Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 192

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ З ТЕМ: „РЯДИ”, „ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

з курсу „Вища математика”

для студентів заочної форми з прискореним терміном навчання

Харків 2018

Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 192

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ДО ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ З ТЕМ:
„РЯДИ”,
„ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

з курсу „Вища математика”

для студентів заочної форми з прискореним терміном навчання

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 5 від 28.12.2015

Харків 2018

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з тем: „Ряди”, „Теорія ймовірностей та математична статистика” з курсу „Вища математика” для студентів заочної форми навчання з прискореннем терміном навчання спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»/ Укладачі: А.Ю. Петрова, Р.В. Посилаєва. – Харків, ХНУБА, 2018. – 67 с.

Рецензент Є.В. Поклонський

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Мета даного видання – надати допомогу студентам-заочникам в організації самостійної роботи під час вивчення таких розділів курсу вищої математики, як: „Ряди”, „Теорія ймовірностей та математична статистика”. Видання містить основні поняття теоретичного змісту відповідних розділів, достатню кількість розв'язаних прикладів, а також завдань для самостійної роботи. Зміст, повнота і рівень складності завдань і прикладів, які запропоновані, відповідають рівню вимог до математичної підготовки студентів технічних спеціальностей.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3 «РЯДИ»

Під час розв’язання багатьох задач математичного аналізу доводиться розглядати суми, складені з нескінченої кількості доданків. Що розуміється під сумою нескінченої множини чисел (або функцій, векторів, матриць і таке інше)? Це питання розглядається в теорії рядів, яка складає одну з важливих глав курсу математичного аналізу.

1 ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1 Основні означення

Нехай маємо нескінченну послідовність дійсних чисел $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$

Означення 1 Рядом є вираз

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1)$$

Цей вираз поки що точного сенсу не має, оскільки нескінченне число додавань здійснити не можна. Покладемо $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$

S_n є $n-$ю частковою сумою ряду (1), а число a_n — $n-$м або її загальним членом.

Означення 2 Якщо послідовність часткових сум $\{ S_n : n \geq 1 \}$ збігається до дійсного числа *S*, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S,$ то ряд (1) є збіжним, а число S – сумою ряду (1) і позначається символом $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n.$

Якщо послідовність $\{S_n : n \geq 1\}$ скінченної границі не має, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 1 Знайдіть суму ряду $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

Розв’язання Загальний член ряду $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$ $n-$а часткова сума має вигляд

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Після розкриття дужок всі доданки, крім першого і останього, взаємно знищуються і в результаті маємо:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1},$$

звідки випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1.$

Отже, ряд збігається і його сума дорівнює 1: $\sum\limits_{n\to 1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

Приклад 2 Дослідіть збіжність ряду 1-1+1-1+…

Розв'язання Будь- яка часткова сума S_n з парним номером дорівнює нулю, а з непарним номером - одиниці. Послідовність часткових сум цього ряду

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \cdots,$$

хоч і обмежена, але не має границі, отже, цей ряд розбігається і не має суми.

Описаний "природний" шлях визначення збіжності ряду дуже незручний, бо потребує обчислення часткових сум та їх границь.

Нерідко під час дослідження рядів значення часткових сум просто не потрібні, більш того не потрібна навіть сума ряду, а всі дослідження виконуються лише заради встановлення самого факту збіжності або розбіжності ряду. Для цього користуються ознаками збіжності ряду.

Теорема 1 (Необхідна ознака збіжності ряду) Якщо числовий ряд збігається, то його загальний член прямує до нуля при $n \to \infty$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Підкреслимо, що наведена теорема є лише необхідною умовою збіжності ряду, тобто такою, що в разі її порушенні, ряд не може збігатися. За допомогою цієї ознаки можна доводити лише розбіжність ряду.

Приклад 3 Доведіть розбіжність ряду $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$

Розв'язання Загальний член ряду: $a_n = \frac{n}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$ За необхідною умовою ряд є розбіжним.

1.2 Ряди з додатними членами. Достатні умови збіжності.

Ознаки порівняння для знакосталих рядів

1 Припустимо, що члени рядів

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (2)$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots \qquad (3)$$

задовольняють умові $0 \le a_n \le b_n; n \ge 1,$ тобто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$ Тоді зі збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (2), а з розбіжності ряду (2) випливає розбіжність ряду (3).

2 Якщо для рядів (2) та (2) з додатними членами існує відмінна від нуля і ∞границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C,$ то ряди збігаються або розбігаються одночасно.

Під час розв'язанне прикладів b_n підбирають наступним чином:

- якщо a_n є відношенням двох многочленів різних степенів відносно n, то за дужки в чисельнику й знаменнику виносять старші степені n і скорочують їх, за b_n приймають вираз степеня n, який залишився після скорочення;
- якщо a_n містить тригонометричні або логарифмічні функції, то символ цієї функції відкидають і далі користуються попереднім пунктом.

3 Якщо при $n \to \infty$ загальний член ряду a_n є нескінченно малою величиною порядку $O(\frac{1}{n^p})$, де $p > 0,$ тобто $a_n = O\left(\frac{1}{n^p}\right),$ то при p>1 ряд (2) збігається, а при $p \le 1$ – розбігається.

Зауваження Щоб розв’язати питання про збіжність того чи іншого ряду за допомогою ознак порівняння, користуються так званими “стандартними” рядами:

1 Геометричний ряд

$$a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},$$

який збігається лише у випадку, коли $|q| < 1$.

2 Гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

який є розбіжним рядом.

3 Узагальнений гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

який збігається лише при p>1.

Приклад 4 Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin\frac{1}{n^3}$.

Розв'язання Зважаючи на те, що $0<sinx<x$ для всіх $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, маємо:

$$n \cdot \sin\frac{1}{n^3} < n \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{1}{n^2}; n \geq 1.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є узагальненим гармонічним. Цей ряд збігається, бо p=2>1. За ознакою порівняння 1 збігатися буде ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{n^3}$.

Приклад 5 Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3-1}{n^4+2}$.

Розв'язання $a_n = \frac{3n^3-1}{n^4+2} = \frac{n^3(3-\frac{1}{n^3})}{n^4(1+\frac{2}{n^4})} = \frac{1}{n}\left(\frac{3-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^4}}\right), b_n = \frac{1}{n}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбігається – гармонічний ряд.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{3-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^4}}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^4}} = 3.$$

За ознакою 2 порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3-1}{n^4+2}$ – розбігається.

Приклад 6 Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Розв'язання Загальним членом ряду є $a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Для порівняння обираємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, загальний член якого $b_n = \frac{1}{n}$. Розглянемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

За ознакою порівняння 2 з розбіжності гармонічного ряду випливає розбіжність заданого ряду.

Приклад 7 Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+5n-1}$.

Розв'язання Якщо в чисельнику і знаменнику для a_n залишити лише старші (відносно n) члени, тоді будемо мати величину $\frac{3n}{n^3}=\frac{3}{n^2}$, яка є нескінченно малою порядку p=2 при $n\to\infty$, тобто $a_n=\frac{1}{n^2}$. За ознакою 3 заданий ряд збігається.

1.3 Ознака Даламбера

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами існує таке число l $(0\le l\le+\infty)$, що для всіх $n\ge1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

то при $l<1$ ряд збігається, при $l>1$ – розбігається, а при $l=1$ треба провести додаткові дослідження.

Приклад 8 Дослідіть збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$.

Розв'язання Запишемо *n*-й та *(n+1)*-ий члени ряду:

$$a_n=\frac{n^n}{3^n n!},\qquad a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}.$$

Маємо $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!}:\frac{n^n}{3^n n!}=\frac{(n+1)^n(n+1)3^n n!}{3^n 3n!(n+1)n^n}=\frac{(n+1)^n}{3n^n}=\frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,

тому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

але $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx2{,}718<3$, тому $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{3}<1$. За ознакою Даламбера ряд збігається.

1.4 Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

то при $l<1$ ряд збігається, при $l>1$ – розбігається, а при $l=1$ треба провести додаткове дослідження.

Радикальна ознака Коші застосовується, як правило, тоді, коли a_n є степенем n або більшим за будь-який вираз.

Приклад 9 Дослідіть ряд на збіжність

$$1+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{7}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n+\cdots$$

Розв'язання Для цього ряду $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$ і тому він збігається.

1.5 Інтегральна ознака Коші

Якщо для ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ з додатними членами існує неперервна функція $f(x),$ визначена на $[1;\infty),$ монотонно спадаюча і така, що $f(n)=a_n$, то для збіжності ряду необхідно й достатньо, щоб збігався невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Приклад 10 Для ряду $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+\cdots$ в якості функції $f(x)$ візьмемо функцію

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}.$$

Невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{n\to\infty}\int_2^{n}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{n\to\infty}\int_2^{n}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\lim_{n\to\infty}(\ln\ln x)\Big|_2^n=\lim_{n\to\infty}(\ln\ln n-\ln\ln 2),$$ при $n\to\infty$

$\ln\ln n\to\infty$, а тому $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$ розбігається, отже, розбігається і ряд.

1.6 Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца

Означення 3 Числовий ряд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots, \tag{4}$$

де всі a_n додатні, є знакопочережним рядом.

Якщо члени знакопочережного ряду (4) задовольняють двом наступним умовам:

1) монотонно спадають, тобто $a_n \geq a_{n+1} \geq 0, \forall n \geq 1$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$

то ряд збігається до суми S, причому $0 \leq S \leq a_1$.

Приклад 11 Дослідіть на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Розв'язання Застосування ознаки Лейбніца вимагає перевірки трьох умов.

По-перше, ряд повинен бути знакопочережним. Ця умова виконана, бо

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

Перевіримо умови збіжності, а саме:

1) послідовність $\{a_n\}$ повинна спадати (ця умова теж виконана, бо $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots$);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Отже, за ознакою Лейбніца ряд збігається.

Означення 4 Знакозмінним рядом є ряд, членами якого є дійсні члени довільного знака:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \tag{5}$$

Означення 5 Знакозмінний ряд (5) є абсолютно збіжним, якщо збігається ряд

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots, \tag{6}$$

складений із абсолютних величин його членів.

Означення 6 Збіжний знакозмінний ряд (5) називається умовно збіжним, якщо ряд (6) розбігається.

Приклад 12 Дослідіть на абсолютну збіжність знакозмінний ряд

$$\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \frac{27}{8} - \frac{64}{16} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n} + \cdots$$

Розв'язання Складемо ряд із абсолютних величин членів заданого ряду. Це буде ряд з додатними членами:

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \frac{64}{16} + \cdots + \frac{n^3}{2^n} + \cdots$$

За ознакою Даламбера маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 2^n}{2^{n+1}n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{2n^3}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=\frac{1}{2}<1.$$

Отже, знакозмінний ряд збігається абсолютно.

Приклад 13 Дослідіть збіжність знакозмінного ряду

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n}+\cdots$$

Розв'язання Члени заданого ряду спадають за абсолютною величиною, крім того,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

отже, за ознакою Лейбніца ряд збігається.

Далі з'ясуємо, як він збігається: абсолютно чи умовно? Для цього складемо ряд з абсолютних величин його членів:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n}+\cdots \qquad (7)$$

Ряд (7) можна записати так:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\right)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається, тому ряд (7) також розбігається.

Отже, знакозмінний ряд збігається, а ряд із абсолютних величин його членів — розбігається. За означенням знакозмінний ряд є умовно збіжним.

2 ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Означення 7 Функціональним рядом є вираз

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x). \qquad (8)$$

Означення 8 Множина тих значень x, для яких ряд (8) збігається, є областю збіжності цього ряду або множиною збіжності.

Приклад 14 Ряд $\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2^2}+\cdots+\frac{x^n}{2^n}+\cdots$ при будь-якому значенні x представляє собою геометричний ряд, знаменник якого $q=\frac{x}{2}$. Ряд збігається, якщо $|q|<1$. Отже, область збіжності функціонального ряду складається з тих значень змінної x, для яких $\left|\frac{x}{2}\right|<1$. Звідки $|x|<2$.

Найважливішими серед функціональних рядів є степеневі ряди.

3 СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Означення 9 Степеневим рядом є ряд, який має вигляд

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad (9)$$

де $a_0, a_1, a_2, \cdots,$ а також x_0 — сталі числа. Точку x_0 називають центром степеневого ряду. Якщо x_0=0, то степеневий ряд записується таким чином:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n. \qquad (10)$$

Для степеневого ряду (10) можливі три випадки:

1) ряд збігається в єдиній точці x=0;

2) ряд збігається при всіх значеннях x $(-\infty < x < +\infty)$;

3) існує таке число R> 0, що ряд збігається при всіх значеннях x, для яких $|x|$<R, і розбігається при всіх x, для яких $|x| > R$.

Для з'ясування збіжності ряду при $x = R$ треба провести додаткове дослідження.

Отже, областю збіжності ряду (10) є або точка x=0, або вся числова пряма, або скінчений інтервал (–R;R), до якого можуть бути приєднаними один, або два кінці.

Теорема 2 (теорема Абеля)

1 Якщо степеневий ряд збігається при деякому значенні $x = x_0$, тоді він абсолютно збігається при будь-якому значенні x, для якого $|x| < |x_0|$.

2 Якщо степеневий ряд розбігається при деякому значенні $x = x_1$, тоді він розбігається при будь-якому x, для якого $|x| > |x_1|$.

Означення 10 Інтервал (–R;R), в кожній точці якого ряд (10) збігається, називається інтервалом збіжності, а число R – радіусом збіжності.

Для степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ радіус збіжності можна знайти за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|, \qquad (11)$$

або

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (12)$$

Приклад 15 Знайдіть множину збіжності ряду

$$\frac{x}{10} + \frac{x^2}{200} + \frac{x^3}{3000} + \cdots + \frac{x^n}{n10^n} + \cdots$$

Розв’язання Радіус збіжності знайдемо за формулою (11):

$$a_n = \frac{1}{n10^n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)10^{n+1}},$$

тому

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)10^{n+1}}{n10^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{10(n+1)}{n} = 10.$$

Областю збіжності є множина тих значень x, для яких $-10 < x < 10$.

Збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу (–10; 10) перевіримо окремо. Нехай $x = -10$, тоді степеневий ряд перетворюється на числовий ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n} + \cdots$$

За ознакою Лейбніца цей ряд збігається.

У точці $x=10$ матимемо ряд з додатними членами:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

він розбігається, бо є гармонічним. Остаточно степеневий ряд збігається у проміжку $[-10;10)$.

Приклад 16 Знайдіть область збіжності ряду

$$(x-1) + \frac{2!(x-1)^2}{2^2} + \cdots + \frac{n!(x-1)^n}{n^n} + \cdots$$

Розв'язання Знайдемо радіус збіжності за формулою (11)

$$a_n = \frac{n!}{n^n}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}};$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Отже, ряд збігається при всіх значеннях x, які задовольняють умові $|x-1| < e \Rightarrow 1 - e < x < 1 + e$.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях цього інтервалу, тобто в точках $x = 1 \pm e$. При $x=1+e$ маємо числовий ряд

$$e + \frac{2!e^2}{2^2} + \cdots + \frac{n!e^n}{n^n} + \cdots \tag{13}$$

Скористаємося ознакою Даламбера (без граничного переходу):

$$\frac{a^{n+1}}{a^n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}n!e^n} = \frac{(n+1)en^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{e\ n^n}{(n+1)^n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1,$$

бо $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$ при будь-яких скінчених значеннях n. Ця нерівність показує, що члени числового ряду (13) зростають, якщо зростає n, а це означає, що не виконується необхідна ознака збіжності і ряд розбігається.

При $x=1-e$ матимемо такий самий ряд, але знакопочережний, і оскільки абсолютні величини його членів не спадають, то ряд розбігається.

Остаточно, множиною збіжності заданого степеневого ряду є інтервал $(1-e;1+e)$.

4 ПОДАННЯ ФУНКЦІЙ У ВИГЛЯДІ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Внаслідок того, що степеневі ряди є найпростішими функціональними рядами і властивості їх сум особливо прості і тому легко можуть бути використані, виникає питання: які функції є сумами степеневих рядів? Або інакше, які функції можна подати у вигляді степеневого ряду?

Означення 11 Подання функції $f(x)$ у вигляді

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \qquad (14)$$

є розкладанням цієї функції на ряд Тейлора. Зокрема, при $a=0$ розкладання на ряд Тейлора називається розкладанням на ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \qquad (15)$$

Теорема 3 Якщо функція $f(x)$ має похідні будь-якого порядку в інтервалі $(-R;\ R)$ і існує таке число M, що в усіх точках цього інтервалу виконується нерівність

$$\left|f^{(n)}(x)\right| < M,$$

то функція $f(x)$ розкладається на ряд Тейлора.

Наведемо розкладання деяких важливих елементарних функцій на ряд Маклорена, з указуванням їх області збіжності:

1) $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,$ $\qquad (-\infty<x<+\infty);$

2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,$ $\qquad (-\infty<x<+\infty);$

3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$ $\qquad (-\infty<x<+\infty);$

4) $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots,$ $\quad (1<x<1);$

5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots,$ $(-1 < x < 1);$

6) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots,$ $(-1 < x < 1).$

Зауваження Іноді для розкладання функції на степеневий ряд використовують почленне диференціювання та інтегрування рядів.

Подання функції у вигляді ряду Тейлора або Маклорена використовується в наближених обчисленнях, а також під час розв'язання диференціальних рівнянь.

Приклад 17 Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = e^{-x^2}$.

Розв'язання Для подання цієї функції у вигляді ряду Маклорена використаємо **метод підстановки**. Нехай $-x^2 = t,$ тоді $e^{-x^2} = e^t.$ За формулою (1) маємо:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^n}{n!} + \cdots$$

Це подання має місце при будь- якому t. Зокрема, при $t=-x^2$ дістанемо:

$$e^{-x2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty).$$

Приклад 18 Розкласти функцію $y=arctgx$ в ряд Маклорена.

Розв'язання Розв'яжемо цю задачу **методом інтегрування**. Має місце тотожність

$$arctgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

Функцію $\frac{1}{1+t^2}$, яка стоїть під інтегралом, подамо у вигляді ряду Маклорена за формулою (6):

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots,$$

який ряд збігається при всіх $t \in (-1; 1)$. Тоді

$$arctgx = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + t^8 - \cdots)dt = \left(t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \cdots \right)\Bigg|_0^x =$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \cdots.$$

Це розкладання справедливе при всіх $x \in (-1; 1)$, але можна показати, що воно залишається справедливим і на кінцях цього інтервалу.

Отже, для всіх $x \in [-1;1]$ має місце рівність

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots.$$

Приклад 19 Розкласти функцію $y=\sin\frac{\pi x}{4}$ на ряд Тейлора в околі точки $x=2$.

Розв'язання Виконаємо такі тотожні перетворення функції, щоб під її знаком з'явився вираз (x-2):

$$\sin\frac{\pi x}{4}=\sin\frac{\pi}{4}(x-2+2)=\sin\left[\frac{\pi}{4}(x-2)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos\frac{\pi}{4}(x-2).$$

Скористаємося поданням (3), в якому замість x підставимо $\frac{\pi}{4}$(x-2):

$$\cos\frac{\pi}{4}(x-2)=1-\frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2 2!}+\frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4 4!}-\cdots+\frac{\pi^{2n}(x-2)^{2n}}{4^{2n}(2n)!}+\cdots.$$

Цей ряд збігається при $-\infty<\frac{\pi}{4}(x-2)<+\infty$.

Таким чином,

$$\sin\frac{\pi x}{4}=1-\frac{\pi^2(x-2)^2}{4^2 2!}+\frac{\pi^4(x-2)^4}{4^4 4!}-\cdots+(-1)^n\frac{\pi^{2n}(x-2)^{2n}}{4^{2n}(2n)!}+\cdots$$

при $-\infty<x<+\infty$.

5 ЗАСТОСУВАННЯ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ У НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕННЯХ

Приклад 20 Обчислити $\sqrt[4]{650}$ з точністю $\Delta=0{,}001$.

Розв'язання Подамо число 650 у вигляді цілого числа, найближчого до нього, з якого добувається четвертий степінь, і залишку.

Отже, 650=625+25=5^4+25. Запишемо рівність

$$\sqrt[4]{650}=\sqrt[4]{625+25}=\sqrt[4]{5^4\left(1+\frac{25}{625}\right)}=5\left(1+\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Застосуємо подання функції $(1+x)^m$ у вигляді ряду Маклорена, при цьому $m=\frac{1}{4},\ x=\frac{1}{25}$:

$$\sqrt[4]{650}=5\left[1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{25}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{25^2}+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{25^3}+\cdots\right]=$$

$$=5\left(1+\frac{1}{4\cdot 25}-\frac{1\cdot 3}{4^2 1\cdot 2}\cdot\frac{1}{25^2}+\frac{1\cdot 3\cdot 7}{4^3 1\cdot 2\cdot 3\cdot 25^3}-\cdots\right).$$

Члени цього ряду знакопочережні, а їх модулі монотонно спадають. За ознакою Лейбніца залишок ряду R_n не перевищує модуля $(n+1)$-го члена ряду.

$$a_1 = 1; \quad a_2 = \frac{1}{4\cdot 25} = 0{,}010; \quad a_3 = \frac{3}{16\cdot 2\cdot 625} = 0{,}00015$$

Отже, $5a_3 < 0{,}001$. Тому з точністю до 0,001 $\sqrt[4]{650} \approx 5(1+0{,}010) \approx 5{,}050$

Приклад 21 Обчислити $\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^{-x}dx$ з точністю $\Delta = 0{,}001$.

Розв'язання За формулою (1) маємо:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

Тому $$\sqrt{x}e^{-x} = \sqrt{x} - x\sqrt{x} + \frac{x^2\sqrt{x}}{2!} - \frac{x^3\sqrt{x}}{3!} + \frac{x^5\sqrt{x}}{5!} - \cdots;$$

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^{-x}dx = \int\limits_0^{\frac{1}{9}} \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1\cdot 2} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7\cdot 1\cdot 2} - \frac{2x^{\frac{9}{2}}}{9\cdot 1\cdot 2\cdot 3} + \cdots \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{9}} = = \frac{2}{3\cdot 3^3} - \frac{2}{5\cdot 3^5} + \frac{2}{7\cdot 2\cdot 3^7} - \frac{2}{9\cdot 6\cdot 3^9} + \cdots$$

З'ясуємо, скільки членів треба взяти, щоб обчислити інтеграл з точністю $\Delta = 0{,}001$.

$$a_1 = \frac{2}{3\cdot 3^3} \approx 0{,}0247;$$

$$a_2 = \frac{2}{5\cdot 3^5} \approx 0{,}0016;$$

$$a_3 = \frac{2}{7*2*3^7} \approx 0{,}00006 < 0{,}001.$$

Отже,

$$\int\limits_0^{\frac{1}{9}} \sqrt{x}e^{-x}dx \approx 0{,}0247 - 0{,}0016 \approx 0{,}0231$$

Приклад 22 Знайдіть розв'язок рівняння $y'' = xy$ (за початковими умовами $y(0) = 1; \quad y'(0) = 0$), обмежившись першими трьома членами, відмінними від нуля.

Розв'язання:

Спосіб 1 (метод невизначених коефіцієнтів). Розв'язок рівняння будемо відшукати у вигляді степеневого ряду

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

За першою початковою умовою маємо

$$a_0 = y(0) = 1.$$

Продиференціювавши двічі степеневий ряд, одержимо:

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots;$$

$$a_1 = y'(0) = 0;$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n + \cdots$$

і підставимо ряди для $y; y'; y''$ до рівняння:

$$2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \cdots + (n+1)(n+2)a_{n+2} x^n =$$

$$= a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^n + \cdots.$$

Прирівняємо коефіцієнти за однаковими степенями x:

x^0: $2a_2 = 0$;

x^1: $6a_3 = a_0$;

x^2: $12a_4 = a_1$;

x^3: $20a_5 = a_2$;

x^4: $30a_6 = a_3$.

Звідси $a_2 = 0;\ \ a_3 = \dfrac{1}{3!};\ \ a_4 = 0;\ \ a_5 = 0;\ \ a_6 = \dfrac{4}{6!}.$

Таким чином, $y = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{4x^6}{6!} + \cdots.$

Спосіб 2 (метод послідовного диференціювання). Розв'язок рівняння відшукуємо у вигляді ряду Маклорена:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{y^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{y^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \cdots.$$

За заданих початкових умов маємо: $y(0) = 1;\ \ y'(0) = 0.$ Із самого рівняння маємо: $y''(0) = 0.$ Продиференціюємо задане диференціальне рівняння:

$$y''' = x'y + xy'$$

або

$$y''' = y + xy',$$

звідки $y'''(0) = y(0) + 0 \cdot y'(0) = 1.$ Знайдемо $y^{(4)} = y' + y' + xy'' = 2y' + xy'',$ тоді $y^{(4)}(0) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$

Аналогічно:

$$y^{(5)} = 2y'' + y'' + xy'''; \qquad y^{(5)}(0) = 0;$$

$$y^{(6)} = 2y''' + y''' + y''' + xy^{(4)} = 4y''' + xy^{(4)}; \qquad y^{(6)}(0) = 4.$$

Отже, $y(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{4}{6!}x^6 + \cdots.$

6 РЯДИ ФУР'Є

Під час вивчення періодичних процесів використовуються так звані тригонометричні ряди або ряди Фур'є.

Означення 12 Функціональний ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx$$

є тригонометричним рядом, а сталі числа $a_0,a_1,b_1,\cdots,a_n,b_n,\cdots$ – його коефіцієнтами.

Якщо цей ряд збігається, тоді сумою тригонометричного ряду є періодична з періодом 2π функція на проміжку $(-\pi;\pi)$, тобто

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx, \tag{16}$$

коефіцієнти ряду знаходяться за формулами:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx; \tag{17}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx; \tag{18}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx \tag{19}$$

і являються коефіцієнтами Фур'є функції $f(x)$, а тригонометричний ряд (16) — рядом Фур'є.

Достатні умови розвинення функції *f(x)* в ряд Фур'є дає теорема Дирихлє.

Теорема Дирихлє Якщо періодична з періодом 2π функція обмежена та частково-монотонна на відрізку $[-\pi;\pi]$, то ряд Фур'є, побудований для $f(x)$, збігається. Сума *S(x)* цього ряду дорівнює $f(x)$ в усіх точках, де функція $f(x)$ неперервна. Якщо ж точка x=c є точкою розриву $f(x)$, то

$$S(c)=\frac{f(c+0)+f(c-0)}{2}.$$

Якщо $f(x)$ є періодичною функцією з періодом $2l$, то ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{20}$$

де

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx, \tag{21}$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \tag{22}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (23)$$

Для розвинення функції $f(x)$ в ряд Фур'є іноді зручно використовувати таку *властивість періодичних функцій.*

Інтеграл від періодичної функції $f(x)$ на будь-якому відрізку, довжина якого дорівнює періоду, завжди має одне й те ж саме значення, тобто

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\cos nx dx;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Якщо функція $f(x)$ є парною, тобто $f(-x) = f(x)$, то вона розкладається на неповний ряд Фур'є за косинусами:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \;\; b_n = 0,$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Якщо функція $f(x)$-непарна, тобто $f(-x)$=- $f(x)$, то вона розкладається на ряд Фур'є за синусами, бо $a_0 = a_n = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx dx,$$

де

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Приклад 23 Розвинути в ряд Фур'є функцію

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & -\pi \le x \le 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}.$$

Розв'язання Графік цієї функції має вигляд

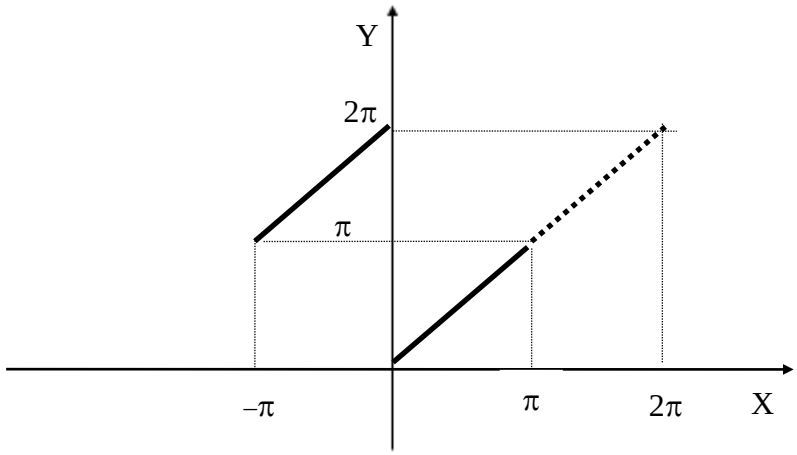


Рисунок 1

Обчислення інтегралів (17), (18), (19) для цієї функції є дуже незручним, бо кожний з них треба розбивати на дві частини: від $-\pi$ до 0 та від 0 до π. Але можна продовжити фунцкцію $f(x)$ на проміжок $(-\pi;2\pi]$, як показано на рисунку 1. Таким чином, на проміжку $(0;2\pi]$ функція має достатньо простий вигляд: $f(x)=x$. Тому коефіцієнти Фур'є обчислимо так:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} xdx=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=2\pi;$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nxdx=$$

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu$$

$$u=x \qquad du=dx$$

$$dv=\cos nxdx \qquad v=\frac{1}{n}\sin nx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\sin nxdx\right)=0;$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nxdx=$$

$$u=x \qquad du=dx$$

$$dv=\sin nxdx \qquad v=-\frac{1}{n}\cos nx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\cos nxdx\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos 2\pi n+\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{2\pi}\right)=-\frac{2}{n}.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)=\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)\sin nx=\pi-2\left(\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\cdots+\frac{1}{n}\sin nx+\cdots\right).$$

Приклад 24 Розвинути періодичну з періодом $2l$ функцію $f(x)=2x-3$ в ряд Фур'є на інтервалі (–3,3).

Розв'язання Графік цієї функції має вигляд, поданий на рисунку 2.

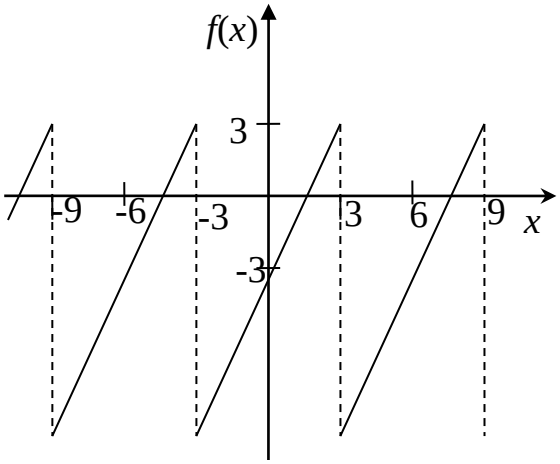


Рисунок 2

У даному випадку $2l=6, l=3.$ Знаходимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)dx=\frac{1}{3}(x^2-3x)\Big|_{-3}^{3}=\frac{1}{3}(9-9-9-9)=-6;$$

$$a_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)\cos\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{1}{3}\left[(2x-3)\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3}-\int_{-3}^{3}\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}2dx\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{6}{\pi n}\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3}=0;$$

$$b_n=\frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)\sin\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{1}{3}\left[-(2x-3)\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3}-\int_{-3}^{3}\frac{-3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}2dx\right]=$$

$$=\frac{1}{3}\left[-3\frac{3}{\pi n}(-1)^n-9\frac{3}{\pi n}(-1)^n+\frac{6}{\pi n}\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3}\right]=-\frac{12}{\pi n}(-1)^n=\frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}.$$

Отже, ряд Фур'є для заданої функції має вигляд

$$f(x)=-3+\frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi nx}{3},\qquad x\in(-3,3).$$

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

31.01-31.30 Дослідіть збіжність числових рядів.

31.01

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(n\sqrt[3]{n}\right)}{n\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{-n^2}$.

31.02

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin\frac{n\pi}{4}}{n\sqrt[5]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n^4+2)}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$.

31.03

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+3)!}{(2n+5)5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{1}{2^n}$.

31.04

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{2}{n}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{7n+2}\right)^{\frac{n}{3}}$.

31.05

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n!}\sin\frac{3}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{7^n}$.

31.06

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\sin\frac{1}{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt[5]{n^3}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n}{7n+2}\right)^{-n}$.

31.07

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(4n+1)}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{8n+1}\right)^{\frac{n}{5}}$.

31.08

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\sqrt[4]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n(n+3)}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+2)^n}$.

31.09

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(3n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2-2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{5n}$.

31.10

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n^3-5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}}{5^n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}$.

31.11

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n^2+n-4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{2}{n}}{(n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{3^n}$.

31.12

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{n3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln^2(3n+2)}$.

31.13 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+5}{2n^2+6n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{9n+4}\right)^{3n}$.

31.14 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{5n^3-1}{5n^3+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\ln^2(n\sqrt{2})}$.

31.15 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^2+3)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{2\pi}{5n}$.

31.16 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}\sqrt[5]{n}}{n!}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(5n)}$.

31.17 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n-2)(n+5)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{1}{7^n}$.

31.18 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{5}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln n}}$.

31.19 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+\ln^3 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-3}\sqrt{n^2+4}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+1}\right)^{2n}$.

31.20 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n^2+5)(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+5)}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$.

31.21 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\sqrt[5]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^n}{6^{n^2}}$.

31.22 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}arctg\frac{1}{(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^3 n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n}{n+3}\right)^n$.

31.23 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^3(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2+2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$.

31.24 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(n+1)}{n!6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{7n+3}\right)^{2n}$.

31.25 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{3}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n}}$.

31.26 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+\sin\frac{n\pi}{2}}{n\sqrt[5]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n(n+3)!}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

31.27 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\sqrt[7]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\ln^n(n+4)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt[6]{\ln(n+2)}}$.

31.28 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\left(\frac{n+3}{5n+2}\right)^{3n}}$.

31.29 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+\sin^2 2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\arcsin^n\frac{1}{2n}}$.

31.30 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{1}{3n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(3n-1)!}$; в) $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{(n-4)\ln(n-4)}$.

32.01-32.30 Установити, як збігається ряд: абсолютно, умовно чи розбігається.

32.01 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(2n+5)}$.

32.02 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{3\sqrt[3]{n}}$.

32.03 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n!}$

32.04 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+3}{n(n+3)}$.

32.05 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(n-1)^2}{n!}$.

32.06 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{2n}$.

32.07 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+3)5^{3n}}$.

32.08 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n+1}{3n+2}\right)^n$.

32.09 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5n+2}}$.

32.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+3)}{n+3}$.

32.11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{1}{2n^2}\right)$.

32.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+5)3^{2n+3}}$.

32.13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)$.

32.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin 4^n}{4^n}$.

32.15 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{arctg\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{3n+1}}$.

32.16 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+5)\left(\frac{8}{3}\right)^n}$.

32.17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n^2+1}{n^4+5n^2+4}$.

32.18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n tg\frac{\pi}{9^n}$.

32.19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{5^n}$.

32.20 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{3^n(n+1)!}$.

32.21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{(n+4)^n}$.

32.22 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3(n+2)}$.

32.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{tgn\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

32.24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2n}{7n+5}$.

32.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^5}$.

32.26 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{n^2}$.

32.27 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{2^n(3n+1)}$.

32.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+4n+1}$.

32.29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n(n+2)}{7^n}$.

32.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^4}{e^n}$.

33.01-33.30 Знайдіть радіус та область збіжності степеневого ряду.

33.01 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n3^n}$.

33.02 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n2^n}$.

33.03 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\sqrt{(2n-1)7^n}}$.

33.04 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^{n+1}5^n}$.

33.05 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}x^{2n+1}}{(3n-1)^2}$.

33.06 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{8^n(n+3)}$.

33.07 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n(4n+3)}$.

33.08 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)x^n}{2^n(n^2+6)}$.

33.09 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

33.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n x^n}{\sqrt[7]{n}}$.

33.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)(x-4)^n}{2^n(n+1)}$.

33.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+1)x^{2n}}{9^n}$.

33.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n}}{7^n}x^n$.

33.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^n}{6n+5}$.

33.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n.$

33.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+3)!}.$

33.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x-3)^n}{(n^2+2)5^n}.$

33.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n3^{n+2}}.$

33.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+3)7^{n+1}}.$

33.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n}}{9^n(n+4)}.$

33.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)x^n}{5^n(n^2+1)}.$

33.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n^2 5^n}.$

33.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{\sqrt{n^5+2}}.$

33.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2\sqrt{n^3+3}}.$

33.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^{n+1}}.$

33.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{(n^2+5)2^n}.$

33.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n x^n}{(n+5)!}.$

33.28 $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n+1}x^{2n-2}.$

33.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt{n+2}}{7^n}x^n.$

33.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n x^n}{\sqrt[7]{n^2}}.$

34.01-34.30 Розвинувши функції в ряд Маклорена, обчисліть інтеграли з точністю Δ=0,001.

34.01 $\int_0^{0,3} arctg x^2 dx.$

34.02 $\int_0^{0,2} \sin\sqrt[4]{x}dx.$

34.03 $\int_0^{0,5} \sqrt[5]{x}e^{-2x}dx.$

34.04 $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}dx.$

34.05 $\int_0^{0,2} x\cos x^2 dx.$

34.06 $\int_0^{0,5} \frac{\sqrt[3]{x}}{1+x^2}dx.$

34.07 $\int_0^{0,4} \frac{dx}{1+x^4}.$

34.08 $\int_0^{0,5} x^2\ln(1+x^2)dx.$

34.09 $\int_{0,1}^{0,5} \frac{\sin 3x}{x}dx.$

34.10 $\int_0^{0,5} \sqrt[3]{x}\cos\sqrt{x}dx.$

34.11 $\int_0^{0,5} \sqrt[5]{x}\sin x dx.$

34.12 $\int_{0,1}^{0,3} \frac{\ln(1+x)}{x}dx.$

34.13 $\int_0^{0,1} e^{-5x^2}dx.$

34.14 $\int_{0,1}^{1} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{7}\right)}{x}dx.$

34.15 $\int_0^{0,5} x^2\sin 2x dx.$

34.16 $\int_0^1 \sqrt[4]{1+\frac{x^2}{3}}dx.$ **34.17** $\int_0^{0,5} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx.$ **34.18** $\int_0^{0,3} \sqrt{x}e^{-\frac{x}{2}}dx.$

34.19 $\int_0^{0,5} \sqrt[5]{1+x^3}dx.$ **34.20** $\int_0^{0,5} \cos(\ell x^2)dx.$ **34.21** $\int_0^{0,5} \sin\frac{x^2}{5}x.$

34.22 $\int_0^{0,5} \frac{arctgx}{3x}dx.$ **34.23** $\int_0^1 e^{-\frac{2x^2}{5}}dx.$ **34.24** $\int_0^1 \sqrt[5]{x}\cos(\ell x)dx.$

34.25 $\int_0^{0,4} \sqrt{x}\sin\sqrt{x}dx.$ **34.26** $\int_0^{0,3} \frac{\sqrt[5]{x}}{1+x^3}dx.$ **34.27** $\int_0^{0,5} \sqrt[3]{x}e^{-4x^2}dx.$

34.28 $\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^4}}.$ **34.29** $\int_{0,1}^1 \frac{\ln\left(1+\frac{x}{4}\right)}{2x}dx.$ **34.30** $\int_0^{0,1} e^{-4x^2}dx.$

35.01-35.30 Знайдіть три перші, відмінні від нуля, члени розвинення в степеневий ряд розв’язків диференціального рівняння за заданими початковими умовами.

35.01 $y' = \sin x + y^2;$ $y(0) = 1.$ **35.02** $y'' = -x^2y' - 2xy + 1;$ $y(0) = y'(0) = 0.$

35.03 $y' = 2\cos x - xy^2;$ $y(0) = 1.$ **35.04** $y' = e^{xy} + y;$ $y(0) = 1.$

35.05 $y' = x^2 + y^2;$ $y(0) = 1.$ **35.06** $y' = e^x + y;$ $y(0) = 4.$

35.07 $y' = x^3 + y^2 - e^x;$ $y(0) = 1.$ **35.08** $y'' = -2xy;$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 1.$

35.09 $y' = \cos x + e^y + x;$ $y(0) = 0.$ **35.10** $y' = y^2 + x^3;$ $y(0) = \frac{1}{2}.$

35.11 $y' = x^2y^2 - 1;$ $y(0) = 1.$ **35.12** $y' = e^{-2x} + y^2;$ $y(0) = 0.$

35.13 $y' = \cos x + y^2;$ $y(0) = 1.$ **35.14** $y'' = xyy';$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 1.$

34.15 $y'' = y\cos x + x;$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 0.$ **35.16** $y' = e^x + y^2;$ $y(0) = 0.$

35.17 $(1-x)y' = 1 - x - y;$ $y(0) = 0.$ **35.18** $y' = \sin 2x + xy;$ $y(0) = 1.$

35.19 $y' = \cos 2x + y^3;$ $y(0) = 1.$ **35.20** $y'' = yy' - x^2;$ $y(0) = 1;$ $y'(0) = 1.$

35.21 $y' = x^2 + y^2 - e^x;$ $y(0) = 0.$ **35.22** $y' = x^2 + \sin y + 1;$ $y(0) = 0.$

35.23 $y'' = -xy' - y;$ $y(0) = 0;$ $y'(0) = 1.$ **35.24** $y' = e^y + xy;$ $y(0) = 0.$

35.25 $y' = \sin x + 0,5y^2;$ $y(0) = 1.$ **35.26** $y'' = x^2y;$ $y(0) = 0;$ $y'(0) = 1.$

35.27 $y' = y + y^2;$ $y(0) = 3.$ **35.28** $y' = x + x^2 + y^2;$ $y(0) = 5.$

35.29 $y' = 2e^y - xy;$ $y(0) = 0.$ **35.30** $y' = y^2 + xy;$ $y(0) = 1.$

36.01-36.30 Розвинути в ряд Фур'є функції на заданому проміжку.

36.01 $f(x) = x + 4;$ $(-\pi;\pi)$ **36.02** $f(x) = 3x + 2;$ $(-2;2)$

36.03 $f(x) = x - 3;$ $(-1;1)$ **36.04** $f(x) = x^2 + 1;$ $(-1;1)$

36.05 $f(x) = x^2 - 1;$ $(-\pi;\pi)$ **36.06** $f(x) = 5 - x;$ $(-1;1)$

36.07 $f(x) = \dfrac{\pi - x}{3};$ $(-\pi;\pi)$ **36.08** $f(x) = -x + 7;$ $(-\pi;\pi)$

36.09 $f(x) = 4x + 2;$ $(-2;2)$ **36.10** $f(x) = \dfrac{\pi + x}{2};$ $(-2\pi;2\pi)$

36.11 $f(x) = 3x;$ $(-\pi;\pi)$ **36.12** $f(x) = 4 - \dfrac{x}{2};$ $(-2;2)$

36.13 $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x;$ $(-\pi;\pi)$ **36.14** $f(x) = \begin{cases} x + 2; & (-\pi;0) \\ 0; & (0;\pi) \end{cases}$

36.15 $f(x) = 2 + 5x;$ $(-1;1)$ **36.16** $f(x) = 7x - 3;$ $(-1;1)$

36.17 $f(x) = \begin{cases} 2x; & x \in (-\pi;0) \\ 3x; & x \in (0;\pi) \end{cases}$ **36.18** $f(x) = x^2 + 2;$ $(-\pi;\pi)$

36.19 $f(x) = \begin{cases} x; & (-\pi;0) \\ \pi - x; & (0;\pi) \end{cases}$ **36.20** $f(x) = 8x + 2;$ $(-\pi;\pi)$

36.21 $f(x) = x^2 - 2;$ $(-\pi;\pi)$ **36.22** $f(x) = x - 4;$ $(-2;2)$

36.23 $f(x) = x - 1;$ $(-2;2)$ **36.24** $f(x) = \dfrac{x}{4};$ $(-4;4)$

36.25 $f(x) = 1 - \dfrac{x}{3};$ $(-3;3)$ **36.26** $f(x) = 2\pi - x;$ $(-\pi;\pi)$

36.27 $f(x) = \begin{cases} 0; & (-\pi;0) \\ 3x; & (0;\pi) \end{cases}$ **36.28** $f(x) = \dfrac{1 + x}{2};$ $(-2;2)$

36.29 $f(x) = |2x|;$ $(-1;1)$ **36.30** $f(x) = \begin{cases} x + 2; & (-2;0) \\ 0; & (0;2) \end{cases}$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4 «ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА»

1 Теорія ймовірностей

1.1 Випадкові події

Означення 1 Подія – той чи інший результат проведеного випробування. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту А, В, С і т.ін.

Наприклад, кидається монета. Подія – поява числа (або герба).

Означення 2 Вірогідною є подія, яка обов`язково трапиться в даному іспиті.

Наприклад, кидається гральна кістка. Поява числа, яке не перебільшує число 6 – вірогідна подія.

Означення 3 Неможливою є подія, яка ніколи не трапиться в даному іспиті.

Наприклад, кидається гральна кістка. Поява числа 8 – неможлива подія.

Означення 4 Випадковою є подія, яка в даному іспиті може трапитися, а може і не трапитися.

Наприклад, кидається монета. Поява герба – випадкова подія.

Означення 5 Дві події А і В є несумісними, якщо поява однієї з них виключає появу другої в одному і тому ж іспиті.

Наприклад, А – поява числа, В – поява герба – несумісні події.

Означення 6 Події є сумісними, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших подій у тому самому випробуванні.

Означення 7 Події є єдино можливими, якщо в іспиті обов`язково трапляються одна і тільки одна з них.

Наприклад, А і В в попередньому означенні.

Означення 8 Дві несумісних та єдино можливих події є протилежними. Позначаються вони так: A і $\overline{A}$.

Означення 9 Сукупність усіх єдино можливих подій є повною групою подій.

Означення 10 Випадок є сприятливим для події А, якщо реалізація цього випадку тягне за собою появу події А.

Наприклад, в урні є 8 куль, які пронумеровані від 1 до 8. Кулі з цифрами 1, 2 та 3 – червоні, інші білі. Поява кулі з номером 2 – подія, яка сприяє появі червоної кулі.

Означення 11 Події вважають рівноможливими, якщо жодна з них не є більш можливою за іншу.

Означення 12 (класичне означення ймовірності) Імовірністю P події A є відношення числа m випадків, які сприяють появі події A до числа n усіх рівноможливих випадків, які утворюють повну групу подій.

Приклад 1 Кидаються одночасно дві монети. Яка ймовірність того, що на обох монетах з`являться герби.

Розв`язання Намалюємо схему всіх можливих випадків:

Випадки	I монета	II монета
I	*герб*	*герб*
II	*герб*	*число*
III	*число*	*герб*
IV	*число*	*число*

Одночасній появі двох гербів сприяє тільки один випадок (m=1), а всього випадків n=4.

Таким чином, $P = \frac{m}{n} = \frac{1}{4}$.

Означення 13 Різні групи, що складені з якихось предметів і відрізняються одна від одної або за порядком цих предметоів, або за самими предметами є сполуками.

Серед можливих сполук виділимо наступні: розміщення (A_n^k), перестановки (P_n) та сполучення (C_n^k).

Означення 14 Розміщеннями з n різних елементів по k $(k \le n)$ є різноманітні групи, які містять k елементів, узятих з даних n елементів, і які відрізняються одна від одної або порядком, або складом елементів.

Число розміщень із n різних елементів по k без повторень обчислюється за такою формулою:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Означення 15 Розміщення із n елементів по n, тобто різноманітні групи з n різних елементів, які відрізняються одна від одної лише порядком елементів, є перестановками.

Число всіх можливих перестановок обчислюється за формулою:

$$P_n = A_n^n = n!$$

Означення 16 Сполученнями з n різних елементів по k $(k \le n)$ є різноманітні групи, які містять k елементів, узятих із даних n елементів, і відрізняються одна від одної принаймні одним елементом (порядок при цьому не враховується).

Число сполучень із n різних елементів по k без повторень обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Приклад 2 У партії із 10-ти виробів знаходиться 3 бракованих. Навмання забирають 3 вироби. Яка імовірність того, що 2-є з них будуть бракованими.

Розв'язання Число m – поява серед трьох виробів двох бракованих, що обчислюється наступним чином:

$$m = C_3^2 \cdot C_7^1 = \frac{3!}{1! \cdot 2!} \cdot \frac{7!}{6! \cdot 1!} = 3 \cdot 7 = 21.$$

Число $n = C_{10}^{3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$

Таким чином, імовірність $P = \frac{21}{120}$.

Дуже часто задача обчислення ймовірності потребує використання дій додавання та множення імовірностей.

Теорема 1 (додавання ймовірностей несумісних подій) Імовірність суми двох несумісних подій *A* і *B* дорівнює сумі імовірностей кожної події окремо:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Приклад 3 В урні знаходиться 10 куль: 3 червоних, 4 синіх і 3 білих. Навмання забирається одна куля. Знайти ймовірність того, що забрана куля буде кольоровою.

Розв`язання Позначимо через *A* появу червоної кулі, а через *B* – синьої. Тоді $P(A) = 0{,}3$ та $P(B) = 0{,}4$. *A* і *B* – несумісні події в одному випробуванні, тому $P(A+B) = P(A) + P(B) = 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$; де $A+B=C$ – поява кольорової кулі.

Означення 17 Дві події *A* і *B* є незалежними, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від появи або непояви другої.

Означення 18 Дві події *A* і *B* є залежними, якщо поява однієї з них змінює імовірність появи другої.

З поняттям залежних подій пов`язано поняття умовної ймовірності $P_A(B)$— імовірності появи події *B* за умови, що подія *A* сталася.

Теорема 2 (множення імовірностей залежних подій) Імовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку імовірності однієї з них на умовну імовірність другої, яка обчислена з припущенням, що перша подія вже сталася:

$$P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).$$

Якщо події незалежні, то $P_A(B) = P(B)$ і $P_B(A) = P(A)$. У цьому випадку розглянуту теорему можна записати так:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Приклад 4 По мішені виконано 2 постріли. Імовірність влучення для першого пострілу становить 0,75, для другого – 0,8. Знайти ймовірність того, що в мішень влучили двічі.

Розв`язання Позначимо через *A* – перший постріл був влучним, через *B*— другий постріл був влучним. У цьому випадку подія *A·B* означає, що мішень влучили двічі. *A* і *B* – незалежні події, тому

$$P(A\cdot B) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}75\cdot 0{,}8 = 0{,}6.$$

Нехай у результаті випробування можуть з`явитися *n* незалежних подій, або деякі з них, при цьому імовірність появи кожної події вважається відомою. Як знайти ймовірність появи хоча б однієї з цих подій?

Теорема 3 Імовірність появи хоча б однієї з *n* незалежних подій $A_i\ (i = 1, 2, \ldots n)$ дорівнює різниці між одиницею і добутком імовірностей появи протилежних подій $\overline{A}_i$:

$$P = 1 - P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\ldots P(\overline{A_n}).$$

Якщо ймовірність появи всіх подій A_i однакова, формула набуває вигляду

$$P = 1 - q^n, \text{ тут } q = 1 - p.$$

Приклад 5 Імовірність влучення у ціль в результаті одного пострілу дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що з трьох пострілів ціль буде вражена хоча б один раз.

Розв`язання Імовірність промаху під час одного пострілу становить $q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3.$ Тому шукана ймовірнсть — $P = 1 - 0{,}3^3 = 0{,}973$

Підсумком розглянутих теорем є формула повної імовірності.

Теорема 4 Розглянемо *n* випадкових подій $A_1, A_2, \ldots A_n,$ які утворюють повну групу несумісних подій. Нехай подія *B* може з`явитися тільки разом з однією з подій $A_i,$ при цьому вважаються відомими $P_{A_i}(B).$ За цих умов імовірність появи події *B* дорівнює сумі добутків кожної з подій A_i на відповідну умовну імовірність події *B*:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P_{A_i}(B).$$

Приклад 6 Перша з двох урн має 10 куль (8 червоних та 2 білих), друга – 20 куль (18 червоних та 2 синіх). Із першої урни навмання забирають одну кулю і перекладають у другу, після чого з другої урни навмання забирають одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля червона.

Розв`язання Позначимо через *B* таку подію: із другої урни забрана червона куля. Із першої урни можна забрати та перекласти в другу червону кулю (подія A_1) або білу (подія A_2), при цьому

$$P(A_1) = 0{,}8 \text{ та } P(A_2) = 0{,}2.$$

Умовна ймовірність того, що з другої урни забрали червону кулю за умови, що з першої урни в другу переклали червону кулю $P_{A_i}(B) = \frac{19}{21}$ (оскільки тепер у другій урні 21 куля, 19 з яких – червоні). Умовна ймовірність того, що з другої урни забрали червону кулю за умови, що з першої урни в другу переклали білу кулю $P_{A_2}(B) = \frac{18}{21}$ (оскільки тепер у другій урні 21 куля, а червоних залишилось 18).

Таким чином, шукана імовірність

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(B) + P(A_2) \cdot P_{A_2}(B) = \frac{8}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{2}{10} \cdot \frac{18}{21} = \frac{94}{105}.$$

Теорема 5 (**формула Байєса**) Нехай у результаті випробування подія *A* може з'явитися тільки з однією з несумісних гіпотез, які утворюють повну групу подій. Імовірності гіпотез $P(H_i)$ і умовні ймовірності $P_{H_i}(A)$ цієї події.

В результаті випробування подія A мала місце. При цьому ймовірність гіпотез обчислюється за формулою $P_A(H_i)=\dfrac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(H_i)P_{H_i}(A)}$.

Приклад 7 Двоє стрільців виконують по одному пострілу. Ймовірність влучення в мішень для першого стрільця становить 0.7, а для другого – 0.8. У мішені знайдено одну пробоїну. Яка ймовірність того, що мішень влучив перший стрілець?

Розв`язання Подія A означає наявність однієї пробоїни в мішені. Введемо гіпотези: H_1 – обидва стрільці не влучають; H_2 – перший стрілець влучає, другий – ні; H_3 – другий стрілець влучає, перши – ні; H_4 – обидва стрільці влучають. Знайдемо ймовірності гіпотез:

$$P(H_1)=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06;\ P(H_2)=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14;$$
$$P(H_3)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24;\ P(H_4)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56.$$

Умовні ймовірності події A такі:

$$P_{H_1}(A)=0;\ P_{H_2}(A)=P_{H_3}(A)=1;\ P_{H_4}(A)=0.$$

Таким чином, імовірність гіпотези H_2 є наступною:

$$P_A(H_2)=\frac{0{,}14\cdot 1}{0{,}14\cdot 1+0{,}24\cdot 1}=0{,}37.$$

1.2 Повторні випробування

Розглянемо тепер події, які виникають у разі повторення випробувань. Якщо проводяться n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність появи події A є стала величина (p>0), необхідно знати наступне: при невеликому числі випробувань (n) обчислення імовірності $P_n(k)$ – імовірність появи події A в n незалежних випробуваннях дорівнює $к$ разів. Для її обчислення використовують формулу Бернуллі:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ \text{ тут }\ q=1-p, C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Імовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія A з'явиться від k_i до k_j разів, обчислюється за формулою

$$P_n(k_i\le k\le k_j)=\sum_{k=k_i}^{k_j}C_n^k p^k q^{n-k};$$

не більше, ніж k_i разів — за формулою

$$P_n(0\le k\le k_i)=1-\sum_{k=k_i+1}^{n}C_n^k p^k q^{n-k};$$

не менше, ніж k_i разів — за формулою

$$P_n(k_i\le k\le n)=1-\sum_{k=0}^{k_i-1}C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Слід зауважити, що формулу Бернуллі використовують тоді, коли число випробувань n мале, оскільки при великих значеннях n формула потребує виконання дій з дуже великими числами. В цьому випадку використовують наближені формули (формулу Пуассона, а також формули, які виражають зміст локальної та інтегральної теорем Лапласа).

Теорема 6 (**локальна теорема Лапласа**) Якщо ймовірність p настання події A в кожному з n незалежних випробувань є сталою, причому $0<p<1$, а число випробувань – досить велике, то ймовірність $P_n(k)$ того, що в цих випробуваннях подія A настане $к$ раз, наближено дорівнює:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

де $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$, а функція $\varphi(x)$ визначається рівністю $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Таблиця значень функції $\varphi(x)$, яка називається функцією Гауса, наведена в додатку А, причому лише для додатних значень x, бо ця функція парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Для значень $x>5$ потрібно вважати, що $\varphi(x)=0$.

Теорема 7 (**формула Пуассона**) Якщо в кожному випробуванні ймовірність p настання події A є сталою і малою, а число випробувань n є досить великим, то ймовірність того, що подія A настане $к$ раз, наближено дорівнює:

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де $\lambda = np$.

Теорема 8 (**інтегральна теорема Лапласа**) Якщо ймовірність p настання деякої події A в кожному випробуванні є сталою, причому $0<p<1$, а число випробувань n – досить велике, то ймовірність того, що ця подія відбудеться не менше k_1 раз і не більше k_2 раз, наближено дорівнює $P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

де $x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, а функція Ф(x), яка називається функцією Лапласа, визначається рівністю $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Таблиця значення функції Лапласа подана в додатку Б.

Функція Лапласа є непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ і монотонно зростаючою. Для всіх $x>5$ приймається $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Зауваження Якщо k_1 менше, а k_2 більше np на одне й те саме число ε, то $P_n(np-\varepsilon \le m \le np+\varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right)$.

Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність настання події дорівнює p ($0<p<1$), абсолютна величина відносної частоти появи події від імовірності появи події не перевищує додатного числа ε, наближено дорівнює подвоєній функції Лапласа при $x=\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$p\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Приклад 8 Радіолокаційна станція веде спостереження за 10-ми об`єктами, кожен із яких може бути втраченим з імовірністю, яка становить $p$=0,1. Знайти імовірність того, що буде втраченим хоча б один об`єкт.

**Розв`язання** Позначимо через $A$ подію, за якою буде втрачений хоча б один об`єкт. Тоді подія $\overline{A}$ полягає в тому, що не буде втраченим жоден об`єкт.

$$P(A)+P(\overline{A})=1, \text{ або } P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Скористаємося формулою Бернуллі:

$P_{10}(0)=C_{10}^{0}\cdot(0{,}1)^{0}\cdot(0{,}9)^{10}=0{,}9^{10}\approx 0{,}35$ – імовірність того, що не буде втраченим жоден об’єкт, звідки

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-0{,}35\approx 0{,}65.$$

Приклад 9 Імовірність p влучення у ціль в результаті одного пострілу снановить 0,75. Яка ймовірність того, що ціль буде влучено 8 раз в результаті 10-ти пострілів.

Розв`язання Згідно з умовою задачі маємо: n=10, k=8, q=1–0,75=0,25. Тому:

$$P_{10}(8)=\frac{1}{\sqrt{10\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\varphi(x).$$

Обчислюємо $x=\frac{8-10\cdot 0{,}75}{\sqrt{10\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}}\approx 0{,}36$. Скориставшись таблицею значень функції $\varphi(x)$, знаходимо: $\varphi(0{,}36)=0{,}3739$.

Таким чином,

$$P_{10}(8)=\frac{0{,}3739}{\sqrt{1{,}875}}=0{,}273.$$

Приклад 10 Деякий пристрій складається із 400 елементів. Імовірність p відмови кожного з них складає 0,2. Знайти ймовірність того, що відмовлять від 70 до 100 елементів.

Розв`язання Згідно з умовою задачі: p=0,2, n=400, q=1–p=0,8, k_1=70, k_2=100. Обчислимо:

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=1{,}25,$$

$$x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{100-400\cdot 0{,}2}{\sqrt{400\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}=2{,}5.$$

Скористаємося таблицею значень функції Лапласа:

Φ (–1,25) = –Φ (1,25) = –0,3944; Φ(2,5)=0,4938.

Шукана ймовірність $P_{400}(70;100)$ = 0,4938 – (–0,3944) = 0,8882.

1.3 Випадкові величини

Означення 19 Випадковою є величина, яка набуває у випробуванні того або іншого заздалегідь невідомого числового значення. Випадкові величини бувають дискретними та неперервними.

Означення 20 Випадкова величина є дискретною, якщо вона набуває окремих, ізольованих можливих значень $x_1, x_2, ...x_n$ з певними ймовірностями. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченим або нескінченим (в останньому випадку множину всіх можливих значень називають лічильною).

Означення 21 Випадкова величина є неперервною, якщо її можливі значення цілком заповнюють деякий проміжок числової осі (скінчений або нескінчений).

Випадкові величини позначають великими літерами: $X, Y, Z...$, а їх можливі значення відповідними маленькими літерами: $x, y, z...$

Для опису дискретної величини необхідно навести не лише множину можливих її значень, а й указати, з якими ймовірностями ця величина набуває того або іншого можливого значення. З цією метою вводять поняття закону розподілу ймовірностей.

Означення 22 Таблицю, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями, називають законом розподілу випадкової величини.

Для дискретної випадкової величини закон розподілу має вигляд таблиці:

X	x_1	x_2	.....	x_n
P	p_1	p_2	.....	p_n

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

де $x_1, x_2, ...x_n$ – усі можливі значення, а $p_1, p_2,...,p_n$ – їх імовірності.

Неперервну випадкову величину характеризують інтегральна функція розподілу ймовірностей $F(x)$, де $F(x) = P(X < x)$ – ймовірність того, що випадкова величина X набуває значення, меншого за x, або диференціальна функція розподілу (щільність розподілу) $f(x)$ $\left(F'(x) = f(x); \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx\right)$.

До числових характеристик випадкової величини відносять: математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Якщо відомі закони розподілу, числові характеристики випадкової величини обчислюються за формулами:

а) для дискретних величин:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i,$$
$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2,$$
$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)};$$

б) для неперервних величин:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx,$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx-[M(X)]^2.$$

Імовірність потрапляння випадкової величини в проміжок (a,b):

$$P(a<X<b)=\int_{a}^{b}f(x)dx.$$

Приклад 11 В урні знаходиться 10 куль, 8 із яких – червоні. Навмання забирають 2 кулі. Напишіть закон розподілу числа червоних куль серед відібраних та обчисліть математичне сподівання.

Розв`язання Позначимо через X дискретну випадкову величину – число відібраних червоних куль, яка може набувати таких значень: $x_1=0$ (червоних куль серед відібраних немає), $x_2=1$ (одна червона, друга – ні) та $x_3=2$ (обидві червоні). Знайдемо тепер імовірності появи цих значень:

а) $x_1=0$; $P(X=0)=\frac{m}{n}$, де $m=C_8^0=1$ та $n=C_{10}^2=\frac{10*9}{1*2}=45.$

Таким чином, $P(x=0)=\frac{1}{45}.$

б) $x_2=1$; $P(X=1)=\frac{m}{n}$, де $m=C_8^1\cdot C_2^1=8\cdot 2=16$ та $n=C_{10}^2=45.$

Таким чином, $P(x=1)=\frac{16}{45}.$

в) $x_3=2$; $P(X=2)=\frac{m}{n}$, де $m=C_8^2=\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}=28$ та $n=C_{10}^2=45.$

Таким чином, $P(x=2)=\frac{28}{45}.$

Перевіряємо умову закону розподілу ймовірностей $\sum_{i=1}^{3}p_i=1$:

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{45}+\frac{16}{45}+\frac{28}{45}=1.$$

Закон розподілу буде мати такий вигляд:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

Обчислимо тепер математичне сподівання:

$$M(X)=0\cdot\frac{1}{45}+1\cdot\frac{16}{45}+2\cdot\frac{28}{45}=\frac{72}{45}=1{,}6.$$

Приклад 12 Випадкова величина *X* може набувати лише два значення: x_1 та x_2 $(x_1<x_2)$. Відома ймовірність появи першого значення – p_1=0,3. Знайти закон розподілу цієї величини, якщо її математичним сподіванням є *M(X)*=2,7 та дисперсія *D(X)*=0,21.

Розв`язання Скориставшись властивістю закону розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини $(\sum_{i=1}^{n} p_i=1)$, знаходимо: $p_2=1-p_1=1-0{,}3=0{,}7$. Залишилось знайти два невідомих x_1 та x_2. Використовуючи формули для *M(X)* та *D(X)*:

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2,\ D(X)=x_1^2p_1+x_2^2p_2-M^2(X),$$

отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 0{,}3+x_2 0{,}7=2{,}7; \\ x_1^2 0{,}3+x_2^2 0{,}7-(2{,}7)^2=0{,}21. \end{cases}$$

Розв`язок цієї системи має такий вигляд:

x_1=2 і x_2=3;

x_1=3,4 і x_2=2,4.

Оскільки за умовою задачі $x_1<x_2$, обираємо перший результат:

X	2	3
P	0,3	0,7

Приклад 13 Неперервна випадкова величина задана інтегральною функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0; \\ \dfrac{1-\cos x}{2}, & 0<x\le\pi; \\ 1, & x>\pi. \end{cases}$$

Знайти:

а) щільність розподілу *f(x)*;

б) математичне сподівання та дисперсію випадкової величини.

Розв`язання Відомо, що $f(x)=F'(x)$. Тоді:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0\prec x\le\pi, \\ 0, & x\succ\pi. \end{cases}$$

Далі скористаємося формулами для обчислення *M(X)* та *D(X)*:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0dx+\int_{0}^{\pi} x\frac{\sin x}{2}dx+\int_{\pi}^{\infty} x\cdot 0dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin x dx=\begin{vmatrix} x=u & \sin x dx=dv \\ du=dx & v=-\cos x \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}x\cos x\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos x dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\pi\cos\pi+\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin x dx-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Обчислимо інтеграл:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin x dx=\begin{vmatrix} u=x^2 & \sin x dx=dv \\ du=2x dx & v=-\cos x \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}x^2\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi} x\cos x dx=$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\int_0^{\pi} x\cos x dx=\begin{vmatrix} u=x & \cos x dx=dv \\ du=dx & v=\sin x \end{vmatrix}=\frac{\pi^2}{2}+x\sin x\Big|_0^{\pi}-$$

$$-\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{\pi^2}{2}+(\pi\sin\pi-0)+\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}-2.$$

Таким чином, $D(X)=\frac{\pi^2}{2}-2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{4}-2.$

1.4 Закони розподілу випадкових величин

До основних законів розподілу випадкових величин відносяться такі:

а) біноміальний закон, за яким розподіл імовірностей визначається за формулою Бернуллі: $P_n(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}, k=0,1,2,...,n.$

Числові характеристики біноміального закону:

– математичне сподівання $M(X)=np,$

– дисперсія $D(X)=npq,$

– середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)};$

б) закон Пуассона (якщо *n* є достатньо великим, а ймовірність появи події є малою (*p*< 0,1)) за яким розподіл імовірностей визначається формулою Пуассона:

$$P_n(k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$ де $\lambda=np$ – параметр Пуассона.

Числові характеристики закону Пуассона:

– математичне сподівання $M(X)=\lambda,$

– дисперсія $D(X)=\lambda,$

– середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{\lambda};$

в) рівномірний закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини *X*, якщо диференціальна функція розподілу визначається за формулою

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при \quad x\le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & при \quad a<x\le b, \\ 0, & при \quad x>b. \end{cases}$$

Числові характеристики рівномірного закону:

– математичне сподівання $M(X)=\dfrac{a+b}{2}$,

– дисперсія $D(X)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$,

– середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$;

г) нормальний закон розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини *X*, якщо її щільність розподілу визначається за формулою

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a і σ – параметри нормального закону, які мають наступний зміст: σ – середнє квадратичне відхилення та a – математичне сподівання.

Для знаходження ймовірності потрапляння нормально розподіленої випадкової величини *X* до заданого інтервала (α,β) використовують формулу

$$P(\alpha\le X\le\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Імовірність того, що абсолютна величина відхилення нормально розподіленої величини *X* від свого математичного сподівання a менша за додатне число δ, визначається за формулою $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\dfrac{\delta}{\sigma}\right)$.

Якщо $\delta=3\sigma$, то $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973$. Записану формулу називають правилом трьох сигм, зміст якої полягає в наступному: абсолютна величина відхилення нормально розподіленої випадкової величини *X* від свого математичного сподівання практично ніколи не перевищує потрійного середнього квадратичного відхилення.

Приклад 14 Пристрій містить три працюючих незалежно один від одного елементи. Імовірність *p* відмови кожного з них в одному випробуванні становить 0,1. Запишіть закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному випробуванні.

Розв`язання Випадковою величиною *X* є число елементів, що відмовили в одному випробуванні, тому $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$ та $x_4=3$. Оскільки ймовірність відмови для кожного елемента однакова ($p=0{,}1$), для їх обчислення скористаємося формулою Бернуллі: $n=3$; $p=0{,}1$; $q=1-p=0{,}9$;

$$P_3(0)=C_3^0q^3=0{,}729;\ P_3(1)=C_3^1p^1q^2=3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2=0{,}243;$$

$$P_3(2)=C_3^2p^2q=3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9=0{,}027;\quad P_3(3)=C_3^3p^3=0{,}1^3=0{,}001.$$

Виконаємо перевірку:

$$P_3(0)+P_3(1)+P_3(2)+P_3(3)=0{,}729+0{,}243+0{,}027+0{,}001=1.$$

Таким чином, закон розподілу буде мати такий вигляд:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Приклад 15 Імовірність p появи бракованого виробу становить 0,002. Яка ймовірність того, що серед 1000 виробів зустрінеться 3 бракованих.

Розв`язання Згідно з умовою задачі: n=1000, p=0,002, $к$=3. Тому $\lambda=np=1000\cdot 0{,}002=2.$ Таким чином,

$$P_{1000}(3)=\frac{2^3e^{-2}}{3!}=0{,}18.$$

Приклад 16 Математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини $M(X)$=3, а дисперсія $D(X)=\frac{4}{3}$. Знайти щільність розподілення цієї величини.

Розв`язання Відомо, що для рівномірно розподіленої випадкової величини $f(x)=\frac{1}{b-a}, a<x\le b;$ і $f(x)=0, x\notin(ab].$ Тому

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{2(b-a)}x^2\Big|_a^b=\frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2)=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-M^2(X)=\frac{1}{3(b-a)}x^3\Big|_a^b-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Для визначення a та b отримано таку систему:

$$\begin{cases}\frac{a+b}{2}=3,\\ \frac{(b-a)^2}{12}=\frac{4}{3},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=6-a,\\ (6-2a)^2=16,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=6-a,\\ 6-2a=4.\end{cases}$$

Таким чином, a=1, b=5 та щільність розподілу ймовірностей

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\quad x\le a\\ \frac{1}{4}, & при\quad a<x\le b,\\ 0, & при\quad x>b.\end{cases}$$

Приклад 17 Математичне сподівання та середньоквадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини X відповідно дорівнюють 10 та 2. Яка ймовірність того, що в результаті випробування X набуде значення з проміжку (12; 14).

Розв`язання Згідно з умовою задачі маємо: a=10, σ=2, α=12 та β=14. Тому

$$P(12 \le X \le 14) = \Phi\left(\frac{14-10}{2}\right) - \Phi\left(\frac{12-10}{2}\right) = \Phi(2) - \Phi(1).$$

Скористаємося тепер таблицею значень функції Лапласа: Ф(2)=0,4772, Ф(1)=0,3413. Отримаємо такий кінцевий результат:

$$P(12<X<14) = 0{,}4772 - 0{,}3413 = 0{,}1359.$$

1.5 Закон великих чисел

Ще задовго до появи теорії імовірностей був зафіксований такий факт: випадкові відхилення від середнього, які мають місце в кожному з випробувань, взаємно гасяться під час спостереження сумарного результату великого числа випробувань. Ця властивість – стійкість середнього результату великого числа випадкових явищ і представляє собою зміст закону великих чисел. До цього закону відносять: нерівність Чебишева, теореми Чебишева та Бернуллі.

Нерівність Чебишева Імовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною менше за додатне число ε, не менше ніж $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$:

$$P\{X - M(X) \mid < \varepsilon \} \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \text{або}$$

$$P\{|X - M(X)| \ge \varepsilon\} < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебишева Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \ldots X_n$ має рівномірно обмежені дисперсії (не перевищують стале число C), то середнє арифметичне випадкових величин збігається за ймовірністю до середнє арифметичного їх математичних сподівань, тобто якщо ε – будь-яке додатне число, то $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

Теорема Бернулі Якщо в кожному з n незалежних випробувань імовірність p появи події A є сталою, то як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від імовірності p за абсолютною величиною буде як завгодно малим, якщо число випробувань є досить великим. Інакше кажучи, якщо ε – як завгодно мале додатне число, тоді в разі виконання умов теореми має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Із нерівності Чебишева випливає, що $P(|m-np|<\varepsilon)\geq 1-\frac{npq}{\varepsilon^2}$ або $P(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon)\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}$, а також формула, яка виражає теорему Чебишева $P(|\overline{X}-M(\overline{X})|<\varepsilon)\geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}$.

Приклад 18 Дискретна випадкова величина задана таким законом розподілення:

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишева, обчисліть $P\{|X-M(X)|<0{,}3\}$.

Розв`язання Обчислюємо математичне сподівання та дисперсію:

$$M(X)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}54,$$

$$D(X)=M(X^2)-M^2(X)=0{,}09\cdot 0{,}2+0{,}36\cdot 0{,}8-(0{,}54)^2=0{,}0144.$$

Далі скористаємося нерівністю Чебишева:

$$P\{|X-0{,}54|<0{,}3\}\geq 1-\frac{0{,}0144}{0{,}09}=0{,}84.$$

2 Елементи математичної статистики

2.1 Вибірковий метод і його основні характеристики

Основними задачами математичної статистики є: розробка методів збору й групування статистичного матеріалу, створення методів обробки й аналізу цього матеріалу (встановлення законів розподілення й оцінка параментів розподілення) для отримання наукових і практичних висновків.

У більшості випадків під час розв’язання статистичних задач використовують методи теорії ймовірностей. У цьому полягає фундаментальний зв’язок теорії ймовірностей і математичної статистики.

Відомо, що кількісна ознака X може бути дискретною (набувати лише ізольованих значень, які можна перерахувати) і неперервною (набувати будь–яких значень із деякого числового інтервала).

Означення 23 Значення $x_1, x_2, ... x_k (k=\overline{1,n})$ – ознаки X, що спостерігаються, називаються варіантами, а їх послідовність, яка записана в порядку зростання, – варіаційним рядом.

Означення 24 Числа $n_k (k=\overline{1,n})$, які показують, скільки раз варіанти x_k зустрічаються серед спостережень, називаються частотами (або емпіриками) варіант.

Означення 25 Відносною частотою варіанти n_i називається $w_i=\frac{n_i}{n}(i=\overline{1,k})$, де $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ – об’єм вибірки.

Означення 26 Статистичним розподіленням вибірки дискретної ознаки X називається перелік варіант варіаційного ряду та відповідних їм частот n_i або відносних частот.

Статистичне розподілення відповідно має вигляд

x_i	x_1	x_2	.....	x_k
n_i	n_1	n_2	.....	n_k

або

x_i	x_1	x_2	.....	x_k
w_i	w_1	w_2	.....	w_k

Якщо ознака X є неперервною, то статистичне розподілення вибірки задають у вигляді послідовності інтервалів (правий кінець яких вважають замкненим) і відповідних їм частот, при цьому в якості частот інтервала приймають суму частот варіант, які потрапили до цього інтервалу:

Частинний інтервал	$x_i - x_{i+1}$	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	.....	$x_k - x_{k+1}$
Сума частот варіант інтервала	n_i	n_1	n_2	.....	n_k

У деяких випадках інтервальне розподілення заміняють дискретним, причому в якості значень, які спостерігаються, обирають середні значення для відповідного інтервалу, а частоти зберігають.

Означення 27 Емпіричною (статистичною) функцією розподілення називають відносну частоту події $X < x$ і позначають $F^*(x)$.

Згідно з означенням, $F^*(x) = \frac{n_x}{n} = W^*(X < x)$, де n_x – число варіант, менших за x, а n – об`єм вибірки.

Емпірична функція розподілення дискретної або неперервної ознаки представляє собою перервну функцію, стрибки якої відповідають значення ознаки, які спостерігаються, і за величиною дорівнюють частотам цих значень.

Емпірична функція має наступні властивості:

1) якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le x_1$;

2) якщо x_k – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$;

3) $F^*(x)$ – неспадна функція, тобто $F^*(x_2) \ge F^*(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;

4) значення емпіричної функції $F^*(x)$ належать відрізку [0,1].

Приклад 19 Розглянемо вибірку, яка задана у вигляді таблиці розподілу абсолютних частот:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	17

де x_i –числові значення явища, яке спостерігається (варіанта), n_i –число цих значень під час реєстрації (абсолютні частоти). Знайдіть емпіричну функцію розподілу.

**Розв`язання** Згідно з означенням, $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, де $n_x$ – число варіант, менших за $x$, а $n$ – об`єм вибірки. В нашому випадку n = 3+10+17 = 30. Обираємо найменшу з варіант, $x_1 = 2$; $F^*(x_1) = 0$. Наступною варіантою є

$x_2 = 6.$ У таблиці розподілення є значення $x_1 = 2,$ яке менше за 6, і зустрічається 3 рази $(n_x = 3),$ тому $F(x_2) = \frac{3}{30} = 0{,}1.$ Останньою з варіант є $x_3 = 12.$ У таблиці розподілення є два значення: $x_1 = 2$ та $x_2 = 6,$ які менші за 12, і їх число дорівнює 13. Тому $F^*(x) = \frac{13}{30}.$ Очевидно, що для будь-якого *x* >12, всі варіанти будуть менші за *x*, тому $n_x = 30$ і $F^*(x)\frac{30}{30} = 1.$

Отриманий результат можна записати в такому вигляді:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0.1, & 2 < x \le 6, \\ 0.477, & 6 < x \le 12, \\ 1, & x > 12. \end{cases}$$

2.2 Статистичне оцінювання параметрів розподілення. Точкове оцінювання невідомих параметрів розподілення

Прийняття оптимальніх рішень залежить від науково обґрунтованих висновків про числові параметри розподілення генеральної сукупності. Ці висновки базуються на статистичному оцінюванні (наближеному знаходженні) вказаних параметрів за випадковою вибіркою з генеральної сукупності.

Із курсу теорії ймовірностей відомо, що найважливішими числовими характеристиками випадкової величини є математичне сподівання й дисперсія.

У математичній статистиці математичне сподівання й дисперсія оцінюються за генеральними й вибірковими характеристиками.

Головні характеристики дискретної кількісної ознаки генеральної й вибіркової сукупностей:

1) генеральная $\overline{x_г}$ і вибіркова $\overline{x_в}$ середні, які визначаються як середнє арифметичне значення ознаки, що вивчається, за формулами:

$$\overline{x_г} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i x_i,$$

де $N = \sum_{i=1}^{k} N_i$ – об'єм генеральної сукупності, N_i – частоти варіант x_i;

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i,$$

де $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ – об'єм вибіркової сукупності, n_i – частоти варіант x_i.

Таким чином, генеральна $\overline{x_г}$ та вибіркова $\overline{x_в}$ середні – це математичне сподівання розподілення ознаки генеральної й вибіркової сукупностей.

2) генеральна $D_г$ й вибіркова $D_в$ дисперсії, які визначаються як середнє арифметичне квадратів відхилення значень ознаки генеральної й вибіркової сукупностей від їх середнього значення $\overline{x_г}$ або $\overline{x_в}$ відповідно за формулами:

$$D_г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} N_i (x_i - \overline{x_г})^2, \qquad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2 .$$

Практичне обчислення дисперсії (генеральної або вибіркової) істотно спрощується, якщо згадати наступне: дисперсія дорівнює середньому квадратів значень ознаки мінус квадрат загальної середньої, а саме

$$D = \overline{x^2} - (\overline{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\right)^2 .$$

Якщо варіаційний ряд містить великі (або десятичні дроби) числові значення варіант x_k, то обчислення характеристик стає громіздким. Для спрощення обчислень вводять умовні варіанти u_k за формулою $u_k = \frac{x_k - C}{h}$, де $C-$число, близьке до вибіркової середньої, яке називається хибним нулем; $h-$різниця між двома сусідними рівновіддаленими варіантами.

У загальному випадку C і h – деякі числа, прийняті для даного розподілення, і тоді

$$\overline{x_k} = C + h\overline{u_k} = C + h\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i u_i}{n}, \; D(x) = D(u)h^2 = (\overline{u^2} - (\overline{u})^2)h^2.$$

3) генеральне $\sigma_г$ і вибіркове $\sigma_в$ середньоквадратичне відхилення, яке визначається як квадратний корінь із генеральної або вибіркової дисперсії відповідно за формулами $\sigma_г = \sqrt{D_г}$, $\sigma_в = \sqrt{D_в}$.

Означення 28 Вибіркове статистичне оцінювання невідомого параметра розподілення вважається точковим, якщо воно визначається одним числом.

Із поняття точкової оцінки Θ^* випливає, що ця оцінка прдставляє собою випадкову величину й тому до неї можна застосувати методи теорії ймовірностей.

Основні властивості точкових оцінок:

1 Статистичне оцінювання Θ^* невідомого параметра Θ є незміщеним, якщо математичне сподівання дорівнює параметру , що оцінюється, при будь-якому об’ємі вибірки $M(\Theta^*) = \Theta$.

Вимога незміщеності гарантує відсутність систематичних помилок під час оцінювання параметрів.

2 Незміщене оцінювання Θ^* вважається ефективним, якщо воно при заданому об’ємі вибірки має найменшу дисперсію $D(\Theta^*)\big|_{n=const} \to D_{\min}$.

3 Оцінювання Θ^* невідомого параметра Θ є обгрунтованим, якщо воно за ймовірністю збігається до параметра, який оцінюється, при $n \to \infty$ (тобто підпорядковується закону великих чисел) $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\Theta^* - \Theta| < \varepsilon\} = 1, \quad \varepsilon > 0.$

Із означення й властивостей точкових оцінювань випливає:

1 Незміщеним оцінюванням генеральної середньої є вибіркова середня

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i.$$

2 Зміщеним оцінюванням генеральної дисперсії D_r є вибіркова дисперсія

$$D_в = \frac{n-1}{n} D_r.$$

3 У якості незміщеного оцінювання генеральної дисперсії є виправлена дисперсія

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в.$$

4 Виправлене середнє квадратичне відхилення визначається за формулою

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в}.$$

Під час використання переходу до умовних варіант необхідно враховувати наступне: якщо $u_i = x_i - C$, то $S_x^2 = S_u^2$, якщо $u_i = Cx_i$, то $S_x^2 = \frac{1}{C^2} S_u^2$.

Приклад 20 Із генеральної сукупності виділена вибіркова об'єму $n = 50$. За її розподіленням

x_i	4	5	7	8
n_i	5	10	20	15

Знайдіть вибіркову середню, вибіркову дисперсію та вибіркове середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання Знаходимо вибіркову середню за формулою, враховуючи, що об'єм вибірки $n = 50$.

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{1}{50}(5\cdot 4 + 10\cdot 5 + 20\cdot 7 + 15\cdot 8) = 6{,}6,$$

тому вибіркова дисперсія

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x_в})^2 = \frac{1}{50}(5\cdot(4-6{,}6)^2 + 10\cdot(5-6{,}6)^2 + 20\cdot(7-6{,}6)^2 + 15\cdot(8-6{,}6)^2) =$$

$$= \frac{1}{50}(33{,}8 + 25{,}6 + 3{,}2 + 29{,}4) = 1{,}84;$$

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} = \sqrt{1{,}84} \approx 1{,}36.$$

Приклад 21 Знайти виправлену вибіркову дисперсію за даним розподіленням вибірки об'єму $n = 10$.

x_i	102	104	108
n_i	2	3	5

Розв'язання Оскільки варіанти – великі числа, переходимо до умовних варіант $u_i = x_i - 104$ ($C = 104$ близьке до вибіркової середньої). Отримуємо розподілення умовних варіант:

u_i	–2	0	4
n_i	2	3	5

Знайдемо виправлену вибіркову дисперсію умовних варіант.

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i u_i\right)^2\right) = \frac{1}{9}\left(2\cdot 4 + 3\cdot 0 + 5\cdot 16 - \frac{1}{10}(-2\cdot 2 + 0\cdot 3 + 4\cdot 5)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{9}(88 - 25{,}6) = 6{,}93.$$

Якщо згадати, що $S_x^2 = S_u^2$, то $S_x^2 = 6{,}93$.

Приклад 22 Знайти виправлену вибіркову дисперсію за даними розподіленнями вибірки об'єму $n = 10$.

x_i	0,01	0,05	0,09
n_i	2	3	5

Розв'язання Переходимо до умовних варіант за формулою $u_i = 100x_i$. Дістаємо розподілення умовних варіант:

u_i	1	5	9
n_i	2	3	5

Знайдемо виправлену вибіркову дисперсію умовних варіант

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i u_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} n_i u_i\right)^2\right) = \frac{1}{9}\left(2\cdot 1 + 3\cdot 25 + 5\cdot 81 - \frac{1}{10}(1\cdot 2 + 5\cdot 3 + 9\cdot 5)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{9}(482 - 384{,}4) = 10{,}84.$$

Обчислюємо виправлену дисперсію початкових варіант

$$S_x^2 = \frac{1}{100^2} S_u^2 = \frac{10{,}84}{10000} = 0{,}0011$$

2.3 Статистичне оцінювання параметрів розподілення. Інтервальне оцінювання й приклад побудови надійного інтервалу для математичного сподівання

Оскільки під час вибірки малого об'єму точкова оцінка може значно відрізнятися від параметра, який оцінюється, тобто приводити до грубих помилок, розглядають інтервальні оцінювання.

Означення 29 Інтервальним називають оцінювання, яке визначається двома числами – кінцями інтервала, що покриває параметр оцінювання.

Означення 30 Надійною ймовірністю оцінювання Θ^* деякого параметра Θ є ймовірність γ, з якою здійснюється нерівність $\gamma = P\left(\left|\Theta^* - \Theta\right| < \delta\right)$, де $\delta > 0$ характеризує точність оцінювання.

Зазвичай надійність оцінювання задається заздалегідь, причому в якості γ приймають число, близьке до 1. Найчастіше задають надійність $\gamma = \{0{,}95; 0{,}99; 0{,}999\}$.

Означення 31 Найдійним інтервалом (Θ_1, Θ_2) для параметра Θ називають такий інтервал, відносно якого із заздалегідь обраною ймовірністю, близькою до одиниці, можна стверджувати, що він містить невідоме значення параметра Θ.

Інакше кажучи, надійний інтервал (Θ_1, Θ_2) – такий інтервал, який покриває невідомий параметр Θ із заданою надійністю γ.

У загальному випадку для оцінювання ймовірності нерівності $\Theta_1 \le \Theta \le \Theta_2$ використовується формула $P(\Theta_1 \le \Theta \le \Theta_2) = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} f(x)dx$, де $f(x)$ – диференціальна функція розподілення Θ.

Розглянемо приклад побудови надійного інтервала для оцінювання математичного сподівання нормально розподіленої ознаки при відомій дисперсії.

Оцінкою невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X за вибірковою середньою $\overline{x_в}$ при відомому середньоквадратичному відхиленні σ генеральної сукупності й заданій надійності γ є надійний інтервал

$$\overline{x_в} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_в} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

а ймовірність того, що невідоме математичне сподівання a включається до вказаного інтервалу, визначається формулою

$$P\left(\left|\overline{x_в} - a\right| < t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 2\Phi(t),$$

де $t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \delta$ – точність оцінювання, n – об'єм вибірки, t – розв'язок рівняння, $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ ($\Phi(t)$ – функція Лапласа, значення якої подані в додатку Б).

Приклад 23 Випадкова величина X має нормальний розподіл. Знайти надійний інтервал для математичного сподівання цієї величини, якщо відомі: об`єм вибірки $n = 36$, її середнє арифметичне $\overline{x_b} = 4{,}1$ та середньоквадратичне відхилення σ=3, надійність результату γ=0,95.

**Розв`язання** Спочатку знайдемо параметр $t$ – розв`язок рівняння $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=0{,}425$. Із таблиці значень функції Лапласа знаходимо: t=1,96. Далі обчислимо значення $\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{t\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1{,}96\cdot 3}{\sqrt{36}}=0{,}98.$$

Таким чином, із заданою надійністю математичне сподівання не вийде за межі проміжку (4,1–0,98; 4,1+0,98), тобто $3{,}12 < a < 5{,}08$.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

41.01–41.30 Розв`яжіть задачі.

41.01

1 У групі 14 студентів, серед яких 6 відмінників. За списком навмання відбирають 9 студентів. Знайти ймовірність того, що серед відібраних студентів – 5 відмінників.

2 Перевіркою якості вироблених на заводі годинників установлено, що в середньому 98% їх відповідають установленим вимогам, а 2% потребують додаткового регулювання. Перевіряють якість 250 годинників. Якщо при цьому знаходять 11 і більше серед них, які потребують додаткового регулювання, вся партія повертається. Знайти ймовірність того, що партія буде прийнята.

41.02

1 Проростання насіння складає 70%. Знайти ймовірність того, що із шести посіяних зернят проросте не менш чотирьох.

2 Із шести карток з буквами “А”, “Е”, “И”, “Л”, “Р”, “Т”. навмання вибирають у певному порядку чотири. Знайти ймовірність того, що в результаті буде отримано слово “ТИРЕ”.

41.03

1 У читальному залі знаходиться шість підручників з теорії імовірностей, три з яких – в обкладинці. Бібліотекар навмання вибирає 2 підручника. Знайти ймовірність того, що обидва підручника будуть в обкладинці.

2 Три верстати працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший верстат протягом зміни вийде з ладу дорівнює 0,1. Для другого та третього верстатів ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,2 і 0,3. Знайти ймовірність того, що протягом зміни хоча б один верстат вийде з ладу.

41.04

1 На площині накреслено паралельні прямі на відстані $2a$. Кидають монету радіусом $r<a$. Знайти ймовірність того, що монета не перетне жодної прямої.

2 Імовірність того, що витрата електроенергії протягом однієї доби не перевищує норми, дорівнює 0,9. Знайти ймовірність того, що за шість діб витрата електроенергії протягом четвертої доби не перевищує норми.

41.05

1 Бібліотечка складається із десяти різних книг. П’ять книг коштують по 4 грн кожна. Знайти ймовірність того, що дві книги, які взяли навмання, коштують 5 гривень.

2 Скільки разів треба кинути монету, щоб з ймовірністю 0,6 можна було сподіватися, що відхил відносної частоти появи “герба” від імовірності 0,5 за модулем був не більшим ніж 0,01?

41.06

1 У першості з футболу беруть участь 20 команд, серед яких п’ять лідерів. Команди розподіляють на дві групи по 10 команд. Знайти ймовірність потрапляння усіх команд – лідерів до однієї групи.

2 Імовірність появи події у кожному із 400 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти додатне число ε, щоб із ймовірністю 0,99 абсолютна величина відхилу відносної частоти появи події від її ймовірності (p=0,8) не перевищувала ε.

41.07

1 Прилад складається з шести елементів, два з яких зношені. Під час увімкнення приладу випадково включаються два елементи. Знайти ймовірність того, що включеними будуть незношені елементи.

2 Імовірність влучення у ціль в результаті одного пострілу дорівнює 0,7. Знайти ймовірність 100 влучень із 300 пострілів.

41.08

1 На кожній із шести однакових карток надрукована одна із букв: “а”, “т”, “м”, “р”, “с”, “о”. Картки перемішують. Знайти ймовірність того, що на чотирьох картках, які витягнули по одній та поклали в одну лінію, з’явиться слово “трос”.

2 Крамниця одержала 1000 пляшок мінеральної води. Імовірність того, що під час транспортування пляшка буде розбитою, дорівнює 0,004. Знайти ймовірність того, що крамниця одержить дві розбитих пляшки.

41.09

1 У першій коробці міститься 20 радіоламп, 18 із яких є стандартними; у другій – 10 ламп, 9 із яких є стандартними. Із другої коробки навмання взято лампу і перекладено в першу. Знайти ймовірність того, що лампа, яку взяли навмання із першої коробки, буде стандартною.

2 У коло радіусом R навмання кидають точку. Знайти ймовірність того, що точка буде знаходитися усередині правильного трикутника, який вписаний у коло.

41.10

1 Перший конвеєр виробляє 20000 виробів, 5% яких є браком. Другий – 10000 виробів з браком в 1%. Вироби з обох конвеєрів змішали, після цього навмання вибрали один виріб. Знайти ймовірність того, що цей виріб буде бракованим.

2 Відділ технічного контролю перевіряє на стандартність 900 виробів. Імовірність того, що виріб є стандартним, дорівнює 0,9. Знайти з імовірністю

0,9544 межі, до яких буде включено число m стандартних виробів з перевірених.

41.11

1 У партії з дев'яти виробів нестандартними є два. Навмання взяли чотири вироби. Знайти ймовірність того, що всі взяті вироби є стандартними.

2 Імовірність виграшу одного лотерейного білета складає $p = 0{,}01$. Скільки потрібно купити білетів, щоб виграв хоча б один із них з імовірністю p, що складає не менше ніж 0,95?

41.12

1 У групі з 19-ти студентів спортсменами є 12. За списком навмання вибирають п'ять прізвищ. Яка ймовірність того, що 2 з них – спортсмени?

2 У коробці знаходяться білі та чорні кулі у відношенні 4:1. Після витягування кожної кулі реєструється її колір і куля повертається назад. Чому дорівнює найменше число витягувань n, при якому з імовірністю 0,95 можна чекати, що абсолютна величина відхилу відносної частоти появи білої кулі від її ймовірності буде не більше ніж 0,01?

41.13

1 Сигналізатор отримує сигнали від двох обладнань. Надходження кожного із сигналів рівноможливе в будь-яку мить протягом T часу. Моменти надходження сигналів незалежні один від одного. Сигналізатор включається, якщо різниця між моментами надходження сигналів менша за t $(t < T)$. Знайти ймовірність того, що сигналізатор включиться за час T, якщо кожне із обладнань надішле по одному сигналу.

2 Батарея виконала шість пострілів по об'єкту. Ймовірність влучення в об'єкт при одному пострілі дорівнює 0,6. Знайти ймовірність найімовірнішого числа влучень.

41.14

1 Є два набори виробів. Імовірність того, що виріб першого набору стандартний, дорівнює 0,8, а другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що виріб, який взяли навмання, стандартний.

2 Імовірність появи події у кожному з 900 незалежних випробувань дорівнює 0,5. Знайти ймовірність того, що відносна частота появи події відхилиться від її ймовірності не більше ніж на 0,02.

41.15

1 Стрільба проводиться по п'яти мішенях типу А, трьох – типу В і двох – типу С. Імовірність влучення в мішень типу А дорівнює 0,4; типу В – 0,1; типу С – 0,15. Знайти ймовірність влучення в мішень у результаті одного пострілу, якщо невідомо, в мішень якого типу його було виконано.

2 Імовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що зі 100 випробувань подія з'явиться не менше 75 разів і не більше 85 разів.

41.16

1 У коробці знаходятися 40 чорних, 26 коричневих, 22 червоних і 12 синіх куль. Кулі перемішують, а потім навмання витягають одну з них. Знайти ймовірність того, що вона буде червоною або синьою.

2 Імовірність того, що пара взуття, яка вибрана навмання із партії, буде вищого гатунку, дорівнює 0,6. Знайти ймовірність того, що серед 600 пар, що надішли на контроль, від 230 до 250 пар взуття матимуть вищий гатунок.

41.17

1 Кидаються дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що добуток очок буде дорівнювати 6.

2 Імовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться 20 разів у 100 випробуваннях.

41.18

1 Нехай імовірність того, що телевізор потребує ремонту протягом гарантійного строку, дорівнює 0,2. Знайти ймовірність того, що протягом гарантійного строку не більше одного телевізора із чотирьох потребує ремонту.

2 Екзаменаційний білет містить три питання. Імовірність того, що студент відповість на перше і друге питання білета є однаковою і дорівнює 0,9, на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього потрібно дати відповіді на всі запитання.

41.19

1 У середину круга радіусом R навмання ставлять точку Знайти ймовірність того, що точка потрапить у вписаний у круг квадрат.

2 Із конвеєра сходить 85% виробів першого гатунку. Скільки виробів необхідно взяти, щоб з імовірністю 0,997 відносна частота виробів першого гатунку в них відрізнялась від імовірності 0,85 за модулем не перевищує 0,01?

41.20

1 Є три партії виробів, кожна з яких налічує 20 виробів. Число стандартних виробів у першій, другій і третій партіях відповідно дорівнює 20, 15 і 10. Із навмання вибраної партії взято виріб, який є стандартним. Виріб повертається до партії, і потім із цієї ж самої партії беруть виріб, який теж є стандартним. Знайти ймовірність того, що вироби було взято з третьої партії.

2 Імовірність появи бажаного результату в кожному з n випробувань дорівнює 0,9. Знайти, скільки треба провести випробувань, щоб з імовірністю 0,98 можна було отримати не менше ніж 150 бажаних результатів.

41.21

1 Двадцять перфокарток із номерами 101, 102,..., 120 розташовані довільно. Витягують дві картки. Знайти ймовірність того, що це будуть перфокартки з номерами 101 і 120.

2 Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,512. До першого класу набирають 250 учнів. Визначте ймовірність того, що серед них буде 80 дівчаток.

41.22

1 Проведено залп із двох гармат. Імовірність влучення у ціль для першої гармати становить 0,8; для другої – 0,95. Знайти ймовірність влучення в ціль.

2 Група спортсменів налічує 20 лижників, 6 велосипедистів і 4 бігунів. Імовірність виконати кваліфікаційну норму така: для лижника – 0,9; для велосипедиста – 0,8 і для бігуна – 0,75. Знайти ймовірність того, що спортсмен, вибраний навмання, виконає норму.

41.23

1 Навмання взяли два додатних числа x і y, кожне з яких не перевищує одиницю. Знайти ймовірність того, що їх сума $x + y$ не перевищує одиницю, а добуток xy є не меншим, ніж 0,09.

2 Подія B з'явиться у випадку, якщо подія A з'явиться не менше двох разів. Знайти ймовірність того, що з'явиться подія B, якщо буде проведено 6 незалежних випробувань, в кожному з яких імовірність появи події A дорівнює 0,4.

41.24

1 У майстерню для ремонту надійшло 11 годинників. Відомо, що 6 годинників потребують загального чищення. Майстер бере навмання 5 годинників. Знайти ймовірність того, що два з них потребують загального чищення.

2 Радіолокаційна станція веде спостереження за п'ятьма об'єктами, кожен із яких може бути втраченим із ймовірністю p=0,2. Знайти ймовірність того, що буде втраченим хоча б один об'єкт.

41.25

1 Чому дорівнює ймовірність того, що вибраний навмання виріб буде виробом першого гатунку, якщо відомо, що 3% всієї продукції складають нестандартні вироби, а 75% – стандартні вироби, які задовольняють вимогам першого гатунку?

2 Імовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти, якого відхилення відносної частоти появи події від її імовірності можна чекати з імовірністю 0,9128 у результаті 5000 випробувань.

41.26

1 Слюсар має 3 конусних та 7 еліптичних валиків. Спочатку він бере один валик, а потім другий. Знайти ймовірність того, що перший із валиків – конусний, а другий – еліптичний.

2 Імовірність появи події у кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не більше, ніж 1469 разів.

41.27

1 Імовірність появи події у кожному з п'яти випробувань дорівнює 0,3. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менше трьох разів.

2 Імовірність влучення у ціль в результаті одного пострілу дорівнює 0,85. Знайти ймовірність того, що в результаті 150 пострілів буде не менше ніж 70 і не більше, ніж 130 влучень.

41.28

1 Робітник обслуговує три верстати. Імовірність того, що протягом зміни потребує уваги перший верстат, дорівнює 0,7, другий – 0,75, третій – 0,85. Знайти ймовірність того, що протягом зміни потребують уваги будь-які два верстати.

2 Імовірність появи події у кожному з 2100 незалежних випробувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не менше, ніж 1470 і не більше ніж 1500 разів.

41.29

1 Для руйнування мосту достатньо влучення однієї авіаційної бомби. Знайти ймовірність того, що міст буде зруйновано, якщо на нього скинуть три бомби, ймовірність влучення яких відповідно дорівнює: 0,8; 0,95 та 0,85.

2 Імовірність появи події у кожному з незалежних випробувань дорівнює 0,25. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться у 245 випробуваннях 50 разів.

41.30

1 Із п'яти букв абетки склали слово "книга". Дитина, яка не вміє читати, розсипала ці букви, а потім зібрала їх у довільному порядку. Знайти ймовірність того, що знову буде складено слово "книга".

2 Імовірність появи події у кожному зі 100 незалежних випробувань дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що подія з'явиться не більше ніж 74 рази.

42.01-42.30

а) Дискретна випадкова величина X може набувати лише два значення: x_1 та x_2, при цьому $x_1 < x_2$. Відомі: імовірність p_1 можливого значення x_1, математичне сподівання $M(X)$ та дисперсія $D(X)$. Знайдіть закон розподілення цієї випадкової величини.

б) Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(X)$. Знайти: диференціальну функцію розподілу $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$ та дисперсію $D(X)$ цієї випадкової величини. Побудуйте графіки диференціальної та інтегральної функцій розподілу.

42.01 а) $p_1 = 0{,}1;\ M(X) = 3{,}9;\ D(X) = 0{,}09.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{16}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$

42.02 а) $p_1 = 0{,}3;\ M(X) = 3{,}7;\ D(X) = 0{,}21.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{81}, & 0 < x \le 9, \\ 1, & x > 9. \end{cases}$

42.03 а) $p_1 = 0{,}5;\ M(X) = 3{,}5;\ D(X) = 0{,}25.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{1}{2}(x^2 - x), & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

42.04 а) $p_1 = 0{,}3;\ M(X) = 3{,}3;\ D(X) = 0{,}21.$ б) $F(X) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{1}{2}x - 1, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$

42.05 а) $p_1 = 0{,}9;$ $M(X) = 3{,}1;$ $D(X) = 0{,}09.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

42.06 а) $p_1 = 0{,}3;$ $M(X) = 2{,}2;$ $D(X) = 0{,}36.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{\sqrt{x}}{2}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$

42.07 а) $p_1 = 0{,}8;$ $M(X) = 3{,}2;$ $D(X) = 0{,}16.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{2}\cos x & 0 \prec x \le \frac{\pi}{2} \\ 1 & x \succ \frac{\pi}{2} \end{cases}$

42.08 а) $p_1 = 0{,}6;$ $M(X) = 3{,}4;$ $D(X) = 0{,}24.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 27x^{3,} & 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ 1, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$

42.09 а) $p_1 = 0{,}4;$ $M(X) = 3{,}6;$ $D(X) = 0{,}24.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x - 1, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

42.10 а) $p_1 = 0{,}2;$ $M(X) = 3{,}8;$ $D(X) = 0{,}16.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \ln x, & 1 < x \le e, \\ 1, & x > e. \end{cases}$

42.11 а) $p_1 = 0{,}1;$ $M(X) = 1{,}9;$ $D(X) = 0{,}09.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ \frac{x+1}{2}, & -1 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

42.12 а) $p_1 = 0{,}7;$ $M(X) = 1{,}6;$ $D(X) = 0{,}84.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

42.13 а) $p_1 = 0{,}5;$ $M(X) = 2{,}5;$ $D(X) = 0{,}25.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x^2}{9}, & 0 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

42.14 а) $p_1 = 0{,}8;$ $M(X) = 1{,}4;$ $D(X) = 0{,}64.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{64}, & 0 < x \le 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$

42.15 а) $p_1 = 0{,}9;$ $M(X) = 2{,}2;$ $D(X) = 0{,}36.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{4}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

42.16 а) $p_1 = 0{,}9;$ $M(X) = 1{,}3;$ $D(X) = 0{,}81.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, & 1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

42.17 а) $p_1 = 0{,}1;$ $M(X) = 3{,}9;$ $D(X) = 0{,}09.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{100}, & 0 < x \le 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$

42.18 а) $p_1 = 0{,}9;$ $M(X) = 3{,}2;$ $D(X) = 0{,}36.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{36}, & 0 < x \le 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$

42.19 а) $p_1 = 0{,}8;$ $M(X) = 1{,}8;$ $D(X) = 2{,}56.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{25}, & 0 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$

42.20 а) $p_1 = 0{,}8;$ $M(X) = 1{,}2;$ $D(X) = 0{,}16.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ e^x - 1, & 0 < x \le \ln 2, \\ 1, & x > \ln 2. \end{cases}$

42.21 а) $p_1 = 0{,}7;$ $M(X) = 2{,}2;$ $D(X) = 3{,}36.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin 2x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

42.22 а) $p_1 = 0{,}3;$ $M(X) = 3{,}7;$ $D(X) = 0{,}21.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{4}, & 1 < x \le 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$

42.23 а) $p_1 = 0{,}6;$ $M(X) = 3{,}2;$ $D(X) = 0{,}16.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ \dfrac{x^2 - 4}{5}, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

42.24 а) $p_1 = 0{,}4;$ $M(X) = 2{,}8;$ $D(X) = 2{,}16.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{49}, & 0 < x \le 7, \\ 1, & x > 7. \end{cases}$

42.25 а) $p_1 = 0{,}5;$ $M(X) = 4{,}5;$ $D(X) = 0{,}25.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2\sin x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{6}, \\ 1, & x > \dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

42.26 а) $p_1 = 0{,}5;$ $M(X) = 3{,}0;$ $D(X) = 1{,}0.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2^x - 1, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

42.27 а) $p_1 = 0{,}4;$ $M(X) = 2{,}2;$ $D(X) = 0{,}96.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0{,}5; \\ 2x - 1, & 0{,}5 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$

42.28 а) $p_1 = 0{,}6;$ $M(X) = 2{,}4;$ $D(X) = 0{,}24.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ (x-2)^2, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$

42.29 а) $p_1 = 0{,}3;$ $M(X) = 3{,}4;$ $D(X) = 0{,}84.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x^3 - 1}{7}, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$

42.30 а) $p_1 = 0{,}7;$ $M(X) = 1{,}3;$ $D(X) = 0{,}21.$ б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 3x^2 + 2x, & 0 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1, & x > \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

43.01-43.30 Відомі математичне сподівання *M(X)* та середнє квадратичне відхилення *σ(X)* нормально розподіленої випадкової величини *X*. Знайти ймовірність потрапляння цієї величини до заданого проміжку *(α; β)*.

	$M(X)$	$\sigma(X)$	α	β
43.01	11,0	1,5	12	14
43.02	21,0	4,5	15	25
43.03	10,0	3,5	8	13
43.04	5,0	2,0	2	7
43.05	8,0	1,6	6	11
43.06	9,0	5,0	5	14
43.07	50,0	4,0	32	68
43.08	10,0	1,0	8	11
43.09	12,0	4,5	10	16
43.10	8,0	1,5	5	10
43.11	10,1	2,0	11	14
43.12	7,5	2,5	8	10
43.13	15,0	2,0	12	14
43.14	18,0	3,5	15	25
43.15	6,5	2,5	2	11
43.16	8,5	2,5	3	10
43.17	10,0	3,5	11	14
43.18	5,0	1,5	3	8
43.19	8,0	2,5	6	9
43.20	10,5	1,5	8	11
43.21	45,0	4,5	32	68
43.22	14,0	5,0	11	12
43.23	3,5	1,5	5	10
43.24	19,0	5,0	14	20
43.25	3,0	1,6	3	5
43.26	15,5	2,0	12	17
43.27	12,0	5,0	14	19
43.28	24,5	4,0	26	30
43.29	11,0	2,5	8	13
43.30	21,0	3,5	15	20

44.01-44.30

а) Знайти емпіричну функцію розподілу, якщо вибірка задана у вигляді таблиці розподілу абсолютних частот.

б) Знайти надійний інтервал для математичного сподівання *M(X)* нормально розподіленої випадкової величини *X*, якщо відомі: об`єм вибірки *n*, середнє арифметичне $x_в$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma_в$; надійність γ прийняти рівною 0,95.

44.01 а)

x_i	2	3	5	6
n_i	10	15	5	20

б) n=10; x_b=30,1; σ_b=5,2.

44.02 а)

x_i	15	20	25	30
n_i	5	10	15	5

б) n=25; x_b=75,09; σ_b=5,1.

44.03 а)

x_i	1	4	5	7
n_i	20	10	14	6

б) n=36; x_b=70,17; σ_b=6,3.

44.04 а)

x_i	4	8	10	15
n_i	3	10	15	2

б) n=15; x_b=40,2; σ_b=7,1.

44.05 а)

x_i	12	25	36	40
n_i	5	3	8	4

б) n=20; x_b=15,3; σ_b=6,5.

44.06 а)

x_i	5	8	12	15
n_i	3	4	9	4

б) n=18; x_b=50,14; σ_b=7,4.

44.07 а)

x_i	9	13	15	25
n_i	5	14	8	3

б) n=28; x_b=60,2; σ_b=5,3.

44.08 а)

x_i	3	9	12	16
n_i	6	15	13	6

б) n=32; x_b=24,3; σ_b=5,9.

44.09 а)

x_i	12	22	27	31
n_i	9	33	19	9

б) n=18; x_b=72,8; σ_b=7,1.

44.10 а)

x_i	15	20	26	32
n_i	10	15	5	20

б) n=23; x_b=27,4; σ_b=5,4.

44.11 а)

x_i	3	5	8	11
n_i	2	14	10	4

б) n=32; x_b=44,8; σ_b=4,3.

44.12 а)

x_i	18	25	34	43
n_i	12	26	14	8

б) n=14; x_b=30,8; σ_b=3,4.

44.13 а)

x_i	3	7	10	13
n_i	8	25	15	12

б) n=24; x_b=71,6; σ_b=8,6.

44.14 а)

x_i	6	12	18	24
n_i	10	39	25	16

б) n=36; x_b=28,2; σ_b=4,5.

44.15 а)

x_i	9	19	28	37
n_i	9	32	25	14

б) n=43; x_b=56,8; σ_b=5,8.

44.16 а)

x_i	11	32	44	57
n_i	3	25	22	10

б) n=52; x_b=31,8; σ_b=3,1.

44.17 а)

x_i	3	7	10	13
n_i	20	25	19	11

б) n=16; x_b=28,4; σ_b=4,2.

44.18 а)

x_i	9	16	22	30
n_i	6	22	24	8

б) n=44; x_b=74,5; σ_b=6,5.

44.19 а)

x_i	8	17	24	31
n_i	7	31	22	10

б) n=28; x_b=34,6; σ_b=3,2.

44.20 а)

x_i	19	28	36	47
n_i	8	25	20	7

б) n=36; x_b=78,1; σ_b=6,3.

44.21 а)

x_i	21	41	55	68
n_i	8	32	21	9

б) n=24; x_b=37,4; σ_b=4,7.

44.22 а)

x_i	15	32	36	48
n_i	9	21	24	11

б) n=42; x_b=48,3; σ_b=5,1.

44.23 а)

x_i	23	32	44	47
n_i	5	10	25	20

б) n=18; x_b=22,4; σ_b=4,4.

44.24 а)

x_i	14	24	33	45
n_i	7	26	21	6

б) n=31; x_b=67,1; σ_b=7,3.

44.25 а)

x_i	17	30	39	66
n_i	12	32	22	4

б) n=28; x_b=45,3; σ_b=4,2.

44.26 а)

x_i	22	37	48	63
n_i	9	45	35	11

б) n=39; x_b=44,2; σ_b=6,1.

44.27 а)

x_i	12	27	41	55
n_i	5	35	21	9

б) n=42; x_b=52,5; σ_b=3,4.

44.28 а)

x_i	14	35	41	54
n_i	9	17	23	11

б) n=26; x_b=39,2; σ_b=4,6.

44.29 а)

x_i	15	23	25	44
n_i	7	12	22	9

б) n=32; x_b=76,1; σ_b=6,4.

44.30 а)

x_i	7	9	11	13
n_i	5	12	8	5

б) n=30; x_b=74,1; σ_b=4,2.

ДОДАТОК А

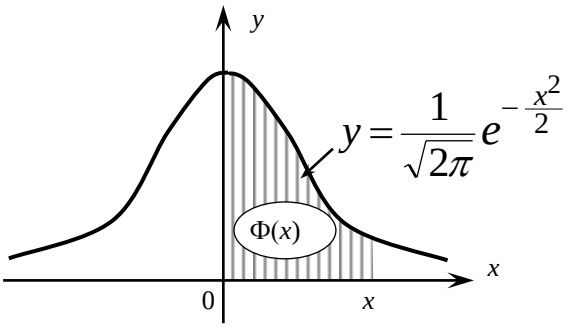
Таблиця А1 — значення функції Гауса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,399	399	399	399	399	398	398	398	398	397
0,1	397	397	396	396	395	395	394	393	393	392
0,2	391	390	389	389	388	387	386	385	384	383
0,3	381	380	379	378	377	375	374	373	371	370
0,4	368	367	365	364	362	361	359	357	356	354
0,5	352	350	349	347	345	343	341	339	337	335
0,6	333	331	329	327	325	323	321	319	317	314
0,7	312	310	308	306	303	301	299	297	294	292
0,8	290	287	285	283	280	278	276	273	271	269
0,9	266	264	261	259	257	254	252	249	247	244
1,0	242	240	237	235	232	230	228	225	223	220
1,1	218	216	213	211	208	206	204	201	199	197
1,2	194	192	190	187	185	183	180	178	176	174
1,4	150	148	146	144	142	140	137	135	133	132
1,6	111	109	107	106	104	102	101	099	097	096
1,8	079	078	076	075	073	072	071	069	068	067
1,9	066	064	063	062	061	059	058	057	056	055
2,0	054	053	052	051	050	049	048	047	046	045
2,1	044	043	042	041	040	040	039	038	037	036
2,2	036	035	034	033	033	032	031	030	030	029
2,4	022	022	021	021	020	020	019	019	018	018
2,6	014	013	013	013	012	012	012	011	011	011
2,8	008	008	008	007	007	007	007	007	006	006
2,9	006	006	006	006	005	005	005	005	005	005
3,0	004	004	004	004	004	004	004	004	004	003
3,1	003	003	003	003	003	003	003	003	003	003
3,2	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002
3,3	002	002	002	002	002	002	001	001	001	001
3,4	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001
3,5	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001
3,6	001	001	001	001	001	001	001	001	001	000

ДОДАТОК Б

Значення Б1 — функції Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.00000				
0.05	0.01994	1.05	0.35314	2.05	0.47982
0.10	0.03983	1.10	0.36433	2.10	0.48214
0.15	0.05962	1.15	0.37493	2.15	0.48422
0.20	0.07926	1.20	0.38493	2.20	0.48610
0.25	0.09871	1.25	0.39435	2.25	0.48778
0.30	0.11791	1.30	0.40320	2.30	0.48928
0.35	0.13683	1.35	0.41149	2.35	0.49061
0.40	0.15542	1.40	0.41924	2.40	0.49180
0.45	0.17364	1.45	0.42647	2.45	0.49286
0.50	0.19146	1.50	0.43319	2.50	0.49379
0.55	0.20884	1.55	0.43943	2.55	0.49461
0.60	0.22575	1.60	0.44520	2.60	0.49534
0.65	0.24215	1.65	0.45053	2.65	0.49598
0.70	0.25804	1.70	0.45543	2.70	0.49653
0.75	0.27337	1.75	0.45994	2.75	0.49702
0.80	0.28814	1.80	0.46407	2.80	0.49744
0.85	0.30234	1.85	0.46784	2.85	0.49781
0.90	0.31594	1.90	0.47128	2.90	0.49813
0.95	0.32894	1.95	0.47441	2.95	0.49841
1.00	0.34134	2.00	0.47725	3.00	0.49865
3.1	0.49903	3.2	0.49931	3.3	0.49952
3.4	0.49966	3.5	0.49977	3.6	0.49984
3.7	0.49989	3.8	0.49993	3.9	0.49995
4.0	0.499968	4.5	0.499997	5.0	0.49999997

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Частина 1. Підручник для ВТНЗ - Київ, Техніка, 1999.- 590 с.
2. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика: Навч. Посібник для вузів. У 4-х ч.: Вища математика. Модульна технологія навчання, 3-тє вид., К., 2007.
3. Овчинников П.П. Вища математика. Частина 2. Підручник . - Київ, Техніка, 2000.- 792 с.
4. Каплан И. А., Пустынников В. И.; Под ред. Пустынникова В. И. Практикум по высшей математике. В 2-х т. Т. 1, 6-е изд., М., 2006.
5. Баранова Е. С., Васильева Н. В., Федотов В. П. Практическое пособие по высшей математике. Типовые расчеты. - СПб., 2008.
6. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. У 2 кн. Кн. 2. За ред. І.П. Васильченко.
7. В.И. Смирнов Курс высшей математики т.1. - М., 1974.
8. Збірник завдань з вищої математики В.П. Грималюк, М.М. Кухарчук, В.В. Ясінський. - К., 2000, КПІ.
9. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - 4-е изд., М., 1996.
10. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Загальний курс. Збірник задач та вправ. - Х., 1999.
11. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. - К., 2006.
12. Андрощук Л. В., Ковтун О. І., Олешко Т. І.; За ред. Олешко Т. І. Вища математика: Навч. посібник для вузів. У 7-ми модулях. Модуль 7: Ряди. Диференціальні рівняння К., 2005.
13. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М., 1999.
14. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - 7-е изд, доп.- М., 2003.
15. Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высш. шк., 1976.
16. Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Т.3. – Высш. шк., 1978.
17. Кремер Н.Ш.Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2000.
18. Черняк І.О., Обушна О., Ставицька А. Теорія ймовірностей та математична статистика К., 2001.
19. Бородин А.И. Элементарний курс теории вероятностей и математической статистики. - 3-е изд.-М,2002.
20. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М,1988.
21. Скороход А.В. Лекції з теорії випадкових процесів: Навчальний посібник. – К.: Либідь, 1990. – 168 с.

ЗМІСТ

Вступ…… 3
Контрольна робота №3 „Ряди”……..... 3
1 Числові ряди……..... 3
1.1 Основні означення……... 3
1.2 Ряди з додатними членами. Достатні умови збіжності. Ознаки порівняння для знакосталих рядів……. 5
1.3 Ознака Даламбера…… 7
1.4 Радикальна ознака Коші……. 8
1.5 Інтегральна ознака Коші……..... 8
1.6 Знакозмінні ряди. Ознака Лейбница……. 9
2 Функціональні ряди……. 10
3 Степеневі ряди……. 11
4 Подання функцій у вигляді степеневих рядів…….. 13
5 Застосування степеневих рядів у наближених обчисленнях 15
6 Ряди Фур’є……..... 18
Індивідуальні завдання……... 22
Контрольна робота № 8 „Теорія ймовірностей та математична статистика”... 29
1 Теорія ймовірностей…… 29
1.1 Випадкові події…… 29
1.2 Повторні випробування…….. 33
1.3 Випадкові величини…… 36
1.4 Закони розподілу випадкових величин……. 39
1.5 Закон великих чисел…… 42
2 Елементи математичної статистики……... 43
2.1 Вибірковий метод і його основні характеристики…….. 43
2.2 Статистичне оцінювання параметрів розподілення. Точкове оцінювання невідомих параметрів розподілення…… 45
2.3 Статистичне оцінювання параметрів розподілення. Інтервальне оцінювання й приклад побудови надійного інтервалу для математичного сподівання…… 48
Індивідуальні завдання……... 50
Додаток А…… 64
Додаток Б……. 65
Список літератури……... 66

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з тем: „Ряди”, „Теорія ймовірностей та математична статистика” з курсу „Вища математика” для студентів заочної форми навчання з прискореннем терміном навчання спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»

Укладачі: Петрова Анжела Юріївна
Посилаєва Раїса Вікторівна

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор Л.І. Христенко

План 2016р., поз. 237. Формат 60х84 1/16.
Підп. до друку 11.03.16 Обл.-вид. арк. 3,1. Папір друк. №2.
Надруковано на ризографі. Умов. друк. арк. 3,3.
Тираж 50 прим. Зам. № 3059 Безкоштовно.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури