

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.О.Аршава, А.І.Кононенко, Д.Г.Мітасов, Л.І.Щелкунова, В.О.Цуріков

МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ
РОЗДІЛ: ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ
(навчально-методичний посібник)

ХАРКІВ 2000

Даний методичний посібник складено відповідно до курсу “Математичне програмування”.

Ціль посібника – допомогти студентам заочної форми навчання вивчити тему “Лінійне програмування”, а також виконати контрольні індивідуальні завдання, які приведені в додатку.

У методичному посібнику розглянуті такі розділи математичного програмування, як:

- предмет математичного програмування і його значення в розв’язанні задач планування і керування виробництвом;
- поняття математичної моделі економічних задач, приклад побудування її для задачі про максимальну рентабельність підприємства;
- означення припустимого розв’язку (плану), області припустимих розв’язків та оптимального розв’язку;
- канонічна форма задачі лінійного програмування (ЗЛП);
- графічний спосіб розв’язання ЗЛП;
- критерій оптимальності припустимої розв’язки;
- симплекс-метод;
- M -задача;
- економічна інтерпретація оптимального розв’язку;
- транспортна задача.

Студенти виконують 2 контрольні завдання, вибір свого варіанта проводиться за двома останніми цифрами залікової книжки. Якщо номер залікової книжки більше 30, то береться число, від якого віднімається число кратне 30. Наприклад, залікова книжка має номер 237, останні цифри дорівнюють 37, а варіант вибираємо $30 + 7$, тобто 7; або, наприклад, номер залікової книжки дорівнює 285, тоді $85 = 2 \times 30 + 25$, тобто вибирається 25 варіант.

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ, ЙОГО ЗНАЧЕННЯ В РОЗВ'ЯЗАННІ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ І КЕРУВАННЯ

Сьогодні нові досягнення математики з врахуванням розвитку персональних комп'ютерів знаходять широке застосування в економіці, особливо в плануванні та керуванні. Задачі, які виникають в цій області, є, як правило, багатоваріантні. Серед множини варіантів в умовах ринкової економіки знаходять найкращі в деякому значенні розв'язки (які подальше будемо називати оптимальними розв'язками).

Нагромаджений достатній досвід постановки та розв'язання таких задач за допомогою математичних методів. Особливо успішно розвивалися і розвиваються методи оптимального планування та керування, які і складають суть математичного програмування.

Математичне програмування (МП) – область математики, яка розробляє теорію і чисельні методи розв'язання багатовимірних екстремальних задач, тобто область математики, яка дозволяє знаходити оптимальні розв'язки. Математично це зводиться до знаходження екстремуму функції багатьох змінних з обмеженнями або без них на область зміни цих змінних.

ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНИХ ЗАДАЧ ТА ВИМОГИ ДО НЕЇ

Функцію, екстремальне значення якої треба знайти в умовах економічних можливостей, називають **цільовою** (функція цілі). Економічні можливості формалізуються у вигляді системи обмежень. Все це разом складає математичну модель задачі.

Модель задачі МП містить:

- 1) сукупність невідомих величин $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, діючи на які, можна удосконалювати економічну систему, яку розглядаємо;
- 2) цільову функцію, яка дозволяє вибирати найкращий варіант із множини

можливих. Цей варіант дає цільовій функції екстремальне значення. По-значимо цільову функцію $Z = Z(x)$. Це може бути прибуток, обсяг виробництва або реалізації продукції, затрати виробництва і т.д.;

- 3) умови, які накладаються на невідомі змінні в п. 1), тобто систему обмежень. Ці умови випливають із обмежених ресурсів, із умов виробничих та технологічних процесів.

Математично обмеження виражаються у вигляді рівнянь та нерівностей.

Враховуючи все це, розв'язання задачі МП можна розбити на наступні етапи:

- 1) побудова математичної моделі;
- 2) знаходження оптимального розв'язку задачі одним із математичних методів;
- 3) практичне впровадження одержаного результату.

Наведемо приклад побудови математичної моделі наступної економічної задачі.

ЗАДАЧА ПРО НАЙКРАЩИЙ РОЗПОДІЛ РЕСУРСІВ (ЗАДАЧА ПРО МАКСИМАЛЬНУ РЕНТАБЕЛЬНІСТЬ ПІДПРИЄМСТВА)

Однією із задач оптимального виробничого планування є задача досягнення максимальної рентабельності підприємства при виробництві із запасів сировини, яку має підприємство, різних виглядів продукції, яку має підприємство. Наведемо схему такої задачі.

Нехай для виготовлення кожного із n виглядів продукції використується m виглядів сировини, при чому витрата i -го вигляду сировини ($i = \overline{1, m}$) на одиницю j -го вигляду продукції ($j = \overline{1, n}$) складає a_{ij} одиниць. Відому матрицю коефіцієнтів a_{ij} , $A = \|a_{ij}\|$, називають технологічною матрицею. Кількість кожного вигляду сировини обмежена і складає відповідно $b_1, b_2, \dots, b_m$ одиниць. Вектор $\vec{b} = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ називають вектором ре-

сурсів. Відома також, наприклад, ціна реалізації c_j ($j = \overline{1, n}$) одиниці продукції (або прибуток від одиниці продукції). Треба визначити, скільки одиниць кожного вигляду продукції повинно виробити підприємство, щоб забезпечити максимум обсягу реалізації (прибутку) при ресурсах, які воно має.

Побудуємо математичну модель задачі.

Виходячи із складових математичної моделі, визначимо спочатку ті кількісні фактори, які впливають на скінчений результат. Звичайно, це буде кількість виробленого вигляду кожної продукції. Тому позначимо:

x_1 – кількість одиниць продукції 1-го вигляду, виробленого підприємством;
 x_2 – кількість одиниць продукції 2-го вигляду, виробленого підприємством;
 $\vdots$
 x_j – кількість одиниць продукції j -го вигляду, виробленого підприємством;
 $\vdots$
 x_n – кількість одиниць продукції n -го вигляду, виробленого підприємством.

Із умови задачі виходить, що показником ефективності роботи підприємства є максимум обсягу реалізації (прибутку) при ресурсах, які воно має. Тому цільова функція має вигляд

$$Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \Rightarrow \max,$$

де c_jx_j – ціна реалізації всієї кількості продукції j -го вигляду.

Оскільки виробництво продукції проходить при обмежених ресурсах, то запишемо ці обмеження у математичному вигляді.

$a_{ij}x_j$ – кількість сировини i -го вигляду, яка витрачена на виробництво всієї продукції j -го вигляду.

Тому для сировини i -го вигляду, яка витрачена на виробництво всіх видів продукції, запишемо $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n$,

яка за умовою задачі обмежена величиною b_i одиниць, тобто

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$$

і так для кожного вигляду сировини ($i = \overline{1, m}$)

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$\vdots$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

Крім того, в умову задачі входить той факт, що всі кількісні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ невід'ємні, тобто $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$.

Таким чином, математична модель задачі про найкращий розподіл ресурсів, запишеться у вигляді:

знайти max цільової функції

$$\max Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.1)$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \quad (1.2)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \quad (1.3)$$

ЗАГАЛЬНА ЗАДАЧА МП ТА ЇЇ КЛАСИФІКАЦІЯ. ПРИПУСТИМІ, ОПОРНІ ТА ОПТИМАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ

У загальному вигляді задача МП математично формулюється наступним чином: знайти max (min) цільової функції $Z(x)$ при обмеженнях

$$\varphi_i(x) \{ \leq, \geq, = \} b_i \quad (i = \overline{1, m})$$

Виходячи із економічних, фізичних або інших міркувань, на змінні $x_j (j = \overline{1, n})$ накладаються умови цілочисленості, невід'ємності та інше:

$$\max(\min) Z(x)$$

$$\varphi_i(x) \{ \leq, \geq, = \} \quad b_i (i = 1, \overline{m})$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

У залежності від особливостей цільової функції і функцій $\varphi_i(x)$, які задають обмеження, задачі МП поділяються на ряд типів:

- 1) задачі лінійного програмування (ЗЛП) – цільова функція і система обмежень лінійні відносно змінних x_j , які входять в математичну модель задачі (змінні x_j входять у них у першій ступені і окремо).

До задач лінійного програмування відносяться практично всі задачі оптимального планування та керування виробництвом:

- а) задача про максимальну рентабельність підприємства (розглянута вище);
- б) загальна задача виробничого планування з врахуванням технологій;
- в) задача про оптимальне використання обладнання;
- г) задача про складення графіка ремонту інструмента (задача про постачальника);
- д) задача про оптимальний розкрій матеріалів (о мінімізації відходів);
- е) транспортна задача;
- ж) задача про призначення та інші.

- 2) будь-яка інша задача МП, яка не є ЗЛП, має назву задачі нелінійного програмування (ЗНП).

Для лінійної задачі МП дамо деякі означення, які відносяться до її розв'язку.

Означення 1. Сукупність чисел $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, які задовольняють обмеженням задачі (1.1)-(1.3), називається **припустимим розв'язком (або планом)**.

Означення 2. Множина всіх припустимих розв'язків задачі МП називається **областю припустимих розв'язків** (область економічних можливостей).

Означення 3. Припустимий розв'язок $x = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$, при якому цільова функція (1.1) приймає максимальне (мінімальне) значення, називається **оптимальним розв'язком (оптимальним планом)**.

КАНОНІЧНА ФОРМА ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

ЗЛП називають **канонічною**, якщо вона записана у вигляді

$$\max Z(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{1, m}), \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.3)$$

Усі записи ЗЛП зображені в алгебраїчному вигляді.

Зауваження. У тих випадках, коли необхідно знайти мінімум функції $Z(x)$, можна перейти до знаходження максимуму функції $Z_1 = -Z = -c_1 x_1 - c_2 x_2 - \dots - c_n x_n$, тобто $\min Z(x) = -\max Z(x)$

Канонічну ЗЛП можна записати у векторному вигляді

$$\max Z(x) = \vec{c}\vec{x}$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = A_0$$

$$x \geq 0,$$

де зроблені наступні позначення:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Щоб задача (2.1)-(2.3) мала розв'язок, за теоремою Кронекера-Капеллі система обмежень повинна мати ранг $r \leq n$. Якщо $r = n$, то система має єдиний розв'язок і нема проблеми вибору оптимального розв'язку. Нехай $r < n$. Тоді серед векторів $A_1, A_2, \dots, A_n$ є підсистема лінійно-незалежних век-

торів-базис – через яку будь-який вектор системи можна зобразити у вигляді лінійної комбінації векторів базису. Таких базисів може бути не більш C_n^r . Можна, наприклад, припустити, що базисом є перші m вектори $A_1, A_2, \dots, A_m$. Цьому базису відповідають змінні $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Змінні ЗЛП, які відповідають r векторам базису, називаються **базисними змінними (БЗ)**, а інші $(n - r)$ змінних називаються **вільними (ВЗ)**.

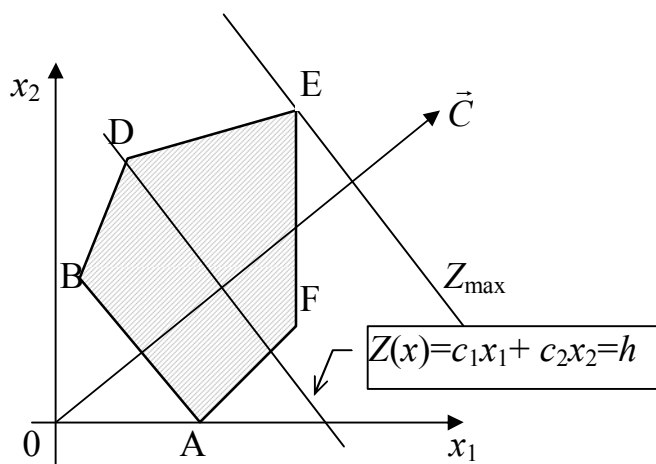
ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗКУ ЗЛП

Геометрична інтерпретація економічних задач дає можливість наочно зобразити їх структуру, виявити її особливості і відкриває шлях дослідження більш складних задач.

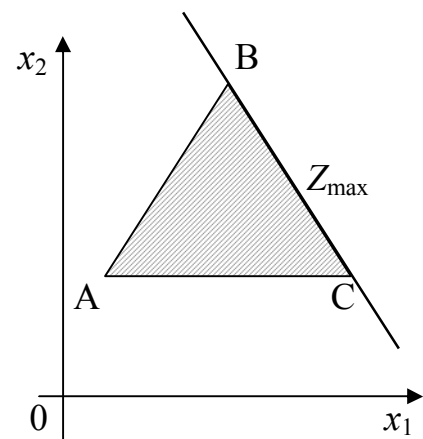
Графічно можна розв'язати:

- 1) загальну задачу ЛП з двома змінними із обмеженнями типу нерівностей;
- 2) канонічну ЗЛП, якщо вона містить не більш двох вільних змінних (ВЗ), тобто, якщо $n - r$ – число змінних, r – ранг матриці системи обмежень, то число ВЗ $= n - r \leq 2$.

Приведемо геометричні зображення області припустимих розв'язків у випадку 1), якщо ЗЛП має розв'язок.



Мал. 1.1



Мал. 1.2

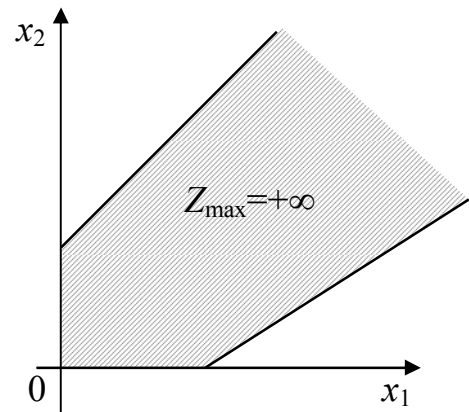
На мал. 1.1. зображено випадок, коли максимальне значення приймається в одній із вершин многогранника розв'язків (точка E). Випадок на

мал. 1.2. – цільова функція $Z(x)$ приймає $\max$ значення у двох вершинах В та С (тобто в кожній точці прямої, яка з'єднує точки В і С) . На мал.1.3. зображено випадок, коли цільова функція не обмежена зверху на многограннику розв'язків і тому $Z_{\max} = +\infty$.

Графічний спосіб розв'язання ЗЛП на основі геометричної інтерпретації області припустимих розв'язків містить наступні етапи:

1. Будують прямі, рівняння яких одержуються внаслідок заміни в обмеженнях знаків нерівностей на знаки точних рівностей.

2. Оскільки прямі в п.1 поділяють площину на дві півплощини, то знаходять



Мал..1.3

півплощину, для якої в кожній точці задовольняється дане обмеження.

3. Знаходять многогранник розв'язків як перетин усіх півплощин п.2.

4. Будують вектор $\vec{c} = \left\{ c_1 = \frac{\partial Z}{\partial x_1}; c_2 = \frac{\partial Z}{\partial x_2} \right\}$, тобто $\vec{c} = \text{grad } Z(x)$ - вектор

напряму зростання цільової функції $Z(x)$.

5. Будують пряму $c_1 x_1 + c_2 x_2 = h$ - лінію рівня цільової функції (h - будь-яке число).

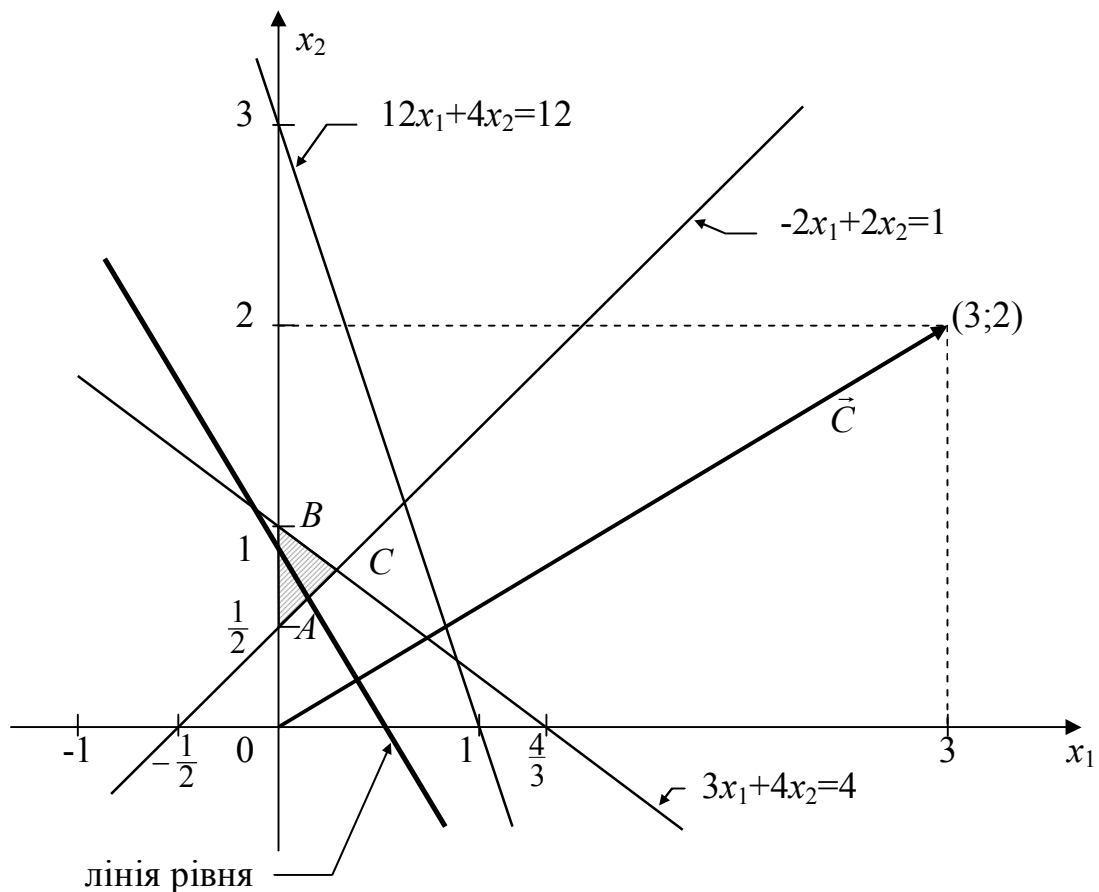
6. Пересувають лінію рівня у напрямі вектора $\vec{c}$ паралельно самій собі, внаслідок чого або знаходять точку (точки), в якій цільова функція приймає $\max$ значення (рис. 1.1. або 1.2.), або установлюють її необмеженість зверху (рис. 1.3.).

7. Визначають координати точки $\max$ цільової функції та її значення у цій точці.

Приклад. Знайти $\max Z(x) = 3x_1 + 2x_2$

при обмеженнях
$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 4x_2 \leq 4 \\ -x_1 + x_2 \geq \frac{1}{2} \quad (-2x_1 + 2x_2 \geq 1) \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Розв'язок.



Будуємо відповідні прямі

$$12x_1 + 4x_2 = 12$$

$$3x_1 + 4x_2 = 4$$

$$-2x_1 + 2x_2 = 1$$

та визначаємо область, для якої задовольняється відповідне обмеження.

Трикутник ABC є областю припустимих розв'язків.

4. Для нашої задачі $c_1 = 3$, $c_2 = 2$ (коефіцієнти при x_1 та x_2 цільової функції $Z(x)$). Будуємо точку з координатами $(3, 2)$ та вектор $\vec{c}$, початковою точкою якого є початок координат..

5. Лінія рівня $3x_1 + 2x_2 = h$ перпендикулярна вектору $\vec{c}$.

6. Пересуваємо лінію рівня у напрямі $\vec{c}$. Бачимо, остання точка, якої вона торкається, є точка С.

8. Обчислюємо координати точки С, як точки перетину двох прямих

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 4 \\ -2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

знаходимо $x_1 = \frac{2}{7}$, $x_2 = \frac{11}{14}$.

Точка $(\frac{2}{7}; \frac{11}{14})$ є точкою max цільової функції, причому

$$Z_{\max} = 3 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{11}{14} = 4, \quad Z_{\max} = 4.$$

Висновок. Тільки при розв'язку $x_1 = \frac{2}{7}; x_2 = \frac{11}{14}$ цільова функція $Z(x)$ приймає max значення $Z_{\max} = 4$.

При будь-яких інших розв'язках із області ABC $Z(x) < Z_{\max} = 4$.

Зауваження. У випадку знаходження $\min Z(x)$ у графічному способі розв'язку задачі змінюється тільки пункт 6 – лінію рівня пересувають у напрямі вектора $-\vec{c}$ і визначають точку, в якій цільова функція $Z(x)$ приймає $\min$ значення, якщо вона обмежена знизу.

СИМПЛЕКСНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ ЗЛП У КАНОНІЧНІЙ ФОРМІ

Нехай ЗЛП має оптимальний розв'язок і кожен її опорний розв'язок є не виродженим. Симплексний метод розв'язку ЗЛП побудований на переході від одного опорного розв'язку до другого, при якому значення цільової функції зростає (зменшується). Указаний перехід можливий, якщо відомий будь-який початковий опорний розв'язок. Тому необхідно вказати, по-перше, спосіб знаходження початкового опорного розв'язку, по-друге, якщо він буде не оптимальним, то спосіб переходу до другого опорного розв'язку, при якому значення цільової функції більше, ніж у попередньо-

му розв'язку, тобто застосувати симплексний метод.

Розглянемо ЗЛП у симетричній формі

$$\max Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \quad (3.3)$$

Перетворимо її у канонічну форму, додаючи у кожену нерівність невід'ємну змінну, тобто $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$, які у цільову функцію $Z(x)$ будуть записані з коефіцієнтами, рівними нулю. Одержимо наступну ЗЛП

$$\max Z(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0 \cdot x_{n+1} + \dots + 0 \cdot x_{n+m} \quad (3.1^*)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \quad (3.2^*)$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n+m} \quad (3.3^*)$$

Кожне рівняння системи (3.2^{*}) має перевагу, тому змінні $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ є базисними. Початковий опорний розв'язок для задачі (3.1) – (3.3) має вигляд

$$x_{n.on} = \left\{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, b_1, b_2, \dots, b_m \right\},$$

Оптимальний розв'язок задачі (3.1^{*}) – (3.3^{*}) є оптимальним і для задачі (3.1) – (3.3) за наступною теоремою.

Теорема. Кожному припустимому розв'язку $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ задачі (3.1) – (3.3) відповідає визначений припустимий розв'язок $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0)$ задачі (3.1^{*}) – (3.3^{*}) і навпаки, кожному припустимому розв'язку

$(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, x_{n+1}^0, \dots, x_{n+m}^0)$ задачі (3.1*) – (3.3*) відповідає припустимий розв'язок $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ задачі (3.1) – (3.3).

ТЕОРЕМА-КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ ОПОРНОГО РОЗВ'ЯЗКУ

Якщо для деякого опорного розв'язку задачі (3.1) – (3.3) всі оцінки $\Delta_j (j = \overline{1, n})$, які обчислюються за формулою $\Delta_j = C_B A_j - C_j$, невід'ємні, то такий опорний розв'язок є оптимальним, тут

C_B – вектор-стовпець, який складається із коефіцієнтів цільової функції при базисних змінних;

C_j – коефіцієнти цільової функції;

A_j – вектор-стовпець при змінній системи обмежень.

Зауваження. Якщо задача ЛП розв'язується на $\min$, то опорний розв'язок оптимальний тоді, коли оцінки $\Delta_j \leq 0 (j = \overline{1, n})$.

Знаходження оптимального розв'язку симплекс-методом здійснюється за допомогою симплекс-таблиці, яка для канонічної задачі, в якій перші m векторів $A_1, A_2, \dots, A_m$ є базисними, має вигляд

номер ітерації	БЗ	C_B	A_0	x_1	x_2	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
				C_1	C_2	$\dots$	C_m	C_{m+1}	$\dots$	C_j	$\dots$	C_n
				A_1	A_2	$\dots$	A_m	A_{m+n}	$\dots$	A_j	$\dots$	A_n
0	x_1	C_1	b_1	1	0	$\dots$	0	$a_{1,m+1}$	$\dots$	a_{1j}	$\dots$	a_{1n}
	x_2	C_2	b_2	0	1	$\dots$	0	$a_{2,m+1}$	$\dots$	a_{2j}	$\dots$	a_{2n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
	x_m	C_m	b_m	0	0	$\dots$	1	$a_{m,m+1}$	$\dots$	a_{mj}	$\dots$	a_{mn}
	$\Delta_j = Z_j - C_j$		Δ_0	0	0	$\dots$	0	Δ_{m+1}	$\dots$	Δ_j	$\dots$	Δ_n

де:

A_0 - складається із правих частин системи обмежень, якщо вона має оди-

ничний базис;

A_j – складається із коефіцієнтів системи обмежень при відповідних змінних;

$$Z_j = C_B A_j, \Delta_0 = C_B A_0.$$

Приклад. Побудувати симплекс-таблицю для ЗЛП

$$\max Z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_5 = 6 \\ 7x_2 + x_4 + 10x_5 = 70 \\ -4x_2 + x_3 + 5x_5 = 20 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Так як система обмежень має одиничний базис, який відповідає базисним змінним x_1, x_4, x_3 , то симплекс – таблиця має вигляд

номер ітерації	БЗ	C_B	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
				2	1	1	3	5
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_1	2	6	1	1	0	0	-3
	x_4	3	70	0	7	0	1	10
	x_3	1	20	0	-4	1	0	5
	$\Delta_j = Z_j - C_j \rightarrow$		242	0	18	0	0	25

Проведемо розрахунки оцінок змінних x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 :

$$\Delta_1 = C_B A_1 - C_1 = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 0) - 2 = 0$$

$$\Delta_2 = C_B A_2 - C_2 = (2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 1 \cdot (-4)) - 1 = 18$$

$$\Delta_3 = C_B A_3 - C_3 = (2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1) - 1 = 0$$

$$\Delta_4 = C_B A_4 - C_4 = (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0) - 3 = 0$$

$$\Delta_5 = C_B A_5 - C_5 = (2 \cdot (-3) + 3 \cdot 10 + 1 \cdot 5) - 4 = 25$$

$$\Delta_0 = C_B A_0 = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 70 + 1 \cdot 20 = 242$$

Добуток $C_B A_j, C_B A_0$ - це є скалярний добуток двох векторів C_B, A_0, A_j .

Оскільки всі оцінки $\Delta_j \geq 0$, то цільова функція досягає максимальне зна-

чення. x_{opt} складається так: береться стовпець B_3 і значення x_i , які в ньому знаходяться, дорівнюють відповідно по строчці значенням стовпця A_0 . Інші змінні дорівнюють нулю.

$$x_{opt} = \{6; 0; 20; 70; 0\} \text{ і } \max Z = 2 \cdot 6 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 20 + 3 \cdot 70 + 4 \cdot 0 = 242.$$

АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА

Алгоритм симплекс-метода розглянемо на конкретному прикладі.

Симплекс-методом розв'язати задачу лінійного програмування. Сформулюємо економічний зміст задачі.

Для виготовлення двох видів бетонів B_1 та B_2 використовуються його складові частини – цемент, пісок і гравій. На виготовлення однієї одиниці бетону B_1 витрачають відповідно 2 одиниці цементу, одиницю піску і 7 одиниць гравію; для одиниці бетону B_2 відповідно цифри 4, 8, 4. Підприємство має такі запаси сировини: цементу – 120 одиниць, піску – 280 одиниць, гравію – 240 одиниць. Прибуток від реалізації однієї одиниці бетону B_1 складає 10 гр., B_2 - 14 гр. Скільки треба виробити бетону кожного типу, щоб прибуток від їх реалізації був $\max$.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо

x_1 - кількість виготовленого бетону типу B_1 ;

x_2 - кількість виготовленого бетону типу B_2 .

Тоді математична модель задачі має вигляд (дивись задачу про найкращий розподіл ресурсів).

Знайти $\max Z(x) = 10x_1 + 14x_2$

$$\text{при обмеженнях } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 120 \\ x_1 + 8x_2 \leq 280 \\ 7x_1 + 4x_2 \leq 240 \end{cases}, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання задачі складається із наступних етапів.

1. Приведемо задачу до канонічного вигляду

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 120 \\ x_1 + 8x_2 + x_4 = 280 \\ 7x_1 + 4x_2 + x_5 = 240 \end{cases}, \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

При цьому цільова функція буде мати вигляд

$$\max Z(x) = 10x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5.$$

2. Побудуємо симплекс-таблицю

номер ітерації	БЗ	C_B	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5^*
				10	1	0	0	0 ^{**}
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5^{***}
0	x_3	0	120	2	4	1	0	0
	x_4	0	280	1	8	0	1	0
	x_5	0	240	7	4	0	0	1
	$\Delta_j = Z_j - C_j$		0	-10	-1	0	0	0

A_0 – вектор-стовпець із правої частини системи обмежень;

C_B – вектор-стовпець із коефіцієнтів цільової функції, які стоять при БЗ.

Серед від'ємних оцінок $\Delta_j \{-10; -1\}$ вибираємо $\max$ по модулю. Такою оцінкою є $\Delta_j = -10$. Це означає, що в БЗ треба ввести змінну x_1 , яка відповідає цій оцінці. Замість якої змінної x_1 ввести в базисні змінні, розглянемо в етапі 3.

3. Візьмемо відношення коефіцієнтів стовпця A_0 відповідно до додатних коефіцієнтів стовпця A_1 , який відповідає змінній x_1 і знайдемо $\min$ се-

$$\text{ред одержаних чисел } \min \left\{ \frac{120}{2}, \frac{280}{1}, \frac{240}{7} \right\} = \frac{240}{7}.$$

Це означає, що змінну x_5 , яка відповідає цьому відношенню, треба ввести із БЗ. При цьому за методом Жордана-Гауса симплекс-таблицю тре-

* Змінні задачі

** Коефіцієнти цільової функції

*** Вектори-стовпці системи обмежень

ба перетворити таким чином, щоб стовпець A_1 став одиничним. Розв'язуючим елементом при цьому буде цифра 7, яка стоїть на перетину змінних x_1 та x_5 .

4. Будуємо наступну симплекс-таблицю

номер ітерації	БЗ	С _Б	A ₀	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5^*
				10	1	0	0	0 ^{**}
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5^{***}
1	x_3	0	$\frac{360}{7}$	0	$\frac{20}{7}$	1	0	$-\frac{2}{7}$
	x_4	0	$\frac{1720}{7}$	0	$\frac{52}{7}$	0	1	$-\frac{1}{7}$
	x_1	0	$\frac{240}{7}$	1	$\frac{4}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$
	Δ_j		$\frac{2400}{7}$	0	$\frac{33}{7}$	0	0	$\frac{1}{7}$

5. Оскільки всі оцінки Δ_j невід'ємні, то опорний розв'язок

$$(x_1 = \frac{240}{7}; x_2 = 0; x_3 = \frac{360}{7}; x_4 = \frac{1720}{7}; x_5 = 0)$$

є оптимальним, при цьому $\max Z(x) = \frac{2400}{7}$.

Задача розв'язана.

Зауваження. Якщо система обмежень має вигляд, наприклад,

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 120 \\ x_1 + 8x_2 \geq 280 \\ 7x_1 + 4x_2 \geq 240 \end{cases}, \quad x_1, x_2 \geq 0,$$

то її приводять до канонічного вигляду зі штучним одиничним базисом.

Одержуємо M -задачу

* Змінні задачі

** Коефіцієнти цільової функції

*** Вектори-стовпці системи обмежень

$$\max Z(x) = 10x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 - M\omega_1 - M\omega_2 - M\omega_3 \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 + \omega_1 = 120 \\ x_1 + 8x_2 - x_4 + \omega_2 = 280 \\ 7x_1 + 4x_2 - x_5 + \omega_3 = 240 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = \overline{1,2} \quad (4.3)$$

ω_i – штучні змінні. Штучні змінні у цільову функцію входять з коефіцієнтом $(-M)$ при задачі на $\max$ цільової функції і M при задачі на $\min$ (M – яке завгодно велике число).

M -задача (4.1) – (4.3) розв’язується симплекс-методом. При чому оптимальним розв’язком даної задачі є оптимальний розв’язок M -задачі, де штучні змінні повинні дорівнювати нулю, тобто

$$x_{opt}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, \underset{(\omega_1)}{0}, \underset{(\omega_2)}{0}, \underset{(\omega_3)}{0})$$

Економічна інтерпретація оптимального розв’язку.

В оптимальному розв’язку $x_1 = \frac{240}{7}$ – таку кількість бетону B_1 треба виробити; $x_2 = 0$ – бетон B_2 зовсім не виробляють; $x_3 = \frac{360}{7}$; $x_4 = \frac{1720}{7}$; $x_5 = 0$ відповідно така кількість цементу, піску і гравію зостанеться після виготовлення бетону B_1 .

ТРАНСПОРТНА ЗАДАЧА

Постановка задачі. Транспортна задача формулюється таким чином: у “ m ” пунктах відправлення $A_1, A_2, \dots, A_m$ знаходиться однорідний вантаж у кількості відповідно $a_1, a_2, \dots, a_m$ ум. од. Цей вантаж необхідно відправити споживачам $B_1, B_2, \dots, B_n$ у кількості відповідно $b_1, b_2, \dots, b_n$ ум. од. Відома вартість c_{ij} транспортування одиниці вантажу з i -го ($i=1, 2, \dots, m$) пункту відправлення у j -ий ($j=1, 2, \dots, n$) пункт споживання. Необхідно скласти такий

план перевезень, який би повністю задовольнив споживачів і при якому загальні транспортні витрати були би мінімальними. Для побудови економіко-математичної моделі ТЗ розглянемо матрицю транспортування:

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

Тут через x_{ij} позначено кількість одиниць вантажу, яку необхідно відправити з i -го пункту відправлення у j -ий пункт споживання. Питомі витрати теж записуються у вигляді матриці $C=(c_{ij})$, яка зветься матрицею тарифів. Для наочності ТЗ можна записати у вигляді таблиці, яку у подальшому будемо називати розподільною таблицею.

Постачальники	Споживачі				Запаси вантажу
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
об'єми споживання	b_1	b_2	...	b_n	

Економіко-математична модель ТЗ повинна відображати всі умови та цілі задачі у математичній формі. Так, наприклад, x_{ij} повинні задовольняти обмеженням по об'ємам запасів і споживання та умові невід'ємності. В математичній формі це записується у вигляді системи обмежень:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1, m}) \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1, n}) \\ x_{ij} \geq 0. \end{cases}$$

План перевезень $X=(x_{ij})$, який задовольняє цій системі, зветься припустимим. Мета ТЗ – мінімізувати загальні транспортні витрати на перевезення вантажу, які можна записати у вигляді цільової функції $z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$. Таким чином, **математично ТЗ формулюється так**: серед множини розв’язків системи обмежень вибрати таке, яке забезпечує мінімум цільової функції. Цей план перевезень зветься **оптимальним**.

Зауваження. Якщо $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, ТЗ зветься замкнутою, в протилежному випадку ТЗ зветься відкритою.

Очевидно, що тільки замкнена ТЗ має припустимі плани. Для розв’язання відкритої ТЗ її треба перетворити у замкнену, для чого вводять або фіктивні пункти відправлення, або фіктивні пункти споживання.

Розв’язання задачі. Розглянемо один із методів розв’язання ТЗ, який отримав назву **“метод потенціалів”**. Суть його зводиться до наступного: за допомогою одного із методів (метод північно-західного кута, метод мінімального елемента і т. і.) формується початковий (опорний) припустимий план перевезень, якщо знайдений план перевезень не є оптимальним, за допомогою спеціального алгоритму проводиться поліпшення цього плану.

Зауваження. Пункт 2 повторюється доти, поки ми не отримаємо оптимальний план.

МЕТОД ПІВНІЧНО-ЗАХІДНОГО КУТА

Визначаємо елементи матриці $X=(x_{ij})$, починаючи з верхнього лівого кута. Знаходимо величину $x_{11}=\min\{a_1, b_1\}$. Якщо $b_1 < a_1$, тоді $x_{11}=b_1$, і перший стовпець закритий для розрахунку інших елементів, тобто $x_{i1}=0$, $i=2,3,\dots,m$. Якщо $b_1 > a_1$, тоді $x_{11}=a_1$ і $x_{1j}=0$ для $j=2,3,\dots,n$.

Потім знаходимо $x_{12}=\min\{a_1-x_{11},b_2\}$ при $b_1<a_1$, $x_{21}=\min\{a_2,b_1-x_{11}\}$ при $b_1>a_1$.

Цей процес продовжується доти, поки на якомусь етапі не вичерпаються ресурси a_m і не задовольняться об'єми споживання b_n .

АЛГОРИТМ ПОЛІПШЕННЯ ПЛАНУ ПЕРЕВЕЗЕНЬ (МЕТОД ПОТЕНЦІАЛІВ)

Обчислюються потенціали постачальників u_i ($i=1,2,\dots,m$) та споживачів v_j ($j=1,2,\dots,n$) усіх зайнятих клітин розподільної таблиці. Для цього розв'язується система рівнянь: $u_i + v_j = c_{ij}$.

Обчислюються оцінки s_{ij} всіх вільних клітин розподільної таблиці 2. Для цього використовується таке співвідношення: $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$.

Зауваження (критерій оптимальності розв'язку ТЗ). План перевезень, який розглядається, буде оптимальним, якщо всі $s_{ij} \geq 0$.

Означення. Циклом називається замкнений багатокутник з прямими кутами, всі вершини якого знаходяться в завантажених клітинах.

3. Вибирається клітина, яка має найменшу від'ємну оцінку s_{ij} і для неї утворюється цикл, вершинами якого, починаючи з вибраної клітини, по черзі приписуються знаки "+" або "-". Вдovж циклу переміщується максимально можливий вантаж, який додається в клітинах із знаком "+", та віднімається в клітинах із знаком "-".

Зауваження. Якщо виникає ситуація, коли цикл побудувати неможливо, задача не має розв'язку.

Приклад. Із чотирьох підприємств A_1, A_2, A_3, A_4 , в яких виробляють однотипні будівельні матеріали в об'ємах, відповідно, 40, 60, 100 і 100 ум. од., продукція вивозиться на будівельні майданчики B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 , які потребують, відповідно, об'єми 90, 50, 80, 60 та 20 ум. од. Враховуючи, що питомі

витрати на транспортування відомі, скласти план перевезень таким чином, щоб сумарні витрати на перевезення матеріалів були мінімальними.

Розв'язання.

Складаємо розподільну таблицю.

Виробництва	Будівельні майданчики					Об'єми виробництва
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	16 40	30	17	10	16	40
A_2	30 50	27 10	26	9	23	60
A_3	13	4 40	22 60	3	1	100
A_4	3	1	5 20	4 60	24 20	100
Об'єми споживання	90	50	80	60	20	300

Задача, що розглядається, є замкненою тому, що $\sum_i a_i = \sum_j b_j$.

1. Скористаємося методом *північно-західного кута* для формування опорного плану. Для цього в клітину (1;1) розміщуємо об'єм $x_{11} = \min(40; 90) = 40$ ум. од. (виробництво A_1 повністю прив'язується до B_1). Недостатні B_1 50 ум. од. беремо на виробництві A_2 . Залишки 10 ум. од. на A_2 перевозимо на B_2 . В клітину (3;2) розміщуємо $x_{32} = \min(50 - 10; 100) = 40$ ум. од., а залишок на A_3 в об'ємі 60 ум. од. перевозимо на B_3 . В клітину (4;3) розміщуємо $x_{43} = \min(80 - 60; 100) = 20$ ум. од. В клітину (4;4) розміщуємо $x_{44} = \min(60; 100 - 20) = 60$ ум. од., а залишок на A_4 в об'ємі 20 ум. од. перевозимо на B_5 .

Сумарна вартість перевезень

$$z = 40 \cdot 16 + 50 \cdot 30 + 10 \cdot 27 + 40 \cdot 4 + 60 \cdot 22 + 20 \cdot 5 + 60 \cdot 4 + 20 \cdot 24 = 4710.$$

Метод *мінімального елемента* дає іншу розподільну таблицю:

Виробництва	Будівельні майданчики					Об'єми виробництва
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	16 20	30	17 20	10	16	40
A_2	30	27	26 60	9	23	60
A_3	13 20	4	22	3 60	1 20	100
A_4	3 50	1 50	5	4	24	100
Об'єми споживання	90	50	80	60	20	300

Вибираємо клітини з мінімальними транспортними витратами (це (3;5) і (4;2)) і розміщуємо у них такі об'єми: $x_{35}=\min(20;100)=20$ та $x_{42}=\min(50;100)=50$. Наступні мінімальні витрати відповідають клітинам (3;4) і (4;1), куди ми розміщуємо такі об'єми:

$$x_{34}=\min(60;100-20)=60 \text{ і } x_{41}=\min(90;100-50)=50.$$

Зауваження. Споживачі B_2 , B_4 і B_5 завантажені повністю, тому клітини з наступними мінімальними витратами (3;4) і (4;4) не розглядаються. Те ж саме для клітин (4;5) і (2;9),.

Вибираємо клітину (3;1) і розміщуємо в ній об'єм

$$x_{31}=\min(90-50;100-80)=20,$$

після чого переходимо до клітини (1;1): $x_{11}=\min(90-70;40)=20$. Залишився тільки один будівельний майданчик B_3 , потреби якого задовольняємо за допомогою A_1 ($x_{13}=\min(80;40-20)=20$) і A_2 ($x_{23}=\min(80-20;60)=60$).

Сумарна вартість перевезень

$z=20 \cdot 16 + 20 \cdot 17 + 60 \cdot 26 + 20 \cdot 13 + 60 \cdot 3 + 20 \cdot 1 + 50 \cdot 3 + 50 \cdot 1 = 2880$ є меншою, ніж для метода північно-західного кута, тому у подальшому скористаємось цим опорним планом.

2. Переходимо до поліпшення опорного плану, для чого сформуємо та розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{array}{llll}
 u_1+v_1=16 & u_2+v_3=26 & u_3+v_4=3 & u_4+v_1=3 \\
 u_1+v_3=17 & u_3+v_1=13 & u_3+v_5=1 & u_4+v_2=1.
 \end{array}$$

Система має 8 рівнянь та 9 невідомих, тому одній із невідомих можна надати довільне значення, наприклад, $u_1=0$. В цьому випадку:

$v_1=16$, $u_3=-3$, $u_4=-13$, $v_2=14$, $v_4=6$, $v_5=4$, $v_3=17$ і $u_2=9$.

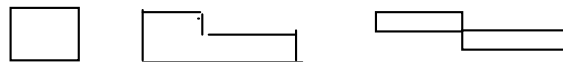
Обчислюємо s_{ij} для всіх вільних клітин:

$$\begin{array}{lll}
 s_{12}=30-(0+14)=16 & s_{22}=27-(9+14)=4 & s_{33}=22-(-3+17)=8 \\
 s_{14}=10-(0+6)=4 & s_{24}=9-(9+6)=-6 & s_{43}=5-(-13+17)=1 \\
 s_{15}=16-(0+4)=12 & s_{25}=23-(9+4)=10 & s_{44}=4-(-13+6)=11 \\
 s_{21}=30-(9+16)=5 & s_{32}=4-(-3+14)=-7 & s_{45}=24-(-13+4)=33.
 \end{array}$$

Серед оцінок є від'ємні, тобто план не оптимальний.

3. Вибираємо клітину, оцінка якої найменша від'ємна (s_{32}). Для цієї клітини утворюємо цикл – замкнений багатокутник з прямими кутами, всі вершини якого знаходяться в завантажених клітинах.

Зауваження. Частіше всього цикл має один із наступних виглядів:



Вершині, що завантажуються, присвоюється знак “+”, а далі по черзі “-” “+” і т.д.

У прикладі, що розглянули, цикл утворено клітинами: (3;2), (3;1), (4;1) та (4;2).

13	+ - + -
3	+ - + -

Вздовж циклу переміщується об'єм $\lambda=\min(20;50;50)=20$ і ми отримаємо нову розподільну таблицю, яку запишемо у скороченому вигляді:

u_i					
16 20	30	17 20	10	16	0
30	27	26 60	9	23	9
13	4 20	22	3 60	1 20	-10
3 70	1 30	5	4	24	-13
16	14	12	13	11	

Зауваження. Тут остання строка і останній стовпець містять розв'язок системи рівнянь відносно u_i та v_j , знаходження якого пропускається.

Переходимо до обчислення оцінок вільних клітин:

$$\begin{aligned}
 s_{12} &= 30 - (0 + 14) = 16 & s_{22} &= 27 - (9 + 14) = 4 & s_{33} &= 22 - (-10 + 12) = 20 \\
 s_{14} &= 10 - (0 + 13) = -3 & s_{24} &= 9 - (9 + 13) = -13 & s_{43} &= 5 - (-13 + 12) = 6 \\
 s_{15} &= 16 - (0 + 11) = 5 & s_{25} &= 23 - (9 + 11) = 3 & s_{44} &= 4 - (-13 + 13) = 4 \\
 s_{21} &= 30 - (9 + 16) = 5 & s_{31} &= 13 - (-10 + 16) = 7 & s_{45} &= 24 - (-13 + 11) = 26.
 \end{aligned}$$

Найменшою від'ємною оцінкою є s_{24} , тому цикл буде мати такий вигляд: (2;4), (3;4), (3;2), (4;2), (4;1), (1;1), (1;3), (2;3). Вздовж цього циклу переміщується об'єм $\lambda = \min(60; 20; 70; 30) = 20$, що приводить нас до наступної розподільної таблиці:

u_i					
16	30	17 40	10	16	0
30	27	26 40	9 20	23	9
13	4 40	22	3 40	1 20	3
3 90	1 10	5	4	24	0
3	1	17	0	-2	

Оцінки вільних клітин отриманої матриці дорівнюють:

$$\begin{array}{lll}
s_{11}=16-(0+3)=13 & s_{21}=30-(9+3)=18 & s_{33}=22-(3+17)=2 \\
s_{12}=30-(0+1)=-29 & s_{22}=27-(9+1)=-17 & s_{43}=5-(0+17)=-12 \\
s_{14}=10-(0+0)=10 & s_{25}=23-(9-2)=16 & s_{44}=4-(0+0)=4 \\
s_{15}=16-(0-2)=18 & s_{31}=13-(3+3)=7 & s_{45}=24-(0-2)=26.
\end{array}$$

Продовжуючи цей процес, ми отримаємо розподільну таблицю, всі оцінки вільних клітин якої додатні. Їй відповідає оптимальний план:

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 30 & 50 & 0 & 0 & 20 \\ 60 & 0 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

і мінімум цільової функції:

$$z_{opt} = 40 \cdot 17 + 60 \cdot 9 + 30 \cdot 13 + 50 \cdot 4 + 20 \cdot 1 + 60 \cdot 3 + 40 \cdot 5 = 241.$$

Відповідно до оптимального плану будівельний майданчик B_3 отримує продукцію підприємства A_1 в об'ємі 40 ум. од., а $B_4 - A_2$ в об'ємі 60 ум. од. Продукція підприємства A_3 використовується споживачами B_1, B_2 і B_5 в об'ємах 30, 50 і 20 ум. од. відповідно. Продукція підприємства A_4 використовується споживачами B_1 і B_3 в об'ємах 60 і 40 ум. од. відповідно.

Зауваження. Усі пропущені дії пропонується виконати самостійно.

Зауваження. Число навантажених клітин завжди повинно дорівнювати $r=t+n-1$ (в нашому випадку $r=8$). Якщо це не виконується, необхідна кількість клітин завантажується 0 об'ємами.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ №1

1.01 – 1.30.

- Скласти математичну модель задачі.
- Розв'язати її симплекс-методом.
- Дати розв'язку математичної моделі економічне тлумачення.

1.

План випуску деталей 1 типу – не менш, ніж 1100 одиниць, 2 типу – 900 одиниць та 3 типу – 700 одиниць. При розкрої стандартного листа одним варіантом отримують 7 деталей 1 типу, 5 – 2 типу, 9 – третього типу та 0,2 ум. одиниць залишків. Другий варіант розкрою дає 3 деталі 1 типу, 4 – другого типу, 2 – 3 типу та 0,3 ум. од. залишків. Визначити, скільки листів треба кроїти кожним із варіантів так, щоб був виконаним план випуску, а сума залишків була мінімальною.

2.

При виготовленні продукції двох видів P_1 і P_2 використовується 4 типа сировини: C_1 , C_2 , C_3 і C_4 , умовні одиниці записів яких та норми їх споживання для випуску одиниці продукції приведені у таблиці. Прибуток від реалізації одиниці P_1 дорівнює 7 ум. од., а P_2 – 5 ум. од. Скласти такий план випуску продукції, який забезпечує $\max$ прибутку від її реалізації.

Вигляд продукції	P_1	P_2	Запас сировини
C_1	2	8	19
C_2	2	1	13
C_3	0	3	15
C_4	3	0	18
Здобуток від реалізації одиниці продукції	7	5	

3.

Для виготовлення бетонної суміші необхідно не менш, ніж 300 ум. од. цементу і 850 ум. од. гранітної крихти. У сировині двох видів C_1 і C_2 , яку пропонують підприємству, наявність складових суміші така: C_1 – 12 і 24 ум. од., C_2 – 25 і 13 ум. од. Скільки треба придбати сировини кожного виду, щоб сумарні витрати були мінімальними, якщо умовна одиниця сировини C_1 коштує 18 ум. од., а C_2 – 13 ум. од.

4.

10 ум. од. палива підприємство може отримати із 2-х пунктів, де зо-

середжено його запаси у об'ємах 16 ум. од. і 8 ум. од. відповідно. Вартість перевози одиниці палива із 1 пункту – 3 ум. од., із 2 – 5 ум. од. Знайти, яку кількість палива треба купити у кожному із пунктів, щоб сумарні витрати були мінімальними, а сумарний простій не перебільшував 76 ум. од., якщо під загрузкою одиниці палива у 1 пункті транспорт знаходиться 9 ум. од., у 2 – 4 ум. од.

5.

При виготовленні 2-х видів будівельних конструкцій, вартість одиниці кожної із яких відповідно 4 і 3 ум. од., використовується 2 сорту цементу, запаси яких відповідно 17 і 21 ум. од. Визначити, яку кількість конструкцій кожного виду треба виготовити, щоб сумарний прибуток від реалізації був максимальним, якщо виготовлення одиниці конструкції 1 типу потребує 1 ум. од. цементу 1 сорту та 2 ум. од. – 2 сорту, а для виготовлення одиниці конструкції 2 типу необхідно 2 ум. од. цементу 1 сорту та 1 ум. од. 2 сорту.

6.

Для збереження здоров'я та працездатності людина повинна отримувати за добу не менш, ніж: 12 ум. од. білків, 10 ум. од. жирів, 16 ум. од.

вуглеводів, 10 ум. од. води та 3 ум. од. вітамінів. Місткість цих елементів у двох типах їжі P_1 і P_2 та вартість їжі наведені у таблиці. Скласти раціон харчування так, щоб споживач отримав необхідну кількість усіх наведених елементів і при цьому його витрати були б мінімальними.

	Білки	Жири	Вуглеводи	Вода	Вітаміни	Вартість
P_1	3	1	2	2	1	2
P_2	2	5	4	2	0,5	3

7.

Для складання 1 виробу необхідні 2 деталі D_1 та 1 деталь D_2 . Їх можна отримати двома способами: 1 спосіб дає 6 деталей D_1 та 4 деталі D_2 із

одиниці сировини: 0,06 ум. од. відходів; 2 спосіб, відповідно, 1 деталь D_1 та 2 деталі D_2 і 0,05 ум. од. відходів. Скільки одиниць сировини і якими способами треба обробити, щоб виготовити не менш, ніж 70 виробів. При цьому відходи повинні бути мінімальними.

8.

Для підживлення рослин необхідно внести на один гектар: не менш, ніж 24 ум. од. хімічної речовини B_1 , 30 ум. од. – B_2 і 15 ум. од. – B_3 . Усі ці речовини містяться у комбінованих добавках U_1 та U_2 у кількостях, які наведені у таблиці. Яку кількість комбінованих добрив кожного типу треба придбати, щоб забезпечити внесення необхідної кількості хімічних речовин, зробивши при цьому мінімальні витрати.

	B_1	B_2	B_3	Вартість 1 ум. од.
U_1	3	4	1	3
U_2	2	5	3	5

9.

Для виготовлення залізобетонних конструкцій двох типів $П_1$ і $П_2$, вартість яких 25 та 15 ум. од. відповідно, використовуються металеві конструкції трьох типів: K_1 , K_2 та K_3 , запаси яких на виробництві відповідно 40, 65 та 80 ум. од. Для виготовлення конструкції $П_1$ необхідні 2 ум. од. K_1 , 3 ум. од. K_2 і 4 ум. од. K_3 , а для виготовлення конструкції $П_2$ необхідні 1 ум. од. K_1 , 2 ум. од. K_2 і 2 ум. од. K_3 . Скласти план випуску залізобетонних конструкцій, який би забезпечив підприємству максимальний прибуток.

10.

Місячний план цеху крою є 1000 одиниць деталей $П_1$ та 6000 одиниць деталей $П_2$. При кроєнні 1 ум. од. матеріалу 1 способом отримують 10 одиниць деталей $П_1$ і 90 одиниць $П_2$. 2 спосіб крою дає, відповідно, 30 одиниць $П_1$ і 40 одиниць $П_2$. Визначити число ум. од. матеріалу, які треба кроїти кожним із способів, щоб забезпечити сумарний мінімум відходів, якщо 1 спосіб із кожної ум. од. матеріалу дає 0,2 ум. од. відходів, а 2 спосіб –

0,31 ум. од.

11.

На обладнанні, яке є на підприємстві, за зміну можна виготовити або 400 виробів типу P_1 , або 100 виробів типу P_2 , вартість одиниці кожного з яких відповідно 18 та 54 ум. од. Скласти план випуску продукції, який би забезпечив максимальний прибуток, якщо цех фарбування може за зміну обробити не більш, ніж 300 виробів будь-якого типу.

12.

Для виготовлення синтетичного каучуку використовуються 3 виду речовин: B_1 , B_2 і B_3 , які містяться у сировині двох типів: C_1 і C_2 у кількостях, які приведені у таблиці. Скласти план закупівлі сировини таким чином, щоб забезпечити потреби виробництва з найменшими витратами, якщо 1 ум. од. C_1 коштує 4 ум. од., а C_2 – 6 ум. од.

	B_1	B_2	B_3
C_1	2	1	4
C_2	1	4	3
треба не менш, ніж	90	12	160

13.

Для виробництва двох типів бетонних сумішей B_1 і B_2 використовуються сировина, яку добувають у трьох кар'єрах C_1 , C_2 і C_3 , потужність яких відповідно дорівнює 34, 42 і 60 ум. од. Виготовлення 1 ум. од. B_1 потребує 3 ум. од. сировини із C_1 , 1 ум. од. сировини із C_2 та 4 ум. од. сировини із C_3 . Для B_2 це, відповідно, 1, 4 і 5 ум. од. Скласти план випуску бетонних сумішей, який забезпечує максимальний прибуток, якщо 1 ум. од. B_1 коштує 3 ум. од., а B_2 – 5 ум. од.

14.

Завод залізобетонних конструкцій виготовляє продукцію двох типів B_1 і B_2 , при цьому за добу він виготовляє або 40 примірників типу B_1 , або

60 – типу B_2 . Цех транспортування може вивезти тільки 80 одиниць продукції будь-якого типу. Скласти план випуску продукції, який би забезпечив максимум прибутку, якщо одиниця B_1 коштує 25 ум. од., а одиниця B_2 – 18 ум. од.

15.

Необхідний об'єм земляних робіт трьох видів: $З_1$, $З_2$ і $З_3$ може бути виконаним машинами двох типів: M_1 і M_2 . Можливості кожної із машин при виконанні кожної із робіт приведені у таблиці. Припускаючи, що всі витрати часу за плановий період не більше 1, вибрати ті машини, які весь необхідний об'єм робіт виконають за найменшу вартість.

	$З_1$	$З_2$	$З_3$	Ціна кожної із машин
M_1	10	8	4	40
M_2	4	10	5	50

16.

Завод випускає два види продукції: велосипеди та мотоцикли, при цьому цех по збору велосипедів має потужність 100 тис. шт. за рік, цех по збору мотоциклів – 30 тис. Одна група цехів може виробляти або деталі для 120 тис. велосипедів, або деталі для 40 тис. мотоциклів, або ж другу комбінацію деталей, обмежену цими даними. Друга група – деталі або для 80 тис. велосипедів, або для 60 тис. мотоциклів, або ж будь-яку припустиму комбінацію деталей. У результаті реалізації кожної тисячі велосипедів завод отримує прибуток у 2 тис., а кожної тисячі мотоциклів – 3 тис. грн. Знайти оптимальний план випуску велосипедів та мотоциклів (max суму прибутку).

17.

При складанні добового раціону годування худоби можливо використовувати свіже сіно та силос. Раціон повинен містити в собі не менш: 30 кормових одиниць, 1 кг білка, 100 г кальцію та 80 г фосфору. У таблиці на-

ведені дані про місткість компонентів у 1 кг кожного корму та собівартість.

Корм	Компоненти				Собівартість, коп./кг
	кільк корм.одиниць	білок г/кг	кальцій г/кг	фосфор г/кг	
сіно свіже	0,5	40	1,25	2	1,2
силос	0,5	10	2,5	1	0,8

Визначити оптимальний раціон, виходячи з умови мінімуму його собівартості.

18.

Для виготовлення двох видів виробів A та B використовується токарне, фрезерне та зварювальне обладнання. Витрати часу на обробку одного з виробів для кожного з типів обладнання указані у таблиці. У ній же вказані загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Тип обладнання	Затрати часу на обробку одного виду виробу (станок/годин)		Загальний фонд робочого часу обладнання (годин)
	A	B	
фрезерне	2	4	120
токарне	1	8	280
зварювальне	7	4	240
Прибуток	10	14	

Визначити, скільки виробів та якого виду треба виготовити, щоб мати максимальний прибуток.

19.

Кондитерська фабрика для виготовлення двох видів карамелі A і B на новому обладнанні використовує три види сировини: цукор, патоку та фруктове пюре. Норми витрати сировини кожного виду приведені в таблиці (на виготовлення 1 т карамелі даного виду). У ній же вказана загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а

також наведений приріст продуктивності праці на 1 т карамелі даного виду. Знайти план виробництва карамелі, який забезпечує максимальний приріст продуктивності праці на новому обладнанні.

Види сировини	Норми витрат (т) на 1 т карамелі		Загальна кількість сировини (т)
	A	B	
цукор	0,8	0,5	800
патока	0,4	0,4	600
фруктове пюре	-	0,1	120
Приріст продукції на 1 т сировини (%)	108	112	

20.

Цех виробляє печиво двох гатунків: A і B . Для виготовлення тіста використовуються цукор та борошно. При цьому для виготовлення однієї товарної одиниці печива виду A використовується 5 т цукру та 2 т борошна. Добова норма при цьому цукру, яка використовується, не повинна перевищити 20 т цукру. Для виготовлення аналогічної партії печива виду B використовується 6 т цукру та 12 т борошна. Добова норма борошна не повинна перевищити 72 т борошна. Прибуток від реалізації 1 т печива виду A дозволяє виплатити заробітну платню 8 працівникам, а від реалізації 1 т печива виду B – 6 працівникам. Визначити оптимальний план виробництва цеху для виплати заробітної платні максимальній кількості працівникам (для визначення максимально можливого персоналу цеху).

21.

Є три виду сировини A , B і C , які використовуються для виробництва двох видів продукції, – 1 та 2. У розпорядженні знаходиться 500 одиниць сировини A , 750 одиниць сировини B і 200 одиниць сировини C . Продукт 1 складається з однієї одиниці сировини A і двох одиниць сировини B . Продукт 2 складається із двох одиниць сировини A , однієї одиниці сировини B і однієї одиниці сировини C . Одна одиниця продукту 1 дозволяє отримати 4 одиниці нової продукції в суміжному виробництві, а одна одиниця про-

дукту 2 – 5 одиниць. Скільки одиниць кожного продукту треба виробити для максимального виробництва нової продукції в суміжному виробництві?

22.

Для годування на фермі у щоденний раціон необхідно включати не менш: 33 одиниці поживної речовини A , 23 одиниці поживної речовини B і 12 одиниць поживної речовини C . Для годування використовується два види кормів. Дані про наявність поживних речовин і вартості однієї одиниці ваги кожного з кормів наведені у таблиці.

Вид корму	A	B	C	Вартість (коп.)
1	4	3	1	20
2	2	1	2	10

Скласти найбільш дешевий рецепт, при якому кожна тварина отримала б необхідну кількість поживних речовин A , B , C .

23.

Для виготовлення різних виробів A і B використовується три види сировини. Для виготовлення одиниці виробів A треба затратити сировини першого виду 16 кг, сировини другого виду 8 кг, сировини третього виду 5 кг. Для виготовлення одиниці виробів B треба затратити сировини першого виду 4 кг, сировини другого виду 7 кг, сировини третього виду 9 кг. Виробництво забезпечено сировиною першого виду кількістю 784 кг, сировиною другого виду кількістю 552 кг, сировиною третього виду кількістю 567 кг. Витрати людино-годин на виготовлення одиниці готового виробу A дорівнюють 4 люд.-год., а виробу B – 6 люд.-год. Скласти план виготовлення виробів A і B при умові максимального використання працівників для забезпечення зайнятості персоналу.

24.

При вирощуванні двох культур A і B використовуються 3 види добрив. На вирощування однієї тони культури A треба затратити добрив першого виду 9 кг, добрив другого виду 7 кг, добрив третього виду 4 кг. На вирощування однієї тони культури B треба затратити добрив першого виду 5 кг, другого виду 8 кг, третього виду 16 кг. Колгосп забезпечений добривами: першого виду кількістю 1431 кг, другого виду – 1224 кг, третього виду – 1328 кг.

Обидві культури використовуються у вигляді корму на тваринницькій фермі. При цьому кожна тонна культури A дає приріст ваги тварин 3 кг за добу, а культура B – 2 кг за добу. Скласти оптимальний план виробництва культур A і B для забезпечення максимального приросту тварин на фермі.

25.

Для виробництва двох видів високопробної неіржавіючої сталі A і B використовується три види добавок до руди. Для виробництва 1 т сталі виду A треба затратити 12 кг добавок першого виду, 10 кг добавок другого виду і 3 кг добавок третього виду. Для виробництва 1 т сталі виду B треба затратити добавок першого виду 3 кг, добавок другого виду 5 кг, добавок третього виду 6 кг. Завод забезпечений добавками першого виду кількістю 684 кг, добавками другого виду кількістю 690 кг, третього виду – 558 кг.

Обидва види сталі використовуються для виробництва нових різців при модернізації виробництва. Економія металу (за рахунок збільшення строку служби нових різців) при обробці новими різцями на 1 тис. виробів при застосуванні сталі виду A складає 6 т, при використанні сталі виду B – 2 т. Скласти план виробництва сталі видів A і B , який забезпечує максимальну економію металу на виробництві.

26.

Для виготовлення столів та шаф меблева фабрика використовує необхідні ресурси. Норми витрат ресурсів на один виріб даного виду, загальна кількість ресурсів кожного виду, а також площі, які звільнюються (в дм^2) на складі сировини при виготовленні одного виробу, наведені в таблиці.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	
Деревина (м^2): 1 виду	0,2	0,1	40
2 виду	0,1	0,3	60
Працесмкість(люд. год.)	1,2	1,5	371,4
Площа, яка звільнюється при виготовленні одного виробу	6	8	

Визначити, скільки столів і шаф треба виготовити, щоб максимально звільнити площу на складі для розміщення нової партії деревини.

27.

Для виробництва двох видів виробів A і B використовується токарне, фрезерне та шліфувальне обладнання. Норми витрат часу для кожного з типів обладнання на один виріб даного виду наведені у таблиці. У ній же показаний загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, а також економія металу, яка припускається при обробці за новою технологією (у %). Знайти план випуску виробів A і B , який забезпечує максимальну економію металу.

Тип обладнання	Витрати часу (верст. год.) на обробку одного виробу		Загальний фонд робочого часу на обладнання (верст. год.)
	A	B	
фрезерне	10	8	168
токарне	5	10	180
шліфувальне	6	12	144
економія металу (%)	14	18	

28.

Для виробництва двох видів виробів A і B підприємство використовує три види сировини. Норми витрат сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції даного виду наведені у таблиці. У ній же вказана загальна кількість сировини даного виду, яка може бути використана підприємством та економія енергоресурсів у кВт/ч при використанні одного виробу кожного виду у виробництві нових верстатів. Скласти план виробництва виробів A і B , який забезпечує максимальну економію енергоресурсів при виготовленні нових верстатів.

Види сировини	Норми витрат сировини (кг) на один виріб		Загальна кількість сировини (кг)
	A	B	
1	12	4	300
2	4	4	120
3	3	12	252
Економія енергоресурсів на один виріб	30	40	

29.

На звірофермі можуть вирощувати лисиць та песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовується три види кормів. Кількість корму кожного виду, яку повинні щоденно отримувати лисиці та песці, наведена у таблиці. У ній же вказана загальна кількість корму кожного виду, яка може бути використана звірофермою та кількість хутрових заготовок (деталей хутрової одежі) з однієї шкурки лисиці та песця. Визначити, скільки лисиць та песців треба вирощувати на звірофермі для максимального виробництва хутрових заготовок.

Види корму	Кількість одиниць корму, яку щоденно повинні отримувати		Загальна кількість кормів
	лисиця	песець	
1	2	3	180
2	4	1	240
3	6	7	426
Кількість заготовок з однієї шкурки	16	12	

30.

Металургійний цех виробляє два види виробів A і B . Прибуток від тони виробленої продукції кожного виду складає відповідно 3 тис. і 2 тис. У цеху є необхідне обладнання, кожний тип якого має свій фонд робочого часу та продуктивності праці (наведені у таблиці). Скласти план випуску продукції, який забезпечує максимальний прибуток.

Тип обладнання	Продуктивність (т/год) виду продукції		Фонд часу у год.
	A	B	
Піч обжигу	8	3	864
Травильний агрегат	7	6	864
Прокатний стан	4	9	945

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ №2

Задана матриця транспортних витрат $C=(c_{ij})$ ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$), a_i – об'єми виробництва, b_j - об'єми споживання.

1. Скласти математичну модель транспортної задачі.
2. Розв'язати складену модель методом потенціалів.
3. Дати економічну інтерпретацію розв'язку задачі.

2.1.

a_i				
30	2	4	1	3
20	5	6	5	4
40	3	7	9	5
50	1	2	2	7
b_j	35	20	55	30

2.2.

a_i				
55	2	5	3	4
45	6	1	2	5
80	3	4	3	8
b_j	20	60	55	45

2.3.

a_i				
65	18	2	9	7
55	30	4	1	55
40	6	4	8	3
b_j	25	35	30	70

2.4.

a_i				
20	1	3	3	8
20	8	6	2	6
40	7	7	3	8
45	5	2	4	5
b_j	25	35	40	25

2.5.

a_i					
130	4	5	6	8	10
90	10	3	2	3	15
40	4	10	5	1	16
b_j	10	30	50	80	90

2.6

a_i				
40	1	7	2	5
30	3	8	4	1
50	6	3	5	3
b_j	20	10	45	45

2.7.

a_i				
60	2	4	5	1
70	2	3	9	4
20	3	4	2	5
b_j	40	30	30	50

2.8.

a_i						
30	5	5	4	6	2	4
50	6	6	5	5	1	5
50	7	7	2	7	5	6
50	8	4	4	8	4	3
b_j	40	40	20	20	30	30

2.9.

a_i						
60	4	8	5	1	1	4
40	2	3	6	4	2	3
40	5	4	2	3	3	2
50	1	2	1	8	6	5
b_j	30	30	40	20	20	50

2.10.

a_i						
20	4	8	9	6	3	7
100	3	3	10	8	6	8
170	5	7	5	4	1	3
130	6	3	4	3	5	6
b_j	50	100	50	90	30	100

2.11.

a_i					
230	3	25	11	22	12
250	9	15	4	26	12
120	13	22	15	12	27
300	6	19	8	11	8
b_j	180	180	180	180	180

2.12.

a_i					
140	30	9	29	6	13
170	23	13	3	28	7
170	4	3	11	6	9
170	3	10	11	10	28
b_j	130	130	130	130	130

2.13.

a_i					
330	24	19	5	9	23
310	15	16	3	13	6
330	7	5	24	11	23
330	4	28	29	21	20
b_j	250	250	250	250	300

2.14.

a_i				
60	1	2	3	4
80	4	3	2	10
100	10	2	2	1
b_j	40	60	80	60

2.15.

a_i					
180	14	5	27	29	23
140	17	7	17	19	2
160	20	12	15	29	5
120	14	24	18	7	13
b_j	80	110	110	90	210

2.16.

a_i					
140	10	15	14	28	1
140	16	7	30	8	29
120	1	21	22	19	12
160	8	25	28	5	19
b_j	110	110	110	80	150

2.17.

a_i				
40	1	2	6	4
30	3	1	3	2
20	5	7	5	1
b_j	35	20	10	25

2.18.

a_i				
60	1	2	9	7
55	3	40	15	5
40	6	4	8	3
35	24	3	3	1
b_j	70	5	45	70

2.19.

a_i				
50	3	2	4	1
40	2	3	1	5
20	3	2	4	4
b_j	30	25	35	20

2.20.

a_i						
130	2	3	6	8	2	10
90	8	1	2	3	5	6
100	7	4	4	1	4	8
140	2	8	5	1	3	6
b_j	110	50	30	80	100	90

2.21.

a_i							
200	4	10	5	6	3	4	15
120	5	5	4	8	7	6	15
130	8	7	4	8	5	3	10
50	4	5	4	6	7	8	1
b_j	40	70	100	60	130	50	50

2.22.

a_i					
240	28	26	12	22	11
270	20	23	25	22	9
160	23	15	11	22	7
130	1	26	10	11	19
b_j	160	160	160	160	160

2.23

a_i					
330	14	25	18	19	23
250	2	17	16	24	2
250	29	3	7	15	22
170	5	20	17	23	10
b_j	330	110	110	110	340

2.24.

a_i					
120	6	11	20	17	8
170	1	25	3	18	17
180	9	39	16	70	31
130	23	15	4	3	28
b_j	100	80	120	140	160

2.25.

a_i					
30	3	7	1	5	4
5	7	5	8	6	3
35	6	4	8	3	2
50	3	1	7	4	2
b_j	10	35	15	25	35

2.26.

a_i				
30	2	7	3	6
70	9	4	5	7
50	5	7	6	2
b_j	20	40	30	60

2.27.

a_i					
150	20	5	27	10	26
250	7	17	18	21	28
50	27	21	9	23	26
150	1	13	17	23	7
b_j	70	80	130	120	200

2.28.

a_i					
180	21	22	2	13	7
120	27	10	4	24	9
170	3	16	25	5	4
130	28	11	17	10	29
b_j	80	80	80	80	280

2.29.

a_i					
40	16	30	17	10	16
60	30	27	26	9	23
100	13	4	22	3	1
100	3	1	5	4	24
b_j	90	50	80	60	20

2.30.

a_i				
30	1	8	2	3
50	4	7	5	1
20	5	3	4	4
b_j	15	15	40	30

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование.-Минск: Вышш. школа, 1994.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.-М., Вышш. школа, 1986.
3. Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Воложенко А.Б. Математическое программирование.-М., Вышш. школа, 1980.
4. Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию.-М., Вышш. школа, 1975.
5. Бугір М. Математика для економістів.-К.: Академія, 1998.
6. Красс М.С. Математика для экономических специальностей.-М.: ИНФРА-М, 1998.

ЗМІСТ

1. Предмет математичного програмування, його значення в розв'язанні задач оптимізації і керування.....	4
2. Поняття математичної моделі економічних задач та вимоги до неї....	4
3. Задача про найкращий розподіл ресурсів.....	5
4. Загальна задача МП та її класифікація. Припустимі, опорні та оптимальні розв'язки.....	7
5. Канонічна форма задачі лінійного програмування.....	9
6. Графічний спосіб розв'язку ЗЛП.....	10
7. Симплексний метод розв'язку ЗЛП у канонічній формі.....	13
8. Теорема-критерій оптимальності опорного розв'язку.....	15
9. Алгоритм симплекс-метода.....	17
10. Транспортна задача.....	20
11. Метод північно-західного кута.....	22
12. Алгоритм поліпшення плану перевезень (метод потенціалів).....	23
13. Індивідуальні завдання №1.....	28
14. Індивідуальні завдання №2.....	40
15. Список літератури.....	43