Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІ-
ВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

Спеціальність 192

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

**з курсу «Вища математика»
на теми: «ПОХІДНА», «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕ-
ГРАЛИ», «КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ»,
«ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»
для студентів-заочників з прискореним терміном навчання**

Харків 2016

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

з курсу «Вища математика»
на теми: «ПОХІДНА», «НЕВИЗНАЧЕНИЙ ТА ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛИ», «КРАТНІ ТА КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ», «ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ»
для студентів-заочників з прискореним терміном навчання

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 7 від 24.05.2015 р.

Харків 2016

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з курсу «Вища математика» на теми: «Похідна», «Невизначений та визначений інтеграли», «Кратні та криволінійні інтеграли», «Диференціальні рівняння» для студентів-заочників з прискореним терміном навчання спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія» / Укладачі: А. Ю. Петрова, Р. В. Посилаєва. – Харків, ХНУБА, 2016. – 130 с.

Рецензент Є. В. Поклонський

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Мета даного видання полягає у наданні допомоги студентам-заочникам в організації самостійної роботи під час вивченні таких розділів курсу вищої математики, як «Похідна функції», «Невизначений та визначений інтеграли», , «Кратні та криволінійні інтеграли», «Диференціальні рівняння». Навчальне видання містить основні поняття,що стосуються змісту відповідних розділів, достатню кількість розв'язаних прикладів, а також задач для самостійного виконання. Зміст, повнота і рівень складності запропонованих задач та прикладів, відповідають рівню вимог до математичної підготовки студентів технічних спеціальностей.

КОНТРОЛЬНА РАБОТА №1

1. ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точках x і x_1. Різниця $x_1 - x$ називається приростом аргументу, а різниця $f(x_1) - f(x)$ – приростом функції при переході від значення аргументу x до значення аргументу x_1. Приріст аргументу позначають через Δx, тобто $\Delta x = x_1 - x$, або $x_1 = x + \Delta x$. Приріст функції позначають через Δf або Δy, тобто

$$\Delta f = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Геометричний зміст даної рівності проілюстровано на рисунку 1 :

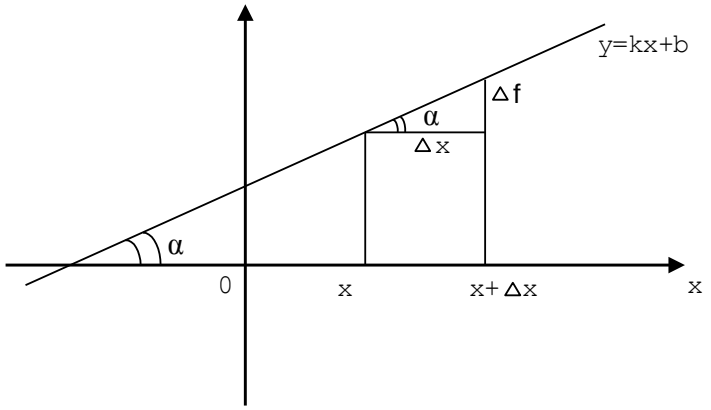


Рис. 1

Означення. Нехай функція $y = f(x)$ визначена в точці x і деякому околі цієї точки (під околом точки розуміється деякий інтервал $(\alpha; \beta)$ такий, що ($\alpha < x < \beta$).

Нехай Δx – приріст аргументу, причому такий, що точка $x + \Delta x$ належить указаному околу точки x, а Δf – відповідний приріст функції, тобто $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$. Якщо існує границя відношення приросту функції Δf до приросту аргументу Δx за умови, що $\Delta x \to 0$ довільним чином, то функція

$y = f(x)$ називається *диференційованою в точці* x, а ця границя називається *значенням похідної функції* $y = f(x)$ *в точці* x і позначається $f'(x)$ або y'.

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нова функція $f'(x)$, яка визначена в усіх таких точках x, у яких існує указана вище границя. Цю функцію називають *похідною функції* $y = f(x)$.

1.1. Геометричний зміст похідної

Якщо l – дотична до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ (рис.2), то $k_{дот} = tg\alpha = f'(x_0) = y'(x_0)$. Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці дотику $(x_0; y_0)$ має вигляд: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

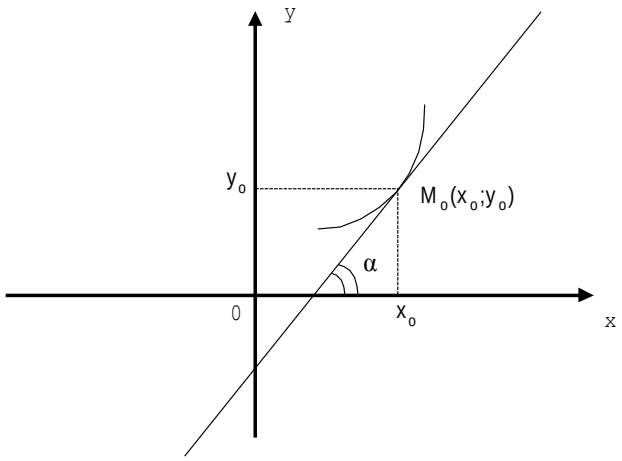


Рис.2.

1.2. Основні правила диференціювання

(u, v, z – диференційовані функції від x, C– стала).

	$(C)' = 0$		$(Cu)' = Cu'$
	$(u + v - z)' = u' + v' - z'$		$(u \cdot v)' = u'v + uv'$
	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \ v \neq 0$		*Якщо* $y = f(u(x))$, *то* $y'_x = f'_u \cdot u'_x$

1.3. Таблиця похідних

	$y = f(x)$		$y = f(u(x))$
1	$x' = 1$	1*a*	
2	$(x^n)' = nx^{n-1}$ $n = 1/2$: $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $n = -1$: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	2*a*	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$ $n = 1/2$: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $n = -1$: $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
3	$(a^x)' = a^x \ln a$	3*a*	$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$
4	$(e^x)' = e^x$	4*a*	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
5	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	5*a*	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
6	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	6*a*	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
7	$(\sin x)' = \cos x$	7*a*	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
8	$(\cos x)' = -\sin x$	8*a*	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
9	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	9*a*	$(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
10	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	10*a*	$(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
11	$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	11*a*	$(arctgu)' = \frac{u'}{1+u^2}$
12	$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	12*a*	$(arcctgu)' = -\frac{u'}{1+u^2}$
13	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	13*a*	$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14*a*	$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Правила та формули, наведені в таблиці похідних, слід запам’ятати і використовувати для знаходження похідних функцій.

Зауваження 1. Диференціювання слід починати з застосування відповідних правил і лише після цього використовувати формули диференціювання основних елементарних функцій (див. таблицю похідних).

Зауваження 2. Слід мати на увазі, що необов'язково диференціювати задану функцію відразу. Можна попередньо виконати її тотожні перетворення, якщо це доцільно, тобто якщо це приведе, до спрощення диференціювання, а потім продиференціювати.

Зауваження 3 Не рекомендується захоплюватись спрощенням виразів, одержаних внаслідок диференціювання, бо основна мета полягає в опануванні техніки диференціювання, а не в перевірці вміння виконувати тотожні перетворення.

Під час знаходженні похідних слід пам'ятати наступні формули для $a>0$; $b>0$:

$a^0 = 1;$	$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k}, \quad n \geq 2;$
$a^x : a^y = a^{x+y};$	$\sqrt[n]{a^n} = a;$
$a^x \cdot a^y = a^{x-y};$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$
$(a^x)^y = a^{x \cdot y};$	$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}, \quad b \neq 0;$
$a^{-x} = \dfrac{1}{a^x};$	$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k};$
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x;$	$b \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot b^n};$
$a^x : b^x = (a:b)^x;$	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[n \cdot k]{a};$

де n і k будь-які раціональні числа.

Розв'яжемо декілька прикладів. Застосовуючи правила і формули диференціювання, знайдемо похідні функцій.

Приклад 1. Обчислити похідну від функції $y = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1.$

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила (2), (4), (1) і формулу (2), одержимо: $y' = (3x^4)' + (2x^3)' - (3x^2)' + (5x)' - 1' =$

$$= 3(x^4)' + 2(x^3)' - 3(x^2)' + 5(x)' - 0 =$$

$$= 3 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 5 = 12x^3 + 6x^2 - 6x + 5.$$

Приклад 2. Обчислити похідну від функції $f(x) = 3e^{-2x} + 4\lg x$

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила (2), (4) і формули (4*а*), (6), одержимо: $f'(x) = 3 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} + \dfrac{4}{\ln 10} \cdot \dfrac{1}{x} = -6 \cdot e^{-2x} + \dfrac{4}{x \ln 10}.$

Приклад 3. Обчислити похідну від функції $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила (5), (1) і формулу (2) одержимо: $f'(x) = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{(1+x^2)'(1-x^2)-(1+x^2)(1-x^2)'}{(1+x^2)^2} =$

$$= \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = \ln tg\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (5*a*), одержимо:

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \frac{x}{\sin x}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно правило (5), і формули (1),(7), одержимо: $y' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$.

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = x\sqrt{x}\arcsin x$.

Розв'язання. Скористаємося тим, що $x\sqrt{x} = x^{3/2}$, тоді

$$y' = \left(x\sqrt{x}\arcsin x\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\arcsin x\right)' =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\arcsin x + x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\arcsin x + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = (2x^3+4)^6$.

Розв'язання. Позначимо через $u = 2x^3+4$, тоді $y = u^6$ і за правилом 6 таблиці похідних, одержуємо:

$$y' = (u^6)'_u \cdot u'_x = 6u^5 \cdot (2x^3+4)' = 6(2x^3+4)^5 \cdot 6x^2 = 36x^2(2x^3+4)^5.$$

1.4. Диференціювання функцій, заданих неявно

Якщо функція y **задана неявно**, тобто визначається з рівняння $F(x, y) = 0$, то для відшукання похідної y' диференціюють відносно x обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, з огляду на те, що y є функцією від x. Після цього з отриманого рівняння першого ступеня щодо y' обчислюється похідна y'.

Приклад 7. Знайти похідну функції $x^2 + \sin y - e^{xy} = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо рівняння по x:

$$2x + \cos y \cdot y' - e^{xy}(y + xy') = 0,$$

звідки

$$y' = \frac{ye^{xy} - 2x}{\cos y - xe^{xy}}.$$

1.5. Диференціювання функцій, заданих параметрично

Якщо функція аргумента x **задана параметричними рівняннями**, то її похідна буде дорівнювати частці від ділення похідних кожної складової:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

тоді

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $\begin{cases} x = t^3 + 2t^2 - 1, \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$

Розв'язання. Знаходимо похідні $\begin{cases} x'_t = 3t^2 + 4t, \\ y'_t = 2t + 1, \end{cases}$

тому $y' = \dfrac{2t+1}{3t^2 + 4t}$.

1.6. Логарифмічне диференціювання.

Знаходження похідних від функцій, які допускають операцію логарифмування (добуток, частка, піднесення до степеня і добування кореня) значно спрощується, якщо ці функції попередньо прологарифмувати, а потім знайти їх похідні. Нагадаємо, що відношення $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$ називається **логарифміч-**

ною похідною функції $y=f(x)$, а її знаходження носить назву логарифмічного диференціювання. Спосіб **логарифмічного диференціювання** полягає в тому, що спочатку знаходять логарифмічну похідну функції, а потім похідну самої функції за формулою:

$$f'(x)=(\ln|f(x)|)'\cdot f(x).$$

Логарифмічну похідну будемо знаходити формально, маючи, однак, на увазі, що формула має сенс лише за умови, що $y > 0$.

Спосіб логарифмічного диференціювання зручно застосовувати для знаходження похідних складних, особливо показникових і показниково- степеневих функцій, для яких безпосереднє обчислення похідної з використанням правил диференціювання є трудомістким.

Формула для знаходження похідної степенево-показникової функції має вигляд:

$$(u^v)' = vu^{v-1} + u^v v'\cdot\ln u,$$

де $u=u(x)$, $v=v(x)$.-

У даному випадку доречно згадати формули логарифмування:

$$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2,\quad (0<a\neq 1,\ x_1>0,\ x_2>0);$$

$$\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2,\quad (0<a\neq 1,\ x_1>0;\ x_2>0);$$

$$\log_a x^p=p\cdot\log_a x,\quad (0<a\neq 1,\ x>0,\ p\in R);$$

Приклад 9. Знайти похідну функції $f(x)=(x^2+3x)^{x\cos x}$.

Розв'язання. За отриманою вище формулою маємо:

$$u=x^2+3x;\ v=x\cos x.$$

Похідні даних функцій матимуть вигляд: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x\sin x$.

Остаточно

$$f'(x) = x\cos x\cdot(x^2 + 3x)^{x\cos x-1}\cdot(2x + 3) + \cdot(x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln\cdot(x^2 + 3x).$$

Приклад 10. Знайти похідну функції $y=\dfrac{(x+1)^5\cdot\sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[6]{(x-6)^3}}$.

Розв'язання. Спочатку прологарифмуємо задану функцію відповідно до основи e:

$$\ln y=\ln\frac{(x+1)^5\cdot\sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[6]{(x-6)^3}}.$$

Застосуємо формули логарифмування, одержуємо:

$$\ln y=5\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-3)-\frac{3}{4}\ln(x-6).$$

Потім продиференціюємо обидві частини рівності, враховуючи, що y є функцією від x:

$$\frac{y'}{y}=\frac{5}{x+1}+\frac{1}{3(x-3)}-\frac{3}{4(x-6)}.$$

Із одержаного рівняння знаходимо y' і замінюємо функцію y на її вираз через x:

$$y'=\frac{(x+1)^5\cdot\sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[6]{(x-6)^3}}\cdot\left(\frac{5}{x+1}+\frac{1}{3(x-3)}-\frac{3}{4(x-6)}\right).$$

2. ПОХІДНІ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Нехай функція $y = f(x)$ в інтервалі (a,b) має похідну $y' = f'(x) = \varphi(x)$, яка є також функцією від x. Припустимо, що цю функцію можна диференціювати в точці x даного інтервалу.

Похідну функції $\varphi(x) = f'(x)$ в точці x називають **другою похідною функції *f (x)* або похідною другого порядку** в цій точці і позначають одним з таких символів:

$$f''(x),\quad y'',\quad \ddot{y},\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2f}{dx^2}.$$

Похідною третього порядку (третьою похідною) функції $y = f(x)$, якщо вона існує, називають похідну другої похідної: $y''' = (y'')'$.

Похідною n-го порядку (n-ю похідною) функції $y = f(x)$ називають похідну від похідної (n – 1)-го порядку і позначають :

$$f^{(n)}(x), y^{(n)},\ y^{(n)}=\left[y^{(n-1)}\right]',\quad \frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right).$$

Похідна n-го порядку обчислюється шляхом послідовного диференціювання функції.

Приклад 1. Знайти похідну другого порядку y″, якщо $y=x\sqrt{x}$.

Розв'язання. Скористаємося тим, що $x\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}$. Тоді

$$y'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}};\quad y''=(y')'=\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну другого порядку y″, якщо $y=e^{kx}$.

Розв'язання. $y'=\left(e^{kx}\right)'=ke^{kx};\quad y''=(y')'=\left(ke^{kx}\right)'=k^2e^{kx}.$

3. ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

3.1. Асимптоти

Означення. Якщо точка (x, y) безупинно переміщується по кривій $y = f(x)$ так, що хоча б одна з координат точки прямує до нескінченності, і при цьому відстань точки від деякої прямої наближається до 0, то ця пряма називається *асимптотою* кривої $y = f(x)$.

Означення. Якщо існує число a таке, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, то пряма $x = a$ є *вертикальною асимптотою* графіка $f(x)$.

З визначення вертикальної асимптоти випливає, що відповідне число a може бути

1) *розривом другого роду* для заданої функції,
2) точкою, яка знаходиться *на межі області визначення* функції.

Саме такі значення потрібно перевіряти на вертикальні асимптоти.

Означення. Якщо існують обидві границі: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - k_1 x\right) = b_1$, то пряма $y = k_1 x + b_1$ буде *правою похилою асимптотою* (якщо $k_1 = 0$, то пряма буде *правою горизонтальною асимптотою*) графіка $f(x)$.

Якщо існують обидві границі: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - k_2 x\right) = b_2$, то пряма $y = k_2 x + b_2$ буде *лівою похилою асимптотою* (якщо $k_2 = 0$, то пряма буде *лівою горизонтальною асимптотою*) графіка $f(x)$.

Зауваження. Якщо область визначення функції є множиною, обмеженою зверху, її графік не може мати правої похилої (горизонтальної) асимптоти, бо така функція просто не визначена для $x \to +\infty$. Аналогічно, якщо область визначення — це множина, обмежена знизу, то графік функції не може мати лівої похилої (горизонтальної) асимптоти.

Зауваження. Якщо функція є періодичною, то її графік не має похилих (горизонтальних) асимптот.

Для знаходження асимптот графіка функції треба:

1. Знайти E — область визначення $f(x)$;

2. Обчислити $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$. Якщо перша (друга) границя дорівнює ∞, то пряма $x = a$ ($x = b$) є вертикальною асимптотою графіка.

3. Знайти точки розриву функції другого роду, тобто такі точки x_i, за яких хоча б одна з однобічних границь: $\lim\limits_{x \to x_i+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_i-0} f(x)$, дорівнює нескінченності. Якщо такі точки є, то $x = x_i$ — вертикальні асимптоти графіка.

4. Права (ліва) похила асимптота може існувати на графіку функції лише тоді, коли область визначення функції є необмеженою зверху (знизу), і функція

є неперіодичною. У такому випадку перевіряємо одночасне існування границь $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k_1$ і $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1x\right)=b_1$ для правої асимптоти (якщо вони обидві існують, то $y=k_1x+b_1$ — права асимптота), а також одночасне існування границь $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2$ і $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-k_2x\right)=b_2$ для лівої асимптоти (якщо вони обидві існують, то $y=k_2x+b_2$ – ліва асимптота)

Приклад 1. Знайти асимптоти кривої $y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

Розв'язання. Область визначення функції: $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$. В усіх точках області визначення дана функція є неперервною, бо вона є відношенням двох неперервних функцій, при тому знаменник є додатним і не дорівнює нулю. Отже, якщо вертикальні асимптоти існують, то вони можуть знаходитися лише на межі області визначення, тобто це можуть бути лише значення $x=\pm1$. Перевіримо їх.

Нехай спочатку $x=1$: $\lim\limits_{x\to1+0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\infty$, тобто $x=1$ дійсно є вертикальною асимптотою.

Аналогічно: $\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\infty$, що говорить про наявність ще однієї вертикальної асимптоти $x=-1$.

Знайдемо похилі асимптоти $y=kx+b$. Обчислимо коефіцієнти:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1}+x\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2-1}+x-\frac{1}{x}\right)}=0.$$

Таким чином права похила асимптота існує, це пряма $y=x$.

Аналогічно маємо: $k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=-1,\ b_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right)=0,$

тому ліва похила асимптота є пряма $y=-x$.

3.2. Дослідження функції за допомогою похідної.

Правило знаходження інтервалів монотонності та екстремумів функції

Щоб знаходження інтервалів зростання та спадання функції, треба дослідити знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$ за умови, що $x_2 > x_1$. Якщо ця різниця на певному інтервалі є додатною, то функція на такому інтервалі є зростаючою, якщо ж різниця $f(x_2)-f(x_1)$ є від'ємною, то функція є спадаючою. Зрозуміло, що встановити безпосередньо знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$ не завжди легко, а тому під час дослідження функції щодо монотонності доречно користуватися достатньою умовою зростання та спадання функції: якщо $f'(x)>0$ $\lfloor f'(x)<0 \rfloor$ для всіх $x\in(a;b)$, то в інтервалі $(a;b)$ функція зростає (спадає).

Для знаходження інтервалів монотонності діємо за таким планом:

1) знаходимо область визначення функції;
2) знаходимо похідну функції;
3) знаходимо корені рівняння $f'(x) = 0$ і точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує (критичні точки);
4) розташовуємо отримані точки на числовій осі в порядку зростання;
5) визначаємо знак $f'(x)$ в кожному з одержаних інтервалів (для цього треба похідну розкласти на співмножники, якщо це можливо, або обчислити $f'(x)$ в будь-якій точці інтервалу і визначити її знак) і тим самим знаходимо інтервали спадання і зростання функції;
6) з'ясуємо, які із критичних точок є екстремумами (рис 3).

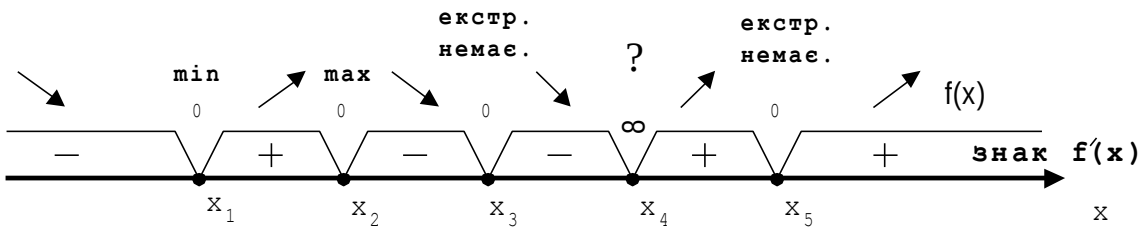


Рис. 3

Зауваження. В точці x_4 функція має мінімум за умови, що функція $f(x)$ в даній точці визначена, якщо ж функція $f(x)$ в точці x_4 не визначена, то екстремуму в даній точці не існує.

Приклад 2. Знайти екстремуми функції $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$.

1. Область визначення функції: $x\in R$.
2. $y'=2+\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}}$.
3. Похідна не існує, якщо $x=0$ і $y'=\dfrac{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}}=0 \quad\Rightarrow\quad x=-1$.

Отже, підозрілими точками щодо існування в них екстремуму, є точки $x_1=-1$ і $x_2=0$, які належать до області визначення. Вся область визначення поділилася на три частини: $(-\infty;-1)$, $(-1,0)$ і $(0,+\infty)$.

4. Визначимо знак похідної на кожній із одержаних частин:

Нехай $x\in(-\infty;-1)$. Візьмемо довільно значення з цієї області, наприклад, $x=-8$:

$$y'(-8)=2+\frac{2}{\sqrt[3]{-8}}=1>0.$$

Отже, $f'(x)>0$, якщо $x\in(-\infty;-1)$.

Нехай $x\in(-1,0)$. Візьмемо точку $x=-\frac{1}{8}$ й обчислимо значення похідної в даній точці:

$$y'(-\frac{1}{8})=2+\frac{2}{\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}}=-2<0.$$

Отже, $f'(x)<0$, якщо $x\in(-1,0)$.

Нехай, нарешті, $x\in(0,+\infty)$. Обчислимо значення похідної, наприклад, в точці $x=1$: $y'(1)=4>0$, тому $f'(x)>0$, якщо $x\in(0,+\infty)$.

5. Аналізуючи знаки похідної до і після точки, підозрілої щодо існування в ній екстремуму, робимо висновки: що $(x_1,y(x_1))=(-1,y(-1))=(-1,1)$ є точкою локального максимуму; $(x_2,y(x_2))=(0,y(0))=(0,0)$ є точкою локального мінімуму. На рисунку 4 зображено проміжки зростання й спадання функції.

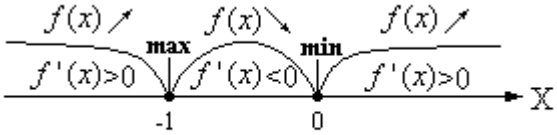


Рис.4.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $y=\frac{16}{x(4-x^2)}$.

Розв'язання:

1. Область визначення функції : $x\neq 0,\ x\neq\pm 2$.
2. $y'=\frac{16(3x^2-4)}{x^2(4-x^2)^2}$.
3. Похідна не існує в точках $x=0,\ x=\pm 2$, які не належать до області визначення; $y'=0$ в точках $x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ області визначення функції. Дві останні точки є підозрілими щодо існування в них екстремуму. Результати проведених досліджень представлені на рисунку 5.

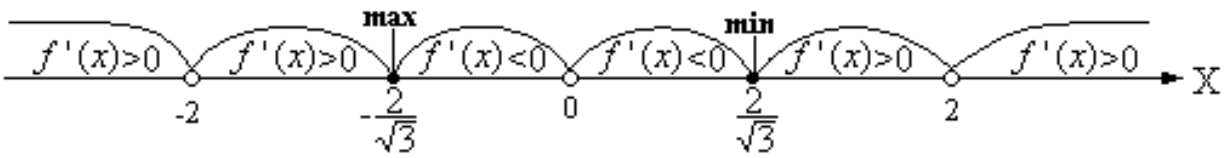


Рис.5.

Таким чином, $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-3\sqrt{3}\right)$ є точкою локального максимуму, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}},3\sqrt{3}\right)$ є точкою локального мінімуму.

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію $y=\frac{e^x}{x}$.

Розв'язання.

1. Область визначення функції: $x\neq 0$.
2. $y'=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.
3. Похідна не існує в точці $x=0$, яка не належать до області визначення; $y'=0$ в точці $x=1$, яка належить до області визначення функції і є єдиною підозрілою щодо існування в ній екстремуму. Результати проведених досліджень представлені на рисунку 6. Таким чином, $(1,e)$ — точка локального мінімуму.

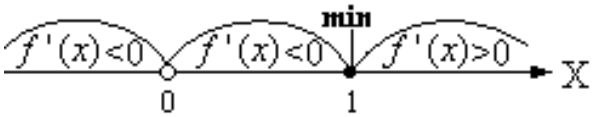


Рис.6.

3.3 Напрямок опуклості функції. Точки перегину

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку (a,b). Кажуть, що функція $f(x)$ є *опуклою вниз* (*опуклою вгору*) функцією на проміжку (a,b), якщо для будь-яких двох точок M і $\overline{M}$, які належать графіку $f(x)$, дуга, яка з'єднує ці точки, лежить під (над) хордою $M\overline{M}$. На рисунку 7,а зображено графік опуклої вниз функції; на рисунку 7,б— опуклої вгору функції.

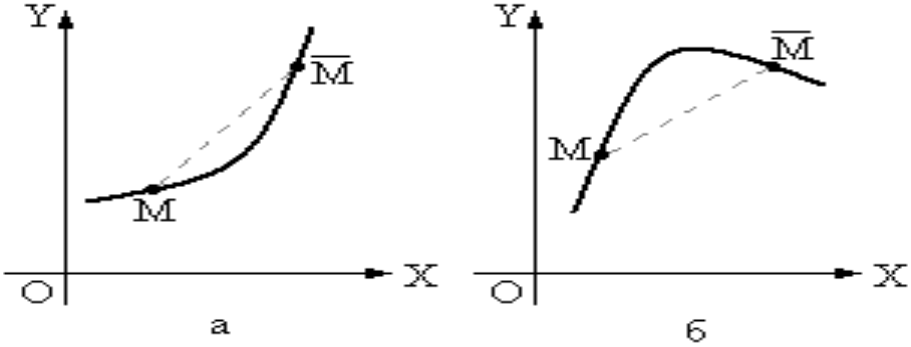


Рис.7.

Твердження. Нехай функція $f(x)$ визначена і двічі диференційована на проміжку (a,b). Для того, щоб функція $f(x)$ була опуклою вниз (вгору) на проміжку (a,b) необхідно і достатньо, щоб $f''(x)\geq 0$ $\left(f''(x)\leq 0\right)$ на (a,b).

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку (a,b), $x_0\in(a,b)$. Точка $(x_0, f(x_0))$ називається *точкою перегину* для функції $f(x)$, якщо в ній змінюється напрямок опуклості функції (рис.8).

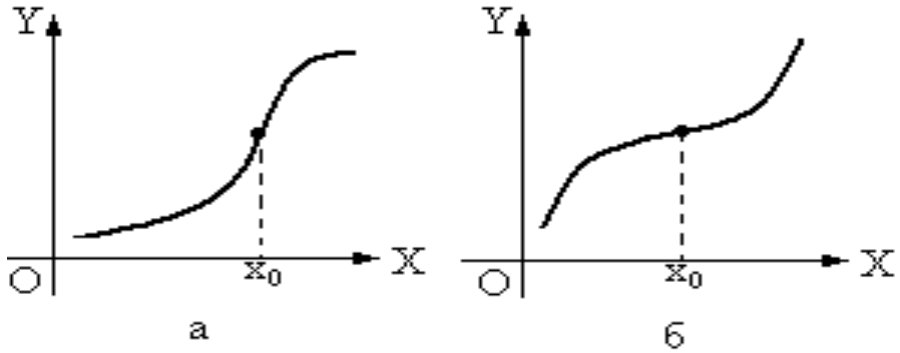


Рис.8.

Необхідна умова для існування точки перегину. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку (a,b), $x_0\in(a,b)$ — точка перегину функції. Тоді обов'язково виконується одна з наступних умов:

1) у точці $x_0\in(a,b)$, похідна другого порядку функції $f(x)$ не існує;

2) у точці $x_0\in(a,b)$, похідна другого порядку функції $f(x)$ дорівнює нулю ($f''(x_0)=0$).

Таким чином, точки, які є *підозрілими щодо існування в них перегину*, — це точки, в яких похідна другого порядку не існує або дорівнює нулю. В таких точках перегин може існувати, але може і не існувати. Потрібно перевірити достатні умови для існування перегину в точках.

Перша достатня для існування умова точки перегину. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і двічі диференційована на цьому інтервалі скрізь, за винятком, хіба що, точки $x_0\in(a,b)$. Якщо існують такі лівий і правий півоколи точки x_0, в кожному з яких $f''(x)$ зберігає знак, то

1) функція $f(x)$ має перегин в точці x_0, якщо $f''(x)$ має значення з різними знаками в відповідних півоколах;

2) функція $f(x)$ не має перегину в точці x_0, якщо $f''(x)$ праворуч і ліворуч від x_0 має значення з однаковими знаками.

Друга достатня умова для існування точки перегину. Нехай функція $f(x)$ визначена і двічі диференційована на інтервалі (a,b) і виконуються умови:

1) $f''(x_0)=0$;

2) в точці x_0 існує похідна третього порядку ($f'''(x_0) \neq 0$), то $f(x)$ має перегин в точці x_0.

Для того, щоб знайти точки перегину, треба:

1. Знайти область визначення функції $f(x)$.
2. Обчислити $f'(x)$, $f''(x)$.
3. Розв'язати рівняння $f''(x)$= 0, тобто знайти такі значення x, в яких похідна другого порядку не існує або дорівнює нулю. Зі знайдених значень обрати лише ті, які належать до області визначення функції, — це точки, підозрілі щодо існування в них перегину (для наочності має сенс зобразити область визначення функції й точки, підозрілі щодо існування в них перегину, на числовій осі). Ці точки поділять область визначення на частини.
4. На кожній з частин області визначення функції, отриманих на кроці 3, визначити знак $f''(x)$.
5. Для кожної точки, підозрілої щодо існування в ній перегину, проаналізувати знаки похідної другого порядку ліворуч і праворуч від неї: якщо друга похідна змінює знак при переході через точку, то аналізована точка є точкою перегину, інакше перегину немає.

Приклад 5. Визначити інтервали опуклості вгору і вниз, та точки перегину кривої Гауса: $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання:

1. Область визначення: $x \in R$.
2. $y' = -2xe^{-x^2}$; $y'' = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$;
3. Для y'' немає точок, в яких вона не існує. Розв'яжемо рівняння $y'' = 0$.

Отже, $2e^{-x^2}(2x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Обидві знайдені точки належать області визначення функції і є підозрілими щодо існування в них перегину. Вони поділяють область визначення на три частини: $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.

4. Визначимо знак y'' на кожній з отриманих на попередньому кроці частин.

Нехай $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Візьмемо якесь значення з даної множини, наприклад -10, і визначимо знак $y''(-10)$. Оскільки $y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, а $2e^{-x^2} > 0$ для будь-якого x, то знак y'' можна визначати лише за знаком виразу $(2x^2 - 1)$, тому легко визначити, що $y''(-10) > 0$. Це означає, що $y''(x) > 0$ на $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Нехай $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Обчислюємо знак другої похідної, наприклад в точці x = 0: $y''(0) < 0$, робимо висновок, що $y''(x) < 0$ на всьому проміжку $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Аналогічно встановлюється, що $y''(x) > 0$ на $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$.

5. Аналізуючи знак y'', робимо висновок, що обидві точки (рис.9):

і $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, і $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, є точками перегину.

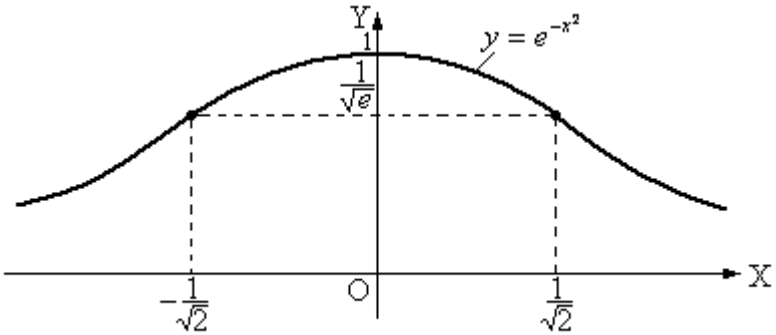


Рис.9.

Приклад 6. Знайти точки перегину функції $y = \sqrt[3]{x+2}$.

Розв'язання:

1. Область визначення функції: $x \in R$.
2. $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+2)^2}}$; $y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}$.

3. Похідна другого порядку в точці $x = -2$ не існує. Точка $x = -2$ належить області визначення, а тому є підозрілою щодо існування в ній перегину ($y'' \neq 0$), Точок в яких $y'' = 0$ не існує, тому інших підозрілих щодо існування в них перегину точок нема. Результати проведених досліджень представлено на рисунку 10, звідки випливає, що $(-2,0)$ є точкою перегину даної функції.

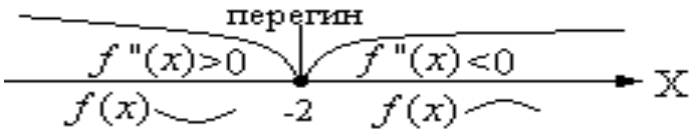


Рис.10.

Приклад 7. Знайти точки перегину функції $y = x^2 \ln x$.

Розв'язання:

1. Область визначення функції: $x > 0$.

2. $y' = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$; $y'' = (2\ln x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 3$.

3. Похідна другого порядку існує на всій області визначення функції; розв'яжемо рівняння: $y'' = 0 \;\Rightarrow\; 2\ln x + 3 = 0 \;\Rightarrow\; x = e^{-\frac{3}{2}}$.

При переході через точку $x = e^{-\frac{3}{2}}$ друга похідна змінює знак з "–" на "+", таким чином, $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$ є точкою перегину.

3.4. Дослідження функції і побудова графіка

При побудові графіка функції доцільно:

1. Знайти область визначення функції і з'ясувати характер її поведінки (обчислити границі) на межах області визначення, а також, при $x \to \pm\infty$.
2. З'ясувати, якою є функція: парною, непарною чи має загальний вигляд.
3. З'ясувати, чи є функція періодичною.
4. Знайти точки перетину функції з осями координат.
5. Знайти точки розриву функції і з'ясувати характер розривів.
6. Знайти асимптоти функції.
7. Обчислити $f'(x)$. Використовуючи похідну, визначити проміжки монотонності функції і точки екстремуму.
8. Обчислити $f''(x)$. Використовуючи похідну другого порядку, визначити проміжки опуклості вгору (вниз) функції і точки перегину.

Означення. Функція $f(x)$, областю визначення якої є множина E, називається *парною*, якщо одночасно виконуються наступні умови:

1) множина E є симетричною відносно осі *OY*;
2) для будь-якого аргументу $x \in E$ має місце рівність $y(-x) = y(x)$.

Зауваження. Графік парної функції є симетричним відносно осі *OY*, тому для спрощення роботи з дослідження функції для побудови її графіка можна розглядати її лише для додатних аргументів. Це дасть можливість побудувати частину графіка, яка має бути розташованою в правій координатній півплощині, а потім відобразити її симетрично відносно осі *OY* для отримання повного графіка.

Означення. Функція $f(x)$, областю визначення якої є множина E, називається *непарною*, якщо одночасно виконуються наступні умови:

1) множина E є симетричною відносно початку координат;
2) для будь-якого аргументу $x \in E$ має місце рівність $y(-x) = -y(x)$.

Зауваження. Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат — точки (0,0), тому для спрощення роботи з дослідження функції для побудови її графіка можна розглядати її лише для додатних аргументів. Це дасть можливість побудувати частину графіка, яка має бути розташованою в

правій координатній півплощині, а потім відобразити її симетрично відносно точки (0,0) для отримання повного графіка.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на множині E. Число $T \neq 0$ називається *періодом* функції $f(x)$, якщо для будь-якого значення аргументу $x \in E$, значення $x \pm T$ також належать області визначення функції і при цьому

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

Числа $\pm nT$, де $n \in N$, також будуть періодами $f(x)$. Сама функція $f(x)$ в такому випадку називається *періодичною*.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ є періодичною, а T — її найменший додатний період, то для побудови графіка з найменшими обчислювальними витратами має сенс досліджувати функцію на будь-якому проміжку області визначення, довжина якого дорівнює T. Побудувавши графік на такому проміжку, за допомогою паралельних переносів вздовж осі OX в додатному і від'ємному напрямках на відстані nT, де $n \in N$, отримаємо повний графік функції.

Приклад 6. Побудувати графік функції $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1. Знаходимо область визначення функції:

$$\sqrt[3]{x^2-1} \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2-1 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq \pm 1, \text{ тобто } x \in (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty).$$

2. Область визначення функції є симетричною відносно точки (0,0), крім того,

$$y(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2-1}} = -y(x),$$

тобто функція є непарною, її графік є симетричним відносно початку координат. Внаслідок цього будемо досліджувати функцію тільки в правій координатній півплощині.

3. Функція не є періодичною.
4. Точками перетину функції з віссю OX є:

$$y = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0 \;\Rightarrow\; x = 0,$$

з віссю ОУ:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = 0.$$

5. Точками розриву функції є $x = \pm 1$. В силу непарності функції визначимо характер розриву тільки для точки $x = 1$: $\lim\limits_{x \to 1+0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = +\infty$, звідки відразу випливає, що, по-перше, в точці $x = 1$ існує розрив другого роду, а по-друге, що пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою. Для зручності побудови графіка обчислимо також другу однобічну границю: $\lim\limits_{x \to 1-0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = -\infty$.

6. Залишилося з'ясувати питання щодо похилих асимптот. Розглянемо тільки праву похилу асимптоту $y = k_1 x + b_1$. Для цього обчислимо коефіцієнти

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = 0; \qquad b_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} - 0 \cdot x \right) = \infty.$$

Таким чином, права похила асимптота, а внаслідок симетричності графіка функції і ліва – не існують.

7. Обчислимо похідну функції

$$y' = \left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} \right)' = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} - x \cdot \frac{1}{3} \left(x^2 - 1 \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2x}{\left(x^2 - 1 \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{\left(x^2 - 1 \right)^4}}.$$

Знайдемо проміжки монотонності й точки екстремуму функції, для чого визначимо значення аргументу, за яких похідна y' дорівнює нулю або не існує (це точки, підозрілі щодо існування в них екстремуму). Розглянемо функцію тільки в додатній півплощині.

Похідна існує в усіх точках області визначення функції, тому залишилося знайти тільки нулі похідної:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{\left(x^2 - 1 \right)^4}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}.$$

Із результатів проведених досліджень зображених на рисунку 11, випливає, що точка $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \right)$ є точкою локального мінімуму.

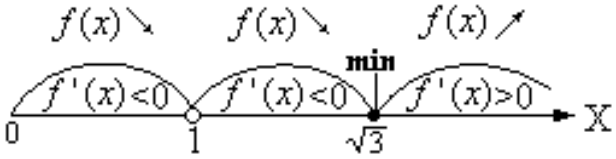


Рис.11.

8. Знайдемо другу похідну

$$y'' = \left(\frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{\left(x^2 - 1 \right)^4}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{2x\sqrt[3]{\left(x^2 - 1 \right)^4} - \left(x^2 - 3 \right) \cdot \frac{4}{3} \left(x^2 - 1 \right)^{\frac{1}{3}} \cdot 2x}{\sqrt[3]{\left(x^2 - 1 \right)^8}} = \frac{2x\left(9 - x^2 \right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2 - 1 \right)^7}}.$$

Похідна другого порядку існує скрізь на області визначення функції, тому підозрілими на перегин будуть лише точки, в яких $y'' = 0$:

$$y'' = \frac{2x\left(9 - x^2 \right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2 - 1 \right)^7}} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \; x = \pm 3.$$

Результати дослідження напрямків опуклості функції і точок перегину зображені на рисунку12.

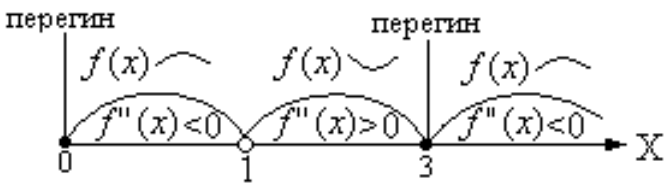


Рис.12.

Усі результати проведених досліджень зручно звести в одну таблицю.

x	0	(0,1)	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},3)$	3	$(3,\infty)$
y	0	–	$\pm\infty$	+	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$	+	1.5	+
y'		–	не існує	–	0	+		+
y		↘		↘		↗		↗
y''	0	–	не існує	+		+	0	–
y		⌒		⌣		⌣		⌒
	перегин		розрив		min		перегин	

Користуючись результатами дослідження, поступово побудуємо графік функції. Розглянемо спочатку тільки додатну координатну півплощину, для чого нанесемо характерні точки графіка — точки перетину з осями координат, точки екстремуму, перегину, а також асимптоти (рис.13,а).

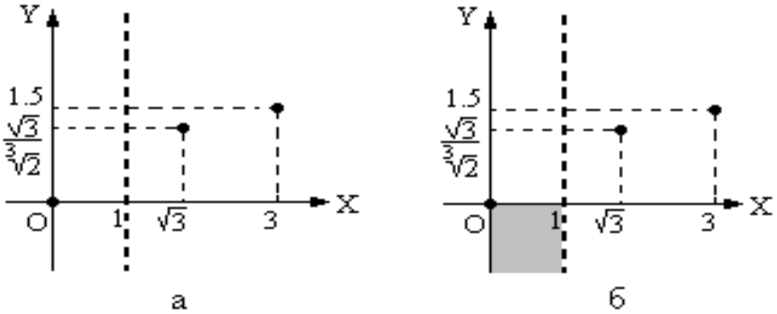


Рис.13.

Область визначення функції в правій півплощині характерними точками розділилася на чотири проміжки: $(0,1),(1,\sqrt{3}),(\sqrt{3},3),(3,\infty)$. Розглянемо $(0,1)$. На цьому інтервалі функція набуває від'ємних значень, тому графік буде знаходитись в нижній координатній півплощині (область розташування графіка зафарбована на рисунку13,б); з точки (0,0), яка належить графіку, функція починає спадати. Це може відбуватися відповідно до одного з трьох варіантів, зображених на рисунку 14: функція є опуклою вгору (рис.14,а), вниз (рис.14,б), є одночасно опуклою і вверх і вниз (графік є прямою лінією) (рис.14,в).

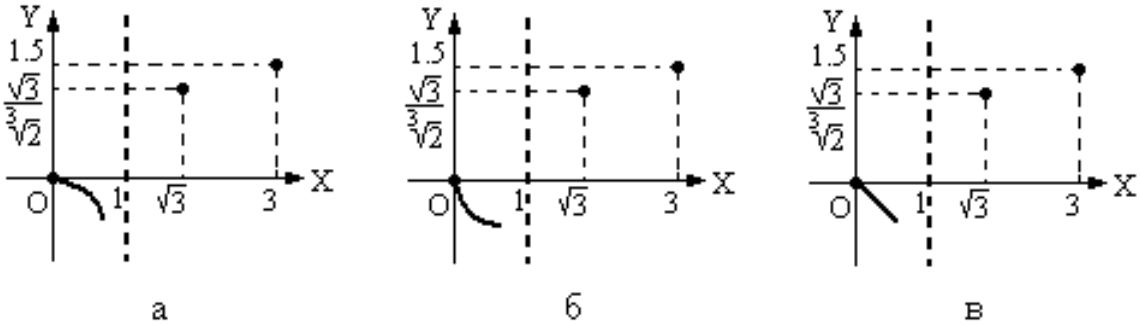


Рис. 14.

Однак, враховуючи, що функція є опуклою вгору на $(0,1)$, варіант, зображений на рисунку14,б, відпадає. Варіант, зображений на рисунку14,в також не підходить, оскільки результат попереднього дослідження говорить про те, що при необмеженому наближенні аргументу x до одиниці зліва, функція прямує до $-\infty$ (пункт 5 дослідження), не перетинаючи вертикальну асимптоту, а для варіанта зображеного на рисунку14,в перетин з прямою $x=1$ був би обов'язковим. Одержуємо потрібний варіант, який зображено на рисунку 15.

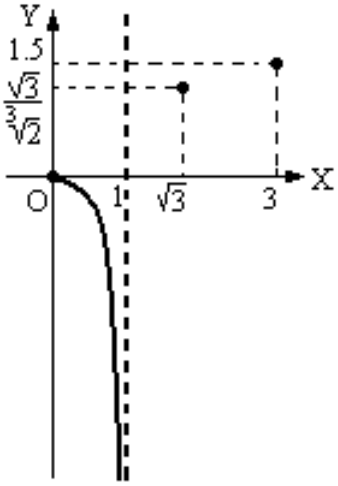


Рис. 15.

Розглянемо $(1,\sqrt{3})$. На цьому інтервалі функція набуває додатних значень, тому графік буде знаходитись у верхній координатній півплощині (область розташування графіка на рисунку 16,а є зафарбованою); функція спадає з $+\infty$ (в пункті 5 дослідження встановлено, що $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=+\infty$) до точки локального мінімуму $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$, будучи опуклою вниз, що відповідає зображенню на рисунку 16,б.

Враховуючи додатність функції на проміжку $(\sqrt{3},3)$, її монотонне зростання

від точки $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$ до точки $(3;1{,}5)$, яке відбувається за опуклості функції вниз, одержуємо чергову частину графіка, що відповідає інтервалу $(\sqrt{3},3)$ (рис.16,в).

При переході графіка функції через точку перегину $(\sqrt{3},3)$, функція змінює напрямок опуклості, залишаючись додатною й монотонно зростаючою (рис.16,г).

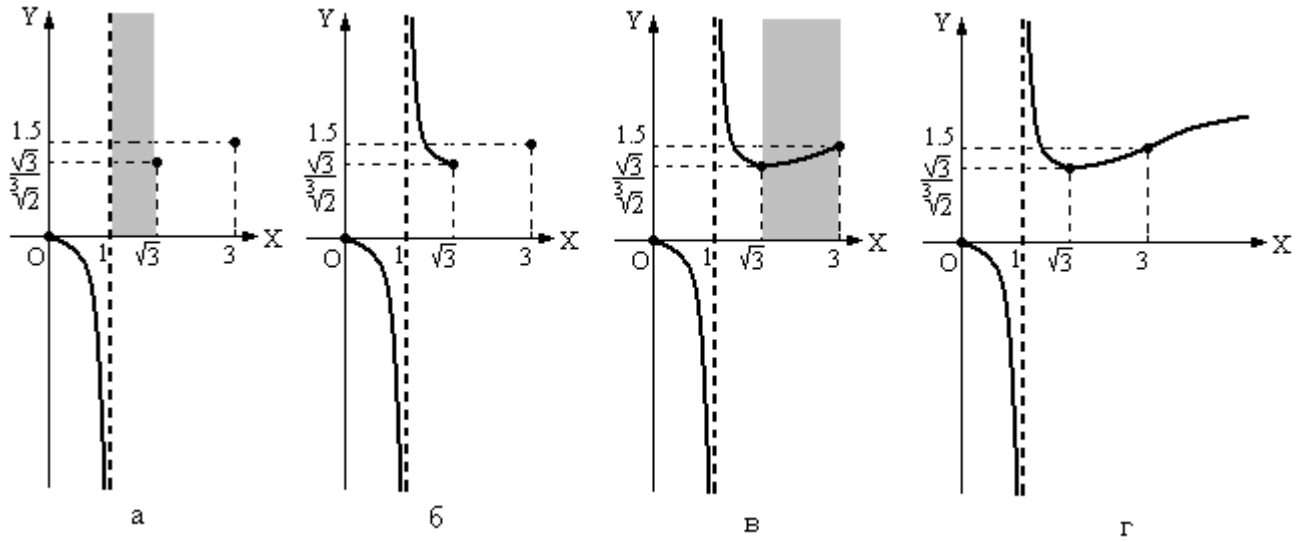


Рис.16.

4. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ.

4.1 Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла

Відомо, що однією з основних задач диференціального числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

Основною задачею інтегрального числення є обернена задача – знаходження функції за заданою її похідною або диференціалом. Ця операція (дія) називається інтегруванням.

Слід відзначити, що як і будь-яка обернена задача, дана задача є складнішою, за задачу диференціювання, а тому її розв`язок не є однозначним.

Шукану функцію називають первісною функцією відносно до даної функції.

За означенням, первісною функцією для функції *f(x)*, визначеною на проміжку *(a;b)*, називають функцію *F(x)*, визначену на тому самому проміжку, яка задовольняє умові

$$F'(x) = f(x) \quad \text{або} \quad dF(x) = f(x)dx.$$

Доведено, що будь-яка функція, неперервна на проміжку, має на цьому проміжку первісну.

Якщо функція *F(x)* є будь-якою первісною для функції *f(x)* на проміжку *(a;b)*, то множина всіх первісних для цієї функції *f(x)* на проміжку *(a;b)* мають вигляд:

$$F(x)+C,$$

де *C* – довільна стала.

Отже, для знаходження всіх первісних для даної функції досить знайти будь-яку одну і додати до неї довільну сталу.

Сукупність всіх первісних функції *f(x)*, визначеної на проміжку *(a;b)*, називається невизначеним інтегралом від функції *f(x)* на даному проміжку і позначається символом

$$\int f(x)dx,$$

де $\int -$знак інтеграла; *f(x)* – підінтегральна функція; *f(x)dx* – підінтегральний вираз; *x* – змінна інтегрування.

Таким чином, якщо $F'(x)=f(x)$, то $\int f(x)dx=F(x)+C$. Справедливе і обернене твердження.

Як уже зазначалося вище, операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається інтегруванням даної функції. Інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання.

Із сказаного випливає, що результат інтегрування можна перевірити диференціюванням.

4.2. Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)

1. $(\int f(x)dx)'=f(x)$.

2. $d(\int f(x)dx)=f(x)dx.$

3. $\int dF(x)=F(x)+C$.

4. $\int Cf(x)dx=C\int f(x)dx$, де *C*- const $\neq 0$.

5. $\int\left(f_1(x)\pm f_2(x)dx\right)=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$

6. $\int f(u)du=F(u)+C,$ де $u=\varphi(x)-$диференційована функція від незалежної змінної *x*.

4.3. Таблиця основних невизначених інтегралів

$$\int O du = \int O u'_x dx = C. \quad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx = u + C. \quad (2)$$

$$\int u^{\alpha} du = \int u^{\alpha} u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. \quad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \quad . \quad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C. \quad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C. \quad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C. \quad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C. \quad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u \cdot u'_x dx = -\cos u + C. \quad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u \cdot u'_x dx = \sin u + C. \quad (10)$$

$$\int tg u du = \int tg u \cdot u'_x dx = -\ln|\cos u| + C. \quad (11)$$

$$\int ctg u du = \int ctg u \cdot u'_x dx = \ln|\sin u| + C. \quad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = tg u + C. \quad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -ctg u + C. \quad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C. \quad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \qquad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C. \qquad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \qquad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C. \qquad (19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2+A}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C. \qquad (20)$$

$$\int \sqrt{u^2+A}du = \int \sqrt{u^2+A}\cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C. \qquad (21)$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \int \sqrt{a^2-u^2}\cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C, \ (a>0). \qquad (22)$$

Зауважимо, що в формулах (1-22) *a, A,* і $\alpha-$сталі, *u* – незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

Кожна з формул даної таблиці є справедливою для будь-якого проміжку, який належить області визначення відповідної підінтегральної функції.

Невизначені інтеграли (1-22) називають основними або табличними інтегралами і їх необхідно запам`ятати.

Корисно також запам`ятати, що коли $u=ax+b$ і $\int F(u)du = F(u)+C,$ то

$$\int F(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (23)$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int (4x^3 - 6x^2 + 5)dx.$

Розв`язання. Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати

$$\int (4x^3 - 6x^2 + 5) = \int 4x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 5dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 5\int dx.$$

Далі застосувавши до перших двох одержаних інтегралів формулу (3), а до третього – властивість 3 (формула 2), остаточно одержимо:

$$\int(4x^3-6x^2+5)dx=4\int x^3dx-6\int x^2dx+5\int dx=$$

$$=4\frac{x^4}{4}-6\frac{x^3}{3}+5x+C=x^4-2x^3+5x+C.$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int tg^3xd(tgx)$.

Розв`язання. В силу табличного інтеграла (3) з урахуванням, що $u=tgx$, одержимо:

$$\int tg^3xd(tgx)=\frac{tg^4x}{4}+C.$$

4.4. Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

При розв`язанні прикладів заміна змінної здійснюється за допомогою підстановок двох видів:

1) $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – монотонна, неперервно-диференційована функція нової змінної t .

У даному випадку формула заміни змінної набуває вигляду:

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

2) $u=\psi(x)$, де u– нова змінна.

Формула заміни змінної за такої підстановки має вигляд:

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx=\int f(u)du.$$

Передбачається, що після інтегрування буде знову здійснюватись перехід до початкової змінної x.

Приклад 3. Знайти інтеграл

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}.$$

Розв`язання. Покладемо $x+1=t^2$,тоді $x=t^2-1$, а $dx=2tdt$.

Виконаємо заміну

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{t}{1+t}dt=2\int\frac{t+1-1}{1+t}dt=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{1+t}=2t-2\ln|t+1|+C=2\sqrt{x+1}-2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right|+C.$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int\frac{dz}{\sqrt{e^z+1}}$.

Розв`язання. Зробимо підстановку $e^z+1=t^2$. Продиференціювавши обидві частини рівності, одержимо $e^zdz=2tdt$, тоді $dz=\frac{2tdt}{e^z}=\frac{2tdt}{t^2-1}$. Отже,

$$\int\frac{dz}{\sqrt{e^z+1}}=\int\frac{2tdt}{(t^2-1)t}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2*\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^z+1}-1}{\sqrt{e^z+1}+1}\right|+C.$$

(див. формулу 18 у таблиці інтегралів).

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

Розв`язання. $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}=\left|\begin{array}{c}x^2-9=t^2\\2xdx=2tdt\\xdx=tdt\end{array}\right|=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{tdt}{(t^2+9)t}=$

$$=\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=\frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}+C.$$

4.5. Метод інтегрування частинами

Якщо *u(x)* і *v(x)*- диференційовані функції від *x,* то має місце формула:

$$\int udv=uv-\int vdu. \qquad (24)$$

Формула (24) називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що ґрунтується на її застосуванні, – методом інтегрування частинами. Метод інтегрування частинами використовується в тому випадку, коли підінтегральний вираз містить:

1) добуток двох функцій;
2) логарифмічну функцію;
3) обернено-тригонометричну функцію.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int x^2\ln xdx$.

Розв`язання. Поклавши *u(x)=lnx, d(v(x))=x²dx* та застосувавши формулу (24), одержуємо:

$$\int x^2\ln xdx=\left|\begin{array}{ll}u=\ln x; & du=\frac{dx}{x}\\dv=x^2dx; & v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\end{array}\right|=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int x^2\sin 3xdx$.

Розв`язання. Покладемо $u=x^2$, $dv=sin3xdx$. Тоді $du=2xdx$, $v=\int\sin 3xdx=\frac{1}{3}\int\sin 3xd(3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x$. За формулою (I) знайдемо

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx$$

Щодо останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x$, $dv=\cos 3x dx$. Тоді

$$du=dx;\quad v=\int \cos 3x dx=\frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x.$$

Отже,

$$\int x\cos 3x dx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x dx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int \sin 3x dx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x.$$

Таким чином, остаточно будемо мати:

$$\int x^2\sin 3x dx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x\right)+C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx.$

**Розв`язання.** Застосувавши для його розв`язання формулу (24), одержимо:

$$\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx=\begin{vmatrix} u=x^2-3x+4; & du=(2x-3)dx \\ dv=e^{5x}dx; & v=\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}e^{5x}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\int(2x-3)e^{5x}dx=\begin{vmatrix} u=2x-3; & du=2dx \\ dv=e^{5x}dx; & v=\frac{1}{5}e^{5x}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{5}\int e^{5x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{25}e^{5x}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{125}e^{5x}\left(25x^2-75x+100-10x+15+2\right)+C=\frac{1}{125}\left(25x^2-85x+117\right)e^{5x}+C.$$

Приклад 9 Обчислити інтеграл $\int x\,arctgx\,dx.$

**Розв`язання.** Застосувавши для його розв`язання формулу (24), одержимо:

$$\int x\,arctgx\,dx=\frac{1}{2}\int arctgx\,d(x^2)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int x^2darctgx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-x+arctgx\right)+C.$$

4.6. Інтегрування раціональних функцій

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція вигляду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – алгебраїчні многочлени з дійсними коефіцієнтами,

причому $Q_m(x) \neq 0$. Якщо $Q_m(x) \equiv C \neq 0$, то раціональна функція $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, буде цілою раціональною функцією (многочленом). Таку функцію інтегрують безпосередньо:

$$a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менший, ніж степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто, якщо $n < m$ і неправильним раціональним дробом в протилежному випадку, тобто, якщо $n \geq m$.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n \geq m$) можна завжди подати у вигляді:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де $T(x)$ – ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ ($k < m$) – правильний раціональний дріб.

Спосіб інтегрування цілої раціональної функції, вже знаємо. Далі розглянемо інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$). Насамперед покажемо як інтегруються елементарні раціональні дроби, тобто дроби типів:

I $\frac{A}{x-a}$;

II $\frac{A}{(x-a)^k}$, де $к$ – ціле число, $к>1$;

III $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, де $D=b^2-4ac<0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

IV $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, де $к$ – ціле число, $к>1$ і $D=b^2-4ac<0$.

У всіх чотирьох випадках вважаємо, що A, B, a, b, c – дійсні числа.

Перелічені елементарні дроби називають також найпростішими дробами I, II, III і IV типів.

Розглянемо інтеграли від найпростіших дробів.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\cdot\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C$, де $k\neq 1$.

III. $$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \left|\left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b\right| = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| +$$

$$+\frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| +$$

$$+\begin{cases} \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}arctg\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac<0; \\ \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x+\frac{b}{2a}}\right)+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac=0; \\ \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\right|+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac>0. \end{cases}$$

IV. $$\int \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k} =$$

$$= \frac{A}{2a}\cdot\frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1} + \frac{1}{a^k}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}.$$

Останній інтеграл, як інтеграл виду $\int \frac{du}{(u^2+p^2)^k}$, можна знайти за рекурентною формулою, згідно з якою

$$I_k = \frac{1}{p^2}\left(\frac{u}{2(k-1)(u^2+p^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2} I_{k-1}\right).$$

Якщо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб, де *P(x)* і *Q(x)* – алгебраїчні многочлени з дійсними коефіцієнтами і

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \ldots (x-x_k)^{\alpha_k} (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1} \ldots (x^2+p_\nu x+q_\nu)^{\beta_\nu},$$

де $x_1, \ldots, x_k$ – дійсні попарно різні нулі многочлена *Q(x)*, а кожний тричлен $x^2+p_ix+q_i = (x-z_i)(x-\overline{z_i}) \quad (i=1,2,\ldots,\nu)$ з дійсними коефіцієнтами відповідає парі уявних спряжених нулів z_i і $\overline{z_i}$ кратності β_i многочлена *Q(x)*, причому $z_i \neq z_j$ для $i \neq j$, тобто $\alpha_1+\ldots+\alpha_k+2(\beta_1+\ldots+\beta_\nu)=n$, $\frac{p_i^2}{4}-q_i<0$, $(i=1,\ldots,\nu)$, то існують дійсні числа $A_i^{(\alpha)}(i=1,2,\ldots,k,\alpha=1,2,\ldots,\alpha_i)$, $M_j^{(\beta)}$ і $N_j^{(\beta)}$ $(j=1,2,\ldots,\nu,\beta=1,2,\ldots,\beta j)$ такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \ldots + \frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-x_1} + \ldots + \frac{A_k^{(1)}}{(x-x_k)^{\alpha_k}} + \ldots + \frac{A_k^{(\alpha_k)}}{x-x_K} +$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} + \ldots + \frac{M_1^{(\beta_1)}x+N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \ldots + \frac{M_\nu^{(1)}x+N_\nu^{(1)}}{(x^2+p_\nu x+q_\nu)^{\beta_\nu}} + \ldots + \frac{M_\nu^{(\beta_\nu)}x+N_\nu^{(\beta_\nu)}}{x^2+p_\nu x+q_\nu}$$

Правило інтегрування раціонального дробу.

1. Якщо раціональний дріб неправильний, то виділяємо з нього цілу частину шляхом ділення многочлена чисельника на многочлен знаменника, тобто подаємо у вигляді:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

де *T(x)* – многочлен, а $\frac{R(x)}{Q(x)}$ – правильний раціональний дріб.

2. Розкладаємо знаменник дробу на лінійні і квадратичні множники:

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \ldots (x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}, \text{ де } \frac{p_i^2}{4}-q_i<0, (i=1,2,\ldots,\nu).$$

3. Розкладаємо правильний раціональний дріб на елементарні (найпростіші) дроби.

Зауважимо, що таких дробів буде стільки, скільки коренів має многочлен *Q(x)*, включаючи їх кратність, причому кожній парі комплексних спряжених коренів буде відповідати один дріб III типу або ν дробів IV типу, якщо ν – кратність пари комплексних спряжених коренів.

4. Звільняємося від дробових членів, помноживши обидві частини рівності на *Q(x)*.

5. Обчислюємо невизначені коефіцієнти:

$$A_1^{(1)},\ldots,A_1^{(\alpha_1)},\ldots,M_\nu^{(1)},N_\nu^{(1)},\ldots,M_\nu^{(\beta_\nu)},N_\nu^{(\beta_\nu)},$$

для чого прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах одержаної тотожності і розв`язуємо систему лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів. Число таких рівнянь повинне дорівнювати числу невідомих.

Зауважимо, що можна також визначити коефіцієнти іншим способом, надаючи в одержаній тотожності змінній x довільних числових значень, причому якщо змінній x надати значень простих коренів функції *Q(x),* то обчислення будуть найпростішими. Часто буває корисно комбінувати обидва способи обчислення коефіцієнтів.

6. Підставляємо знайдені значення коефіцієнтів до схеми розкладання правильного раціонального дробу на елементарні (найпростіші). Таким чином, інтегрування раціонального дробу зводиться до знаходження інтегралів від многочлена й від елементарних (найпростіших) раціональних дробів.

Слід пам`ятати, що інтеграл від будь-якої раціональної функції завжди виражається в скінченному вигляді.

Приклад 10. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Розв`язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де $A=0$, $B=1$, $b^2-4ac=-64<0$. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена $4x^2+4x+5$, одержимо табличний інтеграл (17). Дійсно

$$\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(2x+1)^2+4}=\begin{vmatrix}u=2x+1\\du=2dx\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\int\frac{2dx}{(2x+1)^2+4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{2x+1}{2}+C=\frac{1}{4}arctg\frac{2x+1}{2}+C.$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int\frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx$.

Розв`язання. Як і в попередньому прикладі маємо також інтеграл від елементарного дробу III типу, де $A=-8$, $B=7$, $D=b^2-4ac=-20<0$. Спочатку виділимо похідну знаменника в чисельнику дробу. Для цього чисельник $7-8x$ подамо у вигляді $7-8x=-2(4x-2)+3$. Тоді

$$\int\frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx=\int\frac{-2(4x-2)+3}{2x^2-2x+3}dx=-2\int\frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx+3\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

Даний $\int\frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx$ обчислено за формулою (6) таблиці інтегралів, вважаючи, що $u=2x^2-2x+3$ і враховуючи, що $2x^2-2x+3>0$ для будь-якого x, а $\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}$ – за формулою (17), вважаючи, що $u=x-\frac{1}{2}$ і враховуючи, що $a^2=\frac{5}{4}$.

Далі наведемо інший спосіб розв'язання цього самого прикладу.

$$\int\frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{7-8x}{x^2-x+\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{7-8x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}dx=\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{2}=u\\ dx=du\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{7-8\left(u+\frac{1}{2}\right)}{u^2+\frac{5}{4}}du=\frac{1}{2}\int\frac{-8u+3}{u^2+\frac{5}{4}}du=-2\int\frac{2udu}{u^2+\frac{5}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{5}{4}}=$$

$$=-2\ln\left(u^2+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{2u}{\sqrt{5}}+C_1=-2\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C_1=$$

$$=-2\ln\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C_1=-2\ln\left(2x^2-2x+3\right)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C,$$

де $C=C_1+2\ln2$, бо $-2\ln\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)=-2\ln\frac{2x^2-2x+3}{2}=-2\ln\left(2x^2-2x+3\right)+2\ln2$.

Зазначимо, що інтеграл виду $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$, в якому квадратний тричлен $ax^2+вx+c$ має дискримінант $D=b^2-4ac\geq0$, можна знаходити аналогічно знаходженню інтеграла від елементарного дробу III типу.

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int\frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx$.

Розв`язання. Підінтегральна функція являє собою правильний раціональний дріб, знаменник якого має вигляд: $x^2+6x+9=(x+3)^2$, бо $D=b^2-4ac=0$. Тому

цей дріб можна подати у вигляді суми двох елементарних дробів II типу. Однак даний приклад простіше розв`язати таким самим способом, як і попередній приклад.

Отже, маємо

$$\int\frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx=\int\frac{\frac{3}{2}(2x+6)-11}{x^2+6x+9}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+6}{x^2+6x+9}dx-11\int\frac{dx}{x^2+6x+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+6x+9\right|-11\int\frac{d(x+3)}{(x+3)^2}=\frac{3}{2}\ln(x+3)^2+\frac{11}{x+3}+C=3\ln|x+3|+\frac{11}{x+3}+C.$$

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Розв`язання. Підінтегральний дріб є неправильним, оскільки степінь многочлена чисельника більший, ніж степінь многочлена знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{rl|l}
 & x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{3-3}
- & x^5-4x^3 & x^2+x+4 \quad \text{(ціла частина)} \\ \cline{2-2}
 & \quad x^4+4x^3-8 & \\
- & \quad x^4-4x^2 & \\ \cline{2-2}
 & \qquad 4x^3+4x^2-8 & \\
- & \qquad 4x^3-16x & \\ \cline{2-2}
 & \qquad\quad 4x^2+16x-8 & \text{(остача).}
\end{array}$$

Далі подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Тоді

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені: $x=0$, $x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів I типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Приводимо праву частину до спільного знаменника та прирівнюємо чисельники, одержимо:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

або

$$x^2+4x-2=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B+C=1, \\ x & 2B-2C=4, \\ x^0 & -4A=-2. \end{array}$$

Розв`язавши дану систему, знаходимо коефіцієнти A, B, C:

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{5}{4},\quad C=-\frac{3}{4}.$$

Слід відзначити, що тут коефіцієнти A, B і C простіше було б знайти способом підстановки до тотожності довільних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2),$$

$$\begin{array}{l|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

звідки $A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{5}{4},\quad C=-\frac{3}{4}.$

Таким чином,

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+$$

$$+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx.$

Розв`язання. Підінтегральний дріб є правильним і нескоротним. Його знаменник $x(1+x^2)^2$, має один простий корінь: $x=0$, а його множник: $1+x^2$ не має дійсних коренів і повторюється два рази, тому розкладання цього дробу на елементарні дроби має вигляд:

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}+\frac{Dx+F}{(1+x^2)^2}.$$

Приводимо праву частину до спільного знаменника та прирівнюємо чисельники, одержимо:

$$3x+1=A(1+x^2)^2+(Bx+C)x(1+x^2)+(Dx+F)x$$

або

$$3x+1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+F)x+A.$$

Коефіцієнти знайдемо комбінованим способом.

$$\begin{array}{c|c} x=0 & 1=A, \\ x^4 & 0=A+B, \\ x^3 & 0=C, \\ x^2 & 0=2A+B+D, \\ x & 3=C+F. \end{array}$$

Розв`язавши систему, одержимо: $A=1,\ B=-1,\ C=0,\ D=-1,\ F=3.$

Отже,

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}+\frac{-x+3}{(1+x^2)^2}$$

тоді шуканий інтеграл

$$\int\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{1+x^2}-\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2(1+x^2)}+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Останній інтеграл знаходимо за рекурентною формулою, згідно з якою

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right).$$

Враховуючи, що в нашому випадку $a^2=1$ і $n=2$, будемо мати

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx.$$

Таким чином, остаточно шуканий інтеграл

$$\int\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{3x}{2(1+x^2)}+\frac{3}{2}arctgx+C=$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x+1}{2(1+x^2)}+\frac{3}{2}arctgx+C.$$

4.7. Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл від будь-якої раціональної функції, як було зазначено вище, завжди виражається в скінченному вигляді, чого не можна сказати про інтеграл від фу-

нкції ірраціональної. Однак можна вказати на деякі підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді.

Загальний спосіб, за допомогою якого вдається знайти інтеграл від ірраціональної функції, полягає в тому, що внаслідок тієї чи іншої підстановки інтеграл від ірраціональної функції зводиться до інтеграла від функції раціональної. Тому цей спосіб називають раціоналізацією заданого інтеграла.

Розглянемо підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді.

1. Інтеграл вигляду

$$\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx,$$

де R – раціональна функція, m_i і $n_i > 1$ – натуральні числа (i=1, 2,…,p).

Даний інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x=t^k$, де k – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ (i=1, 2,…, p).

2. Інтеграл вигляду

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx,$$

де R – раціональна функція, m_i і $n_i > 1$ – натуральні числа *(i=1, 2,...,p)* і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d – сталі дійсні числа).

Такий інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, де k – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ (i=1, 2,…, p).

3. Інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Цей інтеграл зводиться до табличного шляхом виділення повного квадрата із квадратного тричлена.

4. Інтеграл вигляду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Для знаходження цього інтеграла спочатку виділяємо в чисельнику похідну квадратного тричлена $ax^2+вx+c$, після чого розкладаємо інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$
$$=\frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Перший із одержаних інтегралів є табличний інтеграл (4), а другий – розглянутий в п.3.

5. Інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Підстановкою $x-\alpha=\frac{1}{t}$ даний інтеграл зводимо до інтеграла розглянутого в п. 3.

6. Інтеграл вигляду $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, де m, n і p – раціональні числа, $a\neq 0$ і $b\neq 0$ називають інтегралом від диференціального бінома. Цей інтеграл виражається в скінченному вигляді у таких трьох випадках:

а) p – ціле число;

б) $\frac{m+1}{n}$ – ціле число;

в) $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число,

причому в усіх трьох випадках ціле число може бути додатним, від`ємним або дорівнювати нулю.

Розглянемо перший випадок: p – ціле число. Підстановка $x=t^k$, де k – найменший спільний знаменник дробів m і n, раціоналізує інтеграл.

У другому випадку $\frac{m+1}{n}$ – ціле число. Інтеграл раціоналізуємо за допомогою підстановки $a+bx^n=t^s$, де s – знаменник числа p.

У третьому випадку: $\frac{m+1}{n}+p$ – ціле число. Для раціоналізації інтеграла застосовуємо підстановку $ax^{-n}+b=t^s$, де s – знаменник числа p.

7. Інтеграл вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$, де R – раціональна функція.

Шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена ax^2+bx+c даний інтеграл зводимо до одного з трьох інтегралів:

а) $\int R\left(z,\sqrt{m^2-z^2}\right)dz$;

б) $\int R\left(z,\sqrt{m^2+z^2}\right)dz$;

в) $\int R\left(z,\sqrt{z^2-m^2}\right)dz$.

Дані інтеграли знаходять відповідно за допомогою наступних підстановок:

а) $z=m\ sint$;

б) $z=m\ tgt$;

в) $z=\dfrac{m}{\cos t}$.

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

Розв`язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого типу від ірраціональної функції. Оскільки $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=4$, то $k=12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Покладемо $x=t^{12}$. Тоді

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\left|\begin{matrix}x=t^{12}\\ dx=12t^{11}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t^6}{t^8-t^3}12t^{11}dt=12\int\frac{t^{17}dt}{t^3(t^5-1)}=12\int\frac{t^{14}dt}{t^5-1}=$$

$$=\left|\begin{array}{l|l} -\ t^{14} & t^5-1 \\ \quad t^{14}-t^9 & \overline{t^9+t^4} \\ \hline \quad\ t^9 & \\ \quad -\ t^9-t^4 & \\ \hline \qquad t^4 & \end{array}\right|=12\int\left(t^9+t^4+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt=12\left(\int t^9dt+\int t^4dt+\frac{1}{5}\int\frac{5t^4dt}{t^5-1}\right)=$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C=\frac{6}{5}\left(t^{10}+2t^5+2\ln\left|t^5-1\right|\right)+C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C.$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

Розв`язання. Маємо інтеграл другого типу від ірраціональної функції. Оскільки $n_1=3$, $n_2=2$, тому $k=6$. Використовуючи підстановку $2x+1=t^6$, звідки $x=\dfrac{1}{2}(t^6-1)$, $dx=3t^5dt$, одержимо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln\left|t-1\right|\right)+C.$$

Оскільки $t=\sqrt[6]{2x+1}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=3\left(\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2}+\sqrt[6]{2x+1}+\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|\right)+C.$$

Приклад 17. Обчислити інтеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

Розв`язання. Виділимо з квадратного тричлена повний квадрат:

$$9x^2-6x+2=9x-^26x+1+1=(3x-1)^2+1.$$

Тоді, враховуючи також, що $d(3x-1)=3dx$, одержимо табличний інтеграл (20):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{3dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}=\frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right|+C.$$

Приклад 18. Обчислити інтеграл $\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

Розв`язання. Спочатку в чисельнику виділимо похідну підкореневого виразу, після чого розкладемо інтеграл на суму двох інтегралів. Тоді

$$-4\int\frac{2-2x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}.$$

Перший з одержаних інтегралів є табличним інтегралом (4), а другий зводиться до табличного інтеграла (19) шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена $5+2x-x^2$.

Виділяючи повний квадрат, будемо мати

$$5+2x-x^2=-(x^2-2x-5)=-(x^2-2x+1-6)=6-(x-1)^2.$$

Отже,

$$\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx=-4\int\frac{2-2x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=$$

$$=-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$$

Приклад 19. Знайти інтеграл $\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

Розв`язання. Як і в попередньому прикладі, маємо

$$\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\int\frac{\frac{3}{8}(8x+4)-\frac{3}{2}-2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\frac{3}{8}\int\frac{8x+4}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\int\frac{2dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+C.$$

Зауважимо, що розв`язати аналогічні приклади можна також іншим способом. Далі наведемо інший спосіб розв'язання цього самого прикладу.

$$\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=\left|\begin{matrix}2x+1=t\\2dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{3\cdot\frac{t-1}{2}-2}{\sqrt{t^2+4}}\cdot\frac{1}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{3t-7}{\sqrt{t^2+4}}dt=\frac{3}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}}-\frac{7}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{4}\sqrt{t^2+4}-\frac{7}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+C.$$

Приклад 20. Знайти інтеграл $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Розв`язання. Покладемо $x-1=\frac{1}{t}$, тоді $x=\frac{1}{t}+1$ і $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Отже,

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{3+2\left(\frac{1}{t}+1\right)-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{3+\frac{2}{t}+2-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(2t)^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{2dt}{\sqrt{(2t)^2-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{4t^2-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x-1}+\sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{x-1}\right|+C$$

4.8. Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли від тригонометричних функцій, як і від функцій ірраціональних, не завжди можна знайти. Однак можна вказати на підклас таких функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді. В цей підклас тригонометричних функцій входять тригонометричні функції, які є раціональними функціями від *sinx, cosx, tgx, ctgx, secx, cosecx*. Оскільки *tgx, ctgx, secx, cosecx* самі виражаються раціонально через *sinx* і *cosx*, то цей підклас можна охарактеризувати як підклас тригонометричних функцій, які є раціональними функціями від *sinx* і *cosx*.

1. Інтеграл вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx$, де R – раціональна функція від *sinx* і *cosx* за допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки

$$tg\frac{x}{2}=t,\ \left(-\pi<x<\pi\right)$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції. При цьому

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2arctgt, dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2}=t$ вигідніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2}=t(0<x<2\pi)$.

Слід також відзначити, що в силу своєї універсальності підстановка $tg\frac{x}{2}=t$ часто приводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл.

Нижче наведемо випадки, в яких мета досягається за допомогою більш простих підстановок.

2. Інтеграл вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx,$ де R – раціональна функція від $sinx$ і $cosx$.

а) якщо виконується рівність

$$R(-sinx, cosx)\equiv -R(sinx, cosx),$$

то вигідно застосувати підстановку $cosx=t$;

б) якщо виконується рівність

$$R(sinx, -cosx)\equiv -R(sinx, cosx),$$

то доцільно застосувати підстановку $sinx=t$;

в) якщо виконується рівність

$$R(-sinx, --cosx)\equiv R(sinx, cosx),$$

то застосовують підстановку $tgx=t$ або $ctgx=t$, при цьому, якщо $tgx=t$, то

$$\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = arctgt; dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Зокрема,

- $\int R(\sin x)\cos x dx$ підстановкою $sinx=t$ зводиться до $\int R(t)dt$;
- $\int R(\cos x)\sin x dx$ підстановкою $cosx=t$ зводиться до $\int R(t)dt$;
- $\int R(tgx)dx$ підстановкою $tgx=t$ зводиться до $\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.

3. Інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$;

а) якщо m і n – цілі числа і принаймні одне з них є непарним додатним числом, наприклад, $m=2k+1$, то

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \cos^n x \cdot \sin^{2k} x \cdot \sin x dx =$$

$$\int \cos^n x \left(\sin^2 x\right)^k dx = -\int \cos^n x \left(1-\cos^2 x\right)^k d\cos x = \left|\cos x = t\right| = -\int t^n (1-t^2)^k dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n=2p+1>0$, то треба застосувати підстановку $t=sinx$. Тоді

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^p \cos x dx =$$
$$= \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p d\sin x = \int t^m (1-t^2)^p dt;$$

б) якщо обидва показники: m і n є парними невід`ємними числами (зокрема, один із них може дорівнювати нулю), то доцільно застосувати формули:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right), \tag{25}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right); \tag{26}$$

в) якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них є від`ємним, то треба зробити заміну $tgx=t$ або $ctgx=t$.

Зауважимо, що інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ дуже зручно знаходити за допомогою рекурентних формул.

$$\int \sin^m x\cos^n x dx = \begin{cases} -\dfrac{\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x\cos^n x dx, m \neq -n, \\ \dfrac{\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2} x dx, m \neq -n. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m-1}\cdot\dfrac{1}{\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x} + \dfrac{m+n-2}{m-1}\int \dfrac{dx}{\sin^{m-2} x\cos^n x}, m \neq 1, \\ \dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x} + \dfrac{m+n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2} x}, n \neq 1. \end{cases}$$

4. Інтеграл вигляду $\int tg^m x dx$ або $\left(\int ctg^m x dx\right)$, де m – ціле додатне число.

Для знаходження такого інтеграла застосовують формулу

$$tg^2 x = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad (\text{або} \quad ctg^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1),$$

за допомогою якої послідовно знижується степінь тангенса або котангенса.

5. Інтеграли вигляду $\int \sin ax\cos bx dx$, $\int \cos ax\cos bx dx$, $\int \sin ax\sin bx dx$.

Щоб знайти ці інтеграли, треба перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right), \tag{27}$$

$$\sin ax\sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right), \tag{28}$$

$$\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right). \tag{29}$$

6. Інтеграли вигляду $\int \dfrac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx$.

Такі інтеграли знаходять за допомогою універсальної підстановки $t = tg\dfrac{x}{2}$.

7. Інтеграли вигляду $\int \dfrac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x\cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin^2 x + b_2 \sin x\cos x + c_2 \cos^2 x} dx$.

Для знаходження таких інтегралів доцільно застосовувати підстановку $t=tgx$.

Приклад 21. Знайти інтеграл $\int \cos^4 x\sin^5 x dx$.

Розв`язання. Маємо інтеграл вигляду $\int \sin^m x\cos^n x dx$, де $m=5$, $n=4$.

Враховуючи, що $m=5>0$ і є непарним, одержимо:

$$\int \cos^4 x \sin^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \cos^4 x (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int t^4 (1-t^2)^2 dt = -\int t^4 (1-2t^2+t^4) dt =$$

$$= -\int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \right) + C = -\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} \right) + C.$$

Приклад 22. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx.$

Розв`язання. Маємо інтеграл такого самого вигляду, як і в попередньому прикладі, де $m = -\frac{4}{5}$, $n=3>0$ і є непарним, отже

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} \cos x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t^5 \\ \cos x dx = 5t^4 dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{1-t^{10}}{t^4} 5t^4 dt = 5\int \left(1-t^{10}\right) dt = 5\left(t - \frac{t^{11}}{11} \right) + C = 5\sqrt[5]{\sin x} - \frac{5}{11}\sqrt[5]{\sin^{11} x} + C.$$

Приклад 23. . Знайти інтеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$

Розв`язання. В даному випадку маємо інтеграл розглянутий в п.3 (випадок в), де $m=2$, $n= -4<0$ і є парним, отже

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{matrix} tgx = t \\ x = arctgt; dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}} \cdot \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Зауважимо, що даний інтеграл можна знайти простіше. Виконавши деякі тотожні перетворення підінтегрального виразу, одержимо

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x dx} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int tg^2 x d(tgx) = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

Приклад 24. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$

Розв`язання. Враховуючи, що *m=2, n=4*, тобто обидва показники є додатними і парними, отже

$$\int \sin^2 x\cos^4 x dx = \frac{1}{4}\cdot\cos^2 x dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cdot\cos 2x dx = \frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx + \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3} = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Приклад 25. Знайти інтеграл $\int tg^5 x dx$

Розв`язання. Враховуючи, що $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, будемо мати

$$\int tg^5 x dx = \int tg^3 x\cdot tg^2 x dx = \int tg^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \int tg^3 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx - \int tg^3 x dx = \frac{tg^4 x}{4} - \int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx =$$

$$= \frac{tg^4 x}{4} - \int tgx\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx + \int tgx dx = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

5. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

5.1. Поняття визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a;b]$ $(a<b)$ осі О*x* задана неперервна функція *f*(*x*). Відрізок $[a;b]$ розіб`ємо на *n* частин, довжини яких можуть бути довільними. Кожний такий відрізок будемо називати частковим. Абсциси точок розбиття позначимо через $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$

Довжину часткового відрізка, яка дорівнює різниці $x_к - x_{к-1}$ ($к$=1,2,…,*n*), позначимо через Δx_k: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

На кожному частковому відрізку оберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через ξ_k ($к$=1,2,…,*n*), обчислимо $f(\xi_к)$ – значення заданої функції *f*(*x*) в цій точці. Знайдемо добуток числа $f(\xi_k)$ на довжину Δx_k відрізка, на якому взято точку ξ_k, тобто $f(\xi_k)\Delta x_k$. Складемо суму таких добутків:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (30)$$

Така сума називається інтегральною сумою для функції *f(x)* на відрізку $[a;b]$.

За означенням, границя інтегральної суми (30), тобто $\lim\limits_{\substack{\max\Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на часткові відрізки, ні від вибору на них точок ξ_k, називається визначеним інтегралом функції *f*(*x*) на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким чином, $\lim\limits_{\substack{\max\Delta x_k \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx$, де, як і в невизначеному інтегралі; *f*(*x*) – підінтегральна функція, *f*(*x*)*dx* – підінтегральний вираз, *x* – змінна інтегрування.

Число *a* називають нижньою межею інтегрування, число *b* – верхньою межею інтегрування.

Зауважимо, що величина визначеного інтеграла залежить лише від виду підінтегральної функції і від меж інтегрування a і b. Нічого не зміниться, якщо змінну інтегрування позначити іншою буквою, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(u)du = \int\limits_a^b f(t)dt = \int\limits_a^b f(z)dz.$$

Гарантом існування даної границі, тобто визначеного інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, є неперервність функції *f*(*x*) на відрізку $[a;b]$.

5.2. Формула Ньютона – Лейбніца

Якщо функція *f*(*x*) неперервна на відрізку $[a;b]$ і *F*(*x*) – будь-яка первісна для *f*(*x*) на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (31)$$

Формула (31) має назву формули Ньютона – Лейбніца. Вона є основною формулою інтегрального числення. Для зручності користування формулу (31) записують у вигляді

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (32)$$

5.3. Властивості визначеного інтеграла

1. За означенням

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. За означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3. Якщо $f(x) \equiv 0$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0dx = 0.$

4. Якщо $f(x) \equiv 1$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a.$

5. Якщо $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[a;b]$ і c– стала, то на цьому відрізку інтегровна і функція $cf(x)$, причому

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx,$$

тобто сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

6. Якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – інтегровні функції на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку інтегровані і функції $f_1(x) \pm f_2(x)$, причому

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

7. Якщо $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[a;b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8. Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – інтегровні функції на відрізку $[a;b]$ і $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

9. Якщо $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку, то на цьому відрізку інтегровна і функція $|f(x)|$, причому

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

10. Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$ і $a<c<b$, то ця функція інтегровна і на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що має місце й обернене твердження. Цю властивість називають адитивною властивістю визначеного інтеграла.

11. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, де $a<b$, і $m \le f(x) \le M$ для $x \in [a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Тут m – найменше, а M – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Ці нерівності дають змогу оцінити значення визначеного інтеграла.

12. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \qquad (33)$$

При цьому значення функції $f(x)$ в точці c називають середнім значенням цієї функції на відрізку $[a;b]$.

Приклад 1. Обчислити $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Розв`язання. За формулою Ньютона – Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Отже, скориставшись цією формулою і властивістю 5 визначеного інтеграла, одержимо:

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \frac{1}{5}\int_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3} \cdot 5dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$=-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1}=-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(11-5)^2}-\frac{1}{(11-10)^2}\right)=-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36}-1\right)=\frac{7}{72}.$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

Розв`язання. Згідно з формулою (32) і властивостями 5 і 6 визначеного інтеграла, будемо мати

$$\int\limits_0^{16}\frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}=\int\limits_0^{16}\frac{(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+9}-\sqrt{x})(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}dx=\int\limits_0^{16}\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{x+9-x}dx=$$

$$=\frac{1}{9}\left(\int\limits_0^{16}\sqrt{x+9}dx+\int\limits_0^{16}\sqrt{x}dx\right)=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{16}=$$

$$=\frac{2}{27}\left((x+9)^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{16}=\frac{2}{27}\left(25^{\frac{3}{2}}+16^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{27}(125+64-27)=12.$$

5.4. Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $x=\varphi(t)$ – функція неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $a=\varphi(\alpha)\le\varphi(t)\le\varphi(\beta)=b$ для $\alpha\le t\le\beta$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (34)$$

Формулу (34) називають формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.

Із сказаного випливає, що функція $x=\varphi(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ повинна бути монотонною або іншими словами всі значення функції $\varphi(t)$ повинні знаходитися на відрізку $[a;b]$.

Зауважимо, що заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає обережності і обов'язкового виконання всіх перерахованих умов, накладених на функцію $x=\varphi(t)$.

Відзначимо також, що виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності переходити до початкової змінної, як це робиться при знаходженні невизначеного інтеграла, а досить лише перерахувати межі інтегрування для нової змінної.

Для цього до рівності $x=\varphi(t)$ замість x підставляємо по черзі нижню межу a і верхню межу b інтегрування і розв`язуємо рівняння $a=\varphi(t)$ і $b=\varphi(t)$. Знайдені значення t і будуть відповідно нижньою α і верхньою β межами ін-

тегрування для нової змінної інтегрування. Якщо кожне з рівнянь $a=\varphi(t)$ і $b=\varphi(t)$ задовольняє не одно, а декілька значень *t*, то за α і β можна прийняти будь-яке із них. Однак вільність вибору обмежується вимогою, щоб значення функції $\varphi(t)$ не виходили із відрізка $[a;b]$, на якому визначена і неперервна підінтегральна функція *f*(*x*).

Застерігаємо, що невиконання всіх указаних вимог, накладених на функцію $\varphi(t)$, може привести до грубих помилок.

У багатьох випадках доводиться замість підстановки $x=\varphi(t)$, покладати, що $t=\psi(x)$. У цьому випадку новими межами інтегрування є $\alpha=\psi(a)$ і $\beta=\psi(b)$. Якщо з $t=\psi(x)$ випливає, що $x=\varphi(t)$, то для функції $\varphi(t)$ повинні виконуватися всі вказані вище умови.

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Розв`язання. Функція $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. неперервна на відрізку $[1;4]$. Покладемо, що $x=t^2$. Тоді нові межі інтегрування знаходимо з рівнянь $1=t^2$, звідки $t_н=1$ і $4=t^2$, звідки $t_в=2$. Функція $x=t^2$ неперервна разом зі своєю похідною $x'=2t$ на відрізку $[1;2]$, причому її значення не виходять із відрізка $[1;4]$. Тому

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}=2\int_1^2 \frac{t^2dt}{1+t}=2\int_1^2 \frac{t^2-1+1}{1+t}dt=2\int_1^2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)\Bigg|_1^2=2\left(2-2+\ln3-\frac{1}{2}+1-\ln2\right)=1+2\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\int_0^{\ln2}\sqrt{e^x-1}dx$.

Розв`язання. Застосуємо підстановку $t=\sqrt{e^x-1}$. Тоді

$$t^2=e^x-1,\ \ 2tdt=e^xdx,\qquad dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+1}.$$

Якщо $x=0$, то $t=\sqrt{e^0-1}=0$. Якщо $x=\ln2$, то $t=\sqrt{e^{\ln2}-1}=\sqrt{2-1}=1$.

Отже,

$$\int_0^{\ln2}\sqrt{e^x-1}dx=2\int_0^1\frac{t^2dt}{t^2+1}=2\int_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=2(t-\operatorname{arctg}t)\Big|_0^1=2(1-\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}0)=2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4-\pi}{2}.$$

5.5. Інтегрування частинами для визначеного інтеграла

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a;b]$, то

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du \qquad (35)$$

Формулу (35) називають формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Застосування формули (35) мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежимося розв'язанням кількох прикладів.

Приклад 5. Обчислити $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x}$.

Розв`язання. Покладемо, що $u=x$, $dv=\frac{dx}{\sin^2 x}$. Тоді $du=dx$, $v=\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$. Оскільки $u=x$, $v=-ctgx$, $u'=1$ і $v'=\frac{1}{\sin^2 x}$ неперервні на відрізку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$, то в силу формули (35)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\,dx}{\sin^2 x} = -x\,\mathrm{ctg}x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}x\,dx = -\frac{\pi}{3}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4} + \ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln\sin\frac{\pi}{3} - \ln\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = \frac{(9-4\sqrt{3})\pi}{36} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити $\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx$.

Розв`язання. Враховуючи, що $u=\ln(x+1)$, $dv=dx$ за формулою (35), одержимо:

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)\,dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(x+1); du=\dfrac{dx}{x+1} \\ dv=dx; \quad v=x \end{matrix} \right| = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x\,dx}{x+1} =$$

$$= (e-1)\ln e - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}dx = e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = e-1-(x-\ln(x+1))\Big|_0^{e-1} =$$

$$= e-1-(e-1-\ln e+\ln 1) = e-1-e+1+1=1.$$

5.6. Обчислення визначених інтегралів, яке ґрунтується на властивостях підінтегральної функції

1. Якщо *f(x)* непарна функція, тобто *f(– x)= –f(x)*, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

2. Якщо *f(x)* парна функція, тобто *f(–x)=f(x)*, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$

3.Якщо функція *f(x)* періодична з періодом T, тобто *f(x+T)=f(x)*, то

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx,$$

де *n* – ціле число.

Приклад 7. Обчислити $\int_{-7}^{7} \frac{x^4 \sin x}{x^6+2} dx.$

Розв`язання. Оскільки $f(x) = \frac{x^4 \sin x}{x^6+2} -$ функція непарна, отже

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 \sin(-x)}{(-x)^6+2} = -\frac{x^4 \sin x}{x^6+2} = -f(x),$$

а відрізок інтегрування $[-7;7]$ – симетричний, то відразу робимо висновок, що заданий інтеграл дорівнює нулю.

Приклад 8. Обчислити $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx.$

Розв`язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{x \sin x}{\cos^2 x} -$ парна, так як $f(-x) = \frac{-x \sin(-x)}{\cos^2(-x)} = \frac{x \sin x}{\cos^2 x} = f(x).$ Тому $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx.$

Беручи інтеграл за формулою інтегрування частинами, одержимо:

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}; & v = \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x}{\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x} = \frac{\pi}{3\cos\frac{\pi}{3}} - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - \ln\operatorname{tg}\frac{5\pi}{12}.$$

Таким чином, шуканий інтеграл

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \ln\mathrm{tg}\frac{5\pi}{12}\right).$$

Приклад 9. Обчислити $\int_{-2}^{2} \frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx.$

Розв`язання. Запишемо даний інтеграл у вигляді суми двох інтегралів і враховуючи, що під знаком першого інтеграла функція непарна, а під знаком другого – парна, будемо мати

$$\int_{-2}^{2} \frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx = \int_{-2}^{2} \frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}dx + \int_{-2}^{2} \frac{x^5+x^3}{x^3+x}dx =$$

$$= 0 + 2\int_{0}^{2} x^2 dx = 2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Приклад 10. Обчислити $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$

Розв`язання. Підінтегральна функція є періодичною функцією з періодом π, отже

$$f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi)+\sin^4(x+\pi)} = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x).$$

Тому можна від верхньої і нижньої меж інтегрування відняти число π. Тоді

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x+\sin^4 x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx dx}{\cos^2 x(1+tg^4 x)} = \left| \begin{array}{ll} t = \mathrm{tg}x, & dt = \frac{dx}{\cos^2 x} \\ t_H = \mathrm{tg}0 = 0, & t_B = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_{0}^{1} \frac{tdt}{1+t^4} = \int_{0}^{1} \frac{d(t^2)}{1+(t^2)^2} = \mathrm{arctg}t^2\Big|_0^1 = \mathrm{arctg}1 - \mathrm{arctg}0 = \frac{\pi}{4}.$$

6. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

6.1. Площа плоскої фігури

Нагадаємо, що плоска фігура, обмежена прямими $y=0$, $x=a$, $x=b$ і графіком неперервної і невід`ємної на відрізку $[a;b]$ функції $y=f(x)$ (рис.17), називається криволінійною трапецією.

Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S = \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (36)$$

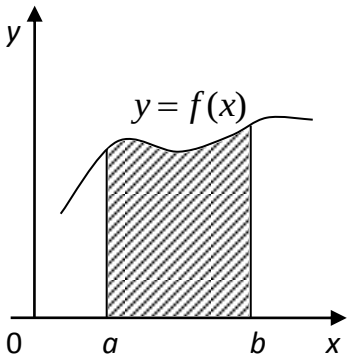


Рис. 17

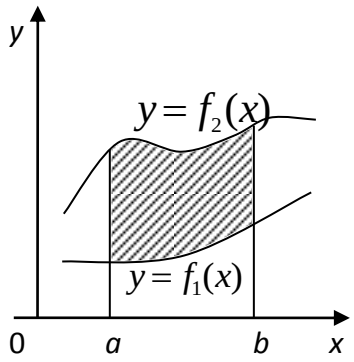


Рис. 18

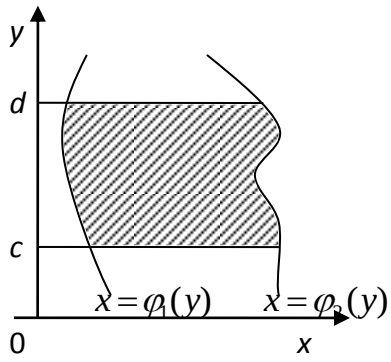


Рис. 19

Якщо плоска фігура обмежена двома кривими: $y_B=f_2(x)$ і $y_H=f_1(x)$, причому на відрізку $[a;b]$ $f_2(x)>f_1(x)$ і двома прямими: $x=a$ і $x=b$ (рис.18), то її площа обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b (y_B-y_H)dx. \qquad (37)$$

Зауважимо, що формула (36) є окремим випадком формули (37) за умови, що $y_н=0$.

Якщо плоска фігура обмежена кривими: $x_n=\varphi_2(y)$, $x_l=\varphi_1(y)$ і прямими: $y=c$ і $y=d$, причому $c>d$ і $\varphi_2(y)>\varphi_1(y)$ на відрізку $[c;d]$ (рис.19), то її площа обчислюється за формулою

$$S=\int_c^d (x_n-x_л)dy. \qquad (38)$$

Якщо плоска крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad \text{і} \quad t_1\le t\le t_2,$$

то площа фігури обчислюється за формулою

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x_t'dt. \qquad (39)$$

І нарешті, якщо неперервна крива задана в полярних координатах рівнянням $r=r(\varphi)$, то площа криволінійного сектора *OAB* (рис.20), обмеженого дугою кривої $r=r(\varphi)$, і двома радіусами *OA* і *OB*, які відповідають значенням $\varphi_1=\alpha$ і $\varphi_2=\beta$, обчислюється за формулою

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (40)$$

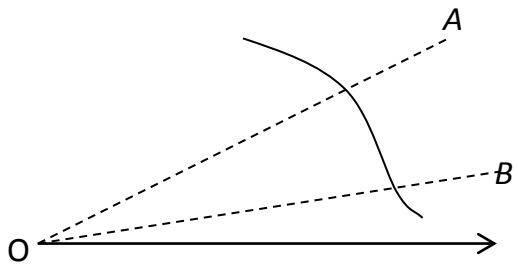


Рис. 20

Зауважимо, що розв`язання геометричної задачі необхідно починати з побудови рисунка.

Задача 1. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y=\frac{1}{1+x^2}$ і параболою $y=\frac{x^2}{2}$.

Розв`язання. Крива $y=\frac{x^2}{2}$ – парабола з вершиною в точці $O(0;0)$ і віссю симетрії Oy. Вітки параболи напрямлені вгору (рис.21).

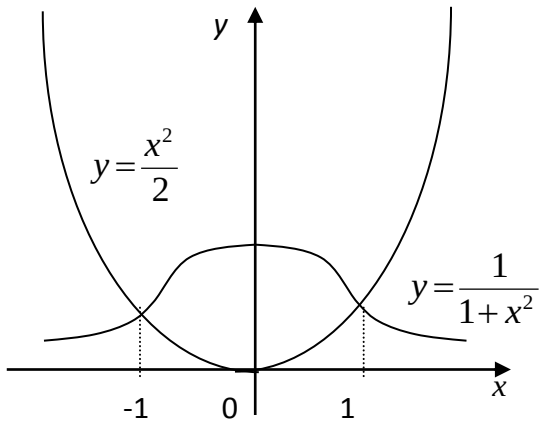


Рис. 21

Крива $y=\frac{1}{1+x^2}$ – локон Аньєзі. З рівняння видно, що при будь-якому x функція набуває лише додатних значень, а тому її графік розташований вище осі Ox, а вісь Oy є її віссю симетрії, тому що $y(-x)=y(x)$. Найбільше значення,

яке дорівнює одиниці, функція набуває при x=0, а при $x \to \pm\infty \quad y \to 0.$ Схематично графік цієї функції зображений на рис.21. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рисунку 21.

Площу фігури обчислимо за формулою (38):

$$S = \int_a^b (y_B - y_H)dx.$$

Для визначення меж інтегрування, знайдемо абсциси точок перетину ліній, розв`язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ y = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Звідки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Отже, $a = -1$, $b = 1$.

Враховуючи також, що $y_b = \dfrac{1}{1+x^2}$, а $y_n = \dfrac{x^2}{2}$ будемо мати

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx,$$

а з урахуванням симетрії фігури відносно осі Oy

$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\left(\operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{6} \right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

6.2. Об`єм тіла

Якщо $Q(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі Ox в точці з абсцисою x (рис.22), то об`єм тіла обчислюється за формулою

$$V = \int_a^b Q(x)dx, \tag{41}$$

де a і b – абсциси крайніх перерізів тіла

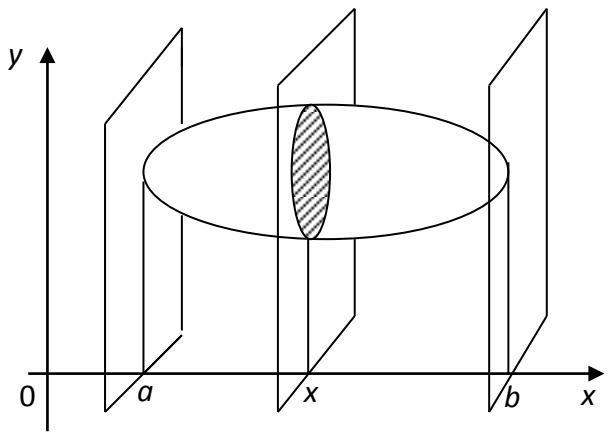


Рис. 22

.

Для обчислення об`ємів тіл обертання відносно координатних осей слід застосувати одну з наступних формул:

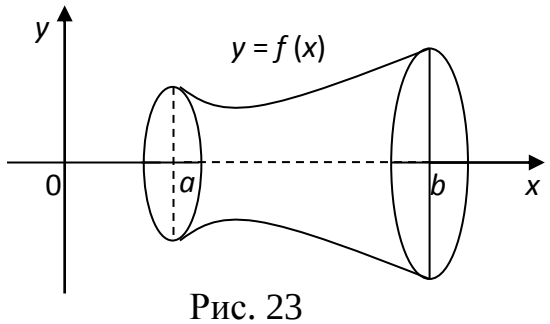


Рис. 23

$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx \qquad (42)$$

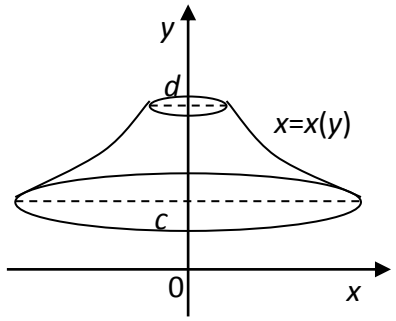


Рис. 24

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dx \qquad (43)$$

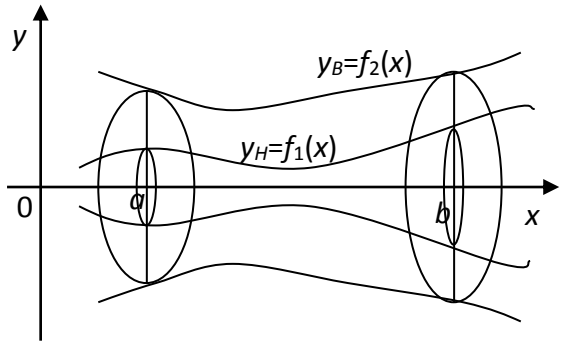


Рис. 25

$$V_x = \pi \int_a^b \left(y_B{}^2 - y_H{}^2 \right) dx \qquad (44)$$

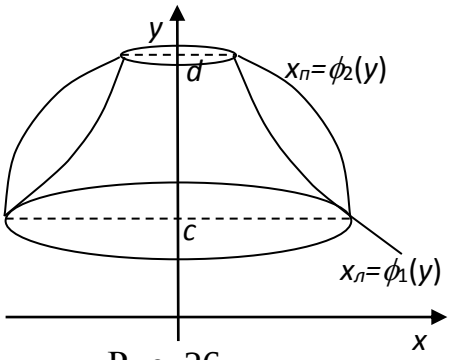


Рис. 26

$$V_y = \pi\int_c^d \left(x_п^{\,2} - x_л^{\,2}\right)dy \qquad (45)$$

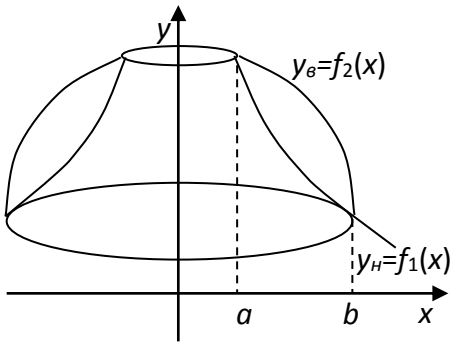


Рис. 27

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\left(y_в - y_н\right)dx \qquad (46)$$

Задача 2. Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y=xe^x$ і прямими $x=1$ і $y=0$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об'єм тіла обертання.

Розв'язання. Побудуємо тіло обертання (рис.28).

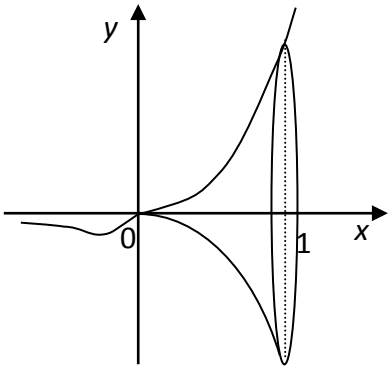


Рис. 28

Об'єм одержаного тіла будемо обчислювати за формулою (44), враховуючи, що $y_в=xe^x$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$: $V_x = \pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx.$

Використовуючи далі двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати:

$$V_x=\pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx=\left|\begin{array}{c}\int udv=uv-\int vdu\\ u=x^2;\ du=2xdx\\ dv=e^{2x}dx;\ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right|==\pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x}-\int xe^{2x}dx\right)\Bigg|_0^1=\left|\begin{array}{c}u=x;du=dx\\ dv=e^{2x}dx;v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right|=$$

$$=\pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\int\frac{1}{2}e^{2x}dx\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x}-\frac{x}{2}e^{2x}+\frac{1}{4}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1=\pi\left(\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right).$$

Таким чином, шуканий об’єм дорівнює $\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right).$

6.3. Довжина дуги плоскої фігури

Якщо плоска лінія задана в прямокутній системі координат: $y=f(x$ на відрізку $\lfloor a;b\rfloor$, то довжина її дуги обчислюється за формулою:

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx. \tag{47}$$

Якщо плоска крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t)\end{cases}$ і $t_1\le t\le t_2$, то довжина її дуги обчислюється за формулою

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(y_t')^2+(x_t')^2}dt. \tag{48}$$

І нарешті, якщо неперервна крива задана в полярних координатах рівнянням $r=r(\varphi)$, то довжина її дуги між двома радіусами OA і OB, які відповідають значенням $\varphi_1=\alpha$ і $\varphi_2=\beta$, обчислюється за формулою

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(r_\varphi')^2}d\varphi. \tag{49}$$

Задача 2. Знайти довжина астроїди, рівняння якої $\begin{cases}x=2\cos^3\frac{t}{4},\\ y=2\sin^3\frac{t}{4}.\end{cases}$

Розв’язання.

Рівняння $\begin{cases}x=2\cos^3\frac{t}{4},\\ y=2\sin^3\frac{t}{4},\end{cases}$ визначає астроїду, де параметр t – це кут.

Якщо t=0, то $\begin{cases} x = 2\cos^3 0 = 2, \\ y = 2\sin^3 0 = 0, \end{cases}$ тобто точка A(2;0) (рис.29).

Якщо t=2π, то $\begin{cases} x = 2\cos^3 \dfrac{\pi}{2} = 0, \\ y = 2\sin^3 \dfrac{\pi}{2} = 2, \end{cases}$ тобто точка B(0;2) (рис.29).

Таким чином, якщо t змінюється від 0 до 2π, точка описує чверть астроїди (рис.29).

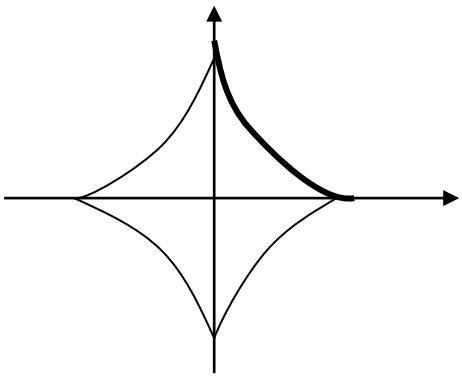


рис.29

Сама ж крива є симетричною відносно двох координатних осей, тому довжина всієї астроїди дорівнює $4 \cdot \breve{AB}$.

Оскільки крива задана параметрично, то $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt.$

$$x'(t) = 6\cos^2 \frac{t}{4} \cdot (-\sin \frac{t}{4}) \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{2}\cos^2 \frac{t}{4} \cdot \sin \frac{t}{4},$$

$$y'(t) = 6\sin^2 \frac{t}{4} \cdot \cos\frac{t}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}\sin^2 \frac{t}{4} \cdot \cos\frac{t}{4},$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = \frac{9}{4}\cos^2 \frac{t}{4} \cdot \sin^2 \frac{t}{4} \cdot (\cos^2 \frac{t}{4} + \sin^2 \frac{t}{4}) = \frac{9}{4}\cos^2 \frac{t}{4} \cdot \sin^2 \frac{t}{4} = \frac{9}{16}\sin^2 \frac{t}{2}$$

Таким чином: $L = 4\int\limits_0^{2\pi} \frac{3}{4}\sin\frac{t}{2}dt = -6\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = -6(-1-1) = 12.$

7. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ.

11.01 – 11.30 Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ першого порядку від заданих функцій.

11.01

1. $y = 5^{x^2 \sin^3 x} + \left(\sin\frac{x}{4}\right)^{\sqrt{2}}$.
2. $y = \sqrt[4]{3x + x\sqrt[5]{x^2}}$.
3. $y = \ln arctg\frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
4. $y = (x^3 + 1)^{tg^2\frac{x}{2}}$.
5. $y\sin x - \cos(x - y) = 0$.
6. $\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{t^2-1}. \end{cases}$

11.02

1. $y = \frac{e^{-3\sqrt{x}}}{1+e^{4x^2}}$.
2. $y = \ln\sin 3x + x^2 \arcsin^5 2x$.
3. $y = \sqrt[5]{(1-x^2)^2}$.
4. $y = \left(\sin\frac{x}{4}\right)^{tg^3\frac{2}{x}}$.
5. $arctg y = x + y^2$.
6. $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t. \end{cases}$

11.03

1. $y = \frac{\sqrt{5x^3+1}}{4+5x^3}$.
2. $y = (1 + ctg^3 5x)e^{\frac{x}{3}}$.
3. $y = \ln^2\cos\frac{2}{x^2+1}$.
4. $y = \cos^x(3x+1)$.
5. $x^2\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$.
6. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - arctg t \end{cases}$

11.04

1. $y = \frac{\sqrt{1-\sin^3 2x}}{1+\cos 4x}$.
4. $y = (\ln tg x)^{\sin^2 x}$.

2. $y = e^{tg^5 \frac{x}{3}} - 2arctg\sqrt{x}$.

3. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln\sqrt{1 + x^2}$.

5. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$.

6. $\begin{cases} x = \ln(t^3 + 2), \\ y = \dfrac{t}{t^3 + 2}. \end{cases}$

11.05

1. $y = x^2 tg^5 3x + \arcsin^2 \dfrac{x}{5}$.

2. $y = \ln \dfrac{ctg^3 \dfrac{x}{3}}{1 + \cos^2 x}$.

3. $y = 10^{1 - \sin^4 3x}$.

4. $y = (arctg\sqrt{3x + 1})^{x^3 + 1}$.

5. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

6. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = t^3 - 3t + 1. \end{cases}$

11.06

1. $y = \ln(9x^3 + \sqrt[3]{x^5 + 1})$.

2. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} + \ln tg^3 \dfrac{x}{7}$.

3. $y = (1 + \sin_3 3x) e^{arctg^2 5x}$.

4. $y = (x^3 - 1)^{\cos\sqrt{x}}$.

5. $x^2 \ln(1 + y^3) + y \ln(1 + x^3) = 0$.

6. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3}, \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3}. \end{cases}$

11.07

1. $y = \sin^4(3x - 1) e^{-x^3}$.

2. $y = \sqrt[4]{(1 + \cos^5 7x)^3}$.

3. $y = 3tg \dfrac{x}{5} + 3^{tg^5 x}$.

4. $y = \left(\dfrac{x^3}{1 + x^2} \right)^x$.

5. $(y^3 - x^3)^2 - x^2 y + y - x = 0$.

6. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t, \\ y = 2\sin t - \sin 2t. \end{cases}$

11.08

1. $y=\ln\left(\sin^3 4x+arctg\frac{x}{4}\right)$.

2. $y=\sqrt[5]{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$.

3. $y=e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}\arcsin^2\ln x$.

4. $y=(arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2+1)}$.

5. $(x^2+1)^2+(y^2+1)^2-xy=0$.

6. $\begin{cases} x=3t-\sin 3t, \\ y=\sin^2 3t. \end{cases}$

11.09

1. $y=\sqrt[7]{\frac{3x+2}{1-4x}}$.

2. $y=ctg^5 x ctg 5x$.

3. $y=\ln\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}$.

4. $y=(\ln^2 x)^{\cos 3x}$.

5. $x^2+y^2+\arcsin y+y arctg 2x=0$.

6. $\begin{cases} x=\frac{4-t}{1+t}, \\ y=\frac{t^3}{2-t^3}. \end{cases}$

11.10

1. $y=\ln^5(2x+7)-\sqrt[3]{\sin^2 3x}$.

2. $y=\sqrt{xe^{2x}+2x^3}$.

3. $y=3^{ctg\frac{1}{x}}-\frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. $y=(x^3+2)^{\sqrt{tgx}}$.

5. $e^{-\frac{y}{x}}+\ln y=2$.

6. $\begin{cases} x=\ln(t^5+3), \\ y=\frac{t^2}{t^5+3}. \end{cases}$

11.11

1. $y=tg^5 3x-e^{-\frac{1}{x^2}}$.

2. $y=\arcsin(x^3+5)$.

3. $y=x^3\ln(x^2+5)+\frac{1}{\cos^4\frac{x}{5}}$.

4. $y=(x^5+5)^{\cos 2x}$.

5. $x^3y^2+\sin y+(x-y)^2=0$.

6. $\begin{cases} x=te^t, \\ y=te^{-t}. \end{cases}$

11.12

1. $y=\ln\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x^2}$.

2. $y=x^3e^{-\frac{1}{x^2}}+e^{\sin^3 x}$.

3. $y=\frac{2x^3-1}{\sqrt{\cos\frac{x}{3}}}$.

4. $y=\sin^2 x^{x^2-1}$.

5. $(y^2+x)^3+(x^2-3y)^3=0$.

6. $\begin{cases} x=t+\frac{1}{2}\cos 2t, \\ y=\sin^3 2t. \end{cases}$

11.13

1. $y=5^{ctg^2(5x+3)}$.

2. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}e^{-3x}$.

3. $y=\left(\frac{4}{3x^2}-\frac{1}{9x}\right)\sqrt{4x+x^2}$.

4. $y=(\ln 3x)^{arctg\frac{3}{x}}$.

5. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{2}}=5$.

6. $\begin{cases} x=t^3-3\pi, \\ y=t^3-6arctgt \end{cases}$

11.14

1. $y=\sqrt{3}arctg^2 x+\frac{1}{x}+tg\sqrt{x}$.

2. $y=x^2e^{-x^2}-5^{1-\ln^2 3x}$.

3. $y=3arctg\ln^3\frac{1}{x}$.

4. $y=\ln(\cos(7x))^{\sin\frac{x}{2}}$.

5. $y-\cos^3 y+\sin^3 x=0$.

6. $\begin{cases} x=\arccos t(t^3+1), \\ y=\arcsin 5t. \end{cases}$

11.15

1. $y=2^{\arcsin 2x}+\left(1-\arccos\frac{x}{3}\right)^3$.

2. $y=e^x\cos 3x+\sqrt[7]{2x+\sqrt[5]{x^3}}$.

3. $y=\frac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$.

4. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$.

5. $\ln y+\frac{x^2}{y}=3$.

6. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, \\ y=\sin t+t\cos t. \end{cases}$

11.16

1. $y = 5\sin^2\frac{x}{3}ctgx.$

2. $y = \ln\frac{\cos^4 x}{\sqrt{\sin 2x}}.$

3. $y = 5^{\arcsin\sqrt{x}} - 2arctg\frac{x}{2}.$

4. $y = (x^2 + e^x)^{tg^3 x}.$

5. $xe^y + y^2 = 10.$

6. $\begin{cases} x = \frac{1}{t} - t, \\ y = \sqrt{t^2 + 1}. \end{cases}$

11.17

1. $y = \sqrt[5]{(3 - \sqrt{x\sin x})^3}.$

2. $y = 3\cos^2\frac{x^2}{\ln x} + ctge^{x^2+4}.$

3. $y = 5arctg(x^2 \ln x).$

4. $y = (1 - \sqrt{x})^{\cos\frac{1}{x}}.$

5. $y^3 + \sqrt[3]{x} = \arcsin y.$

6. $\begin{cases} x = t + \cos t, \\ y = \sqrt{tgt}. \end{cases}$

11.18

1. $y = \frac{1}{3}\arcsin(\cos^3\frac{x}{5}).$

2. $y = 5^{tg\frac{x}{2}} \ln x.$

3. $y = \frac{e^{5x}}{1 + e^{3x}}.$

4. $y = \ln^3 x^{x^7}.$

5. $\sin(x + \sqrt{y}) = y^2 + 1.$

6. $\begin{cases} x = t\sin t, \\ y = \frac{t}{\cos t}. \end{cases}$

11.19

1. $y = 2^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} + 3tg^3\frac{x}{5}.$

2. $y = e^{5x}\cos^2 3x + 7.$

3. $y = arctg^4(x\ln x).$

4. $y = (1 + 2^x)^{x^2+2}.$

5. $2^{x+y} = x + 10y.$

6. $\begin{cases} x = 3e^{5t}, \\ y = 5\ln t. \end{cases}$

11.20

1. $y = 5\sin 3^{\ln x} + 2.$
2. $y = (2x+3)e^{5x} + \dfrac{\ln x}{x}.$
3. $y = (\ln 2)^{\sin x} - ctg^3 \dfrac{x}{2}.$
4. $y = (3+\ln^2 x)^{\sin^5 x}.$
5. $4x - y^4 = \cos(xy^2).$
6. $\begin{cases} x = 3t^2 + 1, \\ y = arctg\sqrt{t}. \end{cases}$

11.21

1. $y = 2^{\sqrt{\cos(3x+5)}} + \ln ctg\sqrt[3]{x}.$
2. $y = \dfrac{x^5}{\cos^2 7x} - (\cos 5^{\sqrt{tgx}})^3.$
3. $y = \sqrt[5]{\sin 10x}\, e^{arctg\frac{1}{x}}.$
4. $y = (x^7 + x)^{\sqrt{\ln x}}.$
5. $x + tgy = 2^x + y^2.$
6. $\begin{cases} x = \sqrt{1+3t}, \\ y = t^2 \sin t. \end{cases}$

11.22

1. $y = \dfrac{x}{\ln^2 x} + x^5 5^{\cos\frac{x}{2}}.$
2. $y = (arctg\sqrt{\ln x})^{\sqrt{3}}.$
3. $y = 3\arcsin^4 3x + \sqrt[3]{\ln^2 tg\dfrac{x}{7}}.$
4. $y = (2x + \cos 3x)^{\frac{1}{x}}.$
5. $\arccos y + xy^2 = 1.$
6. $\begin{cases} x = \ln^3 t, \\ y = t^2 + ctg\sqrt{t}. \end{cases}$

11.23

1. $y = \sqrt[5]{1 + xe^{\sqrt{x}}}.$
2. $y = (2x+3)^5 + 5^{2x+3}.$
3. $y = \dfrac{2^x}{tg^3 x} + 1.$
4. $y = (e^{5x} + \cos\sqrt{x})^{\log_5 x}.$
5. $arctg\dfrac{x}{y} + \sin(xy) = y^3.$
6. $\begin{cases} x = te^t, \\ y = \arcsin t + \sin t. \end{cases}$

11.24

1. $y = \ln(x - \sqrt[3]{x}) - x^3 \ln x.$
2. $y = \cos 3^{x^2} + \left(x^3 + \dfrac{3}{x}\right)^5.$
3. $y = tg\dfrac{x^2}{x^3+1} + 5.$
4. $y = (1 + \sin^8 7x)^{\frac{2}{x}}.$
5. $arctgy = 2x + \sqrt{y}.$
6. $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{\sin t}, \\ y = t^2 \cos t. \end{cases}$

11.25

1. $y = e^{\frac{x}{2}} arctg^2 x$.
2. $y = tg \ln^4 x + 10\sqrt{\cos\frac{x}{5}}$.
3. $y = \frac{3^{ctgx}}{\sqrt{2x^3+1}} + (x^3 + e^{3x})^7$.
4. $y = (3^x + \ln x)^{\sqrt[3]{x^2}}$.
5. $arctgy = x\sin y$.
6. $\begin{cases} x = 2t\sin t, \\ y = 3\cos^2 t. \end{cases}$

11.26

1. $y = x^2(\arcsin 3x)^3$.
2. $y = 7\log_2(e^{\frac{x}{2}} + 1) + 7^{\ln x}$.
3. $y = \frac{arctg3x}{1+9x^2} - 3\sqrt{\cos 2x}$.
4. $y = (tg7x - x^7)^{\ln^5 x}$.
5. $y^3 + xy = 1$.
6. $\begin{cases} x = \sin t + \cos t, \\ y = tgt + ctgt. \end{cases}$

11.27

1. $y = \sqrt[6]{x + (\sin\ln x)^3}$.
2. $y = \frac{e^{3x}}{2x+5} - x\ln(1+x^2)$.
3. $y = 3\arcsin^4(\sqrt{x} - 2)^5$.
4. $y = ctg(x+1)^{\sqrt{3x^2+2}}$.
5. $\sqrt{x - y^3} = 2\sin^3 x$.
6. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t + 1, \\ y = 2tgt - 3. \end{cases}$

11.28

1. $y = \sin(x + \sqrt[3]{\cos 2x})$.
2. $y = 3\log_7(3^{\ln x} + 5) + \frac{3x}{\ln x}$.
3. $y = x^2 arctgx^2 - 2^x$.
4. $y = (3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$.
5. $tg(xy0 = 3\cos(x\sqrt{y})$.
6. $\begin{cases} x = \sqrt{1+2t}, \\ y = 3t^2\cos^2\sqrt{t}. \end{cases}$

11.29

1. $y = (2 + \ln 5)^{tgx} + \sqrt{\frac{x}{\sin x}}$.
2. $y = \sqrt[3]{arctg\frac{x}{2}} - \log_2(5^x - 1)$.
4. $y = \left(1 + \sin\frac{2}{x}\right)^{e^{2x}}$.
5. $(x^2 + y^2) + \cos\frac{x+y}{x} = 5$.

3. $y = xe^{7x} + (x + e^{7x})^3$.

6. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = 3t^3 \ln t. \end{cases}$

11.30

1. $y = x\log_5(x^3+1) + (\ln 3)^{\cos 2x}$.

2. $y = \dfrac{x}{(x^3+1)^2} - arctg^3 \sin 7x$.

3. $y = 2^{\ln(1+tg^3\frac{x}{4})}$.

4. $y = (3+\cos\sqrt{x})^{\ln^2 x}$.

5. $\sqrt{\sin y} + \cos^2(xy^2) = 0$.

6. $\begin{cases} x = t^3 + 5\sin t, \\ y = t\cos 3t. \end{cases}$

12.01 – 12.30 Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ та $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ наступних функцій.

12.01 1 $y = x^3 \cdot e^{-x}$; 2 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = arcctg\, t. \end{cases}$

12.02 1 $y = \ln \sin x$; 2 $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$

12.03 1 $y = e^{arctg x}$**;** 2 $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \ln\cos t. \end{cases}$

12.04 1 $y = \left(1 + x^2\right) \cdot arcctg x$; 2 $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 + 5. \end{cases}$

12.05 1 $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; 2 $\begin{cases} x = 5\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right), \\ y = 3\sin^2 t. \end{cases}$

12.06 1 $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$; 2 $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$

12.07 1 $y = e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos x$; 2 $\begin{cases} x = t \cdot \cos t, \\ y = t \cdot \sin t. \end{cases}$

12.08 1 $y=\cos 3x\cdot\ln x$; 2 $\begin{cases} x=e^{-t}, \\ y=e^{3t}. \end{cases}$

12.09 1 $y=\ln tg3x$; 2 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\dfrac{1}{\cos t}. \end{cases}$

12.10 1 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$; 2 $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=t-\cos t. \end{cases}$

12.11 1 $y=5arcctgx+x^8$; 2 $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

12.12 1 $y=\dfrac{x}{x^2-1}$; 2 $\begin{cases} x=3\cos^2 t, \\ y=2\sin^3 t. \end{cases}$

12.13 1 $y=x^3\cdot\ln x$; 2 $\begin{cases} x=\sin t+\cos t, \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

12.14 1 $y=x\cdot\sqrt{x^2+1}$; 2 $\begin{cases} x=\dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$

12.15 1 $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$; 2 $\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=3+\cos t. \end{cases}$

12.16 1 $y=\sqrt[3]{x^2-1}$; 2 $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{t}. \end{cases}$

12.17 1 $y=x\cdot arctgx$; 2 $\begin{cases} x=t^3+5t, \\ y=t^5+4t. \end{cases}$

12.18 1 $y=e^{ctg\,7x}$; 2 $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$

12.19 1 $y=\cos\ln x;$ 2 $\begin{cases} x=2t-t^3, \\ y=2t^2. \end{cases}$

12.20 1 $y=x\cdot e^{-x^2};$ 2 $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t. \end{cases}$

12.21 1 $y=arctg x;$ 2 $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=\cos t. \end{cases}$

12.22 1 $y=e^{\sqrt{x}};$ 2 $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right). \end{cases}$

12.23 1 $y=e^x\cdot\sin x;$ 2 $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

12.24 1 $y=\dfrac{1}{1-x^2};$ 2 $\begin{cases} x=arcctg\, t, \\ y=\ln\left(1+t^2\right). \end{cases}$

12.25 1 $y=\cos x\cdot e^{\sin x};$ 2 $\begin{cases} x=t+\ln\cos t, \\ y=t-\ln\sin t. \end{cases}$

12.26 1 $y=\dfrac{3}{e^x-1};$ 2 $\begin{cases} x=3t-t^3, \\ y=3t^2. \end{cases}$

12.27 1 $y=\cos x\cdot e^{-x};$ 2 $\begin{cases} x=a\left(\sin t-t\cos t\right), \\ y=a\left(\cos t+t\sin t\right). \end{cases}$

12.28 1 $y=x\cdot e^{\frac{x}{2}}+6x;$ 2 $\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\ln\left(1-t^2\right). \end{cases}$

12.29 1 $y=e^{-x^2}\cdot\ln x;$ 2 $\begin{cases} x=5\cos^3 t, \\ y=7\sin^2 t. \end{cases}$

12.30 1 $y=\dfrac{x^2}{x^3+8};$ 2 $\begin{cases} x=\ln\left(t^2+1\right), \\ y=arcctg\, t. \end{cases}$

13.01 – 13.30 Методами диференціального обчислення виконати повне дослідження функції та побудувати її графік.

13.01 $y=\dfrac{x^3}{x^2+9}$.

13.02 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$.

13.03 $y=\dfrac{8}{x^2(x-4)}$.

13.04 $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

13.05 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

13.06 $y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$.

13.07 $y=\dfrac{1}{x^3-1}$.

13.08 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

13.09 $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

13.10 $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$.

13.11 $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$.

13.12 $y=\dfrac{x}{x^2-2x+3}$.

13.13 $y=\dfrac{x^3+16}{x}$.

13.14 $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$.

13.15 $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

13.16 $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$.

13.17 $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

13.18 $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$.

13.19 $y=\dfrac{1}{2x+x^2}$.

13.20 $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$.

13.21 $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

13.22 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

13.23 $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x}$.

13.24 $y=\dfrac{x^2+1}{x}$.

13.25 $y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

13.26 $y=\dfrac{x^4+3}{x}$.

13.27 $y=\dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$.

13.28 $y=\dfrac{x^3-1}{4x^2}$.

13.29 $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

13.30 $y=\dfrac{x^2}{x^2+4}$.

14.01 -30 Знайти інтеграли:

14.01

1. $\int x\,\mathrm{tg}^2\,x dx$.
2. $\int \dfrac{dx}{x(x^2+3)}$.
3. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$.
4. $\int \dfrac{2^x dx}{1-4^x}$.
5. $\int \dfrac{(x-\sqrt{x})^2}{x} dx$.
6. $\int \dfrac{2x+3}{x^2-5x+7} dx$

14.02

1. $\int \dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{arctg}^2\,x dx}}{1+x^2} dx$.
2. $\int e^{\sin 2x}\cdot \cos 2x dx$.
3. $\int \dfrac{x dx}{\sqrt[3]{3x^2-6}}$.
4. $\int x\cos\dfrac{x}{3} dx$.
5. $\int \dfrac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[6]{x}-1)}$.
6. $\int (\sin^3 7x+2) dx$.

14.03

1. $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$.
2. $\int \dfrac{x^2 dx}{x^2-16}$.
3. $\int \arcsin 2x dx$.
4. $\int 3^{x^2}\cdot 5x dx$.

14.04

1. $\int (3+\cos^2 5x) dx$.
2. $\int \dfrac{dx}{(4x^2+1)\,\mathrm{arctg}\,2x}$.
3. $\int x e^{3x} dx$.
4. $\int \dfrac{x^2 dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

5. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

6. $\int \frac{\sqrt{1+3\mathrm{tg}x}}{\cos^2 x}dx.$

5. $\int \frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{x}dx.$

6. $\int \frac{x^3+2x+5}{(x^2-4)(x+3)}dx.$

14.05

1. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-\mathrm{ctg}^2 x}}.$

2. $\int x\ln(x^2+1)dx.$

3. $\int (7-\sin^3 2x)dx.$

4. $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}dx.$

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}}.$

6. $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt[4]{x}-2)}.$

14.06

1. $\int \frac{\sin x\cos xdx}{3+\sin^2 x}.$

2. $\int \cos x\sin 5xdx.$

3. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx.$

4. $\int \arccos\frac{x}{3}dx.$

5. $\int \frac{(3-2\sqrt{x})^2}{x}dx.$

6. $\int \frac{2x^2dx}{1-x^3}.$

14.07

1. $\int \frac{2xdx}{\sqrt{1-3x^2}}.$

2. $\int x^3\sqrt{x^2+4}dx.$

3. $\int \frac{(2x-1)dx}{x^2-4x+13}.$

4. $\int x^2\sin 5xdx.$

5. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[5]{\cos x}}.$

6. $\int \frac{(6x+3)dx}{(x-4)(x^2-2x+1)}.$

14.08

1. $\int \left(3x-\cos^2\frac{x}{3}\right)dx.$

2. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx.$

3. $\int x\ln^2 xdx.$

4. $\int \frac{x^3}{x-2}dx.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}}.$

6. $\int \frac{3-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx.$

14.09

1. $\int (2x-1)e^{2x}dx.$

2. $\int \mathrm{ctg}^3 \frac{3x}{2} dx.$

3. $\int \frac{(1-x)dx}{x^3+4x^2+4x}.$

4. $\int \frac{\cos x dx}{1+7\sin x}.$

5. $\int \sqrt[6]{1-2x^3} \cdot x^2 dx.$

6. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}.$

14.10

1. $\int \sin 3x \sin 5x \sin 7x dx.$

2. $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx.$

3. $\int x \,\mathrm{arctg} 4x dx.$

4. $\int \frac{x-7}{x^2+4} dx.$

5. $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx.$

6. $\int \frac{4+\sin 3x}{\cos^2 3x} dx.$

14.11

1. $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{16-9^x}}.$

2. $\int \frac{3x^2+13x+11}{(x+1)^2(x+2)} dx.$

3. $\int \frac{x dx}{2x^2-4x+3}.$

4. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}.$

5. $\int \cos 2x \cos^2 x dx.$

6. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+4}}.$

14.12

1. $\int \frac{\ln x dx}{(1+x)^3}.$

2. $\int \left(\frac{3}{2x-1} + \sin^2 3x \right) dx.$

3. $\int \frac{x+3}{\sqrt{3x^2-5}} dx.$

4. $\int x \arccos 3x dx.$

5. $\int \frac{3^{\mathrm{arctg} x} - x}{1+x^2} dx.$

6. $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}.$

14.13

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}.$

2. $\int \frac{\mathrm{arctg} 2x}{x^3} dx.$

14.14

1. $\int \frac{x dx}{x^2-6x+10}.$

2. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} dx.$

3. $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$.

4. $\int \frac{dx}{(x^2-x-2)(x-1)}$.

5. $\int \frac{(x^3+1)dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

6. $\int e^{x^3-3x^2+5}\left(3x^2-6x\right)dx$.

3. $\int \frac{6\sqrt{1-x^2}}{7-7x^2}dx$.

4. $\int x^2\sin\frac{x}{3}dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$.

6. $\int \cos 2x\cos\frac{x}{3}dx$.

14.15

1. $\int \frac{e^x+2}{e^{2x}-16}dx$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$.

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt[3]{\operatorname{tg}x+1}}$.

4. $\int \frac{(3x+1)dx}{(x^2-1)(x+2)}$.

5. $\int x\ln(x-5)dx$.

6. $\int \frac{x^3-3x}{x^2-6x+8}dx$.

14.16

1. $\int \cos^4 2xdx$.

2. $\int 2x\sin^2\frac{x}{2}dx$.

3. $\int \frac{\cos xdx}{\sin^7 x}$.

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$.

5. $\int \sin^4 x\cos^5 xdx$.

6. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$.

14.17

1. $\int xe^{2x+1}dx$.

2. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{(1+\cos x)^2}}$.

3. $\int \frac{3x-\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

4. $\int \operatorname{tg}^2\frac{x+2}{4}dx$.

14.18

1. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$.

2. $\int e^x\cos e^x dx$.

3. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}dx$.

4. $\int \frac{\ln x+x^3}{x}dx$.

5. $\int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$.

6. $\int x^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$.

5. $\int x \arcsin 2x dx$.

6. $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x}$.

14.19

1. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}$.

2. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$.

3. $\int \frac{(x+1)dx}{x^3 + x^2 - 2x}$.

4. $\int \left(\sqrt{\cos x} + \sin x\right)^2 dx$.

5. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x^2}$.

6. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}$.

14.20

1. $\int 2^{4x^3} \cdot x^2 dx$.

2. $\int \frac{x^2 + 5x + 1}{x^2 + 4} dx$.

3. $\int \frac{\sin^5 x dx}{\sqrt[5]{\cos x}}$.

4. $\int \frac{2x - 4}{\sqrt{x^2 - 7x + 13}} dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

6. $\int x \sin^2 7x dx$.

14.21

1. $\int \frac{\sin x dx}{4 + \cos^2 x}$.

2. $\int \frac{x^6 + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx$.

3. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 + e^x + e^{2x}}}$.

4. $\int \sin\left(x^2 - 5x + 6\right) d\left[(x-2)(x-3)\right]$.

5. $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3 x}}{x} dx$.

6. $\int (1 + 2\cos x)^2 dx$.

14.22

1. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$.

2. $\int \frac{\left(3 - x^2\right)^3}{x} dx$.

3. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$.

4. $\int 2^{5 - t^3} \cdot t^2 dt$.

5. $\int \frac{\operatorname{ctg}^3 x + 1}{\sin^2 x} dx$.

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x}$.

14.23

1. $\int \frac{1+x^2}{1-x^2}dx.$

2. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^7 x}dx.$

3. $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx.$

4. $\int \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\sin^2 x}dx.$

5. $\int x^4\sqrt{1+3x^5}dx.$

6. $\int \frac{4xdx}{2x^2-3x+1}.$

14.24

1. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1+2\sqrt{x}}.$

2. $\int \frac{\ln^7 x}{x}dx.$

3. $\int \frac{(x-1)(x^2+3)}{x^2}dx.$

4. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}.$

5. $\int (x^2-1)10^{-2x}dx.$

6. $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+9}}dx.$

14.25

1. $\int \frac{(x+2)dx}{x^3+2x^2-3x}.$

2. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx.$

3. $\int \frac{x^2dx}{\sin^2(x^3+3)}.$

4. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4+x^2}}.$

5. $\int \ln(x^2+9)dx.$

6. $\int \frac{dx}{\cos x\sin^5 x}.$

14.26

1. $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx.$

2. $\int \frac{x-2}{\sqrt[3]{x}-1}dx.$

3. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2-3x+4}}.$

4. $\int \frac{2-7x}{1-5x^2}dx.$

5. $\int x^2e^{-2x}dx.$

6. $\int 5^{\frac{\sin 2x}{3}}\cos 2x dx.$

14.27

1. $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}.$

2. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}.$

14.28

1. $\int (1+2\cos x)^3 dx.$

2. $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx.$

3. $\int x^3 \cos 2x^4 dx.$

4. $\int \frac{x^4+3}{x(x^2+4x-5)} dx.$

5. $\int \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+5}}.$

3. $\int \frac{\sin x dx}{4+\cos^2 x}.$

4. $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-2)}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}} dx.$

5. $\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}.$

6. $\int \frac{(1-\sqrt[3]{x^2})^2}{x} dx.$

14.29

1. $\int \frac{x^5 dx}{3+5x^6}.$

2. $\int \frac{x-6}{\sqrt{x^2-2x+4}} dx.$

3. $\int \frac{3-\cos^2 3x}{\sin 3x} dx.$

4. $\int \frac{x^3-3x^2+x}{(x-3)(x^2-1)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x}}.$

6. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}.$

14.30

1. $\int \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$

2. $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\cos^2 x}.$

3. $\int x^3 \arcsin \frac{1}{x} dx.$

4. $\int \frac{6^{2x}}{3+6^{4x}} dx.$

5. $\int \left(\frac{3}{\sin^2 5x} - \frac{\ln^3 x}{x} \right) dx.$

6. $\int x \operatorname{tg}^2 2x dx.$

15.01 -15.30

15.01

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=e^x$, $y=e^{-x}$ і прямою $x=1$.

2. Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$, $y = x$.

15.02

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $x^2=4y$ і локоном Аньєзі:

$$y=\frac{8}{x^2+4}.$$

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox однієї півхвилі синусоїди $y=\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$.

15.03

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r=4\cos 2\varphi$.

2. Обчислити довжину півкубічної параболи $y=\sqrt{x^3}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(5;5\sqrt{5})$.

15.04

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r=5\sin 3\varphi$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x=1$, $x=-1$, і $y=0$.

15.05

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r=3+\sin\varphi$..

2. Обчислити довжину дуги лінії $y=\dfrac{(3-x)\sqrt{x}}{3}$ між точками, ординати яких дорівнюють нулю.

15. 06

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=(x+2)^2$, $y=4-x$ і $y=0$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x=8\sin t+6\cos t, \\ y=6\sin t-8\cos t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=\dfrac{\pi}{2}$.

15.07

1. Фігура обмежена лінією, заданою рівнянням $r=4\cos 3\varphi$ в полярних координатах. Обчислити площу тієї її частини, яка розміщена зовні круга з центром в полюсі і радіусом $r=2$.

2. Обчислити довжину дуги параболи $y=2\sqrt{x}$ від точки $O(0;0)$ до точки $M(1;2)$.

15. 08

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y^2=16-8x$ і $y^2=24x+48$.

2. Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметричними рівняннями $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6}, \\ y=2-\dfrac{t^4}{4} \end{cases}$, між точками її перетину з осями координат.

15. 09

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2-3x$ і прямою $3x+y-4=0$.

2. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y=(x+1)^{\frac{3}{2}}$, якщо $-1\le x\le 4$.

15. 10

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ і параболою $y=\dfrac{x^2}{2}$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої колом $x^2+y^2=1$, параболою $y=\sqrt{1{,}5x}$ і віссю Ox.

15. 11

1. Обчислити площу фігури, обмеженої гіперболою $xy=4$ і прямою $x+y=5$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис однієї арки циклоїди $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t). \end{cases}$

15. 12

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r=3(1-\cos\varphi)$ і колом $r=3\cos\varphi$.

2. Обчислити довжину першого звою архімедової спіралі $r=5\varphi \quad (0\le\varphi\le 2\pi)$.

15. 13

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2=x+1$ і $y^2=9-x$.

2. Обчислити довжину дуги параболи $y=\dfrac{x^2}{2}$ від початку координат до точки з абсцисою $x=6$.

15. 14

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y^2=(x+1)x^2$.

2. Обчислити довжину ланцюгової лінії $y=chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ від $x_1=0$ до $x_2=1$.

15. 15

1. У якому відношенні парабола $y^2=2x$ поділяє площу круга $x^2+y^2\le 8$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої локоном Аньєзі $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ і параболою $x^2=4y$.

15. 16

1. Обчислити площу фігури, обмеженої першим звоєм архімедової спіралі $r=a\varphi$, полярною віссю і колом $r=2\pi a$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox кривої $y=\sin^2 x$ від $x_1=0$ до $x_2=\pi$.

15. 17

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $(x^2+y^2)^2=ax^3$.

2. Обчислити довжину дуги логарифмічної спіралі $r=ae^{m\varphi}$ $(m>0)$, яка знаходиться в середині круга $r=a$.

15. 18

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=4\sin t. \end{cases}$

2. Обчислити об`єм тіла, обмеженого параболоїдом $z=\frac{x^2}{4}+y^2$ і площиною $z=2$.

15. 19

1. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею кривої $\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного при обертанні ланцюгової лінії $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ навколо осі абсцис від $x_1=0$ до $x_2=a$.

15. 20

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=10x-x^2-16$ і віссю Ox.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox однієї арки лінії $y=\cos x$.

15. 21

1. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $4x^2+9y^2=36$, віссю ординат і прямою $2x-3\sqrt{3}=0$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими $y=2^x$, $y=4^x$ і прямою $x=1$.

15. 22

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=5-x^2$ і $y=x-1$.

2. Знайти довжину дуги кривої $y=\ln x$ від $x_1=\frac{3}{4}$ до $x_2=\frac{12}{5}$.

15. 23

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r=5(1+\sin\varphi)$.

2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2=x^3$, відтятою прямою $x=\frac{4}{3}$.

15. 24

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\begin{cases} x = 2(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 2(2\sin t - \sin 2t). \end{cases}$

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y^2=(x+4)^3$ і $x=0$ навколо осі ординат.

15. 25

1. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею лінії $4(y^2 - x^2)+x^3=0$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $y=x^3$, $y=8$ і $x=0$.

15. 26

1. Обчислити площу фігури, обмеженої слимаком Паскаля $r = 2 + \cos\varphi$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox дуги кривої $y=e^{-x}$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = +\infty$.

15. 27

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y^2=x^2(1 - x^2)$.

2. Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $r\varphi=1$ від точки $M_1\left(2;\frac{1}{2}\right)$ до точки $M_2\left(\frac{1}{2};2\right)$.

15. 28

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=x(x-1)(x-2)$ і віссю Ox.

2. Знайти довжину дуги лінії $r = \frac{a}{1+\cos\varphi}$, якщо $|\varphi| \le \frac{\pi}{2}$.

15. 29

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $4y^2=x$ і прямою $4y=x$.

2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис строфоїди $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}$.

15. 30

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$.

2. Фігура, обмежена кривими $y=tgx$, $y=ctgx$ і прямою $x = \frac{\pi}{6}$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об`єм тіла обертання.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

1. Подвійний інтеграл та його обчислення

Означення 1. Подвійним інтегралом від функції *z=f(x;y)* по області *(D)* є границя $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max diam\Delta S\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dS$ за умови, що вона не залежить від способу розбиття області *(D)* на частини та вибору точок N_i $(x_i;y_i)$ в кожній частині області (рис.30). Скориставшись можливістю довільності розбиття області *(D)*, виконаємо таке розбиття прямими, паралельними до координатних осей, отже, далі будемо замість *dS* писати *dxdy*.

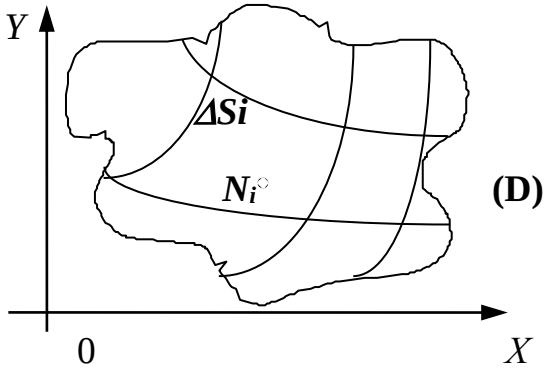


Рис. 30

1.1. Властивості інтеграла

1. Подвійний інтеграл від алгебраїчної суми неперервних в області *(D)* функцій дорівнює сумі подвійних інтегралів від кожного з доданків окремо:

$$\iint\limits_{(D)} \left[f_1(x,y) \pm f_2(x,y) \pm \cdots \pm f_n(x,y)\right]dxdy = \iint\limits_{(D)} f_1(x,y)dxdy \pm \cdots \pm \iint\limits_{(D)} f_n(x,y)dxdy$$

2. Сталий множник можна виносити за знак подвійного інтеграла:

$$\iint\limits_{(D)} kf(x,y)dxdy = k\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$$

3. Адитивність за областю інтегрування:

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(D_2)} f(x,y)dxdy$$

Область *(D)* поділена на дві області: (D_1) і (D_2), що не перетинаються, тобто $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

4. Інтегрування нерівності: нехай $f(x,y)$ і $\varphi(x,y)$ неперервні в області *(D)* і в кожній точці цієї області *(D)* виконується нерівність $f(x,y)\le\varphi(x,y)$, тоді $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\le \iint\limits_{(D)}\varphi(x,y)dxdy$

5. Оцінка інтеграла: якщо функція *f(x,y)* є неперервною в області *(D)*, то виконується нерівність

$$mS\le \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy\le MS,$$

де *S* - площа області *(D)*, m - мінімальне значення $f(x,y)$ в області *(D)*, M - максимальне значення $f(x,y)$ в області *(D)*.

6. Теорема про середнє значення: якщо функція $f(x,y)$ неперервна в області *(D)*, то в цій області знайдеться така точка *P(c;d)*, що

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy= f(c;d)\cdot S,$$

де S - площа області *(D)*.

1.2. Обчислення подвійного інтеграла

Означення 2. Область інтегрування *(D)* є правильною в напрямку осі *OX* (осі *OY*), якщо будь-яка пряма, паралельна координатній осі *OX* (осі *OY*), що проходить через внутрішню точку області, перетинає її межі не більше ніж у двох точках. Якщо відома область *(D)*, то відомі рівняння ліній, що утворюють її межі. Ці лінії мають описуватися неперервними функціями на проміжках, до яких належить аргумент (рис.31).

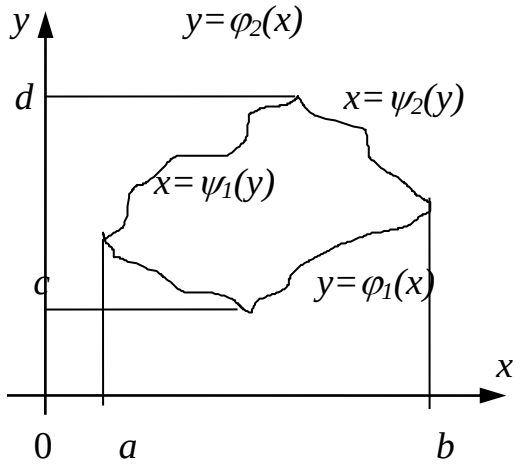


Рис. 31

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторних інтегралів:

а) $$I = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy, \qquad (1)$$

де область *(D)* розміщена між лініями *x=a, x=b* (де *a* і *b* – значення проекцій крайніх точок області *(D)* на вісь *OX*) та кривими $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$ (верхня і нижня межі); в даному випадку інтеграл $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ є внутрішнім, а $\int\limits_a^b dx$ - зовнішнім інтегралом.

б) $$I = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx, \qquad (2)$$

де область (*D*) вважається розміщеною між лініями y=c і y=d (c і d – значення проекцій крайніх точок області (*D*) на вісь *OY*) та $x=\psi_1$ (y) і $x=\psi_2(y)$ (ліва й права межі).

Спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл, що має змінну, яка не збігається зі змінною інтегрування і вважається сталою. Таким чином, одержимо функцію, що залежить лише від однієї змінної і являється підінтегральною функцією для зовнішнього інтеграла.

1.3. Визначення границь повторних інтегралів

Спочатку будуємо область інтегрування *(D)*. Якщо область *(D)* є правильною в напрямку обох координатних осей, то внутрішній інтеграл можна взяти за будь-якою змінною. Границі в зовнішньому інтегралі знаходимо проектуванням області на вісь, за якою виконується інтегрування.

Нижня й верхня границі у внутрішньому інтегралі - це праві частини рівнянь, які описують межі області і розв`язані відносно змінної інтегрування. На «вході» в область - це нижня або ліва межа, а на «виході» - верхня або права межа, залежно від обраного порядку інтегрування. Якщо область *(D)* правильна лише в одному з напрямків, то внутрішній інтеграл обирається за тією змінною, вздовж з координатних осей якої область (D) є правильною.

Якщо область *(D)* така, що одна з її меж описана кількома аналітичними виразами, тоді її треба розбити на правильні області лініями, паралельними до координатних осей. Двократний інтеграл обчислюється за кожною з одержаних областей.

Приклад 1. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, *(D)* – область, яка обмежена лініями $x=1, x=2, y=\frac{1}{x}, y=x.$

Розв`язання. Будуємо область *(D)*. Можна переконатися, що вона правильна в напрямку осі *OY*. Границя області описується двома різними рівняннями (рис.32).

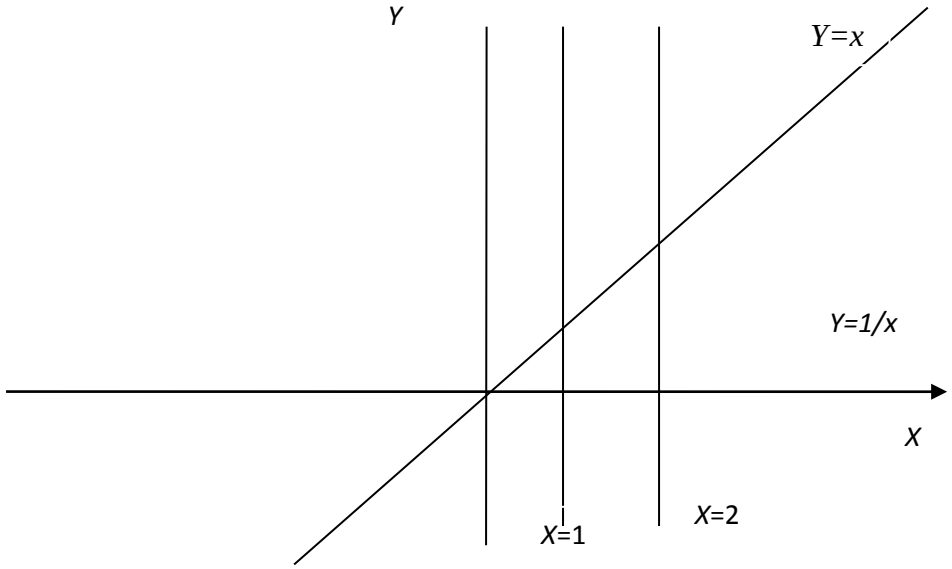


Рис. 32

Тоді

$$\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy=\int\limits_1^2 x^2dx\int\limits_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int\limits_1^2 x^2\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=-\int\limits_1^2 x^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=-\int\limits_1^2(x-x^3)dx=$$

$$=\int\limits_1^2(x^3-x)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=4-2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{9}{4}.$$

Приклад 2. Змінити порядок інтегрування:

$$I=\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1}dx\int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_0^{x^2}f(x,y)dy.$$

Розв`язання Оскільки внутрішній інтеграл береться відносно змінної *y*, то запишемо рівняння ліній, які обмежують область *(D):* y=$\sqrt{2-x^2}$, *y=0, y=x²*. Границі $x=-\sqrt{2}$, *x=-1, x=0* є проекціями області *(D)* на вісь *OX*. Побудуємо дані лінії ігранице області *(D)* відносно змінній *x* (рис. 33).

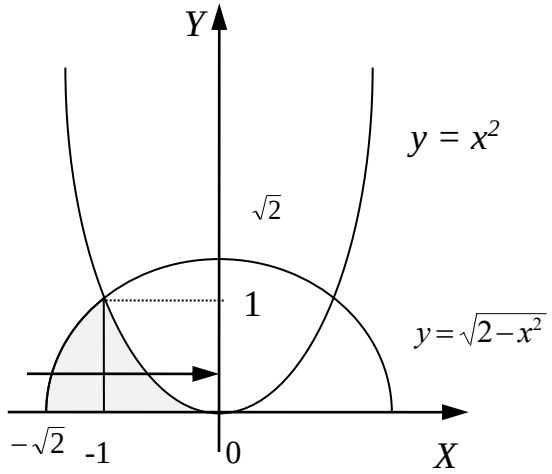


Рис. 33

Змінимо порядок інтегрування, тобто внутрішній інтеграл будемо розглядати відносно змінної *x*. Спроектуємо область *(D)* на вісь *OY* у відрізок $[0;1]$. Це і є границі в зовнішньому інтегралі, тобто $0 \le y \le 1$. Перетинаємо область *(D)* зліва направо прямою, паралельною осі *OX*. Межею області *(D)* на вході буде $x=-\sqrt{2-y^2}$, а на виході – $x=-\sqrt{y}$. Вони є границями для внутрішнього інтеграла, а для зовнішнього інтеграла візьмемо проекції області *(D)* на вісь *OY*: *y*=0 та *y*=1. Таким чином,

$$I=\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy+\int_{-1}^{0} dx\int_{0}^{x^2} f(x,y)dy=\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{-\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

Приклад 3 Змінити порядок інтегрування:

$$I=\int_{0}^{4} dy\int_{0}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx+\int_{4}^{6} dy \int_{0}^{6-y} f(x,y)dx.$$

Розв`язання Побудуємо область *(D)* за допомогою границь інтегралів: ліва межа області визначається рівнянням *x*=0, права межа складається з двох ліній: $x=\frac{y}{2}$ і *x=6-y*, тому область *(D)* є неправильною (точка перетину ліній знахо-

диться з системи рівнянь $x=\frac{y}{2}$ і $x=6-y$ і має координати $x=2$, $y=4$). На вісь OX область проектується у відрізок $[0;2]$ (рис.34).

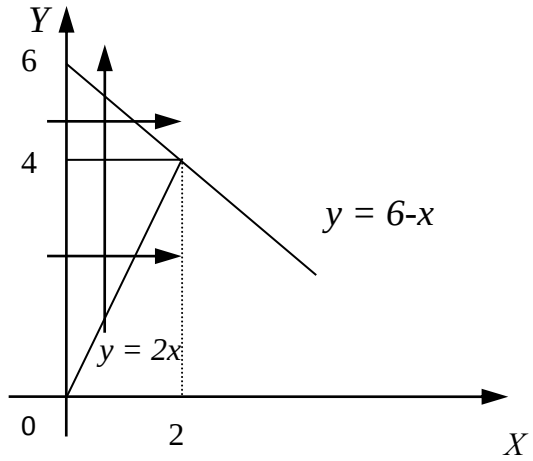


Рис. 34

Змінимо порядок інтегрування. Перетнемо область прямою, паралельною осі OY. Нижня межа визначається рівнянням $y=2x$, верхня – $y=6-x$, по осі OX від $x=0$ до $x=2$. Розставимо границі інтегрування:

$$I=\int_0^4 dy\int_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx+\int_4^6 dy\int_0^{6-y} f(x,y)dx=\int_0^2 dx\int_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$$

1.4. Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Перехід до полярних координат у подвійному інтегралі має вигляд

$$\iint_{(D)} f(x,y)dxdy=\iint_{(D)} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi. \qquad (3)$$

Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах також виконується за допомогою двократного інтеграла.

$$\iint_{(D)} f(r,\varphi)rdrd\varphi=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r)rdr, \qquad (4)$$

При переході до повторного інтеграла в загальному випадку границі внутрішнього інтеграла відносно r є функціями від φ, а границі зовнішнього інтеграла відносно φ завжди сталі. При цьому можливі наступні випадки.

1. Область *(D)* обмежена двома променями, які виходять із полюса під кутами α і β ($\alpha<\beta$), тобто $\varphi_1=\alpha, \varphi_2=\beta$ і двома кривими $r=r_1(\varphi)$ і $r=r_2(\varphi)$ (рис.35). Тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

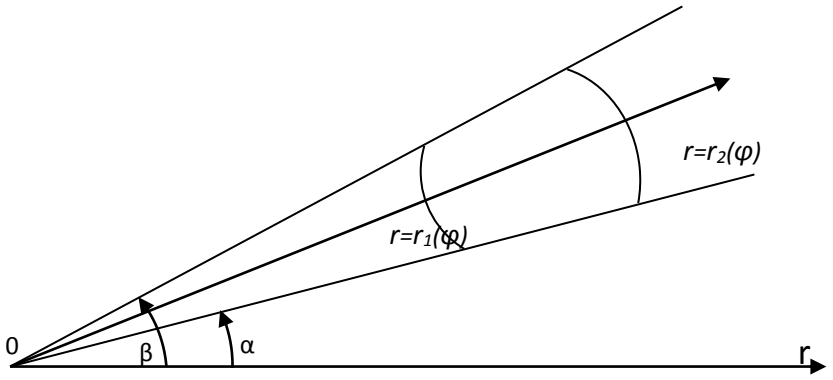


Рис. 35

2. Полюс належить границі області *(D)*, тобто $r_1(\varphi)=0$ і $r_2(\varphi)=r(\varphi)$ (рис. 36).

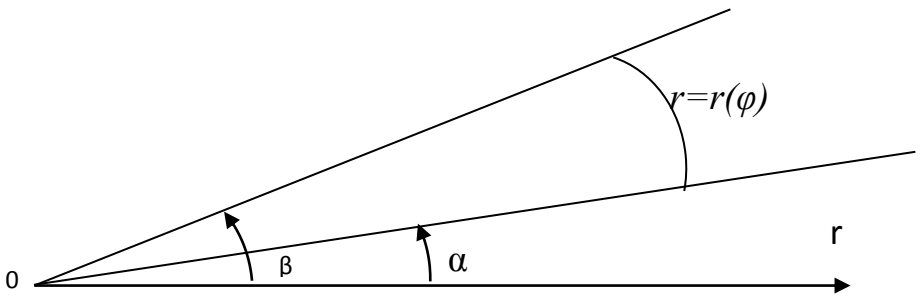


Рис. 36

$$\iint\limits_{(D)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{0}^{r(\varphi)}f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

3. Область *(D)* містить полюс і обмежена кривою $r = r(\varphi)$ (рис.35).

$$\iint\limits_{(D)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

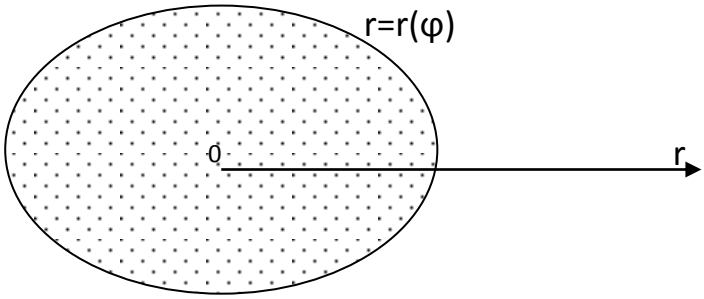


Рис. 35

Зауваження. Перехід до полярних координат має сенс, якщо областю інтегрування є коло, або частина кола.

Приклад 4. Обчислити $\iint\limits_{(D)} arctg\frac{y}{x} dxdy$, якщо область *(D)* є частиною кільця: $1 \le x^2 + y^2 \le 9, \quad y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = x\sqrt{3}.$

Розв`язання. Побудуємо область *(D)* (рис.36). Перейдемо до полярних координат.

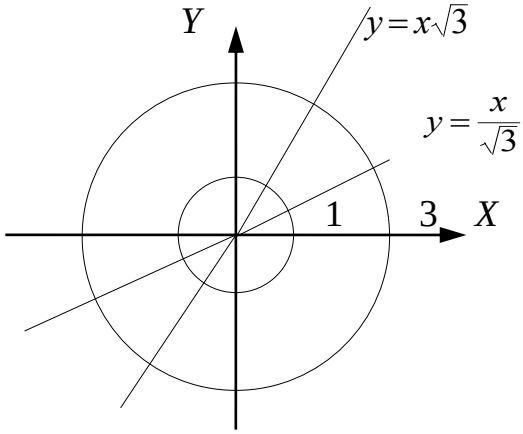


Рис. 36

$$\iint\limits_{(D)} arctg\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{(D)} arctg(tg\varphi)rdrd\varphi = \iint\limits_{(D)} r\varphi drd\varphi = \int \varphi d\varphi \int rdr.$$

Знайдемо границі інтегрування в полярних координатах:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1, r = 1;$$
$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 9, r = 3;$$
$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi = \frac{\pi}{6};$$
$$y = x\sqrt{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow tg\varphi = \sqrt{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Область *(D)* описується нерівностями $\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, 1 \le r \le 3.$ Таким чином,

$$\iint\limits_{(D)} arctg\frac{y}{x}dxdy = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi d\varphi \int_1^3 rdr = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_1^3 d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)\varphi d\varphi =$$

$$= 4 \cdot \frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

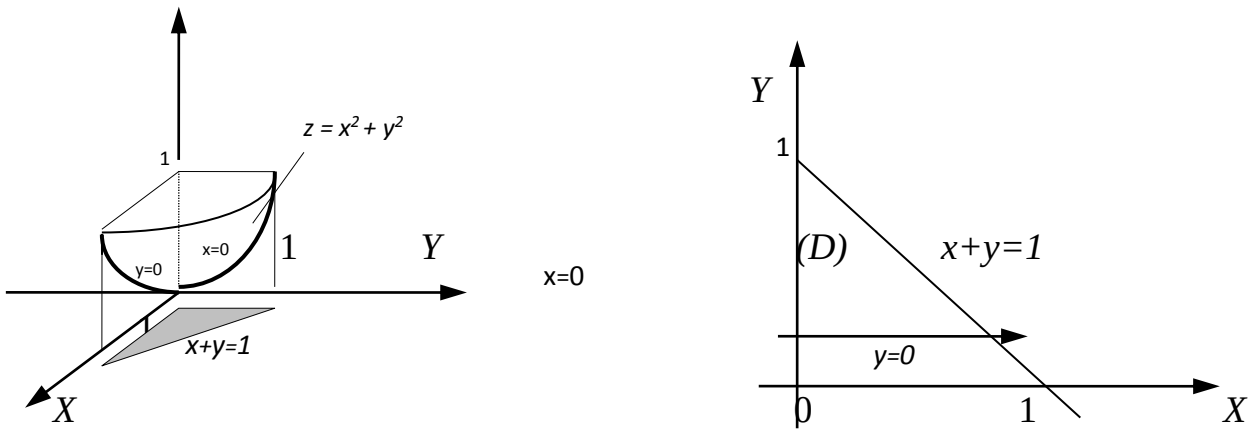
1.5. Обчислення об`єму тіла за допомогою подвійного інтеграла

Однією з задач для функції двох незалежних змінних, що привели до поняття подвійного інтеграла, є задача обчислення об`єму циліндричного тіла. Об`єм циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею *z=f(x,y)*, знизу її проекцією *(D)* на площину *XOY*, циліндричною поверхнею, твірна якої паралельна осі *OZ*, складає:

$$V = \iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy \qquad (5)$$

Приклад 5. Подвійним інтегруванням обчислити об`єм тіла, обмеженого зверху параболоїдом $z=x^2+y^2$ та площинами *x=0, y=0, x+y=1*.

Розв`язання Зробимо малюнок циліндричного тіла (рис.37,а) та його проекції на площину *XOY*, тобто область інтегрування *(D)* (рис.37,б) .



а) *б)*

Рис. 37

Об`єм циліндричного тіла обчислимо за формулою (5):

$$V = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)dxdy,$$

де $z=x^2+y^2$ - поверхня, яка обмежує тіло зверху. Далі задача зводиться до обчислення подвійного інтеграла відносно області *(D)*, яка є проекцією тіла на площину *XOY*:

$$V = \iint\limits_{(D)} (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} (x^2 + y^2)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^2}{3} + y^2 x \right)\Bigg|_0^{1-y} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{(1-y)^3}{3} + y^2 - y^3 \right] dy = \left[-\frac{(1-y)^4}{12} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 6 Знайти об`єм тіла, обмеженого циліндром $x^2+y^2=2x$ і площинами $2x-z=0$, $4x-z=0$.

**Розв`язання.** Зобразимо тіло(рис.38,а) та його проекцію на площину *XOY*, область *(D)* (рис.38,б). Треба обчислити різницю об`ємів циліндричних тіл, обмежених зверху площинами $z_1=4x$, $z_2=2x$.

$$V = \iint\limits_{(D)} (z_1 - z_2)dxdy = \iint\limits_{(D)} (4x - 2x)dxdy = 2\iint\limits_{(D)} xdxdy$$

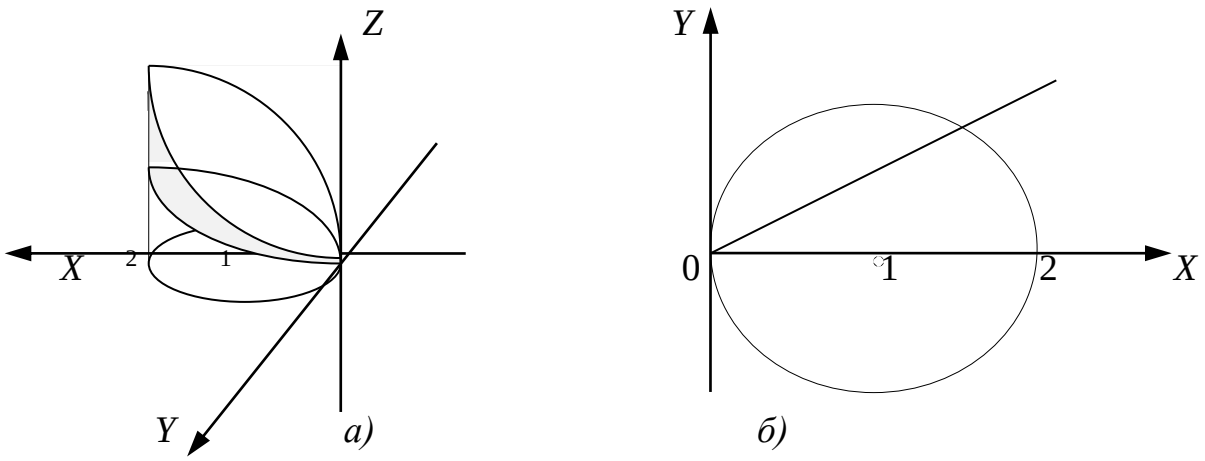


Рис. 38

Межею області *(D)* є коло, тому перейдемо до полярних координат. Рівняння межі має вигляд: $x^2+y^2=2x$ або $r^2=2r\cos\varphi \Rightarrow r=2\cos\varphi$. Тоді $xdxdy=r^2\cos\varphi drd\varphi$:

$$V=2\iint\limits_{(D)} r^2\cos\varphi drd\varphi=2\int_0^{\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi} r^2dr=2\cdot\frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{16}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}(1+2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\left(1+2\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos4\varphi\right)d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin2\varphi+\frac{1}{8}\sin4\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3\pi}{2}=2\pi.$$

2. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ ДРУГОГО РОДУ ТА ЙОГО ОБЧИСЛЕННЯ

Обчислення криволінійних інтегралів зводиться до обчислення визначених інтегралів.

Нехай *AB* - дуга гладкої кривої, яку задано в параметричній формі рівняннями $x=\varphi(t), y=\psi(t), t_1\le t\le t_2$. Тоді

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_{t_1}^{t_2}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}dt, \quad (6)$$

де t_1 та t_2 - значення параметра t відповідно до точок *A* і *B* кривої *L*.

Якщо гладка крива AB задана рівнянням $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, то до загального вигляду криволінійного інтеграла замість y потрібно підставити функцію $y(x)$ і $dy = y'(x)dx$. Одержимо

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \{P[x, y(x)] + Q[x, y(x)]y'(x)\}dx.$$

Аналогічно, якщо крива задана рівнянням $x = x(y), (c \le y \le d)$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_c^d \{P[x(y), y]x'(y) + Q[x(y), y]\}dy.$$

Приклад 7. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(L)} \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2}$, де L - половина кола $x=acost$, $y=asint$, від $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Розв`язання. Контур L маємо на рисунку39.

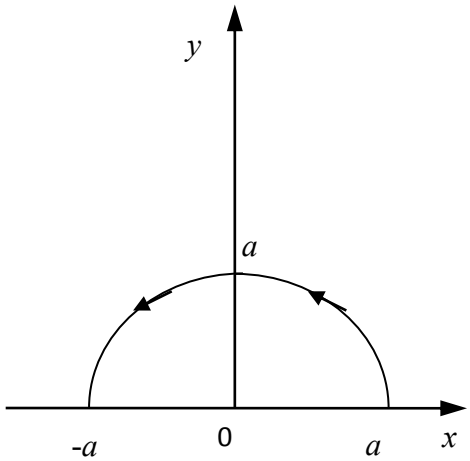


Рис.39

Змінимо в підінтегральному виразі: $x=acost$, $dx= - asintdt$,

$y=asint$, $dy= acostdt$,

параметр t змінюється від t=0 до t=π. Знаходимо

$$\int_L \frac{y^2dx - x^2dy}{x^2 + y^2} = \int_0^\pi \frac{a^2\sin^2 t(-a\sin t)dt - a^2\cos^2 ta\cos tdt}{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \int_0^\pi \frac{-a^3(\sin^3 t + \cos^3 t)}{a^2}dt =$$

$$= -a\int_0^\pi (\sin^3 t + \cos^3 t)dt = -a\int_0^\pi (1 - \cos^2 t)\sin tdt - a\int_0^\pi (1 - \sin^2 t)\cos tdt =$$

$$=-a\int_0^{\pi}(\sin t-\cos^2 t\sin t+\cos t-\sin^2 t\cos t)dt=$$

$$=-a(-\cos t+\frac{1}{3}\cos^3 t+\sin t-\frac{1}{3}\sin^3 t)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=-a(-\cos\pi+\frac{1}{3}\cos^3\pi+\sin\pi-\frac{1}{3}\sin^3\pi+\cos 0-\frac{1}{3}\cos^3 0-\sin 0+\frac{1}{3}\sin^3 0)=$$

$$=-a(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3})=-\frac{4}{3}a.$$

Приклад 8. Обчислити криволінійний інтеграл $I=\int\limits_{(AB)} xydx+(y-x)dy$ вздовж параболи $y=x^2$ між точками $A(0,0)$ та $B(1,1)$ (рис.40).

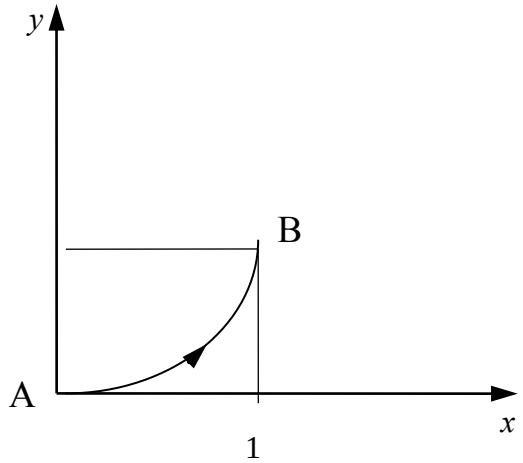


Рис. 40

Розв`язання За параметр беремо x, $y=x^2$, $dy=2xdx$. Переходимо до визначеного інтеграла.

$$I=\int_0^1[x*x^2dx+(x^2-x)2x]dx=\int_0^1(3x^3-2x^2)dx=\left(\frac{3x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}.$$

Приклад 9. Обчислити криволінійний інтеграл

$$\oint_L (3x^2+y)dx+(x-2y^2)dy,$$

де L - контур трикутника з вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(0;1)$.

Розв`язання Шлях інтегрування складається з трьох відрізків (рис.41): *OA, AB, BO,* тому I= $\int_{OA}$ + $\int_{AB}$ + $\int_{BO}$.

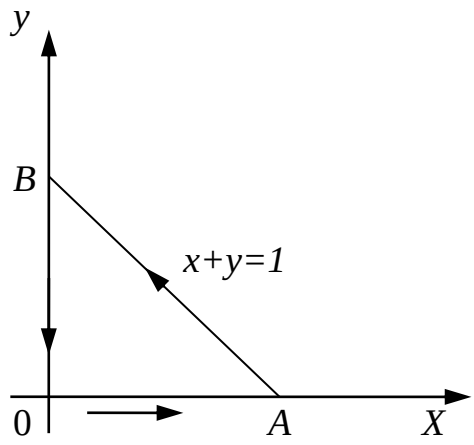


Рис. 41

На *OA*: *y=0, dy=0,* $0 \le x \le 1$, на *AB*: *y=1-x, dy= - dx, y* змінюється від 0 до 1; на *BO*: *x*=0, *dx*=0, *y* змінюється від 1 до 0. Таким чином,

$$I=\int_0^1 3x^2dx+\int_1^0 (3x^2+1-x)dx-\int_0^1\left[x-2(1-x)^2\right]dx-\int_1^0 2y^2dy=$$

$$=x^3\Big|_0^1+\int_1^0\left[3x^2+1-2x+2(1-x)^2\right]dx-\frac{2}{3}y^3\Big|_1^0=$$

$$=1+\left[x^3+x-x^2-\frac{2}{3}(1-x)^3\right]\Bigg|_1^0+\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}-1+\frac{2}{3}=0.$$

3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд $F(x;y(x);y'(x))=0$. Якщо це рівняння можна розв'язати відносно *y'(x)*, то його можна записати у вигляді

$$y'(x)=f(x;y(x)). \qquad (6)$$

Умова, що при $x=x_0$ функція набуватиме значення y_0, є початковою й її записують так:

$$y(x)\big|_{x=x_0}=y_0\,. \qquad (7)$$

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку (1) є функція $y=\varphi(x;c)$, яка залежить від x та однієї довільної сталої c, і задовольняє наступним умовам:

1) функція $y=\varphi(x;c)$ перетворює рівняння (6) на тотожність за будь якого значенні c;

2) якою б не була початкова умова (7), можна знайти таке значення $c=c_0$, при якому функція $y=\varphi(x;c_0)$ задовольняє даній умові.

Частинним розв'язком називають той розв'язок, який можна одержати з загального $y=\varphi(x;c)$ при заданому значенні сталої: $c=c_0$, тобто $y=\varphi(x;c_0)$.

Задача знаходження такого розв'язку рівняння (6), який задовольняє початковій умові (7), є задачею Коші.

Розв'язати диференціальне рівняння означає:

1) знайти його загальний розв'язок, або загальний інтеграл, якщо початкова умова не задана,

2) знайти той частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові, тобто розв'язати задачу Коші.

Основними видами рівнянь першого порядку є:

a) рівняння з відокремленими змінними;

b) однорідні відносно змінних диференціальні рівняння;

c) лінійні диференціальні рівняння;

d) рівняння Бернуллі.

Розглянемо кожний із наведених видів рівнянь.

3.1. Рівняння з відокремленими змінними

Означення. Якщо диференціальне рівняння має вигляд:

$$f(x)dx+\varphi(y)dy=0, \qquad (8)$$

де коефіцієнт при dx залежить тільки від x, а коефіцієнт при dy – тільки від y, то кажуть, що в ньому *відокремлені* змінні.

Загальним інтегралом такого рівняння матиме вигляд:

$$\int f(x)dx+\int\varphi(y)dy=c.$$

Означення Якщо диференціальне рівняння має вигляд

$$m_1(x)\cdot n_1(y)dx+m_2(x)\cdot n_2(y)dy=0, \qquad (9)$$

то воно є рівнянням з *відокремлюваними* змінними.

Його легко звести до рівняння з відокремленими змінними, якщо поділити обидві частини рівняння на $n_1(y)\cdot m_2(x)$, тобто:

$$\frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx+\frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy=0.$$

Загальний інтеграл даного рівняння матиме вигляд:

$$\int\frac{m_1(x)}{m_2(x)}dx+\int\frac{n_2(y)}{n_1(y)}dy=c.$$

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл рівняння $2x^2yy'+y^2=2$. Відповідь записати у вигляді $\varphi(x;y)=c$.

Розв'язання Зважаючи на те, що $y'=\frac{dy}{dx}$, матимемо рівняння $2x^2y\frac{dy}{dx}+y^2=2$. Зведемо це рівняння до вигляду (9): $2x^2ydy=(2-y^2)dx$. Розділимо змінні, для чого розділимо все рівняння на $x^2(2-y^2)$:

$$\frac{2x^2ydy}{x^2(2-y^2)}=\frac{(2-y^2)dx}{x^2(2-y^2)},\ \text{або}\ \frac{2ydy}{2-y^2}=\frac{dx}{x^2}.$$

Інтегруючи, знайдемо: $\int\frac{2ydy}{2-y^2}=\int\frac{dx}{x^2}+c_1$, тобто: $-\ln\left|2-y^2\right|=-\frac{1}{x}-c$ або $\ln\left|2-y^2\right|-\frac{1}{x}=c$.

Звичайно, бажано виразити розв'язок в явному вигляді $y=\varphi(x;c)$, але якщо це неможливо, то відповідь записують у вигляді загального інтегралу $\varphi(x;y)=c$.

3.2. Однорідні відносно змінних диференціальні рівняння

Означення Рівняння першого порядку $y'=f(x;y)$, є однорідним відносно змінних, якщо для будь якого $\lambda>0$ має місце рівність:

$$f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y).$$

Однорідне рівняння завжди може бути приведеним до вигляду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Покладаючи, що $\frac{y}{x}=U(x)$, або $y=xU(X)$, де U – нова невідома функція, однорідне рівняння зводиться до рівняння з відокремленими змінними.

Приклад 2 Знайти загальний інтеграл рівняння

$$\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)+x\cos\frac{y}{x}y'=0.$$

Розв'язання Розв'яжемо задане рівняння відносно похідної y':

$$y'=-\frac{x-y\cos\frac{y}{x}}{x\cos\frac{y}{x}}.$$

Поділимо чисельник і знаменник правої частини на x:

$$y'=\frac{\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}-1}{\cos\frac{y}{x}}.$$

Виконаємо заміну $y=Ux$, тоді $y'=U'x+U$. Рівняння набуде вигляду:

$$U'x+U=\frac{U\cos U-1}{\cos U} \quad \text{або} \quad U'x=\frac{U\cos U-1}{\cos U}-U;$$

$$U'x=\frac{U\cos U-1-U\cos U}{\cos U}; \qquad U'x=-\frac{1}{\cos U}.$$

Це і є рівняння з відокремленими змінними, де $U'=\frac{dU}{dx}$:

$$\frac{dU}{dx}x=-\frac{1}{\cos U}; \qquad \cos U dU=-\frac{dx}{x}.$$

Звідси інтегруванням знаходимо загальний інтеграл рівняння:

$$\int\cos U dU=-\int\frac{dx}{x}+c;\ \sin U=-\ln|x|+c, \text{ де } U=\frac{y}{x};\ \sin\frac{y}{x}+\ln|x|=c.$$

3.3. Лінійні диференціальні рівняння

Рівняння першого порядку, лінійне відносно y та y', має вигляд:

$$y'+p(x)y=q(x). \tag{10}$$

При цьому рівняння $y'+p(x)y=0$ є лінійним однорідним, відповідним до лінійного неоднорідного рівняння (5). За методом варіації довільної сталої загальний розв'язок рівняння (10) матиме вигляд:

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left(c+\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right). \tag{11}$$

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'+\frac{x}{1-x^2}y=\frac{x}{1-x^2}$.

Розв'язання. Порівнюючи задане рівняння з рівнянням (10), бачимо, що $p(x)=\frac{x}{1-x^2}$; $q(x)=\frac{x}{1-x^2}$. Загальний розв'язок за формулою (11) матиме вигляд:

$$y=e^{-\int\frac{x}{1-x^2}dx}\left(c+\int\frac{x}{1-x^2}e^{\int\frac{x}{1-x^2}dx}dx\right)=e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|}\left(c+\int\frac{x}{1-x^2}e^{-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|}dx\right)=$$

$$=\sqrt{1-x^2}\left(c+\int\frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\right)=\sqrt{1-x^2}\left(c+\int\frac{xdx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}\right)=$$

$$=\sqrt{1-x^2}\left(c-\frac{1}{2}\frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{1-x^2}\left(c+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=1+c\sqrt{1-x^2}\,.$$

Загальний розв'язок лінійного рівняння (5) можна також знайти методом підстановки, а саме: підстановка $y=U(x)V(x)$, де $U(x),V(x)$ – нові невідомі функції, приводить лінійне рівняння до двох диференціальних рівнянь з відокремленими змінними для визначення цих невідомих функцій:

$$1)\ U'+p(x)U=0;$$

$$2)\ U\times V'=q(x).$$

Приклад 4 Знайти загальний розв'язок рівняння $(1+x)y'+y=\cos x.$

Розв'язання Запишемо задане рівняння у вигляді рівняння (10): $y'+\frac{1}{1+x}y=\frac{\cos x}{1+x}$. Виконаємо підстановку: $y=U\cdot V$, тоді $y'=U'V+V'U$. Матимемо: $U'V+V'U+\frac{1}{1+x}UV=\frac{\cos x}{1+x}$ або $V\left(U'+\frac{U}{1+x}\right)+UV'=\frac{\cos x}{1+x}$.

Нехай $U'+\frac{U}{1+x}=0$, тоді $UV'=\frac{\cos x}{1+x}$. Для знаходження $U;V$ маємо два диференціальних рівняння:

$$1)\ U'+\frac{U}{1+x}=0;$$

$$2)\ UV'=\frac{\cos x}{1+x}.$$

Розв'язуючи перше рівняння, матимемо: $\frac{dU}{dx}=-\frac{U}{1+x}$; $\frac{dU}{U}=-\frac{dx}{1+x};\ln|U|=-\ln|1+x|$, звідки $U=\frac{1}{1+x}$.

Знайдене значення функції $U(x)$ підставимо до другого рівняння: $\frac{1}{1+x}V'=\frac{\cos x}{1+x}$, або $V'=\cos x$, звідки $V=\sin x+c$.

Загальний розв'язок лінійного рівняння має вигляд: $y=\frac{1}{1+x}(\sin x+c)$.

3.4. Рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі має вигляд: $y' + p(x)y = q(x)y^n$, де $n \neq 0; n \neq 1$.

Дане рівняння легко зводиться до лінійного за допомогою підстановки $y^{1-n} = z$.

Рівняння Бернуллі інтегруються за тією самою схемою, що й лінійні рівняння (підстановкою $y = U(x)V(x)$).

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння $y' - 2xy = 2x^3y^2$.

Розв'язання. Виконуємо підстановку $y = UV$, тоді $y' = U'V + V'U$. Задане рівняння перетвориться на рівняння вигляду: $U'V + V'U - 2xUV = 2x^3U^2V^2$ або $V(U' - 2xU) + V'U = 2x^3U^2V^2$. В якості функції U беремо таку функцію, щоб $U' - 2xU = 0$, тоді $V'U = 2x^3U^2V^2$. Для визначення функцій U та V маємо два диференціальних рівняння з відокремленими змінними:

$$1)\ U' - 2xU = 0;$$

$$2)\ V' = 2x^3UV^2.$$

Розв'язуємо перше рівняння:

$$U' = 2xU; \frac{dU}{dx} = 2xU;\ \frac{dU}{U} = 2xdx,$$

звідки

$$\ln U = x^2 (c = 0)$$

або

$$U = e^{x^2}.$$

З другого рівняння маємо: $V' = 2x^3 e^{x^2} V^2$, або $\frac{dV}{V^2} = 2x^3 e^{x^2} dx$. Після інтегрування даного рівняння будемо мати:

$$-\frac{1}{V} = e^{x^2}\left(x^2 - 1\right) - c,$$

звідки

$$V = \frac{1}{e^{x^2}\left(1 - x^2\right) + c}.$$

Загальний розв'язок рівняння матиме вигляд:

$$y = e^{x^2} \frac{1}{e^{x^2}\left(1 - x^2\right) + c} \text{ або } y = \frac{1}{1 - x^2 + ce^{-x^2}}.$$

4. РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Диференціальне рівняння *n*-го порядку в загальному вигляді записують так:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0. \qquad (12)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $y = \varphi\left(x, c_1, c_2, ..., c_n\right)$, залежна від *x* та *n* сталих величин. Задача знаходження частинного розв'язку рівняння (12) за початкових умов:

$$y\big/_{x=x_0} = y_0; y'\big/_{x=x_0} = y'_0; ...; y^{(n-1)}\big/_{x=x_0} = y_0^{(n-1)},$$

де $x_0; y_0; y'_0; ...; y_0^{(n-1)}$ – задані числа, є задачею Коші.

У випадку рівняння другого порядку $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$ або $y'' = f\left(x, y, y'\right)$ задача Коші полягає в знаходженні такого розв'язку $y = y(x)$, який задовольняє початковим умовам $y\big/_{x=x_0} = y_0; y'\big/_{x=x_0} = y'_0$.

Розглянемо лише деякі типи рівнянь n-го порядку, $n \geq 2$, які допускають зниження порядку, а також лінійні диференціальні рівняння другого порядку.

4.1. Рівняння, що допускають зниження порядку

Рівняння вигляду:

$$y^{(n)} = f(x), \qquad (13)$$

де *f(x)* – неперервна функція на деякому інтервалі, інтегрують послідовно *n* разів:

$$y = \underbrace{\int\int ... \int f(x)}_{n\ разів} dx dx .. dx = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + ... + C_n.$$

Це і є загальний розв'язок рівняння.

Приклад 6. Розв'язати задачу Коші для рівняння $y''' = \sin^3 x$, якщо $y\big/_{x=0} = -\frac{7}{27}; y'\big/_{x=0} = 0; y''\big/_{x=0} = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. Дане рівняння є рівнянням третього порядку, яке містить лише незалежну змінну x, та третю похідну. Послідовно три рази інтегруємо його:

$$y'' = \int \sin^3 x dx + C_1 = \int \sin x \left(1 - \cos^2 x\right) dx + C_1 = \int \sin x dx -$$

$$- \int \cos^2 x \sin x dx + C_1 = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C_1.$$

$$y' = \int \left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C_1 \right) dx + C_2 = \int \left(-\cos x + \frac{1}{3} \cos x \left(1 - \sin^2 x\right) + C_1 \right) dx +$$

$$+C_2=\int\left(-\frac{2}{3}\cos x-\frac{1}{3}\sin^2 x\cos x+C_1\right)dx+C_2=-\frac{2}{3}\sin x-\frac{\sin^3 x}{9}+C_1x+C_2.$$

Отже, $y=\int\left(-\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{9}\sin^3 x+C_1x+C_2\right)dx+C_3=$

$$=\int\left(-\frac{2}{3}\sin x-\frac{1}{9}\sin x\left(1-\cos^2 x\right)+C_1x+C_2\right)dx+C_3=$$

$$=\int\left(-\frac{7}{9}\sin x+\frac{1}{9}\cos^2 x\sin x+C_1x+C_2\right)dx+C_3=$$

$$=\frac{7}{9}\cos x-\frac{1}{27}\cos^3 x+\frac{C_1x^2}{2}+C_2x+C_3.$$

Використовуючи початкові умови, будемо мати:

$$\frac{7}{9}\cos 0-\frac{1}{27}\cos^3 0+C_3=-\frac{7}{27};-\frac{2}{3}\sin 0-\frac{\sin^3 0}{9}+C_2=0;$$

$$-\cos 0+\frac{\cos^3 0}{3}+C_1=\frac{1}{3},$$ звідки $C_1=1$, $C_2=0$, $C_3=-1$.

Частинний розв'язок рівняння має вигляд: $y=\frac{7}{9}\cos x-\frac{1}{27}\cos^3 x+\frac{x^2}{2}-1.$

4.2. Рівняння другого порядку, яке не містить невідомої функції

Порядок рівняння $y''=f(x,y')$ можна знизити підстановкою $y'=p(x)$, тоді $y''=p'(x)$.

Рівняння першого порядку: $p'=f(x;p)$, з невідомою функцією *p(x)* має загальний розв'язок: $p=p(x;C_1)$. Тоді з рівності $\frac{dy}{dx}=p$ знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння: $y=\int p(x;C_1)dx+C_2$.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші для рівняння: $xy''+y'=x^2+1$, якщо $y(1)=\frac{10}{9};y'(1)=\frac{1}{3}$.

Розв'язання Дане рівняння не містить невідомої функції *y*, тому для зниження його порядку використаємо підстановку $y'=p(x)$, тоді $y''=p'(x)$.

Рівняння першого порядку: $xp'+p=x^2+1$, є лінійним відносно невідомої функції *p* та похідної p'. Розв'яжемо його за методом варіації довільної сталої, тобто за формулою

$$p(x)=e^{-\int f(x)dx}\left(C_1+\int\varphi(x)e^{\int f(x)dx}dx\right),$$

де $f(x)=\frac{1}{x};\varphi(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

Отже, $p(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(C_1+\int\frac{x^2+1}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx\right)=e^{-\ln|x|}\left(C_1+\int\frac{x^2+1}{x}e^{\ln|x|}dx\right)=$

$=\frac{1}{x}\left(C_1+\int\frac{x^2+1}{x}xdx\right)=\frac{1}{x}\left(C_1+\frac{x^3}{3}+x\right)=\frac{x^2}{3}+1+\frac{C_1}{x}$. Зважаючи на те, що $p=y'=\frac{dy}{dx}$, будемо мати: $y'=\frac{x^2}{3}+1+\frac{C_1}{x}$.

За умовою $y'(1)=\frac{1}{3}$, тому $\frac{1}{3}=\frac{1}{3}+1+C_1$, звідки $C_1=-1$.

Отже, $y'=\frac{x^2}{3}+1-\frac{1}{x}$.

Інтегруємо дане рівняння: $y=\int\left(\frac{x^2}{3}+1-\frac{1}{x}\right)dx+C_2=\frac{x^3}{9}+x-\ln|x|+C_2$.

За умовою $y(1)=\frac{10}{9}$, тому $\frac{10}{9}=\frac{1}{9}+1-\ln 1+C_2$. звідси маємо $C_2=0$. Розв'язок задачі Коші матиме вигляд : $y=\frac{x^3}{9}+x-\ln|x|$.

4.3. Рівняння другого порядку, яке не містить незалежної змінної

Порядок рівняння $y''=f(y,y')$ можна знизити підстановкою $y'=p(y)$, тоді $y''=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp(y)}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$. Задане рівняння матиме вигляд: $p\frac{dp}{dy}=f(y;p)$. Якщо його загальним розв'язком є $p=p(y;C_1)$, то одержуємо таке рівняння: $\frac{dy}{dx}=p(y;C_1)$.

Відокремлюючи змінні, знаходимо $\frac{dy}{p(y;C_1)}=dx$. Проінтегрувавши його, одержимо загальний розв'язок заданого рівняння: $\Phi(x;y;C_1;C_2)=0$.

Приклад 8. Розв'язати задачу Коші для рівняння $yy''=(y')^2+1$, якщо $y(1)=1;y'(1)=0$.

Розв'язання Нехай $y'=p$, тоді $y''=p\frac{dp}{dy}$. Отже, $yp\frac{dp}{dy}=p^2+1$. Це рівняння першого порядку з відокремленими змінними: $\frac{pdp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}$;

$\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=\ln|y|+\ln C$, звідки $\sqrt{p^2+1}=yC$ або $p^2=y^2C_1-1, p=\pm\sqrt{y^2C_1-1}$, $y'=\pm\sqrt{y^2C_1-1}$. За умовою $y'(1)=0$, а *y(1)=1*, тоді $0=\sqrt{1C_1-1}$; $C_1=1$. Отже, $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$, де $y'=\frac{dy}{dx}$, тоді $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^2-1}; \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx.$

Загальний інтеграл даного рівняння матиме вигляд: $\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x+C_2$. Відомо, що *y(1)=1*, тому $0=\pm 1+C_2$, $C_2=\mp 1$. Розв'язком задачі Коші заданого рівняння є: $\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x\mp 1.$

5. ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗІ СТАЛИМИ КОЄФІЦІЄНТАМИ

Означення. Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами є рівняння

$$y''+py'+qy=0, \tag{13}$$

де p і q – дійсні числа.

Для його розв'язання складають рівняння:

$$k^2+pk+q=0, \tag{14}$$

що є характеристичним рівнянням.

Очевидно, що характеристичне рівняння одержимо, коли в рівнянні (13) замінимо похідні різних порядків на відповідні степені k. Відповідно до коренів характеристичного рівняння лінійне однорідне рівняння має свій особливий вигляд незалежних частинних та загального розв'язків, а саме:

Лінійне однорідне рівняння	$y''+py'+qy=0; \mathrm{p,q-const}$		
Характеристичне рівняння	$k^2+pk+q=0$		
Корені характеристичного рівняння $k_{1,2}=-p/2\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$	$k_1\neq k_2$ (дійсні)	$k_1=k_2$ (кратні)	$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ (уявні)
Частинні розв'язки	$y_1=e^{k_1x}$ $y_2=e^{k_2x}$	$y_1=e^{kx}$ $y_2=xe^{kx}$	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$
Загальний розв'язок	$y=C_1e^{k_1x}+$ $+C_2e^{k_2x}$	$y=e^{kx}(C_1+C_2x)$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+$ $+C_2\sin\beta x)$

Приклад 9. Розв’язати рівняння $y''-5y'+6y=0$.

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння: $k^2-5k+6=0$. Визначаємо його корені: $k_1=2$; $k_2=3$. Маємо випадок різних, дійсних коренів. Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$.

Приклад 10. Розв’язати рівняння $y''-4y'+13y=0$.

Розв'язання. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд: $k^2-4k+13=0$. Знаходимо його корені: $k_{1,2}=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm3i$.

У випадку уявних коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння має вигляд: $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$, де $\alpha=2$; $\beta=3$. Отже, $y=e^{2x}(C_1\cos3x+C_2\sin3x)$.

Приклад 11. Розв’язати рівняння $y''+10y'+25=0$.

Розв'язання. Корені характеристичного рівняння $k_1=k_2=-5$. У випадку кратних коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок лінійного рівняння буде таким: $y=e^{kx}(C_1+C_2x)$, тобто $y=e^{-5x}(C_1+C_2x)$.

Означення. Лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами є рівняння

$$y''+py'+qy=f(x). \tag{15}$$

Загальним розв'язком неоднорідного рівняння (11) є сума загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного лінійного рівняння (9) та будь-якого частинного розв'язку Y неоднорідного рівняння (11), тобто $y=\bar{y}+Y$.

Існує загальний метод знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (11), який має назву *метод варіації довільних сталих* (методом Лагранжа), за яким частинний розв'язок рівняння (11) має вигляд:

$$Y=y_2\int\frac{y_1(x)f(x)}{W}dx-y_1\int\frac{y_2(x)f(x)}{W}dx, \tag{16}$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння (9), а $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ - є визначник Вронського.

Приклад 12. Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y''+y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Розв'язання Дане рівняння є неоднорідним лінійним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами. За теоремою про структуру його загального розв'язку маємо: $y=\bar{y}+Y$.

Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y''+y=0$, для чого складемо характеристичне рівняння $k^2+1=0$; звідки

$k^2=-1$, $k_{1,2}=\pm\sqrt{-1}; k_{1,2}=\pm i$. Маємо випадок уявних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$. В нашому випадку α=0, β=1. Отже, $y_1(x)=\cos x; y_2(x)=\sin x$, а $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Для знаходження частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння за формулою (12), спочатку визначимо $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$:

$$W(x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1.$$

Тоді

$$Y(x)=\sin x\int\frac{\cos x\cdot 1}{1\cdot\sin^3 x}dx-\cos x\int\frac{\sin x\cdot 1}{1\cdot\sin^3 x}dx=\sin x\int\cos x\sin^{-3}x dx-\cos x\int\frac{dx}{\sin^2 x}=$$

$$=\sin x\left(\frac{\sin^{-2}x}{-2}\right)-\cos x(-ctg x)=-\frac{1}{2\sin x}+\frac{\cos^2 x}{\sin x}=\frac{-1+2\cos^2 x}{2\sin x}=\frac{\cos 2x}{2\sin x}.$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y}+Y: y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{\cos 2x}{2\sin x}$.

Як було вже зазначено, частинний розв'язок неоднорідного рівняння (15) можна знайти методом варіації довільних сталих. Проте для деяких видів правої частини *f(x)* рівняння (15) існують простіші методи знаходження частинних розв'язків.

Розглянемо один із них – *метод невизначених коефіцієнтів*.

Наведемо таблицю найпростіших виглядів правих частин *f(x)* рівняння (15) та відповідних виглядів частинних розв'язків *Y* за цим методом.

Вигляд правої частини рівняння (11)	Вигляд частинного розв'язку *Y*
$f(x)=P_n(x)$ (многочлен n-го степеня)	$Y=X^S Q_n(x)$, де $S=\begin{cases}0, якщо k_1\neq 0\neq k_2\\ 1, якщо k_1=0\neq k_2\end{cases}$, $Q_n(x)$ – многочлен n-го степеня, коефіцієнти якого треба визначити
$f(x)=P_n(x)e^{ax}$	$Y=X^S Q_n(x)e^{ax}$, де $S=\begin{cases}0, якщо k_1\neq a\neq k_2\\ 1, якщо k_1=a\neq k_2\\ 2, якщо k_1=a=k_2\end{cases}$
$f(x)=A\cos bx+B\sin bx$ (*A, B, b* – числа)	$Y=X^S(M\cos bx+N\sin bx)$, де $S=\begin{cases}0, якщо k_1\neq bi\neq k_2\\ 1, якщо k_1=bi\neq k_2\end{cases}$, *M, N* – коефіцієнти, які треба визначити

У загальному випадку, якщо $f(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x)$; $Q_m(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами степеня відповідно n і m, то: $Y=X^S e^{ax}\left[R_k(x)\cos bx+T_k(x)\sin bx\right]$, де $k=max\{n,m\}$; $R_k(x)$, $T_k(x)$ – многочлени степеня k, коефіцієнти яких треба визначити;

$$S=\begin{cases}0, якщо k_1\neq a+bi\neq k_2\\ 1, якщо k_1=a+bi\neq k_2\\ 2, якщо k_1=a+bi=k_2\end{cases}.$$

Приклад 13. Розв'язати задачу Коші для рівняння $y''+y'-12y=(x-1)e^{2x}$, якщо $y(0)=\frac{1}{36}; y'(0)=\frac{8}{9}$.

Розв'язання. Загальний розв'язок рівняння знайдемо у вигляді $y=\bar{y}+Y$. Щоб знайти загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y''+y'-12y=0$, треба скласти характеристичне рівняння $k^2+k-12=0$. Визначаємо його корені: $k_1=-4$; $k_2=3$. Отже $\bar{y}=C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}$. Права частина неоднорідного рівняння має вигляд $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де $P_n(x)=P_1(x)=x-1$ – многочлен першого степеня $e^{ax}=e^{2x}$, тобто $a=2$. Тоді частинним розв'язком буде:

$$Y=X^S Q_1(x)e^{ax},$$

де $S=0$, бо $a=2\neq k_1\neq k_2$, $Q_1(x)=Ax+B$. Отже:

$$\begin{array}{r|l}
-12 & Y=(Ax+B)e^{2x}\\
1 & Y'=Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}\\
1 & Y''=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}\\
\hline
\end{array}$$

$$(x-1)e^{2x}=e^{2x}(x(-12A+2A+4A)+(-12B+A+2B+4A+4B))$$
$$x-1=-6Ax+(5A-6B).$$

Зліва від вертикальної лінії записано коефіцієнти, на які треба помножити Y, Y', Y'', перш ніж підставити до рівняння. Додавання після множення виконується окремо для лівих і правих частин рівностей. З умови рівності многочленів випливає, що $\begin{cases}-6A=1\\ 5A-6B=-1\end{cases}$. Звідки $A=-\frac{1}{6}; B=\frac{1}{36}$, тоді $Y=\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{2x}$.

Загальним розв'язком заданого рівняння є функція:

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{3x}+\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{2x}.$$

З цього розв'язку треба виділити той частинний розв'язок, який задовольняє

заданим початковим умовам. За умовою $y(0)=\frac{1}{36}$, тоді $\frac{1}{36}=C_1+C_2+\frac{1}{36}$, звідки $C_1+C_2=0$.

Знайдемо $y'=-4C_1e^{-4x}+3C_2e^{3x}-\frac{1}{6}e^{2x}+\left(-\frac{1}{3}x+\frac{1}{18}\right)e^{2x}$.

За умовою $y'(0)=\frac{8}{9}$: $\frac{8}{9}=-4C_1+3C_2-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$. Звідки $-4C_1+3C_2=1$. Для знаходження C_1 та C_2 маємо систему рівнянь $\begin{cases}C_1+C_2=0\\-4C_1+3C_2=1\end{cases}$. Розв'язуючи систему, будемо мати: $C_1=-\frac{1}{7}; C_2=\frac{1}{7}$. Остаточно, розв'язком заданої задачі Коші є функція:

$$y=-\frac{1}{7}e^{-4x}+\frac{1}{7}e^{3x}+\left(-\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{2x}.$$

6. ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

21.01-21.30 Змінити порядок інтегрування:

21.01 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy+\int_1^3 dx\int_0^{0,5(3-x)} f(x,y)dy$.

21.02 $\int_2^3 dy\int_{y-1}^5 f(x,y)dx$.

21.03 $\int_{06}^2 dy\int_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx.$

21.04 $\int_0^1 dx\int_{\sqrt{2x-x^2}}^2 f(x,y)dy.$

21.05 $\int_0^1 dx\int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y)dy.$

21.06 $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} f(x,y)dx.$

21.07 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy.$

21.08 $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy.$

21.09 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)dy.$

21.10 $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y^2-4}^{3y} f(x,y)dx.$

21.11 $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy.$

21.12 $\int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$.

21.13 $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx.$

21.14 $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} f(x.y)dy.$

21.15 $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{y}^{10-y} f(x,y)dx.$

21.16 $\int_0^4 dx \int_{0,5x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$

21.17 $\int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x,y)dx.$

21.18 $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx.$

21.19 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx.$

21.20 $\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)dy.$

21.21 $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x,y)dx.$

21.22 $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

21.23 $\int_0^2 dx \int_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x,y)dy.$

21.24 $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x,y)dy.$

21.25 $\int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} f(x,y)dy.$

21.26 $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{0}^{y+1} f(x,y)dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2}^{1} f(x,y)dx.$

21.27 $\int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{0}^{3-y} f(x,y)dx.$

21.28 $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy.$

21.29 $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{x}^{2-x} f(x,y)dy.$

21.30 $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{6x-x^2}} f(x,y)dy.$

22.01-22.30 Обчислити подвійним інтегруванням об`єми тіл, обмежених даними поверхнями. Виконати рисунок.

22.01 Еліптичним параболоїдом $z = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$, площинами *x=2, x=3, y=1, y=2, z=0.*

22.02 Еліптичним параболоїдом $z = 4x^2 + 2y^2 + 1$, площинами $x + y - 3 = 0,\ x = 0,\ y = 0, z = 0.$

22.03 Еліптичним параболоїдом $z = \frac{x^2}{9} + \frac{z^2}{4}$, площиною $z = 5.$

22.04 Циліндром $x^2 + y^2 = 25$, площинами $x + y + z = 6, z = 0.$

22.05 Площинами $6x - 9y + 5z = 0$, $3x - 2y = 0$, $4x - y = 0$, $x + y - 5 = 0$, $z = 0$.

22.06 Циліндром $x^2 + y^2 = 4$ і площинами $x + y + z = 3$, $z = 0$.

22.07 Циліндром $z = y^2$ і площинами $2x + y = 2$, $x = 0$, $z = 0$.

22.08 Параболоїдом обертання $4(x^2 + y^2) + z = 4$ і площиною $z = 0$.

22.09 Параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$ і площинами $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

22.10 Циліндром $x^2+y^2=4$ і площинами $z=0$, $z=3x$.

22.11 Параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$ і площинами $y=1$, $x=2$, $z=0$.

22.12 Циліндром $x^2+y^2=4$ і площинами $x+y+z=4$, $z=0$.

22.13 Циліндром $z=x^2+y^2$ і сферою $2z=z^2+x^2+y^2$.

22.14 Циліндром $x^2+y^2=9$ і площинами $z=0$, $x+y+z=4$.

22.15 Параболоїдом обертання $x^2+y^2=4z$ і площинами $x+y+z=4$; $z=0$.

22.16 Циліндром $x^2+y^2=4$ і площинами $z=0$, $z=4-x-y$.

22.17 Конусом $x^2+y^2=z^2$, площиною $z=0$ $(z>0)$ і циліндром $x^2+y^2=9$.

22.18 Параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$ і площинами $x=y$, $y=4-x$, $y=1$, $z=0$.

22.19 Циліндром $x^2+y^2=25$, площинами $y=0, y=4, x=0, x=2, z=0$.

22.20 Параболоїдом обертання $3(x^2+y^2)=2z$ і площинами $z=8$, $z=0$.

22.21 Параболоїдом обертання $z=x^2+y^2$, площинами $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

22.22 Параболоїдами обертання $2z=x^2+y^2$, $6-z=x^2+y^2$.

22.23 Параболоїдом обертання $x^2+y^2=2z$, циліндром $x^2+y^2=4$ і площиною $z=0$.

22.24 Параболоїдами обертання $x^2+y^2=z+4$ і площиною $z=0$.

22.25 Циліндром $x^2+y^2=4$, площинами $x+y+z=4$, $z=0$ $(z>0)$.

22.26 Параболоїдом обертання $z=1-x^2-y^2$ і площиною $z=0$.

22.27 Параболоїдом обертання $x^2+y^2=z$ і площинами $x=3$, $y=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

22.28 Параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, циліндром $x^2 + y^2 = 4$ і площиною $z = 0$.

22.29 Циліндром $x^2+y^2=4$ і площинами $z=2+x$, $z=4+x$.

22.30 Циліндром $2z=x^2$ і площинами $3x+2y=12$, $y=0$, $z=0$.

23.01 – 23.30 Обчислити криволінійний інтеграл вздовж лінії L. Виконати рисунок.

23.01 $\int\limits_L (x^2+3y^2)dx+(x^2-2y^2)dy$ L: $y = |x|$, від $A(-1; 1)$ до $B(3; 3)$.

23.02 $\int\limits_L xdy-ydx$ L: $x = 4(t-\sin t)$, $y=4(1-\cos t)$ від $A(6\pi; 0)$ до $B(0; 0)$.

23.03 $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$ L: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$.

23.04 $\int\limits_L (x^3-3y)dx+(y^2+2x)dy$ L: складається з відрізків прямих $x = 1$ та $y = 5$ від $A(1; 3)$ до $B(2; 5)$.

23.05 $\int\limits_L xdy-ydx$ L: трикутник ABC, де $A(-5; 0)$, $B(5; 0)$, $C(0; 5)$.

23.06 $\int\limits_L xe^{x^3}dy+ydx$ L: $y=x^2$ від $A(0; 0)$ до $B(2; 4)$.

23.07 $\int\limits_L 6xydx-3x^2dy$ L: $x=2y^2$ від $A(0; 0)$ до $B(2; 1)$.

23.08 $\int\limits_L \frac{x^2dy-y^2dx}{x^{5/3}-y^{5/3}}$ L: $x = 2\cos^3 t$; $y = 2\sin^3 t$ від $A(2; 0)$ до $B(0; 2)$.

23.09 $\int\limits_L (x^2+y^2)dx-4xydy$ L: відрізок AB, $A(1; -1)$, $B(-3; 4)$.

23.10 $\int\limits_L (x-y)^2+2(x+y)^2dy$ L: трикутник ABC, де $A(0; 0)$, $B(2; 0)$, $C(4; 2)$.

23.11 $\int\limits_L (x^2+y)dx+(x+y^2)dy$ L: $y = x^2$ від $A(-3; 9)$ до $B(3; 9)$.

23.12 $\int\limits_L 3(x^2+y^2)dx-(x^2-y^2)dy$ L: трикутник ABC, де $A(0;\ 0)$, $B(4;\ 0)$, $C(0;\ 4)$.

23.13 $\int\limits_L (x^2+2xy)dx+(2xy+y^2)dy$ L: $y=x^2-1$ від $A(1;\ 0)$ до $B(3;\ 8)$.

23.14 $\int\limits_L 2xydx+x^2dy$ L: $y=\dfrac{x^2}{4}$ від $A(0;\ 0)$ до $B(-2;\ 1)$.

23.15 $\int\limits_L (3x^2-2xy+y^2)dx+(x^2-3y^2)dy$ L: відрізок AB, $A(0;\ 3)$, $B(-1;\ 5)$.

23.16 $\int\limits_L (y^2+2xy)dx+(2xy+x^2)dy$ L: $y=(x-1)^2$ від $A(1;\ 0)$ до $B(3;\ 4)$.

23.17 $\int\limits_L (2x+4y)dx+(5x-3y)dy$ L: $y=e^x$ від $A(0;\ 1)$ до $B(1;\ e)$.

23.18 $\int\limits_L e^{x-y}dx+(1-x-y)dy$ L: відрізок AB, $A(-1;\ -1)$, $B(3;\ -2)$.

23.19 $\int\limits_L (x^4+3y^3)dx+(x^2y^2-2y^4)dy$ L: трикутник ABC, де $A(-2;\ -1)$, $B(3;\ -1)$, $C(3;\ 0)$.

23.20 $\int\limits_L (x^3+2xy^2)dx+(xy-y^3)dy$ L: $y=3x^2$ від $A(-1;3)$ до $B(2;12)$.

23.21 $\int\limits_L y\sin x dy+2x\cos y dx$ L: відрізок AB, $A(0;0)$, $B(\pi;2\pi)$.

23.22 $\int\limits_L xydx+(y-4x)dy$ L: $y=x^3$ від A(0;0) до B(–2; –8).

23.23 $\int\limits_L \dfrac{y^2dx-x^2dy}{x^2+y^2}$ L: $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $0\le t\le\pi$.

23.24 $\int\limits_L 2x^2y-x^2dy$ L: $y=|x|$ від $A(0;0)$ до $B(2;2)$.

23.25 $\int\limits_L (xy+x+2y)dx+(xy+3x-y)dy$ L: $y=x^2$ від $A(-1;1)$ до $B(2;4)$.

23.26 $\int\limits_L x^2dy-y^2dx$ L: $x=3\cos t$, $y=5\sin t$, $0\le t\le\pi/2$.

23.27 $\int\limits_L (x+y)^2 dx + (x-y)^2 dy$ *L*: відрізок *AB*, *A*(1;1), *B*(4;3).

23.28 $\int\limits_L (xy^3 + xe^y - 2y)dx + x^3 y dy$ *L*: $y = x^2 - 1$ від *A*(1;0) до *B*(3;8).

23.29 $\int\limits_L (2xy + y)dx + x^2 dy$ *L*: трикутник *ABC*, де *A*(–1;1), *B*(0;0), *C*(3;3).

23.30 $\int\limits_L (1-x^2)ydx + x(1+y^2)dy$ *L*: $y = 2x^3$ від *A*(1;2) до *B*(2;16).

24.01 – 24.30 Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

24. 01

1. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$.
2. $(x+2y)dx - xdy = 0$, $y(1) = 1$.
3. $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2 e^x$.
4. $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2$.

24. 02

1. $y' = \dfrac{2x}{3y^2+1}$.
2. $3xy' = x + 4y$, $y(1) = 1$.
3. $y' = e^{2x} - ye^x$.
4. $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{(x+1)^3 y^3}{2}$.

24. 03

1. $y' = y \cdot tgx$.
2. $xy^2 y' = x^3 + y^3$, $y(1) = 3$.
3. $xy' - 3y = x + 1$.
4. $yy' + \dfrac{y^2}{x} = \sin x$.

24. 04

1. $y' \sin x = y \ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$.
2. $xy' - x\cos^2 \dfrac{y}{x} = y$.
3. $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$.
4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

24. 05

1. $y^2y' + x^2 = 1.$
2. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y.$
3. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}.$
4. $y' + xy = x^3y^3,\ y(0) = 1.$

24. 06

1. $y' = y^2\cos 2x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$
2. $xy' = 2y.$
3. $x^2y' + xy + 1 = 0.$
4. $y' - xy + y^3e^{-x^2} = 0.$

24. 07

1. $y' = \frac{4y}{x^2 - 4}.$
2. $yy' + x = 0.$
3. $xydx + (x+1)dy = 0.$
4. $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \sin x),\ y(0) = 1.$

24. 08

1. $y' = \frac{x^2 - 2}{1 - y^3}.$
2. $3xy' = x + 4y.$
3. $xy' - 2y = 2x^4,\quad y(2) = 8.$
4. $(1 - x^2)y' - xy - 2x^3y^2 = 0.$

24. 09

1. $y' = e^{x+y}.$
2. $xy' = y\ln\frac{y}{x}.$
3. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = \mathrm{tg}^2 x.$
4. $y' + y = \sqrt{y}\cdot e^{\frac{x}{2}},\quad y\big|_{x=0} = \frac{9}{4}.$

24. 10

1. $y\cdot y' + x = 5.$
2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$
3. $xy' + y = \ln x + 1.$
4. $y' - 2xe^xy^3 - y = 0,\quad y\big|_{x=0} = 1.$

24. 11

1. $(x^2 + 1)y' - 4xy = 0.$
2. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2).$

24. 12

1. $yy' = (1 - 3x^2)y^{-2}.$
2. $(x+1)\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^2.$

3. $x(1+x^2)dy=(y+yx^2-x^2)dx,$

$$y|_{x=1}=-\frac{\pi}{4}.$$

4. $y'-8x\sqrt{y}=\dfrac{4xy}{x^2-1}.$

24. 13

1. $y'\operatorname{tg}x-y=1.$
2. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0.$
3. $y'-2xe^x y^3-y=0,\ \ y|_{x=0}=1.$
4. $6xy'-y=-\dfrac{1}{y^3\sqrt{x}}.$

24. 15

1. $x\sqrt{1+y^2}dx+y\sqrt{1+x^2}dy=0.$
2. $(y+2\sqrt{xy})dx-xdy=0,\quad y(e)=e.$
3. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2.$
4. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=-xy^2.$

24. 17

1. $y'=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y.$
2. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0.$
3. $tds-2sdt=t^2\ln t\cdot dt.$
4. $(y'+y^2)(x+1)=-y,\quad y(0)=1.$

3. $y'-\dfrac{y}{x}=e^{\frac{y}{x}}.$
4. $y'+4x^3y=4(x^3+1)e^{-4x}y^3,\quad y(0)=1.$

24. 14

1. $yy'=-\dfrac{2x}{\cos y}.$
2. $(x-y\cos\dfrac{y}{x})dx+x\cos\dfrac{y}{x}\cdot dy=0.$
3. $(y'-y)x=e^x,\quad y|_{x=1}=e.$
4. $yy'-4x^2-y^2\sqrt{x}=0.$

24. 16

1. $(1+x^2)dy+ydx=0.$
2. $xdy-ydx=x\sin^2\dfrac{y}{x}\cdot dx$
3. $y'+2xy=xe^{-x^2}.$
4. $2xy'-3y=-(5x^2+3)y^3,\quad y|_{x=1}=1.$

24. 18

1. $x(y^2-4)dx+ydy=0.$
2. $y=x(y'+\sqrt[x]{e^y}).$
3. $y'-y\operatorname{tg}x=\sin 2x,\quad y(\pi)=\dfrac{4}{3}.$
4. $3xy'+5y=(4x-5)y^4.$

24. 19

1. $(x+1)y' = xy.$

2. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x.$

3. $y' + \frac{1-2x}{x^2-x} = 1, \quad y(2) = -2\ln 2.$

4. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$

24. 20

1. $(y+xy)dx + (x-xy)dy = 0.$

2. $y' = \frac{x^2+xy+y^2}{x^2}.$

3. $y'\mathrm{ctg}x - y = 2\cos^2 x\,\mathrm{ctg}x.$

4. $xdy = (x^5y^2 - 2y)dx, \quad y|_{x=1} = 1.$

24. 21

1. $ydx + ctgxdy = 0.$

2. $3xy' = x + 4y, \quad y(1) = 1.$

3. $(\varphi^2 - 1)r' - \varphi r = \varphi^3 - \varphi.$

4. $y' + 4x^3y = 4y^2e^{4x}(1-x^3).$

24. 22

1. $(x+1)^3dy - (y-2)^2dx = 0.$

2. $xy' - 3y = \frac{x^2}{y}.$

3. $xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y|_{x=1} = 1.$

4. $3(xy' + y) = y^2\ln x.$

24. 23

1. $xydx = -(x+1)dy.$

2. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y|_{x=0} = 2.$

3. $xy' - 2y = x + 1.$

4. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{arctg}x, \quad y(0) = 1.$

24. 24

1. $y' - y\sin 2x = 0.$

2. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x).$

3. $y'\cos x + y\sin x = 1, y(0) = 1.$

4. $y' - y\,\mathrm{tg}x = -\frac{2}{3}y^4\sin x.$

24. 25

1. $yy' = \frac{2+x}{y}.$

2. $y' = \frac{x+2y}{x}.$

24. 26

1. $S\,\mathrm{tg}t \cdot dt + dS = 0.$

2. $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad y(-1) = 2.$

3. $y' + (1 + \frac{1}{x^2})y = e^{\frac{1}{x}}$.

4. $y' = y\,\mathrm{ctg}x + \frac{y^3}{\sin x}$.

24. 27

1. $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$.

2. $xy'\sin\frac{y}{x} = y\sin\frac{y}{x} - x$.

3. $y' + \frac{3y}{x} = 7x^3 + 2x^2$.

4. $(y' + xy)e^x = (x - 1)y^2, \quad y(0) = 1$.

24. 29

1. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.

2. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.

3. $tdx + (x - t\sin t)dt = 0$.

4. $y - y'\cos x = y^2\cos x(1 - \sin x)$, $y(0) = 1$.

3. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$.

4. $xy' + y = \frac{1}{2}xy^2$.

24. 28

1. $y' = y^2\cos 2x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$,

2. $xy'\sin\frac{y}{x} = y\sin\frac{y}{x} - x$.

3. $y' + \frac{y}{x+1} = 3x - 1$.

4. $3y' + 2xy = 2xy^{-2}e^{-2x^2}$.

24. 30

1. $(x + 1)y' + xy = 0$.

2. $tx' + t\cos\frac{x}{t} - x + t = 0$.

3. $y'\cos x - 2y\sin x = 2$.

4. $\frac{2y' + y\cos x}{1 + \sin x} = y^{-1}\cos x, \quad y|_{x=0} = 1$.

25.01-25.30 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

25. 01

1. $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1, y(0) = \frac{29}{32}, y'(0) = -\frac{3}{8}.$

2. $y'' + 4y = 8\sin 2x.$

3. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}.$

25. 02

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y''(0) = 11.$

2. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + \cos 2x.$

3. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$

25. 03

1. $y'' + 4y = 8x, y(0) = 0, y'(0) = 4.$

2. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$

3. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}.$

25. 04

1. $y'' + 4y' + 4y = 5e^{3x}, y(0) = \frac{1}{5}, y'(0) = \frac{8}{5}.$

2. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$

3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x.$

25. 05

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}, y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 0.$

2. $y'' + 3y' = 9x.$

3. $y'' + 4y = tg 2x.$

25. 06

1. $y'' + 4y = 4\sin x, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

2. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$

3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}.$

25. 07

1. $y'' - 2y' = x^2 - x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' + 2y' + 2y = 4\sin 2x + 2\cos 2x.$

3. $y'' + 5y' + 6y = \left(e^{2x} + 1\right)^{-3/2}.$

25. 08

1. $y'' + y = x^2, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

2. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 2k\sin kt.$

3. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$

25. 09

1. $y'' - 2y' + 10y = 5x + 9, y(0) = 4, y'(0) = 6{,}5.$

25. 10

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$

2. $y'' - 2my' + m^2 y = \sin mx.$

3. $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x}.$

25. 11

1. $y'' + y = \cos 2x, y(0) = -\dfrac{1}{3}, y'(0) = 1.$

2. $y'' - 5y' + 4y = 4e^{2x}x^2.$

3. $y'' + 2y' + y = \sqrt{x}e^{-x}.$

25. 13

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x + 3, y(0) = 2, y'(0) = 6.$

2. $y'' + 2y' - 3y = e^x x^2.$

3. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}.$

25. 15

1. $y'' - 3y' = x + \cos x, y(0) = -\dfrac{1}{10}, y'(0) = -\dfrac{1}{9}.$

2. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$

3. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin^2} x.$

25. 17

1. $y'' - 4y = 8x + 3, y(0) = 0, y'(0) = 4.$

2. $y'' + 9y = e^x \cos 3x.$

3. $y'' - 4y' - 5y = \dfrac{e^{6x}}{1+e^{2x}}.$

2. $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 2.$

3. $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}.$

25. 12

1. $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0.$

2. $y'' + y = 4\sin x.$

3. $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x.$

25. 14

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$

2. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

3. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{2x}}{e^x + 1}.$

25. 16

1. $y'' - 2y' + y = e^x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$

2. $y'' + 4y' + 8y = 20\sin 2x.$

3. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}.$

25. 18

1. $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

2. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

3. $y'' - 3y' - 4y = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$

25. 19

1. $y''-8y'+20y=20x^2+4x+14, y(0)=3, y'(0)=11.$

2. $y''+3y'+2y=2\sin x+\cos x.$

3. $y''-y'=e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}.$

25. 20

1. $y''-6y'+9y=x^2-x+3, y(0)=\frac{4}{3}, y'(0)=\frac{1}{27}.$

2. $y''+4y'=8e^{4x}.$

3. $y''+4y=\frac{1}{\cos 2x}.$

25. 21

1. $y''-2y'+5y=5x^2-4x+2, y(0)=2, y'(0)=0.$

2. $y''-3y'=6e^{3x}.$

3. $y''+9y=2\sin x\sin 2x.$

25. 22

1. $4y''+y'-3y=3x^2+x.$

2. $y''-y=8e^x, y(0)=2, y'(0)=4.$

3. $y''-4y'+13y=\frac{e^{2x}}{\cos^3 3x}.$

25. 23

1. $y''+4y=\sin x, y(0)=y'(0)=1.$

2. $y''+7y'+12y=24x^2+16x-15.$

3. $y''-y=\frac{2e^x}{e^x-1}.$

25. 24

1. $y''-5y'+6y=(12x-7)e^{-x}, y(0)=y'(0)=0.$

2. $y''+2y'+5y=4\sin x+22\cos x.$

3. $y''+6y'+9y=\frac{e^{-3x}}{x^3}.$

25. 25

1. $y''-2y'=(x^2+x-3)e^x, y(0)=y'(0)=0.$

2. $y''-8y'+16y=32x.$

3. $y''+9y=ctg3x.$

25. 26

1. $y''-2y'+y=4\sin x+4\cos x, y(0)=1, y'(0)=0.$

2. $y''+y'=49-2x^2.$

3. $y''+10y'+25y=\frac{e^{-5x}}{\sqrt{1-4x^2}}.$

25. 27

1. $y''-3y'=6-3x^2, y(0)=0, y'(0)=1.$

2. $y''+y=\sin x-\cos x.$

25. 28

1. $y''-2y'+y=16e^x, y(0)=1, y'(0)=2.$

2. $y''-y'-6y=6x^2-4x+3.$

3. $y''-3y'-4y=e^{-x}\cos 3x.$

3. $y'' - 2y'' + y = \frac{2-x}{x^3} e^x$.

25. 29

1. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

2. $y'' + 2y' + y = 3\sin x.$

3. $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^5}$.

25. 30

1. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' + y' = 49 - 24x^3$.

3. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. *Кудрявцев В. А.* Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1975.

2. *Щипачёв В. С.* Курс высшей математики. – М.: Изд. МГУ, 1981.

3. *Овчинников П. Ф.* Вища математика. У 2 ч. Ч. І. Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне та інтегральне числення / Під ред. П. Ф. Овчинникова. 2-ге вид. – К.: Вища шк., 2000.

4. *Овчинников П. Ф.* Вища математика. У 2 ч. Ч. ІІ. Диф. рівняння. Операційне числення. Ряди та їх застосув. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння матем. фізики. Оптимізація і керування. Теорія ймовірностей. Числові методи. / Під ред. П. Ф. Овчинникова. 2-ге вид. – К.: Вища шк., 2000.

5. *Гаєвська В. О.* Довідковий посібник з вищої математики: Навчально-методичний посібник / В. О. Гаєвська, О. В. Бабаєва, Р. В. Посилаєва, Г. В. Лисянська. – Х.: ХНУБА, 2015.

6. *Могульський Є.* Диференціальні рівняння та їх використання в прикладних задачах: Навчально-методичний посібник / Є. Могульський, Є. В. Поклонський, Н. Ю. Іохвідович. – Х., 2014.

7. *Аршава О. О.* Вища математика: тексти лекцій / О. О. Аршава, Н. Ю. Іохвідович, Л. І. Щелкунова. – Х., ХНУБА, 2014.

8. *Клепко В. Ю.* Вища математика в прикладах і задачах : Навч. посібник для студентів вищих навч. закладів / В. Ю. Клепко, В. Л. Голець. – К., 2006.

9. *Баранова Е. С.* Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты / Е. С. Баранова, Н. В. Васильева, В. П. Федотов. – СПб., 2008.

ЗМІСТ

Вступ 3
Контрольна робота № 1. 3
1. Похідна функції 3
2. Похідні вищих порядків 10
3. Повне дослідження функції 11
4. Невизначений інтеграла 24
5. Визначений інтеграл 48
6. Застосування визначеного інтеграла 56
7. Індивідуальні завдання 64
Контрольна робота № 2. 86
1. Подвійний інтеграл та його обчислення 86
2. Криволінійний інтеграл другого роду та його обчислення 96
3. Диференціальні рівняння першого порядку 99
4. Рівняння вищих порядків 105
5. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами 108
6. Індивідуальні завдання 112
Список джерел інформації 127

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з курсу «Вища математика» на теми: «Похідна», «Невизначений та визначений інтеграли», «Кратні та криволінійні інтеграли», «Диференціальні рівняння» для студентів-заочників з прискореним терміном навчання спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»

Укладачі: Петрова Анжела Юріївна
Посилаєва Раїса Вікторівна

Відповідальний за випуск О. О. Аршава

Редактор В.І. Пуцик

План 2016 р., поз. 30	Формат 60х84 1/16.	Папір друк. №2.
Підп. до друку	Обл.-вид. арк. 5.8.	Безкоштовно.
Надруковано на ризографі.	Ум. друк. арк. 5.6.	
Тираж 50 прим.	Зам. № 2821	

ХНУБА, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури