

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.О. Аршава, О.І.Котульська, А.П. Харченко

ДИНАМІЧНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ

Рекомендовано

методичною радою університету

як навчально-методичний посібник

для студентів економічних спеціальностей

Харків ХДТУБА 2006

А – 89

УДК 519.862

Рецензенти:

А.А.Янцевич, д-р фіз.-мат. наук, професор,
кафедра математики Харківського гуманітарного
університету «Народна Українська академія»

Н.Ю. Іохвидович, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
кафедра вищої математики Харківського державного технічного університету
будівництва та архітектури (ХДТУБА)

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 7 від 02.04.05

Затверджено методичною радою університету,
протокол № 2 від 27.10.05

Автори: О.О.Аршава
О.І.Котульська
А.П.Харченко

А-89 Аршава О.О., Котульська О.І., А.П. Харченко. Динамічні економетричні моделі : Навчально-методичний посібник. – Х.: ХДТУБА, 2006. – 53 с.

У посібнику розглядаються основні поняття часових рядів, що використовуються в процесі моделювання одновірних часових рядів. Вивчається моделювання на основі адитивної та мультиплікативної моделей часового ряду.

Видання призначене для самостійного вивчення дисципліни «Економетрія».

Іл. 3; Табл. 21; Бібліогр. 9 назв.

© О.О. Аршава, О.І.Котульська, А.П. Харченко, 2006

ВСТУП

Курс економетрії займає важливе місце в сучасних програмах економічних спеціальностей, як і мікроекономіка, макроекономіка та фінансовий аналіз. Економетричні методи необхідно знати і студенту, і вченому, і практику. Без них неможливо побудувати надійний прогноз, а тому під загрозою знаходиться успіх у банківській справі, фінансах та бізнесі.

У посібнику розглядається важливий напрямок в економетриці – динамічні моделі, а також питання моделювання одномірних часових рядів – моделювання тенденції часового ряду, сезонних і циклічних коливань, вивчаються взаємозв'язки за часовими рядами. Приділяється увага моделям із розподіленими лагами.

У посібнику показано, як методи, що розроблені для побудови моделей із розподіленими лагами, використовуються для емпіричної верифікації макроекономічних моделей, у яких враховується очікування економічних агентів щодо значень економічних показників, які містить модель.

Усі розділи мають ідентичну структуру: методичні положення, які містять основні поняття, означення, формули, приклади розв'язання типових задач, питання для самоконтроля. Така структура дозволяє студентам за короткий час оволодіти матеріалом та надати допомогу під час в самостійної роботи.

1 МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОМІРНИХ ЧАСОВИХ РЯДІВ

1.1 Основні поняття часового ряду

Можна побудувати економетричну модель, використовуючи два типи вихідних даних: дані, що характеризують сукупність різних об'єктів у конкретний момент часу; дані, що характеризують один об'єкт за ряд послідовних моментів часу.

Моделі, побудовані за даними першого типу, називають просторовими моделями.

Моделі, побудовані за даними другого типу, називають моделями часових рядів.

Означення

Часовий ряд – це сукупність значень будь-якого показника за декілька послідовних моментів або періодів часу.

Кожний рівень часового ряду формується під впливом великої кількості факторів, які умовно можна поділити на три групи:

- 1 Фактори, які формують тенденцію ряду,
- 2 Фактори, які формують циклічні коливання ряду,
- 3 Випадкові фактори.

Означення

Модель, у якій часовий ряд подається як сума трендової, циклічної і випадкової компоненти, називають адитивною моделлю часового ряду.

Означення

Модель, у якій часовий ряд подається як добуток вказаних компонентів, називають мультиплікативною моделлю часу.

Головна задача економетричного дослідження окремого часового ряду – виявлення і надання кількісного вираження кожній із указаних компонентів для того, щоб використати одержану інформацію для прогнозування майбутніх значень ряду або для побудови моделей взаємозв'язку двох чи більше часових

рядів.

1.2 Автокореляція рівнів часового ряду

Означення

Кореляційну залежність між послідовними рівнями часового ряду називають автокореляцією рівнів ряду.

Кількісно її можна виміряти за допомогою лінійного коефіцієнта кореляції між рівнями часового ряду і рівнями цього ряду, зсунутими на декілька кроків за часом.

Приклад 1.1

Розрахунок коефіцієнтів автокореляції рівнів часового ряду.

Нехай є умовні дані про середні витрати на кінцеве споживання (y_t , у.о.) за 8 років.

Таблиця 1.1 Розрахунок коефіцієнта автокореляції першого порядку для часового ряду витрат на кінцеве споживання, у.о.

t	y_t	y_{t-1}	$y_t - \bar{y}_1$	$y_{t-1} - \bar{y}_2$	$(y_t - \bar{y}_1) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_2)$	$(y_t - \bar{y}_1)^2$	$(y_{t-1} - \bar{y}_2)^2$
1	7	-	-	-	-	-	-
2	8	7	- 3.29	-3	9.87	10.8241	9
3	8	8	-3.29	-2	6.58	10.8241	4
4	10	8	-1.29	-2	2.58	1.6641	4
5	11	10	-0.29	0	0.00	0.0841	0
6	12	11	0.71	1	0.71	0.5041	1
7	14	12	2.71	2	5.42	7.3441	4
8	16	14	4.71	4	18.84	22.1841	16
Всього	86	70	-0.03	0	44.0	53.4287	38

Природньо припустити, що витрати на кінцеве споживання в поточному році залежать від витрат на кінцеве споживання попередніх років. Знайдемо

коефіцієнт кореляції між рядами y_t і y_{t-1} і виміряємо тісноту зв'язку між витратами на кінцеве споживання поточного і попередніх років.

Коефіцієнт кореляції знайдемо за формулою

$$r_{xy} = \frac{\sum (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_j - \bar{x})^2 \sum (y_j - \bar{y})^2}}.$$

У якості змінної x ми розглянемо ряд $y_2, y_3, \dots, y_8$, у якості змінної y – ряд $y_1, y_2, \dots, y_7$. Тоді згідно з наведеною формулою

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2} (y_t - \bar{y}_1)(y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2} (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2} (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}}, \quad (1.1)$$

$$\text{де } \bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2} y_t}{n-1}, \quad \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2} y_{t-1}}{n-1}. \quad (1.2)$$

Цю величину називають коефіцієнтом автокореляції рівнів ряду першого порядку, оскільки він вимірює залежність між сусідніми рівнями ряду t і $t-1$.

Для даних прикладу 1.1 співвідношення (1.2) дає:

$$\bar{y}_1 = \frac{8 + 8 + 10 + 11 + 12 + 14 + 16}{7} = \frac{79}{7} = 11.29,$$

$$\bar{y}_2 = \frac{7 + 8 + 8 + 10 + 11 + 12 + 14}{7} = \frac{70}{7} = 10.$$

Використовуючи формулу (1.1), одержимо коефіцієнт автокореляції першого порядку: $r_1 = \frac{44}{\sqrt{53.42 \cdot 38}} = 0.976$.

Одержане значення вказує на дуже тісний зв'язок між витратами на кінцеве споживання поточного і безпосередньо попереднього років. У свою чергу це вказує на присутність у часовому ряді сильної лінійної тенденції.

Аналогічно можна знайти коефіцієнт автокореляції другого і більш високих порядків. Так, коефіцієнт автокореляції другого порядку характеризує тісноту зв'язку між рівнями y_t і y_{t-2} і визначається за формулою:

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3} (y_t - \bar{y}_3)(y_{t-2} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3} (y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3} (y_{t-2} - \bar{y}_4)^2}} \quad (1.3)$$

$$\text{де } \bar{y}_3 = \frac{\sum_{t=3} y_t}{n-2}, \quad \bar{y}_4 = \frac{\sum_{t=3} y_{t-2}}{n-2}. \quad (1.4)$$

Для даних прикладу 1.1 одержимо:

$$\bar{y}_3 = \frac{8 + 10 + 11 + 12 + 14 + 16}{6} = \frac{71}{6} = 11.83,$$

$$\bar{y}_4 = \frac{7 + 8 + 8 + 10 + 11 + 12}{6} = \frac{56}{6} = 9.33.$$

Побудуємо таблицю 1.2.

Таблиця 1.2 Розрахунок коефіцієнта автокореляції другого порядку для часового ряду витрат на кінцеве споживання, у.о.

t	y _t	y _{t-2}	y _t - $\bar{y}_3$	y _{t-2} - $\bar{y}_4$	(y _t - $\bar{y}_3$) • (y _{t-2} - $\bar{y}_4$)	(y _t - $\bar{y}_3$) ²	(y _{t-2} - $\bar{y}_4$) ²
1.	7	-	-	-	-	-	-
2.	8	-	-	-	-	-	-
3.	8	7	-3.83	-2.33	8.9239	14.6689	5.4289
4.	10	8	-1.83	-1.33	2.4339	3.3489	1.7689
5.	11	8	-0.83	-1.33	1.1039	0.6889	1.7689
6.	12	10	0.17	0.67	0.1139	0.0289	0.4489
7.	14	11	2.17	1.67	3.6239	4.7089	2.7889
8.	16	12	4.17	2.67	11.1339	17.3889	7.1289
Всього	86	56	0.02	0.02	27.3334	40.8334	19.3334

Підставимо одержані значення в формулу (1.3):

$$r_2 = \frac{27.3334}{\sqrt{40.8334 \cdot 19.3334}} = 0.973.$$

Одержані результати ще раз підтверджують висновки про те, що ряд витрат на кінцеве споживання містить лінійну тенденцію.

Означення

Число періодів, за якими розраховується коефіцієнт автокореляції, називають лагом.

Оскільки зі збільшенням лагу число пар значень, за якими розраховується коефіцієнт автокореляції, зменшується, то для статистичної достовірності коефіцієнтів автокореляції використовують правило про те, що максимальний лаг повинен бути не більшим за $n/4$.

Означення

Послідовність коефіцієнтів автокореляції рівнів першого, другого і т. д. порядків називають автокореляційною функцією часового ряду.

Означення

Графік залежності значень від величини лагу (порядку коефіцієнта автокореляції) називається корелограмою.

Аналіз автокореляційної функції і корелограми дозволяє визначити лаг, при якому автокореляція найбільш висока, а , отже, і лаг, при якому зв'язок між поточним і попередніми рівнями ряду найбільш тісна.

Якщо найбільш високий коефіцієнт автокореляції є коефіцієнтом першого порядку, то ряд містить тільки тенденцію. Якщо найбільш високий коефіцієнт автокореляції порядку τ , то ряд містить циклічні коливання з періодом в τ моментів часу. Якщо жоден із коефіцієнтів автокореляції не є значущим, можна зробити одне з двох припущень відносно структури цього ряду: або ряд не містить тенденції і циклічних коливань, або ряд містить сильну нелінійну тенденцію.

Ряд, який розглянутий у прикладі 1.1, містить тільки тенденцію, оскільки коефіцієнти автокореляції його рівнів є високими.

Приклад 1.2

Автокореляційна функція і дослідження структури ряду.

Нехай задані умовні дані про об'єми споживання електроенергії мешканцями регіону за 16 кварталів (табл. 1.3).

Таблиця 1.3 Споживання електроенергії мешканцями регіону, млн. кВт. г.

t	Y_t	Y_{t-1}	Y_{t-2}	Y_{t-3}	Y_{t-4}
1	6.0	-	-	-	-
2	4.4	6.0	-	-	-
3	5.0	4.4	6.0	-	-
4	9.0	5.0	4.4	6.0	-
5	7.2	9.0	5.0	4.4	6.0
6	4.8	7.2	9.0	5.0	4.4
7	6.0	4.8	7.2	9.0	5.0
8	10.0	6.0	4.8	7.2	9.0
9	8.0	10.0	6.0	4.8	7.2
10	5.6	8.0	10.0	6.0	4.8
11	6.4	5.6	8.0	10.0	6.0
12	11.0	6.4	5.6	8.0	10.0
13	9.0	11.0	6.4	5.6	8.0
14	6.6	9.0	11.0	6.4	5.6
15	7.0	6.6	9.0	11.0	6.4
16	10.8	7.0	6.6	9.0	11.0

Знайдемо коефіцієнт автокореляції першого порядку. Він складає: $r_1 = 0,165$. Розрахувавши коефіцієнт автокореляції другого порядку r_2 , одержимо кількісну характеристику кореляційного зв'язку рядів Y_t , Y_{t-2} : $r_2 = 0,567$. Продовжуючи розрахунки, одержимо автокореляційну функцію цього ряду. Її значення і корелограма наведені в таблиці 1.4.

Таблиця 1.4 Корелограма часового ряду споживання електроенергії.

Лаг	Коефіцієнт автокореляції рівнів	Корелограма
1	0,165154	**
2	0,566873	*****
3	0,113558	*
4	0,983025	*****
5	0,118711	*
6	0,722046	*****
7	0,003367	
8	0,973848	*****

Аналіз значень автокореляційної функції дозволяє зробити висновок, що даний ряд містить лінійну тенденцію і сезонні коливання періодичністю в чотири квартали.

1.3 Моделювання тенденції часового ряду

Найбільш поширеним способом моделювання тенденції часового ряду є побудова аналітичної функції, що характеризує залежність рівнів ряду від часу, тобто тренда. Цей спосіб називається аналітичним вирівнюванням часового ряду.

Для побудови трендів найчастіше застосовують такі функції:

лінійний тренд: $\hat{y}_t = a + bt$;

гіпербола: $\hat{y}_t = a + \frac{b}{t}$;

експоненціальний тренд: $\hat{y}_t = e^{a+bt}$;

степенева функція: $\hat{y}_t = at^b$;

парабола другого і більш високих порядків: $\hat{y}_t = a + b_1t + b_2t^2 + \dots + b_kt^k$.

Параметри трендів можна знайти звичайним методом нацменших квадратів (МНК), використовуючи в якості незалежної змінної час $t=1, 2, \dots, n$, а в якості залежної змінної – фактичні рівні часового ряду y_t . Для нелінійних трендів спочатку проводять стандартну процедуру ліанерізації.

Найбільш поширеним способом визначення типу тенденції є проведення якісного аналізу процесу, що вивчається, побудова і візуальний аналіз графіка залежностей рівнів ряду від часу, розрахунок деяких основних показників динаміки. Використовують також коефіцієнти автокореляції рівнів ряду.

Якщо ряд містить нелінійну тенденцію, то найкраще рівняння тренду можна обрати шляхом перебору основних форм тренда, розрахувавши по кожному з них скоригований коефіцієнт детермінації $\bar{R}^2$.

Приклад 1.3

Розрахунок параметрів тренду.

Задані місячні дані про темпи зростання номінальної заробітної плати за 10 місяців 1999 р. у відсотках до рівня грудня 1998 р. (табл.1.5). Необхідно знайти найкращий тип тренда і визначити його параметри.

Таблиця 1.5 Темпи зростання номінальної місячної заробітної плати за 10 місяців 1999, % до рівня грудня 1998 р.

Місяць	Темпи зростання номінальної місячної заробітної плати		Місяць	Темпи зростання номінальної місячної заробітної плати
Січень	82,9		Червень	121,6
Лютий	87,3		Липень	118,6
Березень	99,4		Серпень	114,1
Квітень	104,8		Вересень	123,0
Травень	107,2		Жовтень	127,3

Знайдемо коефіцієнти автокореляції за рівнями цього ряду і її логарифми (табл. 1.6).

Таблиця 1.6 Автокореляційна функція часового ряду темпів зростання номінальної місячної заробітної плати за 10 місяців 1999 р., % до рівня грудня 1998 р.

Лаг	Автокореляційна функція	
	За рівнем ряду	За логарифмами рівнів ряду
1	0,901	0,914
2	0,805	0,832
3	0,805	0,896

Високі значення коефіцієнтів автокореляції першого, другого і третього порядків говорить про те, що ряд містить тенденцію. Приблизно рівні значення коефіцієнтів автокореляції за рівнями цього ряду і за логарифмами дозволяють зробити такий висновок: якщо ряд містить нелінійну тенденцію, то вона виражена в неявній формі. Отже, для моделювання тенденції в рівній мірі можна використати і лінійну, і нелінійну функції, наприклад, степеневий або експоненціальний тренд.

Для виявлення найкращого рівняння тренду знайдемо параметри основних видів трендів. Результати цих розрахунків наведені в табл. 1.7. Згідно з цими даними найкращою є степенева форма тренда, для якої значення скоригованого коефіцієнта детермінації найбільш високе.

Таблиця 1.7 Рівняння трендів для часового ряду темпів зростання номінальної місячної заробітної плати за 10 місяців 1999 р., % до рівня грудня 1998 р.

Тип тренду	Рівняння	R^2	$\bar{R}^2$
Лінійний	$\hat{y}_t = 82,66 + 4,7t$ (0,595)	0,887	0,873
Парабола другого порядку	$\hat{y}_t = 72,9 + 9,599t - 0,444t^2$ (2,11) (0,187)	0,937	0,920

Степеневий	$\ln y_t = 4,39 + 0,19 \ln t$ (0,017)	0,939	0,931
Експоненціаль- ний	$\ln y_t = 4,43 + 0,045t$ (0,006)	0,872	0,856
Гіперболічний	$\hat{y}_t = 122,57 - \frac{47,63}{t}$ (8,291)	0,758	0,728

У дужках указані стандартні помилки коефіцієнтів регресії.

Найбільш просту економічну інтерпретацію мають параметри лінійного і експоненціального трендів.

Параметри лінійного тренда можна інтерпретувати так: темпи зростання номінальної місячної заробітної плати за 10 місяців 1999 р. змінювалися від рівня 82,66 % з середнім за місяць абсолютним приростом 4,72%.

Згідно з експоненціальним трендом можна стверджувати, що темпи зростання номінальної місячної заробітної плати за 10 місяців 1999р. змінювалися від рівня 83,9% з середнім за місяць ланцюговим темпом зростання 104,6 %.

1.4 Моделювання сезонних та циклічних коливань

Адитивна модель часового ряду припускає, що кожний рівень ряду може бути поданий як сума трендової (Т), сезонної (S) і випадкової (Е) компонент:

$$Y=T+S+E. \quad (1.5)$$

Загальний вигляд мультиплікативної моделі має такий вигляд:

$$Y=T \cdot S \cdot E. \quad (1.6)$$

Ця модель припускає, що кожний рівень ряду є добуток трендової , сезонної і випадкової компонент.

У залежності від структури сезонних коливань вибирається та чи інша модель. Якщо амплітуда сезонних коливань є приблизно сталою, тоді будують

адитивну модель часового ряду. Якщо амплітуда сезонних коливань зростає або спадає, будують мультиплікативну модель.

Побудова адитивної чи мультиплікативної моделі зводиться до розрахунку значень T , S і E для кожного рівня ряду.

Алгоритм побудови моделі складається з таких кроків.

- 1 Вирівнювання початкового ряду методом ковзної середньої.
- 2 Розрахунок значень сезонної компоненти S .
- 3 Виключення сезонної компоненти з початкових рівнів ряду.
- 4 Аналітичне вирівнювання рівнів $(T+S)$ або $(T \cdot S)$ і розрахунок значень T з використанням одержаного рівняння тренда.
- 5 Розрахунок одержаних за моделлю значень $(T+S)$ або $(T \cdot S)$.
- 6 Розрахунок абсолютних або відносних похибок.

Приклад 1.4

Побудова адитивної моделі часового ряду.

Повернемося до даних про об'єм споживання електроенергії мешканцями району за останні чотири роки, які наведені в таблиці 1.3.

У прикладі 1.2 було доведено, що даний часовий ряд містить сезонні коливання з періодичністю 4. Об'єм використання електроенергії в осінньо – зимовий період часу (I і IV квартали) більший, ніж весною і літом (II і III квартали). Розрахуємо компоненти цього ряду, використовуючи адитивну модель.

Крок 1 Проведемо вимірювання початкових рівнів ряду методом ковзної середньої. Для цього:

підсумуємо рівні ряду послідовно за кожні чотири квартали з сувом на один момент часу і знайдемо умовні річні об'єми споживання електроенергії (гр.3 табл.1.8);

знайдемо ковзні середні, поділивши одержані суми на 4 (гр.4 табл. 1.8.). Одержані таким чином вирівнювання значення уже не містять сезонної компоненти;

приведемо ці значення у відповідність з фактичними моментами часу. Для цього знайдемо середні значення з двох послідовних ковзних середніх – центровані ковзні середні (гр. 5 табл. 1.8).

Таблиця 1.8 Розрахунок оцінок сезонної компоненти в адитивній моделі

№ квартала, t	Споживання електроенергії, y_t	Всього за чотири квартали	Ковзна середня за чотири квартали	Центрована ковзна середня	Оцінка сезонної компоненти
1	2	3	4	5	6
1	6,0	-	-	-	-
2	4,4	-	-	-	-
3	5,0	24,4	6,10	-	-
4	9,0	25,6	6,40	6,250	- 1,250
5	7,2	26,0	6,50	6,450	2,550
6	4,8	27,0	6,75	6,625	0,575
7	6,0	28,0	7,00	6,875	- 2,075
8	10,0	28,8	7,20	7,100	- 1,100
9	8,0	29,6	7,40	7,300	2,700
10	5,6	30,0	7,50	7,450	0,550
11	6,4	31,0	7,75	7,625	-2,025
12	11,0	32,0	8,00	7,875	-1,475
13	9,0	33,0	8,25	8,125	2,875
14	6,6	33,6	8,40	8,325	0,675
15	7,0	33,4	8,35	8,375	- 1,775
16	10,8				

Крок 2 Знайдемо оцінки сезонної компоненти як різницю між фактичними рівнями ряду і центрованими ковзними середніми (гр. 6 табл. 1.8). Використовуємо ці оцінки для розрахунку значень сезонної компоненти S

(табл. 1.9). Для цього знайдемо середні за кожний квартал оцінки сезонної компоненти S_i .

Таблиця 1.9 Розрахунок значень сезонної компоненти в адитивній моделі

Показники	Рік	№ квартала, i			
		1	2	3	4
	1	-	-	- 1,250	2,550
	2	0,575	- 2,075	- 1,100	2,700
	3	0,550	- 2,025	- 1,475	2,875
	4	0,675	- 1,775	-	-
Всього за i-й квартал (за всі роки)		1,800	- 5,875	- 3,825	8,125
Середня оцінка сезонної компоненти для i-того квартала, $\bar{S}_i$		0,600	- 1,958	- 1,275	2,708
Скоригована середня компоненти, S_i		0,581	- 1,977	- 1,294	2,690

Для даної моделі: $0,6 - 1,958 - 1,275 + 2,708 = 0,075$.

Знайдемо коефіцієнт коригування: $k=0,075:4=0,01875$.

Розрахуємо скориговані значення сезонної компоненти як різницю між її середньою оцінкою і коефіцієнтом коригування k :

$$S_i = \bar{S}_i - k, i = \overline{1,4}. \quad (1.7)$$

У моделях з сезонною компонентою припускається, що сезонні впливи за період взаємопогашуються. Для адитивної моделі це означає, що сума значень сезонної компоненти для цих кварталів повинна дорівнювати нулю. Перевіримо цю умову: $0,581 - 1,977 - 1,294 + 2,690 = 0$. Отже, одержані такі значення сезонної компоненти:

1 квартал $S_1 = 0,581$;

2 квартал $S_2 = - 1,979$;

3 квартал $S_3 = -1,294$;

4 квартал $S_4 = 2,690$.

Крок 3 Елемінуємо вплив сезонної компоненти. Для цього відніmemo її значення від кожного рівня початкового часового ряду. Одержимо величини $T+S=Y-S$ (гр. 4 табл.1.10). Ці значення розраховуються за кожний момент часу і містять тільки тенденцію і випадкову компоненту.

Таблиця 1.10 Розрахунок вирівняних значень T
і помилок E в адитивній моделі

t	y_t	S_t	$T+S=$ $=y_t-S_t$	T	T+S	$E=y_t-$ $(T+S)$	E^2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	6,0	0,581	5,419	5,902	6,483	-0,483	0,2333
2	4,4	-1,977	6,337	6,088	4,111	0,289	0,0835
3	5,0	-1,294	6,294	6,275	4,981	0,019	0,0004
4	9,0	2,690	6,310	6,461	9,151	-0,151	0,0228
5	7,2	0,581	6,619	6,648	7,229	-0,029	0,0008
6	4,8	-1,977	6,777	6,834	4,857	-0,057	0,0032
7	6,0	-1,294	7,294	7,020	5,727	0,273	0,0745
8	10,0	2,690	7,310	7,207	9,896	0,104	0,0108
9	8,0	0,581	7,419	7,393	7,974	0,026	0,0007
10	5,6	-1,977	7,577	7,580	5,603	-0,030	0,0009
11	6,4	-1,294	7,694	7,766	6,472	-0,072	0,0052
12	11,0	2,690	8,310	7,952	10,642	0,358	0,1282
13	9,0	0,581	8,419	8,139	8,720	0,280	0,0784
14	6,6	-1,977	8,577	8,325	6,348	0,252	0,0635
15	7,0	-1,294	8,294	8,519	7,218	-0,218	0,0475
16	10,8	2,690	8,110	8,698	11,388	-0,588	0,3457

Крок 4 Знайдемо компоненту T даної моделі. Для цього проведемо

аналітичне вирівнювання ряду $(T+E)$ за допомогою лінійного тренду. Результати вимірювання такі: $T=5,715+0,186t$, $R^2=0,91$. Підставляючи в це рівняння $t=1,2,\dots,16$, знайдемо рівні T для кожного моменту часу (гр. 5 табл. 1.10).

Крок 5 Знайдемо значення рівнів ряду, одержані за адитивною моделлю. Для цього додамо до рівнів T значення сезонної компоненти для відповідних кварталів.

Крок 6 Розрахуємо абсолютні помилки $E=Y-(T+S)$. (1.8)

Чисельні значення абсолютних помилок наведені в гр. 7 табл. 1.10.

Для оцінки якості побудованої моделі можна застосувати суму квадратів абсолютних помилок. Для даної моделі ця сума дорівнює 1,10. Відносно до загальної суми квадратів відхилень рівнів ряду від його середнього рівня, яка дорівнює 71,59, ця величина складає: $(1-1,10/71,59) \cdot 100=1,536$.

Отже, адитивна модель пояснює 98,5 загальної варіації рівнів часового ряду споживання електроенергії за останні 16 кварталів.

Приклад 1.5

Побудова мультиплікативної моделі часового ряду.

Нехай задані поквартальні дані про прибуток компанії за останні чотири роки. (табл. 1.11).

Таблиця 1.11 Прибуток компанії, тис. дол. США

Рік/Квартал	1	2	3	4
1	72	100	90	64
2	70	92	80	58
3	62	80	68	48
4	52	60	50	30

У даному часовому ряді присутні сезонні коливання з періодом 4 і загальна спадна тенденція рівнів ряду. Оскільки амплітуда сезонних коливань зменшується, можна припустити, що модель мультиплікативна. Знайдемо її

компоненти.

Крок 1 Проведемо вирівнювання початкових рівнів ряду методом ковзної середньої. Методика повністю співпадає з методикою для адитивної моделі. Результати розрахунків оцінок сезонної компоненти подані в таблиці 1.12.

Таблиця 1.12 Розрахунок оцінок сезонної компоненти
мультиплікативної моделі

№ кварталу, t	Прибуток компанії, y_t	Всього за чотири квартали	Ковзна середня за чоти- ри квар- тали	Центрова- на ковзна середня	Оцінка сезонної компонен ти
1	72	-	-	-	-
2	100	-	-	-	-
3	90	326	81,5	81,25	1,108
4	64	324	81,0	80,00	0,800
5	70	316	79,0	77,75	0,900
6	92	306	76,5	75,75	1,215
7	80	300	75,0	74,00	1,081
8	58	292	73,0	71,50	0,811
9	62	280	70,0	68,50	0,905
10	80	268	67,0	65,75	1,217
11	68	258	64,5	63,25	1,075
12	48	248	62,0	59,50	0,807
13	52	228	57,0	54,75	0,950
14	60	210	52,5	50,25	1,194
15	50	192	48,0	-	-
16	30	-	-	-	-

Крок 2 Знайдемо оцінки сезонної компоненти як частку від ділення

фактичних рівнів ряду на центровані ковзні середні (гр.6 табл. 1.12). Скористаємося цими оцінками для розрахунку значень сезонної компоненти S (табл.1.13). Для цього знайдемо середнє за кожний квартал оцінки сезонної компоненти S_i . Взаємопогашення сезонних дій в мультиплікативній моделі полягає в тому, що сума значень сезонної компоненти по всіх кварталах повинна дорівнювати числу періодів у циклі. У нашому випадку число періодів одного циклу (рік) дорівнює 4 (чотири квартали).

Таблиця 1.13 Розрахунок сезонної компоненти в мультиплікативній моделі

Показники	Рік	№ квартала, i			
		1	2	3	4
	1	-	-	1,108	0,800
	2	0,900	1,215	1,081	0,817
	3	0,905	1,217	1,075	0,807
	4	0,950	1,194	-	-
Всього за i -й квартал (за всі роки)		2,755	3,626	3,264	2,424
Середня оцінка сезонної компоненти для i -того квартала, $\bar{S}_i$		0,918	1,209	1,088	0,808
Скоригована сезонна компонента, S_i		0,913	1,202	1,082	0,803

Маємо: $0,918+1,209+1,088+0,808=4,023$. Корируючий коефіцієнт: $k=4:4,023=0,9943$. Знайдемо скориговане значення сезонної компоненти:

$$S_i = \bar{S}_i \cdot k, \quad i = \overline{1,4}. \quad (1.9)$$

Перевіряємо умову, що сума значень сезонної компоненти дорівнює 4: $0,913+1,202+1,082+0,803=4$.

Значення сезонної компоненти занесені в таблицю 1.13.

Крок 3 Поділимо кожний рівень даного ряду на відповідні значення сезонної компоненти. Тим самим одержимо величини $T \cdot E = Y : S$ (гр.4 табл. 1.14), які містять тільки тенденцію і випадкову компоненту.

Таблиця 1.14 Розрахунок вирівняних значень T і помилок E в мультиплікативній моделі

t	y_t	S_t	$T \cdot S =$ $= y_t : S_t$	T	$T \cdot S$	$E = y_t :$ $(T \cdot S)$	$E^* = y_t -$ $-(T \cdot S)$	E^{*2}
1	72	0,913	78,86	87,80	80,16	0,898	-8,16	66,66
2	100	1,202	83,19	85,03	102,20	0,978	-2,20	4,86
3	90	1,082	83,18	82,25	89,00	1,011	1,00	1,00
4	64	0,803	79,70	79,48	63,82	1,003	0,18	0,03
5	70	0,913	76,67	76,70	70,03	1,000	-0,03	0,00
6	92	1,202	76,54	73,93	88,86	1,035	3,14	9,85
7	80	1,082	73,94	71,15	76,99	1,039	3,01	9,08
8	58	0,803	72,23	68,38	54,91	1,056	3,09	9,57
9	62	0,913	67,91	65,60	59,90	1,035	2,10	4,43
10	80	1,202	66,56	62,83	75,52	1,059	4,48	20,08
11	68	1,082	62,85	60,05	64,98	1,047	3,02	9,14
12	48	0,803	59,78	57,28	45,99	1,044	2,01	4,03
13	52	0,913	56,96	54,50	49,76	1,045	2,24	5,02
14	60	1,202	49,92	51,73	62,18	0,965	-2,18	4,73
15	50	1,082	46,21	48,95	52,97	0,944	-2,97	8,79
16	30	0,803	37,36	46,18	37,08	0,809	-7,08	50,12

Крок 4 Знайдемо компоненту T . Для цього розрахуємо параметри лінійного тренда, використовуючи рівні $(T \cdot E)$. Рівняння тренду має такий вигляд: $T = 90,59 - 2,773 \cdot t$. Підставляючи в дане рівняння значення $t = 1, 2, \dots, 16$, знайдемо

рівні T для кожного моменту часу (гр.5 табл. 1.14).

Крок 5 Знайдемо рівні ряду $(T \cdot S)$ – (гр.6 табл.1.14).

Крок 6 Розрахунок помилки здійснюється за формулою $E=Y:(T \cdot S)$. Чисельні значення помилки наведені в гр. 7 табл. 1.14. Для того, щоб порівняти мультиплікативну модель та інші моделі часового ряду, можна використати суму квадратів абсолютних помилок. Абсолютні помилки в мультиплікативній моделі визначаються таким чином:

$$E = y_t - (T \cdot S) \quad (1.10)$$

Сума квадратів абсолютних помилок даної моделі складає 207,40. Загальна сума квадратів відхилень фактичних рівнів цього ряду від середнього значення дорівнює 5023. Отже, доля дисперсії рівнів ряду складе: $(1-207,40/5023)=0,959$, або 95,9%.

Приклад 1.6

Прогнозування за адитивною моделлю.

Припустимо, що за даними прикладу 1.4 необхідно дати прогноз споживання електроенергії мешканцями району протягом першого півріччя найближчого наступного року.

Прогнозним значенням F_t рівнів часового ряду в адитивній моделі згідно (1.5) є сума трендової і сезонної компонент.

Об'єм електроенергії протягом першого півріччя найближчого наступного, тобто п'ятого року, розраховується як сума об'ємів споживання електроенергії за I та II квартали п'ятого року, відповідно F_{17} і F_{18} .

Для знаходження трендової компоненти скористаємося рівнем тренду $T=5,715+0,186 \cdot t$. Одержимо:

$$T_{17}=5,715+0,186 \cdot 17=8,877, \quad T_{18}=5,715+0,186 \cdot 18=9,063.$$

Значення сезонної компоненти дорівнюють: $S_1=0,581$ (I квартал), $S_2=-1,977$ (II квартал). Отже, $F_{17}=T_{17}+S_1=8,877+0,581=9,458$, $F_{18}=T_{18}+S_2=9,063-1,977=7,086$.

Прогноз об'єму споживання електроенергії на перше півріччя складе: $9,458+7,086=16,544$ млн. кВт.г.

Приклад 1.7

Прогнозування за мультиплікативною моделлю.

Припустимо, що за даними прикладу 1.5 необхідно дати прогноз очікуваного прибутку компанії за перше півріччя найближчого наступного року.

Прогнозним значенням F_t рівня часового ряду в мультиплікативній моделі є добуток трендової і сезонної компонент. Для знаходження трендової компоненти за кожний квартал скористаємося рівнянням тренду:

$$T=90,59-2,773 \cdot t.$$

$$\text{Маємо: } T_{17}=90,59-2,773 \cdot 17=43,401, \quad T_{18}=90,59-2,773 \cdot 18=40,626.$$

Значення сезонної компоненти дорівнюють $S_1=0,913$ (Іквартал),
 $S_2=1,202$ (ІІ квартал).

$$\text{Таким чином, } F_{17}=T_{17} \cdot S_1=43,401 \cdot 0,913=39,626,$$

$$F_{18}=T_{18} \cdot S_2=40,626 \cdot 1,202=48,832.$$

Прогноз очікуваного прибутку компанії на перше півріччя складе:
 $39,626+48,832=88,458$ тис. дол.. США.

Контрольні запитання.

- 1 Перелічити основні елементи часового ряду.
- 2 Що таке автокореляція рівнів часового ряду і як її можна оцінити кількісно?
- 3 Дати означення автокореляційної функції часового ряду.
- 4 Перелічити основні види трендів.
- 5 Як інтерпретувати параметри лінійного і експоненційного трендів?
- 6 Записати загальний вигляд мультиплікативної і адитивної моделей часового ряду.
- 7 Перелічити етапи побудови мультиплікативної і адитивної моделей часового ряду.
- 8 З якою ціллю проводиться виявлення і вилучення сезонного ефекту?

2 ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКИ ЧАСОВИХ РЯДІВ

2.1 Специфіка статистичної оцінки взаємозв'язку двох часових рядів

Застосування традиційних методів кореляційно-регресійного аналізу для вивчення залежностей змінних, поданих у формі часових рядів, може привести до ряду проблем. Як відомо, кожний рівень часового ряду містить три основні компоненти: тенденцію, сезонні (циклічні) коливання і випадкову компоненту. Якщо виявлено, що часові ряди містять сезонні коливання, то необхідно вилучити їх, оскільки вони можуть привести або до завищених, або до занижених показників сили і тісноти зв'язку часових рядів.

Вилучення сезонної компоненти з рівнів часових рядів можна проводити у відповідності з методикою побудови адитивної і мультиплікативної моделей, розглянутою в розділі 1.4.

Якщо ряди, зв'язок між якими вивчається, містять тенденцію, то коефіцієнт кореляції за абсолютною величиною буде високим. Але це ще не означає, що ряди знаходяться в причинному зв'язку. Для того, щоб одержати коефіцієнт кореляції, що характеризує причинний зв'язок між двома рядами, необхідно позбавитися від ложної кореляції, причиною якої є присутність тенденції в кожному ряді.

Присутність тенденції в кожному ряді означає, що на залежну і незалежну змінні моделі впливає фактор часу, який безпосередньо в моделі не врахований. Вплив фактора часу виражається в кореляційній залежності між значеннями залишків ϵ_t за поточний і попередні моменти часу. Це явище називають автокореляцією залишків.

При побудові рівняння множинної регресії за часовими рядами даних, окрім двох вищеназваних проблем, виникає також проблема мультиколінеарності факторів.

2.2 Методи виключення тенденції

Сутність методів виключення тенденції полягає в тому, щоб зафіксувати дію фактора часу на формування рівнів ряду. Основні методи виключення тенденції

поділяють на дві групи:

методи, основані на перетворення рівнів даного ряду на нові змінні без тенденції. До них відносять метод послідовних різниць і метод відхилення від трендів,

методи, основані на вивченні взаємозв'язку даних рівнів часового ряду при елімінірованії дії фактора часу на залежну і незалежну змінну. В першу чергу це метод включення в модель регресії фактора часу.

2.2.1 Метод відхилень від тренду

Нехай є два часових ряди x_t і y_t , кожен із яких містить трендову компоненту T і випадкову величину ϵ . Аналітичне вирівнювання дозволяє знайти параметри відповідних рівнянь трендів і знайти розрахункові за трендом рівні $\hat{x}_t$ і $\hat{y}_t$. Ці розрахункові значення можна взяти за оцінку трендової компоненти T кожного ряду. Отже, вплив тенденції можна вилучити шляхом віднімання розрахункових значень рівнів ряду від фактичних. Цю процедуру виконують для кожного часового ряду моделі. Подальший аналіз взаємозв'язку рядів проводять із використанням не початкових рівнів, а відхилень від тренду $x_t - \hat{x}_t$ і $y_t - \hat{y}_t$ за умови, що останні не містять тенденції.

Приклад 2.1

Вимір взаємозв'язку витрат на кінцеве споживання і сукупного прибутку.

Повертаємось до прикладу 1.1. Нехай окрім витрат на кінцеве споживання – дані про сукупний прибуток (г.о.). Початкові дані за вісім років подані в таблиці 2.1. Необхідно знайти тісноту і силу зв'язку між часовими рядами сукупного прибутку x_t і витрат на кінцеве споживання y_t .

Таблиця 2.1 Витрати на кінцеве споживання і сукупний дохід (у. г. о.).

Рік	1	2	3	4	5	6	7	8
Витрати на кінцеве споживання, y_t	7	8	8	10	11	12	14	16
Сукупний прибуток, x_t	10	12	11	12	14	15	17	20

Кореляційно–регресійний аналіз, проведений за початковими даними рядів дає такі результати:

$$\hat{y}_t = -2,05 + 0,92 \cdot x_t, r_{xy}^2 = 0,965, r_{xy} = 0,982.$$

Як було показано в прикладі 1.1, коефіцієнт автокореляції першого порядку за рядом витрат на кінцеве споживання $r_1^y = 0,976$.

Припустимо, що коефіцієнт автокореляції першого порядку часового ряду сукупного прибутку $r_1^x = 0,880$. Можна показати, що одержані результати вказують на присутність хибної кореляції в зв'язку з наявністю в кожному з рядів лінійної або близької до лінійної тенденції. Застосуємо метод вилучення тенденції за відхиленнями від тренду. Результати розрахунків лінійних трендів такі: $\hat{y}_t = 5,05 + 1,26 \cdot t, R^2 = 0,962, \hat{x}_t = 8,04 + 1,3 \cdot t, R^2 = 0,896$.

За даними трендами знайдемо розрахункові значення $\hat{x}_t$ і $\hat{y}_t$ і відхилення від трендів $x_t - \hat{x}_t$ і $y_t - \hat{y}_t$ (табл. 2.2).

Таблиця 2.2 Трендова компонента і похибка для часових рядів витрат на кінцеве споживання і сукупного прибутку

Час, t	y_t	x_t	$\hat{y}_t$	$\hat{x}_t$	$y_t - \hat{y}_t$	$x_t - \hat{x}_t$
1	7	10	6,33	6,34	0,67	0,66
2	8	12	7,59	10,64	0,41	1,36
3	8	11	8,85	11,94	-0,85	-0,94
4	10	12	10,11	13,24	-0,11	-1,24
5	11	14	11,37	14,54	-0,37	-0,54
6	12	15	12,63	15,84	-0,63	-0,84
7	14	17	13,89	17,14	0,11	-0,14
8	16	20	15,15	18,44	0,85	1,56

Перевіримо одержані відхилення від трендів на автокореляцію. Коефіцієнти автокореляції першого порядку за відхиленнями від трендів складають:

$$r_I^{\Delta x_t} = 0,254, r_I^{\Delta y_t} = 0,129.$$

Отже, часові ряди відхилень від трендів можна використовувати для одержання кількісної характеристики тісноти зв'язку часових рядів витрат на кінцеве споживання і сукупного доходу. Коефіцієнт кореляції за відхиленнями від трендів $r_{\Delta x \Delta y} = 0,860$. Зв'язок між витратами на кінцеве споживання і сукупним прибутком прямий і тісний.

Результат побудови моделі регресії за відхиленнями від трендів такий: $\Delta \hat{y}_t = 0,017 + 0,487 \cdot \Delta x_t, R^2 = 0,740$.

Змістовна інтерпретація параметрів цієї моделі проблематична, але її можна використати для прогнозування.

2.2.2 Метод послідовних різниць

Іноді замість аналітичного вирівнювання ряду з метою вилучення тенденції можна застосувати більш простий метод – метод послідовних різниць.

Якщо часовий ряд містить лінійну тенденцію, то її можна усунути шляхом заміни початкових рівнів ряду першими різницями.

$$\text{Нехай} \quad y_t = \hat{y}_t + \varepsilon_t, \quad (2.1)$$

$$\hat{y}_t = a + b \cdot t. \quad (2.2)$$

$$\text{Тоді} \quad \Delta_t = y_t - y_{t-1} = b + (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}). \quad (2.3)$$

Коефіцієнт b – стала, що не залежить від часу. У разі сильної лінійної тенденції залишки ε_t достатньо малі і згідно з припущеннями МНК мають випадкову природу. Отже, перші різниці рівнів ряду Δ_t не залежать від часу. Їх можна використовувати для подальшого аналізу.

Приклад 2.2

Вивчення залежності витрат на кінцеве споживання від сукупного прибутку за першими різницями.

Знову повернемося до даних про витрати на кінцеве споживання і сукупного прибутку (табл. 2.1). Проаналізуємо залежність між цими рядами, використовуючи для цього перші різниці (табл. 2.3).

Таблиця 2.3 Перші різниці часових рядів витрат на кінцеве споживання і сукупного прибутку

t	y_t	x_t	$\Delta_t y$	$\Delta_t x$
1	7	10	-	-
2	8	12	1	2
3	8	11	0	-1
4	10	12	2	1
5	11	14	1	2
6	12	15	1	1
7	14	17	2	2
8	16	20	2	3
Коефіцієнт автокореляції першого порядку			-0,109	-0,156

Одержані ряди не містять автокореляції. Використаємо їх замість початкових даних для виміру залежності між витратами на кінцеве споживання і сукупним прибутком. Коефіцієнт кореляції за першими різницями складає: $r_{\Delta_t x \Delta_t y} = 0,717$. Це підтверджує висновок про наявність тісного прямого зв'язку між витратами на кінцеве споживання і сукупним доходом.

Рівняння регресії має такий вигляд: $\Delta_t \hat{y} = 0,68 + 0,43 \cdot \Delta_t x, R^2 = 0,515$.

Параметри даного рівняння легко інтерпретувати. Зміна приросту прибутку на одну г.о. призводить до зміни приросту споживання в середньому на 0,43 г.о.

2.2.3 Включення в модель регресії фактора часу

Модель вигляду $y_t = a + b_1 \cdot x_t + b_2 \cdot t + \varepsilon$. (2.3)

належить до групи моделей, які містять фактор часу.

Перевага даної моделі порівняно з методами відхилень від трендів і послідовних різниць полягає в тому, що вона дозволяє врахувати всю інформацію, яку містять початкові дані, оскільки значення x_t і y_t є рівнями

початкових часових рядів. Більш того, модель будується за всією сукупністю даних, на відміну від методу послідовних різниць, який призводить до втрати числа спостережень.

Параметри a і b моделі (2.3) знаходяться звичайним методом найменших квадратів (МНК).

Приклад 2.3

Побудова моделі регресії з включеним фактором часу.

Повернемося до даних таблиці 2.1. Побудуємо рівняння регресії, щое описує залежність витрат на кінцеве споживання y_t від сукупного прибутку x_t і фактора часу. Скористаємося МНК. Рівняння регресії буде таким:
$$y_t = 1,15 + 0,49 \cdot x_t + 0,63 \cdot t + \varepsilon_t.$$

Інтерпретація параметрів цього рівняння така. Параметр $b_1 = 0,49$ означає, що при збільшенні сукупного доходу на 1 г.о. витрати на кінцеве споживання зростуть в середньому на 0,49 г.о. в умовах існування незмінної тенденції. Параметр $b_2 = 0,63$ означає, що дія всіх факторів, окрім сукупного прибутку, на витрати на кінцеве споживання призведе до його середньорічного абсолютного приросту на 0,63 г.о.

Контрольні запитання

- 1 У чому полягає специфіка побудови моделей регресії за часовими рядами даних?
- 2 Що таке хибна кореляція і як від неї позбавитися?
- 3 Перелічити основні методи виключення тенденції. Порівняти їх переваги і недоліки?
- 4 Описати сутність методу відхилень від тренду.
- 5 У чому полягає сутність методу послідовних різниць? Яка інтерпретація параметрів рівняння регресії за першими різницями рівнів рядів?
- 6 Яка інтерпретація параметра фактора часу в моделях регресії з фактором часу?

3 ДИНАМІЧНІ ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ

3.1 Загальна характеристика

Динамічні економетричні моделі – це моделі, які в даний момент часу враховують значення змінних як поточних, так і попередніх моментів часу. Наприклад, $y_t = f(x_t, x_{t-1})$; $y_t = f(x_t, y_{t-1})$ - динамічні економетричні моделі, а $y_t = f(x_t)$ не є такою.

Розрізняють два типи динамічних економетричних моделей:

1 Моделі, в яких лагові значення змінних (змінні, що відносяться до попередніх моментів часу) безпосередньо включені до модель. Це моделі авторегресії і моделі з розподіленням лагом.

Моделі авторегресії – це динамічні економетричні моделі, в яких у якості факторних змінних містяться лагові значення результативної змінної. Наприклад, $y_t = a + b_0 x_t + b_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Моделі з розподіленням лагом – це динамічні економетричні моделі, які містять не тільки поточні, а й лагові значення факторних змінних. Наприклад, $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_l x_{t-l} + \varepsilon_t$.

2 Моделі, в яких включені змінні, що характеризують очікуваний рівень ознаки результату або одного з факторів у момент часу t . Цей рівень невідомий і визначається з урахуванням інформації в попередній момент часу $t-1$.

Очікуване значення показників визначають різними способами. В залежності від способу розрізняють моделі:

- часткового коригування,
- адаптивних очікувань,
- раціональних очікувань.

3.2 Моделі авторегресії. Інтерпретація параметрів

Моделі авторегресії – це динамічні економетричні моделі, які в якості факторних змінних містять лагові значення результативної змінної. Наприклад, $y_t = a + b_0 x_t + b_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$.

Коефіцієнт b_0 даної моделі характеризує короткострокову зміну у під

впливом зміни x на одиницю свого виміру.

Коефіцієнт b_1 характеризує зміну y в момент часу t під впливом своєї зміни в попередній момент часу $t - 1$.

Добуток коефіцієнтів $b_0 \cdot b_1$ – називають проміжковим мультиплікатором. Він характеризує загальну абсолютну зміну результату y в момент часу $t + 1$.

Показник $b = b_0 + b_0 \cdot b_1 + b_0 \cdot b_1^2 + b_0 \cdot b_1^3 + \dots$ називають довгостроковим мультиплікатором. Він характеризує загальну зміну y в довгостроковому періоді.

Практично для всіх моделей авторегресії вводять умову стабільності, яка полягає в тому, що $|b_1| < 1$. Тоді за наявності нескінченного лага:

$$b = b_0(1 + b_1 + b_1^2 + b_1^3 + \dots) = \frac{b_0}{1 - b_1}.$$

Застосування МНК до моделей авторегресії неприпустиме, оскільки пояснювальна змінна y_{t-1} корелює зі збуренням ε_t . Це призводить до зміщення оцінки параметра при змінній y_{t-1} .

Приклад 3.1

Інтерпретація параметрів моделі авторегресії.

Припустимо, що за даними про динаміку показників споживання і доходу в регіоні була одержана модель авторегресії, яка описує залежність середнього об'єму споживання на душу населення за рік (C , млн. грн.) і об'єму споживання попереднього року:

$$\hat{C}_t = 3 + 0.85 \cdot Y_t + 0.10 \cdot C_{t-1}.$$

Короткостроковий мультиплікатор дорівнює 0.85. У цій моделі він являє собою граничну здібність споживача в короткостроковому періоді. Отже, збільшення середнього сукупного доходу на душу населення на 1 млн. грн. призведе до зростання об'єму споживання у той же рік у середньому на 850 тис. грн. Дострокову граничну здібність споживання визначають як:

$$b = \frac{0.85}{1 - 0.1} = 0.944.$$

У довгостроковій перспективі зростання середнього доходу на душу населення на 1 млн. грн. призведе до зростання об'єму споживання в середньому на 944 тис. грн. Проміжкові показники граничної здібності споживання можна знайти, розрахувавши необхідні частинні суми за відповідні періоди часу. Наприклад, для моменту часу $(t+1)$ одержимо: $(0.85+0.85 \cdot 0.1) = 0.935$.

Це означає, що збільшення середнього сукупного доходу на душу населення в поточному періоді на 1 млн. грн. призведе до збільшення об'єму споживання в середньому на 935 тис. грн. в найближчому подальшому періоді.

3.3 Моделі з розподіленням лагом. Інтерпретація параметрів

Моделі з розподіленням лагом – це динамічні економетричні моделі, які містять не тільки поточні, але й лагові значення факторних змінних.

Наприклад, $y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \dots + b_l \cdot x_{t-l} + \varepsilon_t$.

Дана модель дозволяє визначити вплив незалежної змінної x на результат y . Якщо в момент часу t змінюється значення незалежної змінної x , тоді ця зміна буде впливати на значення залежної змінної протягом l подальших моментів часу. Коефіцієнт b_0 називають короткостроковим мультиплікатором, він характеризує середню абсолютну зміну y_t при зміні x_t на одиницю свого виміру в деякий фіксований момент часу t без урахування впливу лагових значень фактора x .

Коефіцієнт b_l характеризує середню абсолютну зміну y_t внаслідок зміни фактора x на одиницю свого виміру в момент часу $t - l$.

Суму коефіцієнтів $b_0 + b_l$ називають проміжковим мультиплікатором. Вона характеризує сукупний вплив фактора x на результат y в момент $t + l$, тобто зміна x на одиницю в момент t тягне зміну y на b_0 одиниць в момент t і зміну y на b_l в момент $t + l$.

Сума коефіцієнтів $b_0 + b_1 + b_2$ – також проміжковий мультиплікатор, який характеризує сукупний вплив фактора x на результат y в момент $t + 2$ і т.п.

Сума $b_0 + b_1 + b_2 + \dots + b_l$ – це довгостроковий мультиплікатор, який характеризує загальну зміну результату y в момент $t + l$ під впливом зміни x на одиницю свого виміру в момент t .

Впровадимо нові показники.

1 Вагові коефіцієнти: $\beta_j = \frac{b_j}{b}, j = \overline{0, l}$. Якщо всі коефіцієнти b_j одного знака, тоді $\sum_{j=0}^l \beta_j = 1$.

2 Середній лаг – $\bar{l} = \sum_{j=0}^l j \cdot \beta_j$. Це середній період, протягом якого буде проходити зміна результату під впливом зміни фактора x в момент t . Якщо значення середнього лага невелике, то це ознака швидкого реагування y на зміну x . Якщо значення середнього лага велике – це ознака повільного впливу фактора на результат.

3 Медіанний лаг l_{MI} – це величина лага, для якого $\sum_{j=0}^{l_{MI}} \beta_j = 0.5$. Тобто це період часу, протягом якого j поточного моменту часу t буде реалізована половина загального впливу фактора на результат.

Застосування МНК до моделей з розподіленням лагом в більшості випадків неможливе, оскільки:

- поточні і лагові значення незалежної змінної корелюють між собою,
- при великій довжині лага l зменшується число спостережень, за якими будується модель і збільшується число факторних ознак $(x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots)$. Це призводить до втрати числа степенів свободи моделі,
- у таких моделях часто виникає проблема автокореляції залишків.

Наслідком цього є нестабільність оцінок параметрів моделі, тобто при зміні специфікації моделі коефіцієнти істотно змінюються, знижується їх точність і ефективність. Чистий вплив фактора на результат в таких умовах виявити неможливо.

На практиці оцінку параметрів таких економетричних моделей проводять за допомогою спеціальних методів (метод Алмон, метод Койка).

Якщо для моделі з розподіленням лагом

$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \dots + b_l \cdot x_{t-l} + \varepsilon_t$ побудувати графік залежності коефіцієнтів при факторних змінних b_j в залежності від величини лага j , тоді можна одержати графічне зображення структури лага. Структура лага може бути різною (рис. 3.1).

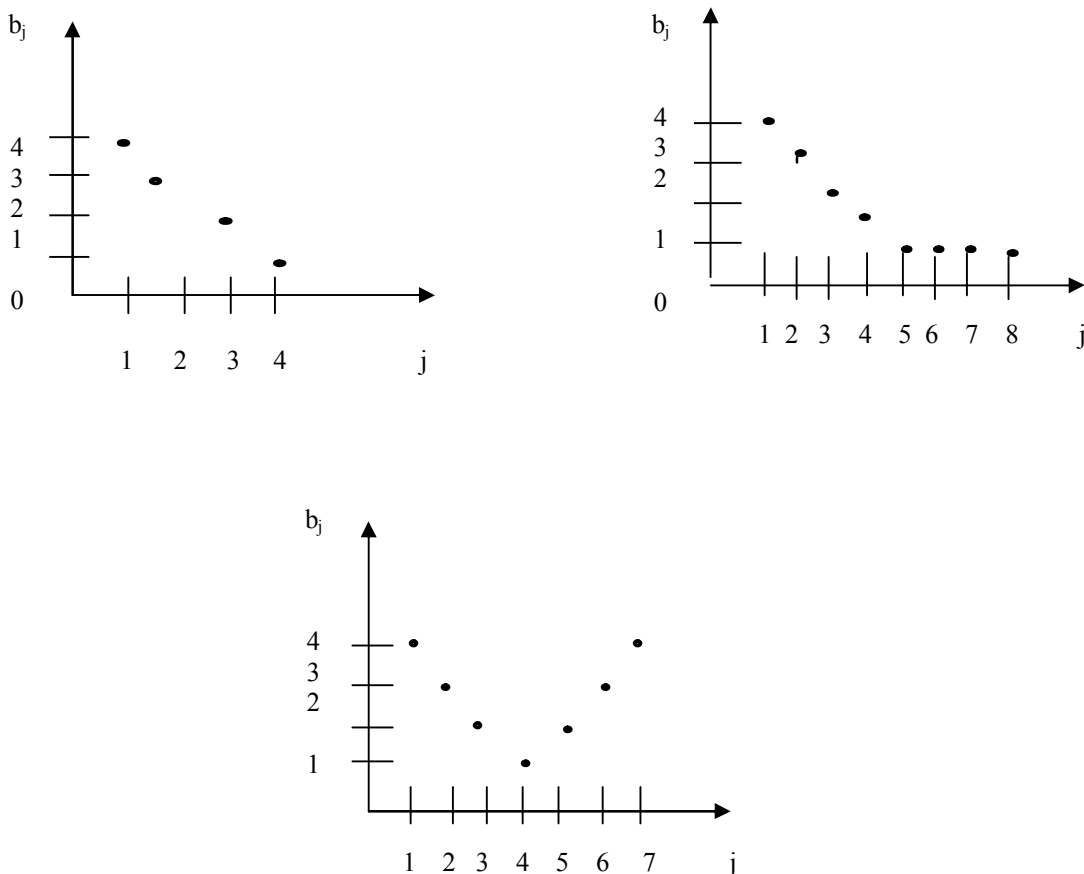


Рисунок 3.1. Основні форми структури лага:

1. лінійна, 2. геометрична, 3. поліноміальна.

Основні труднощі у виявленню структури лага полягають в тому, як одержати значення параметрів b_j . Звичайний МНК рідко буває корисним. У зв'язку з цим в більшості випадків припущення про структуру лага ґрунтуються на загальних положеннях економічної теорії, на дослідженнях взаємозв'язків показників або на результатах проведених раніше емпіричних досліджень, або іншої апріорної інформації.

Лаги Алмон (метод Алмон) використовують для опису моделі з розподіленням лагом, яка має поліноміальну структуру лага і скінчену величину лага. Прикладом лагів, які утворюють поліном другого степеня є рисунок 3.1.3 . Частинним випадком поліноміальної структури лага є лінійна модель (рис. 3.1.1).

Метод Койка застосовується у випадку, коли величина лага l нескінченно велика, а також у випадку геометричної структури лага (рис. 3.1.2).

Приклад 3.2

Інтерпретація параметрів моделі з розподіленням лагом.

За результатами вивчення залежності об'ємів продажу компанії в середньому за місяць від витрат на рекламу була одержана така модель з розподіленням лагом (млн. грн.) :

$$\hat{y}_t = -0.67 + 4.5 \cdot x_t + 3.0 \cdot x_{t-1} + 1.5 \cdot x_{t-2} + 0.5 \cdot x_{t-3}.$$

У цій моделі короткостроковий мультиплікатор дорівнює 4.5. Це означає, що збільшення витрат на рекламу на 1 млн. грн. призведе в середньому до збільшення об'єму продажу компанії на 4.5 млн. грн. у тому ж періоді. Під впливом збільшення витрат на рекламу об'єм продажу компанії зростає в момент часу t на 1 млн. грн., $(t+1)$ – на $4.5+3.0=7.5$ млн. грн., $(t+2)$ – на $7.5+1.5=9.0$ млн. грн. Отже, довгостроковий мультиплікатор для даної моделі складає: $b = 4.5 + 3.0 + 1.5 + 0.5 = 9.5$.

У довгостроковій перспективі (наприклад, через три місяці) збільшення витрат на рекламу на 1 млн. грн. в поточний момент часу призведе до загального зростання об'єму продажу на 9.5 млн. грн.

Відносні коефіцієнти регресії дорівнюють:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= 4.5/9.5 = 0.474, & \beta_2 &= 3.0/9.5 = 0.316, \\ \beta_3 &= 1.5/9.5 = 0.158, & \beta_4 &= 0.5/9.5 = 0.053.\end{aligned}$$

Отже, 47,4% загального збільшення об'єму продажу, яке викликає зростання витрат на рекламу, відбувається в поточний момент часу, 31,6% - в момент $(t + 1)$, 15,8% - в момент $(t + 2)$ і лише 5,3% цього збільшення відбувається в момент часу $(t + 3)$.

Середній лаг визначається таким чином:

$$T = 0 \cdot 0.474 + 1 \cdot 0.316 + 2 \cdot 0.158 + 3 \cdot 0.053 = 0.791 \text{ міс.}$$

Невелика величина лага (менше місяця) ще раз підтверджує, що більша частина ефекту зростання витрат на рекламу відбувається одразу ж. Медіанний лаг у даній моделі також складає трохи більше ніж один місяць.

3.4 Оцінювання параметрів моделей з розподіленням лагом. Метод Алмон

Лаги Алмон (метод Алмон) використовують для опису моделі з розподіленням лагом:

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \dots + b_l \cdot x_{t-l} + \varepsilon_t, \quad (3.1)$$

яка має поліноміальну структуру лага і скінчену величину лага l .

Опишемо метод Алмона.

1 Залежність коефіцієнтів b_j формалізують від величини лага j . Модель залежності являє собою поліном:

– або 1-го степеня: $b_j = C_0 + C_1 \cdot j$,

– або 2-го степеня: $b_j = C_0 + C_1 \cdot j + C_2 \cdot j^2$,

– або 3-го степеня: $b_j = C_0 + C_1 \cdot j + C_2 \cdot j^2 + C_3 \cdot j^3$,

– або k -го степеня: $b_j = C_0 + C_1 \cdot j + C_2 \cdot j^2 + \dots + C_k \cdot j^k$.

2 Далі кожен коефіцієнт моделі (3.1) - b_j ($j = \overline{0, l}$) виражають таким чином:

Підставимо знайдені співвідношення для b_j в модель (3.1) і одержимо:

3 Перегрупуємо доданки:

Запровадимо нові змінні:

Модель набуде такого вигляду:

4 Знайдемо параметри моделі (3.2) за допомогою МНК. Потім від параметрів $C_i (i = \overline{0, k})$ перейдемо до параметрів $b_j (j = \overline{0, l})$, використовуючи

співвідношення, одержані на першому кроці.

Застосування методу Алмон спряжене з рядом проблем.

Величина максимального лага l повинна бути відомою. Кращий спосіб визначення величини l – використання показників тісноти зв'язків між результатом y і лаговим значенням фактора x . Якщо показник тісноти значущий, то його слід включити в модель з розподіленим лагом. Порядок максимального значущого показника тісноти зв'язку приймають в якості l .

Необхідно визначити степінь полінома k (як правило, обмежуються випадком $k=2,3$). Обрана степінь повинна бути на одиницю менше за число екстремумів у структурі лага.

Змінні $z_i (i = \overline{0, k})$ будуть корелювати між собою у випадках, коли спостерігається тісний зв'язок між самими факторними ознаками. У зв'язку з цим, проблема мультиколінеарності залишається актуальною і для моделі (3.2), але мультиколінеарність нових змінних z_i в меншій мірі відображається на оцінках параметрів $b_j (j = \overline{0, l})$.

У той же час, метод Алмон має переваги порівнянно з іншими методами. Він достатньо універсальний і може бути застосований для моделювання процесів, які характеризуються будь-якими структурами лагів.

При відносно невеликому числі змінних моделі (3.2) ($k=2,3$) за допомогою методу Алмон можна побудувати моделі з розподіленим лагом (3.1) будь-якої довжини.

3.5 Оцінювання параметрів моделей з геометричною структурою лага.

Метод Койка.

Метод Койка зазвичай застосовують до моделей з розподіленим лагом $y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + \dots + b_l x_{t-l} + \varepsilon_t$, коли величина максимального лага l нескінченна. При цьому використовують припущення про геометричну структуру лага, тобто вплив лагових значень фактора на результат зменшується

зі збільшенням величини лага за геометричною прогресією. Якщо є одна пояснювальна змінна, тоді модель має такий вигляд:

$$y_t = a + b_0 x_t + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + b_0 \lambda^3 x_{t-3} + \dots + \varepsilon_t, \quad (3.3)$$

де $b_j = b_0 \lambda^j$ ($j = 0, 1, 2, \dots$), $\lambda \in [0, 1]$.

Дана залежність має всього три параметри a, b_0, λ . Для їх оцінювання неможливо застосування МНК оскільки:

- виникає проблема мультиколінеарності.
- з одержаних оцінок неможливо було б знайти значення b_0 і λ .

Для оцінки параметрів a, b_0, λ можна застосувати перетворення Койка.

Сутність методу Койка (перетворення Койка) полягає в наступному.

Якщо вираз (3.3) має місце для періоду t , то він повинен мати місце і для періоду $t-1$:

$$y_t = a + b_0 x_t + b_0 \lambda x_{t-1} + b_0 \lambda^2 x_{t-2} + b_0 \lambda^3 x_{t-3} + \dots + \varepsilon_t.$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на λ і віднімемо почленно з рівняння (3.2). Одержимо:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a(1 - \lambda) + b_0 x_t + \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}$$

$$\text{або} \quad y_t = a(1 - \lambda) + b_0 x_t + \lambda y_{t-1} + \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}. \quad (3.4)$$

Одержана модель відноситься до моделей авторегресії. Ця форма дозволяє аналізувати короткострокові і довгострокові динамічні властивості моделі.

У короткостроковому аспекті (в поточному періоді) значення y_{t-1} можна припускати фіксованим. Вплив x на y характеризує коефіцієнт b_0 .

У довгостроковому періоді (без урахування випадкової складової), якщо x_t наближається до деякого рівноважного значення $\bar{x}$, то y_t і y_{t-1} будуть також наближатися до рівноважного рівня $\bar{y}$, який визначається таким чином:

$$\bar{y} = a(1 - \lambda) + b_0 \bar{x} + \lambda \bar{y}, \text{ звідки випливає, що } \bar{y} = a + \frac{b_0}{1 - \lambda} \bar{x}.$$

Отже, довгостроковий вплив x на y регламентується коефіцієнтом $\frac{b_0}{1-\lambda}$.

Якщо $\lambda \in [0,1]$, то цей коефіцієнт перебільшує b_0 , тобто довгостроковий вплив сильніший за короткостроковий.

Модель Койка (3.4) приваблива з практичної точки зору, оскільки вона дозволяє перейти від моделі з нескінченим розподіленням лагом до моделі авторегресії, яка містить лише дві незалежні змінні: x_t і y_{t-1} . Але застосування МНК для оцінки параметрів моделі (3.4) призведе до зміщених і необґрунтованих оцінок, оскільки пояснювальна змінна y_{t-1} корелює з випадковою складовою ($-\lambda u_{t-1}$).

3.6 Оцінювання параметрів моделей авторегресії.

Метод інструментальних змінних

Під час побудови моделей авторегресії

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.5)$$

виникає проблема: порушується передумова нормальної лінійної моделі регресії про відсутність зв'язку між факторною ознакою і випадковою складовою.

Для оцінювання параметрів рівняння регресії може бути застосовано метод інструментальних змінних.

Сутність методу інструментальних змінних полягає в наступному.

Змінну y_{t-1} з правої частини рівняння (3.5), для якої порушується передумова МНК, замінюють на нову змінну, яка задовольняє таким умовам:

1 Вона повинна тісно корелювати з y_{t-1} .

2 Вона не повинна корелювати з випадковою складовою ε_t .

Далі оцінюють регресію з інструментальною змінною за допомогою МНК.

Розглянемо один з методів одержання інструментальної змінної.

Оскільки y_t залежить від x_t , то природньо припустити, що має місце залежність y_{t-1} від x_{t-1} , тобто

$$y_{t-1} = d_0 + d_1 x_{t-1} + v_t. \quad (3.6)$$

Отже, змінну y_{t-1} можна виразити таким чином:

$$y_{t-1} = \hat{y}_{t-1} + v_t, \quad (3.7)$$

де
$$\hat{y}_{t-1} = d_0 + d_1 x_{t-1}. \quad (3.8)$$

Оцінка (3.8) може бути знайдена за допомогою МНК.

Нова змінна $\hat{y}_{t-1}$ тісно корелює з y_{t-1} і не корелює з випадковою складовою ε_t , тобто може виступати як інструментальна змінна для фактора y_{t-1} .

Таким чином, оцінка параметрів рівняння (3.5) може бути знайдена із співвідношення

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 \hat{y}_{t-1} + v_t, v_t = b_1 v_t + \varepsilon_t, \quad (3.9)$$

в якому розрахункові значення $\hat{y}_{t-1}$ визначаються, виходячи з рівняння (3.8).

Слід зауважити, що практична реалізація методу інструментальних змінних натикається на ускладнення: функціональний зв'язок між $\hat{y}_{t-1}$ і x_{t-1} призводить до появи високої кореляції між $\hat{y}_{t-1}$ і x_t . У деяких випадках цю проблему можна вирішити, включивши в модель (3.9) фактор часу t .

3.7 Модель адаптивних очікувань

Модель адаптивних очікувань враховує бажане значення факторної ознаки x_{t+1}^* . Наприклад, очікування в майбутньому курсу долара x_{t+1}^* (в період $t+1$) впливає на наші інвестиції в поточному періоді y_t .

У загальному вигляді модель адаптивних очікувань можна записати таким чином:

$$y_t = a + b_0 x_{t+1}^* + \varepsilon_t. \quad (3.10)$$

Очікуване значення змінних визначається за значенням реальних (фактичних) змінних в попередній період часу t .

Механізм формування очікувань в моделі адаптивних очікувань такий:

$$x_{t+1}^* - x_t^* = \lambda(x_t - x_t^*), 0 \leq \lambda \leq 1$$

або
$$x_{t+1}^* = \lambda x_t + (1 - \lambda)x_t^*. \quad (3.11)$$

Тобто, очікуване значення факторної змінної x_t^* в період $t+1$ є зважене середнє арифметичне її фактичного й очікуваного значень у попередній період. Чим більша величина λ , тим швидше очікуване значення адаптується до попереднім реальним значенням. Чим менше λ , тим очікуване значення в майбутньому x_{t+1}^* ближче до очікуваного значення попереднього періоду x_t^* .

Для оцінки параметрів даної моделі (3.10) МНК застосувати неможливо, оскільки модель включає очікуване значення факторної змінної, яке неможливо одержати емпіричним шляхом. У зв'язку з цим для оцінки параметрів дану модель перетворимо таким чином.

Підставимо в модель (3.10) замість x_{t+1}^* співвідношення (3.11):

$$y_t = a + b_0(\lambda x_t + (1-\lambda)x_t^*) + \varepsilon_t = a + \lambda b_0 x_t + (1-\lambda)b_0 x_t^* + \varepsilon_t. \quad (3.12)$$

Якщо модель (3.10) має місце для періоду t , то вона буде мати місце і для періоду $t-1$. Отже, в період $t-1$

$$y_{t-1} = a + b_0 x_t^* + \varepsilon_{t-1}.$$

Помножимо цей вираз на $1-\lambda$:

$$(1-\lambda)y_{t-1} = (1-\lambda)a + (1-\lambda)b_0 x_t^* + (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}.$$

Віднімемо почленно одержаний вираз із (3.12):

$$y_t - (1-\lambda)y_{t-1} = a - (1-\lambda)a + \lambda b_0 x_t + \varepsilon_t - (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}$$

$$\text{або} \quad y_t = \lambda a + \lambda b_0 x_t + (1-\lambda)y_{t-1} + \varepsilon_t^*, \quad (3.13)$$

$$\text{де} \quad \varepsilon_t^* = \varepsilon_t - (1-\lambda)\varepsilon_{t-1}.$$

Одержана модель авторегресії. Вона включає тільки фактичні значення змінних. Знайшовши її параметри стандартними статистичними методами, легко перейти до параметрів моделі (3.10).

Модель (3.10), яка характеризує залежність результативної ознаки від очікуваних значень факторної ознаки, називається *довгостроковою функцією адаптивних очікувань*.

Модель (3.13), яка описує залежність результату від фактичних значень

фактора, називається *короткостроковою функцією адаптивних очікувань*.

3.8 Модель часткового коригування

Модель часткового коригування враховує бажане (очікуване) значення результативної ознаки y_t^* . Наприклад, фактичний об'єм прибутку x_t впливає на величину бажаного об'єму дивідендів y_t^* . Взагалі, модель часткового коригування можна записати таким чином: $y_t^* = a + b_0 x_t + \varepsilon_t$. (3.14)

Очікування значення змінних визначається за значенням реальних (фактичних) змінних в попередній період $y_t^* - y_{t-1}$:

$$y_t - y_{t-1} = \lambda(y_t^* - y_{t-1}) + v_t, 0 \leq \lambda \leq 1$$

або

$$y_t = \lambda y_t^* + (1 - \lambda)y_{t-1} + v_t. \quad (3.15)$$

Звідси випливає, що y_t є середнє арифметичне зваженого бажаного рівня y_t^* і фактичного значення цієї змінної y за попереднім періодом y_{t-1} . Чим більше λ , тим швидше відбувається процес коригування. Якщо $\lambda = 1$, то $y_t = y_t^*$ і повне коригування відбувається на один період. Якщо $\lambda = 0$, то коригування y_t не відбувається зовсім.

Підставивши (3.13) в (3.14), будемо мати:

$$y_t = a\lambda + b_0\lambda x_t + (1 - \lambda)y_{t-1} + v_t + \lambda\varepsilon_t = a\lambda + b_0\lambda x_t + (1 - \lambda)y_{t-1} + u_t, \quad u_t = v_t + \lambda\varepsilon_t.$$

Параметри цього рівняння a, λ, b_0 можуть бути оцінені за допомогою МНК. Ця модель, як і модель Койка, містить стохастичну пояснювальну змінну y_{t-1} . Але тепер ця змінна не корелює з поточним значенням сукупного випадкового члена u_t рівняння. За таких умов МНК дозволяє одержати асимптотично незміщені й ефективні оцінки (для малих виборок це не так).

Співвідношення $y_t = a\lambda + b_0\lambda x_t + (1 - \lambda)y_{t-1} + u_t$ включає тільки фактичні значення змінних, його називають *короткостроковою функцією моделі часткового коригування*.

Рівняння (3.14) називається довгостроковою функцією моделі часткового коригування.

Контрольні запитання

- 1 Наведіть приклади економетричних задач, економетричне моделювання яких потребує застосування моделей з розподіленим лагом і моделей авторегресії.
- 2 Інтерпретуйте параметри моделі з розподіленим лагом.
- 3 Інтерпретуйте параметри авторегресії. У чому полягає специфіка довгострокового лага цієї моделі?
- 4 У чому полягає сутність методу Алмон? У разі якої структури лага він застосовується?
- 5 Опишіть методику застосування підходу Койка для побудови моделі з розподіленим лагом. У разі якої структури лага він застосовується?
- 6 У чому полягає сутність моделі адаптивних очікувань? Яка методика оцінки її параметрів?
- 7 У чому полягає сутність моделі неповного коригування? Наведіть методику оцінки її параметрів.
- 8 Опишіть методику застосування метода інструментальних змінних для оцінки параметрів авторегресії.

Контрольні завдання

Задача 1

Адміністрація банку вивчає динаміку депозитів фізичних осіб протягом кількох років (млн. грн.). Вихідні дані подані таблицею:

	Сума							
Час, роки	1	2	3	4	5	6	7	28
Депозити фізичних осіб, х	2	6	7	3	10	12	13	53

Завдання

- 1 Побудувати рівняння лінійного тренду і дати інтерпретацію його параметрів.

2 Знайти коефіцієнт детермінації лінійного тренду.

3 Адміністрація банку припускає, що середньорічний абсолютний приріст депозитів фізичних осіб складає не менше ніж 2,5 млн. грн. Чи підтверджується це припущення одержаними результатами?

Задача 2

Є дані про врожайність зернових у господарстві області:

Рік	Урожайність зернових, ц/га
1	10,2
2	10,7
3	11,7
4	13,1
5	14,9
6	17,2
7	20,0
8	23,2

Завдання

1 Обґрунтуйте вибір типу рівняння тренду.

2 Розрахуйте параметри рівняння тренду.

3 Дайте прогноз урожайності зернових на наступний рік.

Задача 3

Є дані про рівень безробіття y_t (%) за 8 місяців:

Місяць	1	2	3	4	5	6	7	8
y_t	8,8	8,6	8,4	8,1	7,9	7,6	7,4	7,0

Завдання

1 Знайдіть коефіцієнт автокореляції першого і другого порядку цього ряду.

2 Обґрунтуйте вибір тренду і знайдіть його параметри.

3 Інтерпретуйте одержані результати.

Задача 4

Є умовні дані про дозвіл на будівництво нового житла за 1990–1994 рр., % до рівня 1987 р. (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Місяць	1990 р.	1991 р.	1992 р.	1993 р.	1994 р.
Січень	72,9	61,4	71,2	78,3	86,4
Лютий	113,4	51,0	69,9	76,4	87,5
Березень	86,2	55,3	74,3	74,5	80,2
Квітень	80,8	59,1	70,2	68,5	84,3
Травень	73,8	59,5	68,4	71,6	86,8
Червень	69,2	64,3	68,5	71,6	86,9
Липень	71,9	62,5	68,6	73,3	85,2
Серпень	69,9	63,1	70,6	76,2	85,0
Вересень	69,4	61,2	69,7	79,8	87,5
Жовтень	63,3	63,2	72,3	81,2	90,0
Листопад	60,0	64,3	73,5	83,5	88,4
Грудень	61,0	63,9	72,5	88,0	85,7

Завдання

1 Розрахуйте сезонну й трендову компоненти.

2 Побудуйте адитивну модель цього тренду.

3 Побудуйте автокореляційну функцію часового ряду кількості дозволів на будівництво нового житла. Охарактеризуйте структуру цього ряду.

Задача 5

У таблиці 3.2 наведені дані про об'єми продажу в переробній промисловості

й торгівлі в порівняльних цінах 1987 р., млн. грн.

Таблиця 3.2

Місяць	1990 р.	1991 р.	1992 р.	1993 р.	1994 р.
Січень	472,5	477,9	510,9	541,0	578,2
Лютий	482,1	467,5	484,7	512,3	539,4
Березень	489,5	470,9	486,6	512,6	545,3
Квітень	493,6	469,1	488,4	511,5	551,9
Травень	488,0	478,1	489,5	511,9	549,7
Червень	490,6	480,6	486,6	513,9	550,1
Липень	492,5	479,3	491,8	520,0	554,0
Серпень	488,1	484,2	495,2	515,9	550,0
Вересень	493,1	484,9	491,8	524,2	565,6
Жовтень	484,5	485,6	496,1	527,1	564,7
Листопад	483,0	486,1	498,8	529,8	566,9
Грудень	476,9	484,7	501,5	534,9	572,7

Завдання

- 1 Розрахуйте трендову й сезонну компоненти.
- 2 Побудуйте мультиплікативну модель цього ряду.
- 3 Побудуйте автокореляційну функцію часового ряду об'єму продажу в переробній промисловості й торгівлі. Охарактеризуйте структуру цього ряду.

Задача 6

На основі помісячних даних про споживання електроенергії в районі (млн. кВт. Год.) за останні три роки була побудована адаптивна модель часового ряду. Скориговані значення сезонної компоненти за відповідні місяці наводяться нижче:

січень	+25	травень	-32	вересень	+2
лютий	+10	червень	-38	жовтень	+15
березень	+6	липень	-25	листопад	+27
квітень	-4	серпень	-18	грудень	?

Рівняння тренду має такий вигляд: $T = 300 + 1,5t$.

Завдання

- 1 Знайдіть значення сезонної компоненти за грудень.
- 2 Дайте точковий прогноз очікуваного споживання електроенергії впродовж першого кварталу наступного року.

Задача 7

На основі поквартальних даних про рівень безробіття в літньому курортному місті (у відсотках від економічно активного населення) за останні п'ять років була побудована мультиплікативна модель часового ряду. Скориговані значення сезонної компоненти за кожен квартал наводяться нижче:

I квартал ... 1,4 III квартал ... 0,7
 II квартал 0,8 IV квартал ... -

Рівняння тренду має наступний вигляд: $T = 9,2 - 0,3t$.

Завдання

- 1 Знайдіть значення сезонної компоненти за IV квартал.
- 2 На основі побудованої моделі дайте точковий прогноз рівня безробіття за I і II квартали наступного року.

Задача 8

У таблиці 3.3 наведені дані про рівень дивідендів за секціями (у відсотках) і середньорічна вартість основних фондів (X, млн. грн.) у порівняльних цінах за останні 9 років.

Таблиця 3.3

Показник	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Середньорічна вартість основних фондів	72	75	77	77	79	80	78	79	80
Дивіденди за акціями	4,2	3,0	2,4	2,0	1,9	1,7	1,8	1,6	1,7

Завдання

1 Знайдіть параметри рівняння регресії за першими різницями і дайте їх інтерпретацію. У якості залежної змінної використайте показники дивідендів.

2 У чому полягає причина побудови рівняння регресії за першими різницями, а не за вихідними даними?

Задача 9

За даними про динаміку заощаджень населення і доходу була побудована модель авторегресії, яка описує залежність заощаджень в середньому на душу населення за рік S_t (млн. грн.) від середнього сукупного річного доходу на душу населення Y_t (млн. грн.) і заощаджень минулого року S_{t-1} :

$$S_t = -53 + 0,12Y_t + 0,03S_{t-1}.$$
Завдання

Знайти короткострокову і довгострокову тенденції до накопичення.

Задача 10

Є дані про динаміку обігу роздрібної торгівлі і споживчих цін регіону за 1998 – 1999 рр. (таблиця 3.4).

Таблиця 3.4

Місяць	Обіг роздрібної торгівлі, у відсотках до попереднього місяця	Індекс споживчих цін, у відсотках до попереднього місяця
Січень	70,8	101,7
Лютий	98,7	101,1
Березень	97,9	100,4
Квітень	99,6	100,1
Травень	96,1	100,0
Червень	103,4	100,1
Липень	95,5	100,0
Серпень	102,9	105,8
Вересень	77,6	145,0
Жовтень	102,3	99,8
Листопад	102,9	102,7
Грудень	123,1	109,4
Січень	74,3	110,0
Лютий	92,9	106,4
Березень	106,0	103,2
Квітень	99,8	103,2
Травень	105,2	102,9
Червень	99,7	100,8
Липень	99,7	101,6
Серпень	107,9	101,5
Вересень	98,8	101,4
Жовтень	104,6	101,7
Листопад	106,4	101,7
Грудень	122,7	101,2

Завдання

- 1 Побудуйте автокореляційну функцію кожного часового ряду. Охарактеризуйте структуру рядів.
- 2 Використовуючи метод Алмон, оцініть параметри моделі з розподіленим лагом. Довжину лага обрати не більшою за 4, степінь полінома, що апроксимує, – не більш 3. Оцініть якість побудованої моделі.
- 3 Використовуючи метод Койка, оцініть параметри моделі з розподіленим лагом. Довжину лага оберіть не більшою за 4.
- 4 Порівняйте результати, які одержані в п.2 і п.3.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

- 1 Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрии. – М.: ЮНИТИ, 1998.
- 2 Джонстон Дж. Эконометрические методы. – М.: Статистика, 1980.
- 3 Доугерти К. введение в эконометрику. – М.: Финансы и статистика, 1999.
- 4 Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. – М.: Дело, 1998.
- 5 Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ, 2002.
- 6 Бородич С.А. Эконометрика. – Минск: Новое знание, 2001.
- 7 Лук'яненко І.Г., Краснікова Л.І. Економетрія. – К.: Товариство “Знання”, КОО, 1998.
- 8 Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Романюк Т.П. Економетрія. – К.: КНЕУ, 2000.
- 9 Назаренко О.М. Основи економетрики. – К.: “Центр навчальної літератури”, 2004.

ЗМІСТ

Вступ	3
1. Моделювання одномірних часових рядів.....	4
1.1 Основні поняття часового ряду.....	4
1.2 Автокореляція рівнів часового ряду.	5
1.3 Моделювання тенденції часового ряду.....	10
1.4 Моделювання сезонних та циклічних коливань.....	13
Контрольні запитання	23
2. Взаємозв'язки часових рядів.....	24
2.1 Специфікація статистичної оцінки взаємозв'язку двох часових рядів.....	24
2.2 Методи виключення тенденції.....	24
2.2.1 Метод відхилень від тренду.....	25
2.2.2 Метод послідовних різниць.....	27
2.2.3 Включення в модель регресії фактора часу.....	28
Контрольні запитання	29
3. Динамічні економетричні моделі	30
3.1 Загальна характеристика	30
3.2 Моделі авторегресії. Інтерпретація параметрів	30
3.3 Моделі з розподіленим лагом. Інтерпретація параметрів	32
3.4 Оцінювання параметрів моделей з розподіленим лагом. Метод Алмон	36
3.5 Оцінювання параметрів моделей з геометричною структурою лага. Метод Койка	38
3.6. Оцінювання параметрів моделей авторегресії. Метод інструментальних змінних	40
3.7. Модель адаптивних очікувань	41
3.8. Модель часткового коригування	43
Контрольні запитання	44
Контрольні завдання	44
Список джерел інформації	52