}=$$

$$=-\frac{3}{2p}+\frac{3}{2}\cdot\frac{p-1-\frac{1}{3}}{(p-1)^2+1}=-\frac{3}{2p}+\frac{3}{2}\cdot\frac{p-1}{(p-1)^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p-1)^2+1}.$$

Тепер використаємо табл.1:

$$f(t)=-\frac{3}{2}\cdot 1(t)+\frac{3}{2}e^{t}\cos t\,1(t)-\frac{1}{2}e^{t}\sin t\cdot 1(t).$$

Приклад 3.4 Знайдіть оригінал, відповідний до зображення

$$F(p)=\frac{5(p+1)}{p^2+p+12{,}5}.$$

Розв'язання. Запишемо вихідний вираз у такий спосіб:

$$F(p)=\frac{5(p+1)}{p^2+p+12.5}=\frac{5(p+1)}{(p+0.5)^2+3.5^2}=5\cdot\frac{p+0.5+0.5}{(p+0.5)^2+3.5^2}=$$

$$=5\cdot\frac{p+0.5}{(p+0.5)^2+3.5^2}+\frac{5\cdot 0.5}{3.5}\cdot\frac{3.5}{(p+0.5)^2+3.5^2}\div 5e^{-0.5t}\cos 3.5t+\frac{5}{7}e^{-0.5t}\sin 3.5t.$$

3.5 Зображення кусково-неперервних і періодичних функцій

Знайдемо зображення прямокутного імпульсу, графік якого зображено на рис. 3.1.

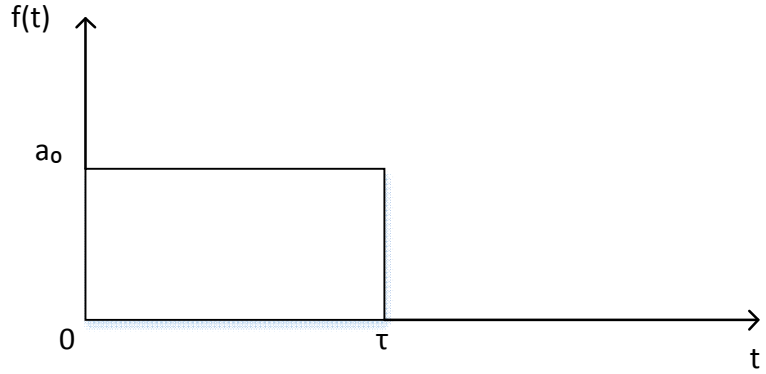


Рисунок 3.1

Цей сигнал можна подати у вигляді різниці двох одиничних функцій:

$$f(t)=a_0(1(t)-1(t-\tau)).$$

Тоді, використовуючи властивість лінійності й теорему запізнення, отримаємо

$$f(t)\div a_0\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-p\tau}\right)=\frac{a_0}{p}\left(1-e^{-p\tau}\right).$$

Знайдемо зображення ступінчастої функції $f(t)$, графік якої зображено на рис.3.2.

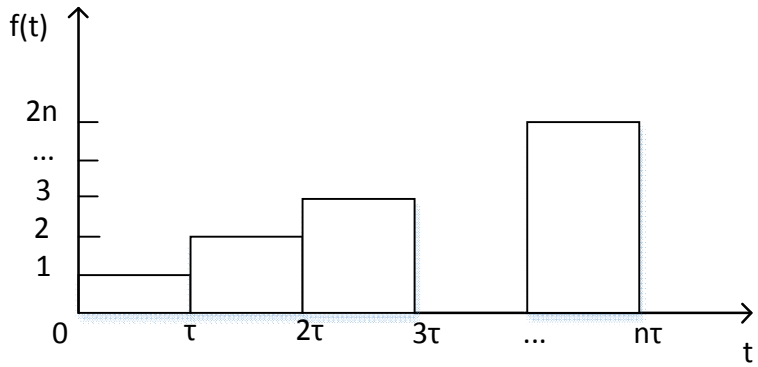


Рисунок 3.2

Цю функцію можна подати у вигляді

$$f(t)=1(t)+1(t-\tau)+1(t-2\tau)+\ldots+1(t-n\tau)+\ldots.$$

Тоді одержимо, що

$$f(t) \div \frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-p\tau} + \frac{1}{p}e^{-2p\tau} + \ldots + \frac{1}{p}e^{-np\tau} + \ldots = \frac{1}{p}(1 + e^{-p\tau} + \ldots + e^{-np\tau} + \ldots).$$

Вираз в дужках являє собою суму нескінченно спадаючої геометричної прогресії зі знаменником $e^{-p\tau}$. Отже,

$$f(t) \div \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{1 - e^{-p\tau}}.$$

Зображення періодичного оригіналу.

Якщо $f(t)$ – періодична функція з періодом Т,

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 \le t < T \\ 0, & t \ge T \end{cases} \quad \text{і} \quad f_0(t) \div F_0(p),$$

то

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}. \tag{3.5}$$

Зауваження. Нехай періодична функція змінює знак на півперіоді:

$$f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t) \quad \text{і} \quad f_0(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < \frac{T}{2}, \\ 0, & t > \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Тоді $F(p) = \dfrac{F_0(p)}{1 + e^{-\frac{T}{2}p}}$, де $F_0(p) = \int\limits_0^{T/2} e^{-pt} f_0(t)dt.$

Далі розглянемо періодичну ступінчасту функцію $f(t)$, графік якої зображено на рис.3.3.

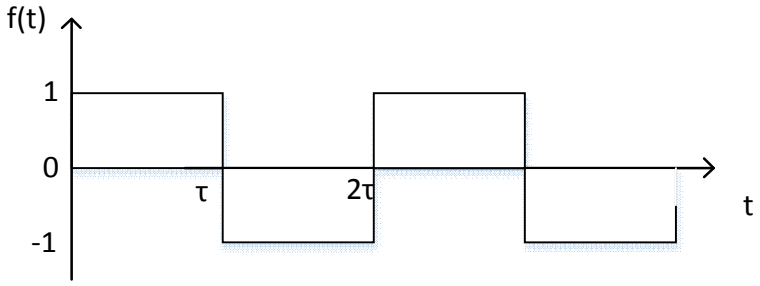


Рисунок 3.3

Цю функцію можна представити у вигляді

$$f(t) = \frac{\sin\frac{\pi t}{\tau}}{\left|\sin\frac{\pi t}{\tau}\right|}.$$

Тоді зважаючи на формулу (3.5)

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-p\,2\tau}} \int\limits_0^{2\tau} \frac{e^{-pt} \cdot \sin(\pi t/\tau)}{|\sin(\pi t/\tau)|} dt = \frac{1}{1 - e^{-p\,2\tau}} \left(\int\limits_0^{\tau} e^{-pt} dt - \int\limits_{\tau}^{2\tau} e^{-pt} dt \right) =$$

$$=\frac{1}{1-e^{-p2\tau}}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{\tau}+\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_{\tau}^{2\tau}\right)=\frac{1}{1-e^{-p2\tau}}\left(-\frac{1}{p}e^{-p\tau}+\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-2p\tau}-\frac{1}{p}e^{-p\tau}\right)=$$

$$=\frac{1}{p(1-e^{-2p\tau})}\left(e^{-2p\tau}-2e^{-p\tau}+1\right)=$$

$$\frac{\left(1-e^{-p\tau}\right)^2}{p\left(1-e^{-2p\tau}\right)}=\frac{1-e^{2p\tau}}{p\left(1+e^{-p\tau}\right)}=\frac{e^{-\frac{p\tau}{2}}\cdot(e^{\frac{p\tau}{2}}-e^{-\frac{p\tau}{2}})}{pe^{-\frac{p\tau}{2}}\cdot(e^{\frac{p\tau}{2}}+e^{-\frac{p\tau}{2}})}=\frac{th\frac{p\tau}{2}}{p}.$$

Знайдемо зображення періодичної функції, графік якої зображено на рис.3.4.

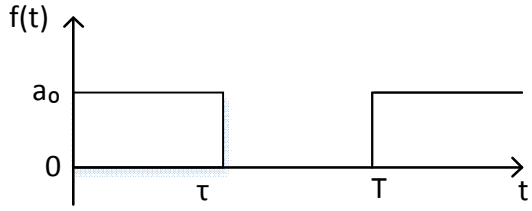


Рисунок 3.4.

Використовуючи формулу (3.5), отримаємо

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^{\tau}e^{-pt}a_0dt=$$

$$=\frac{a_0}{1-e^{-pT}}\cdot\frac{1}{-p}\cdot e^{-pt}\Big|_0^{\tau}=\frac{a_0\left(1-e^{-p\tau}\right)}{p\left(1-e^{-pT}\right)}.$$

Функцію $f(t)$ можна інтерпретувати як послідовність із періодом T сигналів амплітуди a_0, діючих у кожному періоді протягом проміжку часу τ.

Розглянемо періодичну функцію $\varphi(t)$ з періодом $2\pi/\omega$ на півосі $[0,+\infty]$, яка на періоді задана так:

$$\varphi(t)=\begin{cases}\sin\omega t, & 0\le t\le\dfrac{\pi}{\omega},\\ 0, & 0\le t\le\dfrac{2\pi}{\omega}.\end{cases}$$

Графік цієї функції зображено на рис. 3.5.

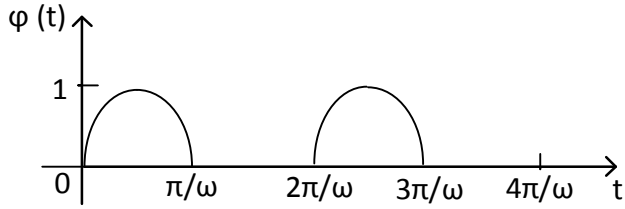


Рисунок 3.5

У цьому випадку $t=\dfrac{2\pi}{\omega}$ і

$$\Phi(p)=\frac{1}{1-e^{-p2\pi/\omega}}\int_0^{\pi/\omega} e^{-pt}\sin\omega t\,dt.$$

Первісна для функції $e^{-pt}\sin\omega t$ має вигляд

$$\frac{e^{-pt}(-p\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{p^2+\omega^2}. \qquad (3.6)$$

Тоді

$$\Phi(p)=\frac{1}{1-e^{-p2\pi/\omega}}\cdot\frac{e^{-pt}(-p\sin\omega t-\omega\cos\omega t)}{p^2+\omega^2}\Bigg|_0^{\pi/\omega}=$$

$$=\frac{1}{(1-e^{-\frac{p2\pi}{\omega}})(p^2+\omega^2)}\cdot\left(e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\omega+\omega\right)=\frac{\omega\left(e^{-\frac{p\pi}{\omega}}+1\right)}{\left(1-e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)\left(1+e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)\left(p^2+\omega^2\right)}=$$

$$=\frac{\omega}{(1-e^{-\frac{p\pi}{\omega}})\left(p^2+\omega^2\right)}.$$

Отже

$$\varphi(t)\div\frac{\omega}{(1-e^{-\frac{p\pi}{\omega}})(p^2+\omega^2)}.$$

Розглянемо періодичну функцію $\varphi(t)$ с періодом π/ω на півосі $[0,+\infty]$, яка на періоді задана як

$$\varphi(t)=|\sin\omega t|.$$

Графік цієї функції зображено на рис.3.6.

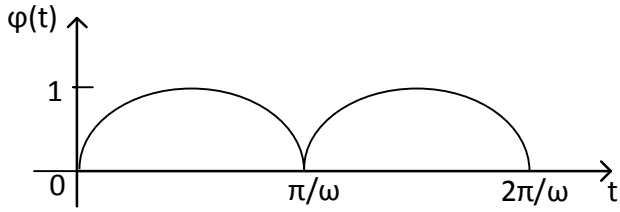


Рисунок 3.6

У цьому випадку

$$\Phi(p)\div\frac{1}{1-e^{-\frac{\pi p}{\omega}}}\int_0^{\pi/\omega} e^{-pt}\sin\omega t\,dt.$$

Використовуючи обчислення первісної (3.6), отримаємо:

$$\varphi(t)\div\frac{\omega(1+e^{-\frac{\pi p}{\omega}})}{(1-e^{-\frac{\pi p}{\omega}})(p^2+\omega^2)}.$$

3.6 Вказівки до розв'язання задач на тему: «Знаходження зображень оригіналів і відновлення оригіналу зао зображенням»

Під час розв'язання задач з цієї теми слід широко користуватися таблицею оригіналів та зображень і властивостями зображень.

Приклад 3.5 Знайдіть зображення заданих оригіналів:

1) $\left(3-4e^{2t}\right)\cdot 1(t) \div \frac{3}{p}-\frac{4}{p-2}=\frac{3p-6-4p}{p(p-2)}=\frac{-p-6}{p(p-2)}$.

2) $(t-2\cos 3t)\cdot 1(t) \div \frac{1}{p^2}-\frac{2p}{p^2+9}=\frac{p^2+9-2p^3}{p^2(p^2+9)}$.

3) $(\cos^2 2t-2t+1)\cdot 1(t)=(\frac{1+\cos 4t}{2}-2t+1)\cdot 1(t) \div$

$$\div \frac{1}{2p}+\frac{1}{2}\frac{p}{p^2+16}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}=\frac{3}{2p}+\frac{p}{2(p^2+16)}-\frac{2}{p^2}.$$

4) $e^{-t}\cdot sin^2 t=e^{-t}\cdot\frac{1-\cos 2t}{2} \div \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}-\frac{p+1}{(p+1)^2+4}\right)=$

$$=\frac{1}{2}\frac{p^2+2p+1+4-p^2-2p-1}{(p+1)((p+1)^2+4)}=\frac{2}{(p+1)((p+1)^2+4)}.$$

5) $\operatorname{ch} t\cdot\sin t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\sin t=\frac{1}{2}(e^t\sin t+e^{-t}\sin t) \div$

$$\div \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p-1)^2+1}+\frac{1}{(p+1)^2+1}\right]=\frac{p^2+2}{((p-1)^2+1)((p+1)^2+1)}.$$

6) $f(t)=t^2\cos at$. Використаємо теорему про диференціювання зображення (властивість 3.2.8):

$$t^n f(t) \div (-1)^n\frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

Тоді

$$t^2\cos at \div (-1)^2\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{p}{p^2+a^2}\right)=(-1)^2\frac{d}{dp}\left(\frac{p^2+a^2-2p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}\right)=$$

$$=\frac{-2p\left(p^2+a^2\right)^2-(a^2-p^2)2(p^2+a^2)2p}{\left(p^2+a^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2p(-2pa^2-2a^2+2p^2)}{\left(p^2+a^2\right)^3}=\frac{2p(p^2-3a^2)}{\left(p^2+a^2\right)^3}.$$

Приклад 3.6 Використовуючи властивості перетворення Лапласа, знайдіть зображення наступних оригіналів, де $f(t) \div \frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)}$:

1) $e^{2t} f(t) \div \dfrac{1}{(p-3)^3((p-2)^2+1)}$. (використаємо теорему зсунення).

2) $f(t-3) \div \dfrac{e^{-3p}}{(p-1)^2(p^2+1)}$. (використаємо теорему запізнення).

3) $\dfrac{f(t)}{t} \div \int\limits_p^{\infty} \dfrac{dp}{(p-1)^2(p^2+1)}$. (використаємо теорему інтегрування зображення).

4) $f'(t) \div \dfrac{p}{(p-1)^2(p^2+1)} - f(0)$. (використаємо теорему про диференціювання оригіналу).

Приклад 3.7 Знайдіть оригінал за його зображенням:

1) $\dfrac{2p+1}{p(p-1)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p-1} = \dfrac{A(p-1)+Bp}{p(p-1)}$;

$$2p+1 = A(p-1)+Bp;$$

$$\begin{array}{l|l} p=0 & 1=-A; \\ p=1 & 3=B. \end{array}$$

Отже,

$$\frac{2p+1}{p(p-1)} = -\frac{1}{p} + \frac{3}{p-1} \div \left(-1+3e^{-t}\right)1(t).$$

2) $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p^2} + \dfrac{Cp+D}{p^2+1} = \dfrac{Ap(p^2+1)+B(p^2+1)+(Cp+D)p^2}{p^2(p^2+1)}$;

$$1 = Ap(p^2+1)+B(p^2+1)+(Cp+D)p^2;$$

$$\begin{array}{l|l} p=0 & 1=B; \\ p^3 & 0=A+C; \\ p^2 & 0=B+D \rightarrow D=-1; \\ p & 0=A \rightarrow C=0. \end{array}$$

Отже,

$$\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} \div (t-\sin t)1(t).$$

3.7 Застосування операційного числення до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами

Нехай потрібно знайти розв'язок диференціального рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2 y = f(t),$$

що задовольняє умовам

$$y(0) = y_0,\ \frac{dy}{dt}\Big|_{t=0} = y_1.$$

Тут $f(t)$ – відомий оригінал, що має зображення $F(p)$; a_1, a_2 – сталі

коефіцієнти: y_0, y_1 – задані сталі.

Нехай $y(t) \div Y(p)$. Застосуємо до вихідного рівняння перетворення Лапласа (при цьому приймемо без доведення, що функції $y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$ є оригіналами).

Отже,

$$y(t) \div Y(p); \quad \frac{dy}{dt} \div pY(p) - y_0;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} \div p^2Y(p) - py_0 - y_1.$$

Тоді

$$p^2Y(p) - py_0 - y_1 + a_1(pY(p) - y_0) + a_2Y(p) = F(p);$$

$$(p^2 + a_1p + a_2)Y(p) = F(p) + py_0 + y_1 + a_1y_0;$$

$$Y(p) = \frac{F(p) + B(p)}{M(p)},$$

де $M(p) = p^2 + a_1p + a_2$ – характеристичний многочлен вихідного рівняння; $B(p) = py_0 + y_1 + a_1y_0$.

Далі по зображенню $Y(p)$ знаходять оригінал $y(t)$.

Найважливішою особливістю операційного методу розв’язання є те, що початкові умови враховуються із самого початку.

Якщо початкові умови нульові, то $B(p) = 0$, і в цьому випадку

$$Y(p) = \frac{F(p)}{M(p)}.$$

Приклад 3.8 Знайдіть частинний розв'язок рівняння

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 4y = te^{-2t},$$

що задовольняє початковим умовам

$$y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

Розв'язання. Якщо $y(t) \div Y(p)$, то $y'(t) \div pY(p) - y(0) = pY(p)$.

$$y''(t) \div p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - 1.$$

Тоді рівняння в зображеннях має вигляд

$$(p^2 + 4p + 4)Y(4) = \frac{1}{(p+2)^2} + 1.$$

Звідки

$$Y(p) = \frac{1}{(p+2)^4} + \frac{1}{(p+2)^2} \div \left(\frac{t^3}{3!}e^{-2t} + te^{-2t}\right) = y(t).$$

Приклад 3.9 Знайдіть частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 5y' + 6y = e^{-2t}\cos t,$$

що задовольняє початковим умовам

$$y(0)=1, y'(0)=-1,$$

Розв'язання. Нехай $y(t) \div Y(p)$, тоді рівняння в зображеннях має вигляд

$$p^2Y(p)-p+1+5(pY(p)-1)+6Y(p)=\frac{p+2}{(p+2)^2+1};$$

$$Y(p)(p^2+5p+6)=\frac{p+2}{(p+2)^2+1}+p+4.$$

Звідки

$$Y(p)=\frac{p+2}{((p+2)^2+1)(p+2)(p+3)}+\frac{p+4}{(p+2)(p+3)}=$$

$$=\frac{1}{(p+3)((p+2)^2+1)}+\frac{p+4}{(p+2)(p+3)}.$$

Оригінал, відповідний до першого доданку, знайдемо на підставі теореми про зображення згортки:

$$\frac{1}{(p+3)((p+2)^2+1)} \div \int_0^t e^{-2u}\sin u\, e^{-3(t-u)}du = e^{-3t}\int_0^t e^u \sin u\, du.$$

Використовуючи формулу (3.6) отримаємо,

$$e^{-3t}\int_0^t e^u \sin u\, du = e^{-3t}\cdot \left.\frac{e^u \sin u - e^u \cos u}{2}\right|_0^t =$$

$$=\frac{e^{-3t}}{2}\cdot\left(e^t \sin t - e^t cost + 1\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-2t}(\sin t-\cos t)+e^{-3t}\right).$$

Оригінал, відповідний до другого доданка, знайдемо, розкладаючи його на найпростіші дроби:

$$\frac{p+4}{(p+2)(p+3)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p+3}=\frac{A(p+3)+B(p+2)}{(p+2)(p+3)};$$

$$\begin{array}{l|l} p=-2 & 2=A; \\ p=-3 & 1=-B. \end{array}$$

Отже

$$\frac{p+4}{(p+2)(p+3)}=\frac{2}{p+2}+\frac{-1}{p+3} \div 2e^{-2t}-e^{-3t}.$$

У результаті отримаємо:

$$y(t)=\frac{e^{-2t}}{2}(\sin t-\cos t)+\frac{e^{-3t}}{2}+2e^{-2t}-e^{-3t}=$$

$$=\frac{e^{-2t}}{2}(\sin t-\cos t+4)-\frac{e^{-3t}}{2}.$$

Варіанти індивідуальних завдань

1 Знайдіть зображення оригіналів:

1) $(te^{-t} + e^{2t}\sin 3t)$;

2) $(3t + e^{-t}\cos 2t)$;

3) $\cos 3t\, sin 2t$;

4) $te^{3t}\sin 5t$;

5) $3t^2 - 5e^{2t}\sin t$;

6) $t^3 - 2t\, cos\, 4t$;

7) $cos^2 3t + t sin\, t$;

8) $\sin 3t + t sin\, t$;

9) $\cos 3t \cdot \cos 4t$;

10) $\sin 2t \cdot \sin 5t$;

11) $te^{2t}\cos 3t$;

12) $e^t \sin 3t \cdot \cos 4t$;

13) $e^t \cos 3t \cdot \cos 4t$;

14) $e^t \sin 3t \cdot \sin 4t$;

15) $t^2 e^{-2t} + e^{-t}\sin 2t$;

16) $\cos^2 2t + t\sin 4t$;

17) $sin^2 4t + 2t sin 3t$;

18) $t\cos 2t \cdot \cos 4t$;

19) $t\sin 3t \cdot \sin 7t$;

20) $te^{-t}\cos 2t$;

21) $e^{2t}\sin 2t \cdot \cos 3t$;

22) $e^{2t}\sin 5t \cdot \sin 3t$;

23) $e^{2t}\sin 2t \cdot \sin 3t$;

24) $t^2 e^{-3t} + e^t \cos 2t$;

25) $\cos 3\mathrm{t} + t^2 \sin 3t$;

26) $\sin 3t + 4t\, cos^2 t$;

27) $t\cos 3t \cdot \cos 2t$;

28) $t\sin 3t \cdot \sin t$;

29) $sin^4 t$;

30) $cos^4 t$.

2 Знайдіть оригінал за зображенням:

1) $\dfrac{1}{p^2-4p+5}$;

2) $\dfrac{1}{p^3+2p^2+p}$;

3) $\dfrac{p}{(p+1)^2}$;

4) $\dfrac{p^2-2p+3}{p(p^2+2)}$;

5) $\dfrac{1}{p^2+6p+10}$;

6) $\dfrac{p^2+2}{p^3+3p^2+5p+3}$;

7) $\dfrac{1}{p^2+5p+4}$;

8) $\dfrac{1}{p^2+2p+2}$;

9) $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$;

10) $\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$;

11) $\dfrac{1}{p(p+1)}$;

12) $\dfrac{1}{p^2+4p+5}$;

13) $\dfrac{1}{p^2-2p+26}$;

14) $\dfrac{1}{p^2+6p+9}$;

15) $\dfrac{1}{p^2+4p+3}$;

16) $\dfrac{p}{p^2+2p+2}$;

17) $\dfrac{1}{p^2-2p+10}$;

18) $\dfrac{1}{p(p-1)(p-2)}$;

19) $\dfrac{1}{p^2(p^2+9)}$;

20) $\dfrac{1}{p(p^2-1)}$;

21) $\dfrac{1}{(p-1)(p+1)^2}$;

22) $\dfrac{1}{p(p-3)^2}$;

23) $\dfrac{p}{p^2-4p+20}$;

24) $\dfrac{p-2}{p^2-4p+13}$;

25) $\dfrac{3p+19}{2p^2+8p+19}$;

26) $\dfrac{5p-1}{p^3-1}$;

27) $\dfrac{p+1}{p^2-5p+6}$;

28) $\dfrac{p+1}{p^2-6p+10}$;

29) $\dfrac{3p+4}{p(p+1)(p^2+1)}$;

30) $\dfrac{p+1}{p^2+2p}$.

3 Знайдіть розв'язок рівняння, що задовольняє початковим умовам:

1. $y'' + 9y' = \cos 3t, y(0) = y'(0) = 1$;
2. $y'' - 2y' + y = te^{t}, y(0) = 1, y'(0) = 0$;
3. $y'' - 4y' + 3y = te^{3t}, y(0) = y'(0) = 0$;
4. $y'' - 2y' = e^{2t}, y(0) = y'(0) = 0$;
5. $y'' + 4y' = \sin 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
6. $y'' + 2y' + 2y = 1$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;
7. $y'' + 3y' + 3y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
8. $y'' + 2y' + y = \sin t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
9. $y'' + y' = t^2 + 2t$, $y(0) = 4, y'(0) = -2$;
10. $y'' + y = \cos t$, $y(0) = -1, y'(0) = 1$;
11. $y'' - 2y' - 3y = 2t$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$;
12. $y'' + 2y' - 3y = e^{-t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
13. $y'' + 9y' = \cos t$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;
14. $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;
15. $y'' + 3y' + 2y = 1$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;
16. $y'' + 4y' + 4y = 2$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
17. $y'' - y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$;
18. $y'' + y = \cos t$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;
19. $y'' + 4y = \cos t$, $y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = 2$;
20. $y'' + 4y = \sin t$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$;
21. $y'' + 2y' + y = e^{t}$, $y(0) = 0, y'(0) = -2$;
22. $y'' + y' = te^{-t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;
23. $y'' - 2y' = 2 - 2t$, $y(0) = 1, y'(0) = 1$;
24. $y'' + y = \sin t \cdot \sin 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
25. $y'' + 2y' = e^{2t}$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
26. $y'' - 4y' = \sin 2t$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$;
27. $y'' - 2y' + 2y = 1$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$;
28. $y'' - y' = te^{-t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;
28. $y'' + 2y' = e^{-2t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$;
30. $y'' + 2y' + y = e^{2t}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Питання для самоперевірки.

1. Дайте означення оригіналу.
2. Дайте означення функції Хевісайда.
3. Дайте означення зображення оригіналу.
4. Сформулюйте теорему зсунення.
5. Сформулюйте теорему подібності.
6. Сформулюйте теорему про зображення похідної.
7. Сформулюйте теорему про зображення інтегралу.
8. Сформулюйте теорему розкладання.
9. Запишіть формулу оберненого перетворення Лапласа.
10. Запишіть формулу для зображення періодичного оригіналу.

Список рекомендованої літератури

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1975.

2 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука, 1985.

3 Щипачёв В.С. Курс высшей математики. – М.: Изд-во МГУ, 1981.

4 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. / Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высшая школа, 2001.

5 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : В. 2т. – М.: Наука, 1985.

6 Гусак А.А., Бричикова Е.А., Гусак Г.М. Теория функций комплексной переменной и операционное исчисление. – Мн.: ТетраСистемс, 2002.

7 Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного: Учебник для вузов. – М.: Наука, 1989.

8 Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. Специальные разделы математического анализа: Учебное пособие для втузов. – М.: Наука, 1986.

9 Калиткин Н.П. Численные методы. – М.: Наука, 1978.

10 Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970.

11 Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968.

12 Шахно К.У. Элементы теории функции комплексного переменного и операционное исчисление. – Мн.: Вышэйшая школа, 1975.

13 Перестюк М.О., Маринець В.В. Теорія рівнянь математичнох фізики. – К.: Либідь, 2006.

14 Вірченко Н.О. Основні методи розв’язання задач математичної фізики. – К.: КПІ, 1997.

15 Грищенко О.Ю., Настасієв П.П., Нагнибіда М.І. Теорія функцій комплексної змінної. Розв’язування задач. – К.: Вища школа, 1994.

ЗМІСТ

Вступ ……... 3
1 Рівняння математичної фізики 4
1.1 Поняття диференціального рівняння з частинними похідними .. 4
1.2 Класифікація лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними 5
1.3 Зведення до канонічного вигляду диференціальних рівнянь з частинними похідними другого порядку з двома незалежними змінними 7
1.4 Постановка задач математичної фізики 9
1.5 Рівняння коливань струни 10
1.6 Постановка крайових задач для рівнянь коливань 13
1.7 Розв'язання задачі Коші для рівняння коливань струни методом характеристик (методом Даламбера) 13
1.8 Розв'язання крайової задачі для рівняння коливань струни методом відокремлення змінних (методом Фур'є) 18
1.9 Рівняння теплопровідності 20
1.10 Розв'язання крайової задачі для рівняння теплопровідності методом Фур'є 22
1.11 Рівняння Лапласа. Розв'язання задачі Діріхле для круга методом Фур'є 25
Варіанти індивідуальних завдань 28
Питання для самоперевірки 30
2 Перетворення Фур'є ……. 31
2.1 Ряд Фур'є 31
2.2 Інтеграл Фур'є. Перетворення Фур'є 38
2.3 Застосування рядів Фур'є та інтегралів Фур'є до теорії теплопровідності 44
Варіанти індивідуальних завдань 48
3 Перетворення Лаласа..... 54
3.1 Зображення і оригінал 54
3.2 Властивості перетворення Лапласа 55
3.3 Зображення найпростіших функцій 57
3.4 Відновлення оригіналу по зображенню 60
3.5 Зображення кусково-неперервних і періодичних функцій 62
3.6 Методичні вказівки до розв'язання задач на тему: «Знаходження зображень оригіналів і відновлення оригіналу по зображенню» 66
3.7 Застосування операційного числення до розв'язання лінійних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами 67
Варіанти індивідуальних завдань 70
Питання для самоперевірки 72
Список рекомендованої літератури..... 73

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з курсу «Вища математика у наукових дослідженнях» для студентів-магістрів заочної форми навчання зі спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»

Укладачі: Аршава Олена Олександрівна
Харченко Анатолій Петрович
Іохвідович Нона.Юзефівна
Гаєвська Вікторія Олексіївна
Поклонський Євген Васильович

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор Л.І.Христенко

План 2016 р., поз.197 Формат 60х84 1/16.
Підп. до друку Обл.-вид. арк. 3,5
Надруковано на ризографі. Умов .друк. арк. 3,7 Папір друк. №2.
Тираж 50 прим. Зам. № 3019 Безкоштовно.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури