МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 191

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійної роботи

«Прикладні задачі математики в архітектурі»

з навчальної дисципліни «Вища математика»

Харків 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 191

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання самостійної роботи

«Прикладні задачі математики в архітектурі»

з навчальної дисципліни «Вища математика»

Рекомендовано кафедрою
вищої математики.
Протокол № 11 від 30.10.2020

Харків
ХНУБА
2020

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи «Прикладні задачі математики в архітектурі» з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 191 «Архітектура та містобудування» першого (бакалаврського) рівня/ Укладачі: О.О. Аршава, С.А. Пихтін. Харків: ХНУБА, 2020. 30 с.

Укладачі: О.О. Аршава, С.А. Пихтін

Рецензент Л.І. Щелкунова

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Вивчення навчальної дисципліна «Вища математика» здобувачами вищої освіти спеціальності 191 «Архітектура та містобудування» є складним. Основні труднощі, що виникають як у викладачів, так і у здобувачів, пов'язані з невеликим об'ємом годин, протягом яких потрібно вивчити основні розділи вищої математики.

Головною метою опанування дисципліни «Вища математика» є забезпечення підготовки бакалаврів в галузі архітектури та будівництва завдяки поєднанню високого рівня професійної та практичної підготовки, ґрунтуючись, на принципі практичної спрямованості й усвідомлення місця отриманих компетентностей.

У зв'язку з вищевикладеним актуальним є питання організації самостійної роботи з здобувачами вищої освіти спеціальності 191 «Архітектура та містобудування».

Представлені методичні вказівки призначаються учасникам освітнього процесу для надання допомоги як при проведенні самостійної роботи, так і організації роботи наукового гуртка «Математика в архітектурі та будівництві».

Математика, якщо на неї правильно подивитися, відображає не тільки істину, але й незрівнянну красу.
Бертран Рассел

Тема 1 Історичні витоки взаємозв'язку математики та архітектури

Архітектура – це найдавніша сфера людської діяльності. Головний сенс поняття архітектури, як мистецтва будувати, полягає в тому, що це сукупність будівель і споруд різного призначення, а також простір, створений людиною та необхідний для її життя й діяльності. Архітектура зароджується разом із людством та супроводжує його протягом історичного розвитку. Саме в ній

знаходять відображення світогляд, цінності, знання людей, які жили в різні історичні епохи. Архітектурні пам'ятники, що дійшли до сучасності з глибини століть, допомагають зрозуміти традиції, погляди, рівень знань людей, їх звички та цілі.

Для чого зводилися архітектурні споруди? Насамперед, зведення архітектурних споруд сприяло створенню комфортних умов життя та діяльності людей: надавати достатнє освітлення, забезпечувати звукоізоляцію або гарне поширення звуку всередині приміщення. Споруди, що зводяться, повинні бути міцними, безпечними та довго служити людям. Але головну ідею розвитку архітектури можна сформулювати, пригадуючи слова римського архітектора та механіка М.Вітрувія: «Все (в архітектурі) повинно робитися, беручи до уваги міцність, користь і красу». Все, що створює людина, вона намагається зробити красивим.

За своєю суттю архітектура стоїть на межі мистецтва та техніки. Тому архітектор, окрім власних професійно-спрямованих дисциплін, повинен володіти й точними математичними методами та знаннями основних законів механіки.

Тісний зв'язок між архітектурою й математикою не викликає жодних сумнівів. У одній із колисок сучасної цивілізації – Стародавній Греції – геометрія вважалася одним із розділів архітектури. Такий зв'язок не лише не зник протягом часу, а навпаки тільки посилився. На підтвердження цього тезису можна навести багато прикладів. Самим відомим із них є «золотий переріз» – співвідношення, що визначає оптимальні з точки зору зорового сприйняття пропорції архітектурної споруди.

Люди з давніх часів, зводячи свої житла, думали, в першу чергу, про їх міцності. Не випадково і в формулі М.Вітрувія саме міцність згадується на першому місці. Найміцнішою архітектурною спорудою вважаються єгипетські піраміди. Як відомо, вони мають форму правильних чотирикутних пірамід. Саме така геометрична форма забезпечує найбільшу стійкість за рахунок

великої площі підстави. З іншого боку, форма піраміди забезпечує зменшення маси в наслідок збільшення висоти над землею. Перелічені властивості роблять піраміду стійкою та міцною в умовах земного тяжіння.

Раціональність геометричної форми піраміди, що дозволяє обирати значні розміри для цієї споруди, надає піраміді велич та викликає відчуття вічності й значності.

Продовжуючи історичний екскурс, пригадаємо, що на зміну пірамідам прийшла стійко-балкова система. З точки зору геометрії вона являє собою багатогранник, що виходить за умови, коли на два вертикальних прямокутних паралелепіпеда встановити ще один прямокутний паралелепіпед (рис.1).

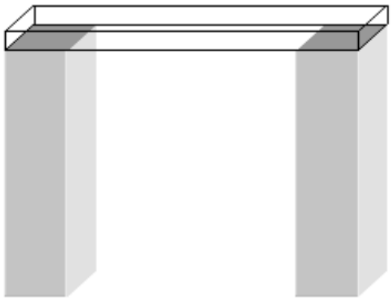

Рисунок 1

Це одна з перших конструкцій, що використовувалася при зведенні будівель. Вона являла собою споруду, що складається з вертикальних стійок і горизонтальних балок, що їх покривають. Першим таким спорудженням буда культова споруда – дольмен. Вона складалася з двох вертикально встановлених каменів, на які було розміщено третій вертикальний камінь. Призначення цієї культової споруди досі невідомо, але наочним є той факт, що в її створенні втілена ідея подолання людиною сили тяжіння.

Окрім дольмена, до наших часів дійшла ще одна споруда, що представляє найпростішу стійко-балкову конструкцію – кромлех. Ця культова споруда, ймовірно, призначалася для жертвоприношень і ритуальних урочистостей.

Кромлех складався з окремих каменів, що накривалися горизонтальним камінням. При цьому вони утворювати два або декілька концентричних кола. Самий відомий кромлех зберігається в містечку Стоунхендж в Англії. Деякі вчені вважають, що він був древньою астрономічною абсерваторією.

Каміння, з якого зводилися споруди на основі стійко-балкової конструкції, погано гнеться та зазвичай руйнується під дією власної ваги. Тому під балки потрібно було встановлювати досить багато стійок. Для прикраси будинків такі колони обирали в формі каріатидів або атлантів.

Камінь погано працює на вигин, але добре працює на стиск. Це призвело до використання в архітектурі арок і склепінь. Таким чином виникла нова арково-склепінчаста конструкція, з появою якої в архітектуру прямих ліній і площин увійшли кола, круги, сфери та кругові циліндри.

Спочатку в архітектурі використовувалися лише напівциркульні арки або напівсферичні купола. Це означає, що межа арки являє собою півколо, а купол – половину сфери. Наприклад, саме півсферичний купол має Пантеон – храм усіх богів в Римі. Діаметр купола становить 43 м. При цьому висота стін Пантеону дорівнює радіусу півсфери купола. У зв’язку з цим виходить, що сама будівля цього храму нібито накинута на кулю діаметром 43 м (рис. 2).

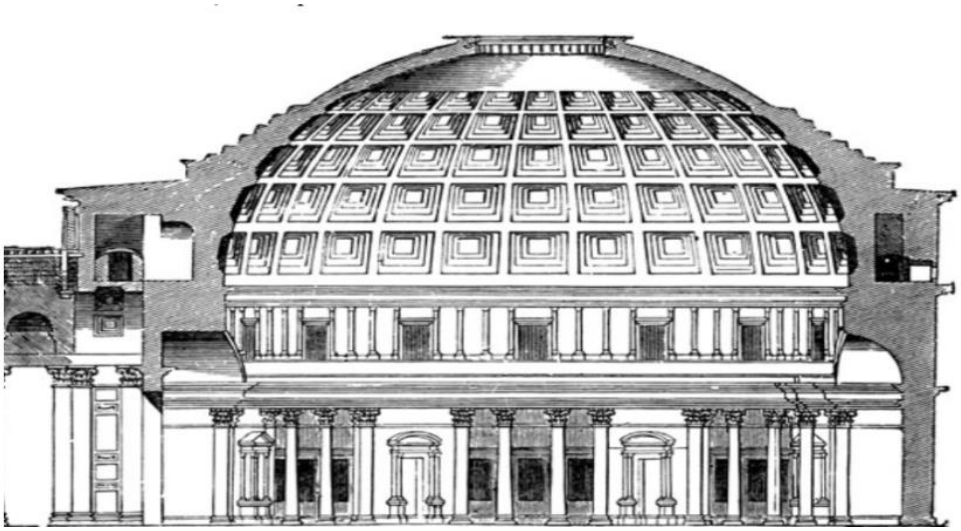

Рисунок 2

Таким вид конструкцій був найбільш популярним в давньоримській архітектурі. Арочно-склепінчаста конструкція дозволяла давньоримським архітекторам зводити гігантські споруди з каменю. До таких споруд відносяться знаменитий Колізей або амфітеатр Флавіїв. Свою назву він отримав від латинського слова colosseus, що в перекладі означає колосальний або величезний.

Арково-склепінчаста конструкція мала певний недолік – занадто велика сила діяла в підставі арок похило в бік (на відміну від стійко-балкової конструкції, де сила тяжіння діє вертикально). Такі бічні зусилля, що архітектори називають бічним розпором, вимагають великої товщини стін, яка повинна гасити ці зусилля. Наприклад, товщина стін Пантеону в Римі, що підтримують купол, дорівнює 7 метрам, а це вимагає великої витрати матеріалів.

Наступним етапом розвитку архітектурних конструкцій є каркасна система, що використовується в сучасній архітектурі. Прообразом її став різновид арково-склепінчастої конструкції, що містить стрілчаті арки. На зміну напівциркульним аркам приходять стрілчасті, що з точки зору геометрії є більш складними. Стрілчасті арки можна побудувати за допомогою циркуля. Розглянемо один із способів побудови схематичного зображення стрілчастої арки.

Стрілчаста арка складається з двох дуг кола одного радіуса. Це означає, що потрібно обрати певний розчин циркуля і закріпити його. Після цього провести горизонтальну пряму. У будь-яку точку цієї прямої поставити ніжку циркуля і провести дугу (можна півколо). Потім ніжку циркуля поставити на горизонтальну пряму таким чином, щоб вона виявилася з боку опуклої частини вже побудованої дуги, і знову провести дугу того ж радіусу. Дві дуги перетнуться. Над горизонтальною лінією ми отримаємо схематичне зображення стрілчастої арки (рис. 3).

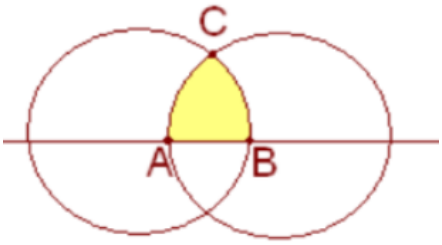

Рисунок 3

Арочна конструкція стала прототипом каркасної конструкції, що використовується в якості основної при зведенні сучасних споруд з металу, скла і бетону (наприклад, конструкція Ейфелевої вежі в Парижі).

Підбиваючи підсумки проведеного історичного аналізу взаємозв'язку математики і архітектури, можна зробити наступний висновок. Тільки невідступно діючи законам геометрії й математики, архітектори давнини мали можливість створити шедеври. Не випадково кажуть, що піраміда Хеопса – німий трактат із геометрії, а грецька архітектура – зовнішнє зображення Евкліда. Пройшли століття, але роль геометрії в архітектурі не змінилася. Вона, як і раніше, залишається граматикою архітектора. Саме математика допомагає втілити в життя основний тезис архітектора «міцність, користь і краса».

Література [1, 2, 4].

Питання для самоперевірки

1 У чому полягає сенс архітектури як сфери людської діяльності?

2 Надайте характеристику основним історичним етапам розвитку архітектури.

3 Наведіть приклади взаємозв'язку математичних знань та побудови архітектурних конструкцій.

4 Яким чином можна побудувати схематичне зображення стрілчастої арки?

5 Які існували основні типи архітектурних конструкцій у контексті їх історичного розвитку?

Тема 2 Класичні задачі математики в архітектурі

2.1 Красота – зовнішнє відображення математичних законів в архітектурі

Головна цінність архітектурних споруд полягає в їх красі. Споруда може бути міцною й зручною, але якщо вона не приваблює око, не викликає естетичного почуття, то вона сприймається як звичайна будова, а не як пам'ятник архітектури. Крім того, архітектурна споруда може стати неміцною та марною, але при цьому її архітектурна цінність не зникне. Так сталося, наприклад, з багатьма шедеврами давньоруського зодчества. Вони були зроблені з не найбільш міцного матеріалу – дерева, тому досить інтенсивно руйнувалися. Багато в чому, завдяки цьому, вони перестали використовуватися за своїм призначенням. Але в той же час не перестали бути шедеврами архітектурного мистецтва.

Інакше кажучи, без мистецтва архітектури немає. Існують конкретні математичні моделі, співвідношення й властивості, що використовують в архітектурі та визначають їх естетичну досконалість. Це різноманітні форми, пропорції й закони симетрії, що в певній мірі задають внутрішню красу архітектурної форми. Без неї зовнішні прикраси будівель не поліпшують, а часом посилюють зовнішнє враження про ту чи іншу споруду.

Французький архітектор XVII століття Франсуа Блондель писав: «Задоволення, що ми відчуваємо, дивлячись на прекрасний твір мистецтва, походить від того, якщо в ньому дотримуються правила й міри, задоволення в нас викликають єдино лише пропорції. … Щоб підкріпити наше твердження, я заявляю, що краса, яка виникає з міри та пропорції, зовсім не вимагає дорогих матеріалів і витонченої роботи для того, щоб викликати захоплення, навпаки, вона виблискує й робиться ще більш відчутною, проступаючи крізь бруд і хаос матеріалу та його обробки».

Кращим підтвердженням цих слів є скромна церква Покрова Богородиці на Нерлі, що не відрізняється значними розмірами. Але саме зв'язок розмірів (відповідність) усіх її частин створює ту гармонію, що робить її прекрасною.

Саме гармонія, яка лежить в основі всіх мистецтв, обумовлює красу їх кращих зразків. В той же час, щоб створити рукотворні твори архітектури, потрібно пізнати й використовувати закони гармонії при їх створенні. Розкрити ці закони гармонії допомагає саме математика.

Людство з самих ранніх етапів свого існування намагалося осягнути розумом закони гармонії, а значить, краси. Одними з перших зробили відкриття зв'язку прекрасного й математики представники школи піфагорійцев. Відомий їх девіз: «Все прекрасне, завдяки числу». Адже саме число дозволило визначити міру речей та співвіднести, дорівняти різні частини цілого.

Після піфагорійцев Аристотель намагався зайти сутність краси. Він писав у своїй відомій праці «Метафізика»: «…найважливіші види прекрасного – це злагодженість, домірність і визначеність, математика найбільше і виявляє саме їх».

Краса, як філософське поняття, має двоєдину природу. З одного боку, в ній поєднуються об'єктивні закони й суб'єктивні думки з оцінкою, з іншого – єдність двох протилежних начал: порядку й безладу. Математика виявляє об'єктивні закономірності встановлення цього порядку, з'єднання окремих частин в єдине ціле. Вона пропонує архітектору низку загальних правил організації частин у ціле, що допомагають розташувати ці частини в просторі таким чином, щоб у них проявлявся порядок, встановити певне співвідношення між розмірами частин і виявити для зміни розмірів (зменшення або збільшення) певну єдину закономірність, що забезпечує сприйняття цілісності та уявлення про порядок, виділити певне місце в просторі, де буде розміщуватися споруда, описати її за допомогою математичної форми, що дозволить виділити її з числа інших споруд та внести до її складу новий архітектурний ансамбль.

Виникає істотне питання: «Звідки математика черпає ці загальні правила?» Відповідь на нього дуже проста. Вона отримує їх із природи. Головна заслуга математики в цьому контексті полягає в тому, що вона виявляє глибинні властивості, що закладені в природі, але не лежать на поверхні.

Наведемо приклад одного архітектурного рішення науково-педагогічного працівника кафедри ІТДАС ХНУБА, архітектора-практика, члена Національної спілки архітекторів України Пихтіна С.А. (рис.4). Із першого погляду не важко побачити схожість форми покрівлі альтанки в саду пелюстці. І тому висловлення: «Все природне - красиво» підтверджується наочно в архітектурі різних епох.

Рисунок 4

Що є найважливішим математичним механізмом сприйняття оточуючого нас світу, а значить, що дозволяє переносити образи природи в архітектурні споруди, роблячи їх чудовими?

Жива природа в будь-яких її проявах переслідує одну й ту ж саму мету: будь-який живий організм повторює себе в собі подібному. І не лише найпростіші організми, аде й вершина творіння природи – людина – повторює з покоління в покоління ті ж форми, ту ж скульптуру ліплення особи, ті ж риси характеру, жести. Це не означає, що всі ми однакові, ми схожі, подібні. Це подібність, що базується на загальних ознаках, які відрізняють людину від інших живих істот.

У геометрії ми також говоримо про подібність, наприклад, трикутників, багатокутників. І головне, що є важливим у геометричній подібності, - це збереження форми об’єктів при зміні розмірів.

Таким чином, в основі нашого сприйняття лежить принцип геометричної подібності. Цей принцип дозволяє нам використовувати природні форми, їх комбінації в архітектурних спорудах, привносячи в них природну красу.

2.2 Геометричні форми в різних архітектурних стилях

Жоден із видів мистецтв так тісно не пов’язаний із геометрією як архітектура. Відомому архітектурному реформатору Лє Корбюзьє належить вислів: «Навколишній нас світ – це світ геометрії чистої, справжньої, бездоганної в наших очах. Усе навколо – геометрія Ніколи ми не бачимо так ясно таких форм, як коло, прямокутник, кут, циліндр, гіпар, виконаних із такою ретельністю й так впевнено». Лє Корбюзьє вважав геометрія тим чудовим інструментом, що дозволяє встановити порядок у просторі.

Архітектурні твори живуть у просторі, є його частиною, вписуючись у певні геометричні форми. Крім того, вони складаються на основі певного геометричного тіла. Дуже часто геометричні форми є комбінаціями різних геометричних тіл.

Геометрична форма споруди настільки важлива, що є випадки, коли в назві будівлі закріплюються назви геометричних фігур. Наприклад, будівля військового відомства США називається Пентагон, що означає п’ятикутник. Це пов’язано з тим, що, якщо подивитися на будівлю з великої висоти, то вона дійсно буде мати вигляд п’ятикутника. Але насправді тільки контури цієї будівлі представляють п’ятикутник.

Потрібно відзначити, що в кожного архітектора є улюблені деталі, які є основними складовими багатьох споруд. Вони мають зазвичай певну геометричну форму. Наприклад, колони – це циліндри, купола – півсфера або частина сфери, що обмежена площиною, шпилі – це піраміди або конуси.

У архітекторів різних епох були свої улюблені деталі, що відображали певні комбінації геометричних форм. Розглянемо один із яскравих архітектурних стилів – середньовічна готика. Готичні споруди були спрямовані вгору, вражали величністю головним чином за рахунок висоти. В їх формах також широко використовувалися піраміди й конуси, що відповідали загальній ідеї – прагненню вгору. Характерними деталями для готичних споруд є стрілчасті арки порталів, високі стрілчасті вікна, закриті кольоровими вітражами (рис. 5).

Рисунок 5

Окремої уваги потребують геометричні форми в сучасній архітектурі. Дуже привабливо виглядає стиль «Хай-тек», де вся конструкція відкрита для огляду. Ми бачимо геометрію ліній, що йдуть паралельно або перетинаються, утворюючи ажурний простір споруди. Прикладом цього стилю є Ейфелева вежа (рис. 6).

Сучасний архітектурний стиль, завдяки можливостям сучасних матеріалів, використовує «цікаві» форми, що сприймаються через складні опуклі й вгнуті поверхні.

Рисунок 6

Фото: ru.wikipedia.org

Для того, щоб уявити форми таких поверхонь, звернемося до будівель, архітектором яких є один із авторів представлених методичних розробок, науково-педагогічний працівник кафедри ІТДАС ХНУБА Пихтін С.А. (рис. 7 і рис. 8). Такі будівлі є розробками для подальшої реалізації.

Рисунок 7

Рисунок 8

Представлені споруди є комбінаціями декількох геометричних тіл: призми, паралелепіпеда, циліндра, еліпсоїда. Потрібно звернути окрему увагу

на покрівлю будівель, що має криволінійний характер. Серед перерізів не важко побачити криві другого порядку: коло, еліпс, гіперболу та параболу.

За допомогою методу перерізів геометричний вигляд поверхні вивчається за лініями перетину цієї поверхні з координатними площинами або площинами, що їм паралельні. Детально така методика викладена доцентом кафедри вищої математики Щелкуновою Л.І. в [13, стор. 68-69].

Для дослідження форми еліпсоїда, який визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

розглянемо перерізи поверхні площинами, що паралельні площині Oxy. Рівняння таких площин: $z = h$, де $h -$ довільне число.

Лінія, яка утворюється в перерізі, визначається системою двох рівнянь

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{cases}$$

Досліджуємо рівняння:

1 Якщо $|h|>c,\ c>0,\ то\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<0$; отже, точок перетину поверхні $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ і площини $z = h$ не існує;

2 Якщо $|h|=c$, тобто $h=\pm c$, тому $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$; отже, лінія перетину вироджується у дві точки *(0;0;c)* і *(0;0;-c).* Площини $z=\pm c$ торкаються поверхні;

3 Якщо $|h|<c$, то рівняння $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1-\dfrac{h^2}{c^2},\\ z=h\end{cases}$ запишеться у вигляді:

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1,\\ z=h.\end{cases}$$

Не важко побачити, що лінія перетину є еліпсом із півосями

$$a_1 = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}, b_1 = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\ .$$

При цьому, чим менше $|h|$, тим більші півосі a_1 і b_1. При $h=0$ вони досягають своїх найбільших значень $a_1 = a$ і $b_1 = b$.

Рівняння $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h \end{cases}$ набувають вигляду $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ h=0. \end{cases}$.

Аналогічні результати отримуємо, якщо розглянемо перерізи поверхні площинами $x=h$, $y=h$.

Крім того, можна показати, що еліпсоїд має 6 вершин із координатами:

(a;0;0), (-a;0;0), (0;в;0), (0;-в;0), (0;0;c), (0;0;-c).

Осями симетрії еліпсоїда є координатні осі *Ox*, *Oy*, *Oz*, а площинами симетрії – координатні площини *Oxy*, *Oxz*, *Oyz*.

Таким чином, наведений аналіз дозволяє зобразити еліпсоїд як замкнену овальну поверхню (рис. 9).

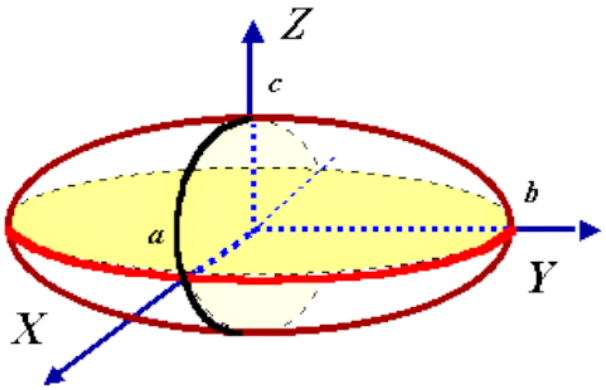

Рисунок 9

Величини *a, b, c* називають піввісями еліпсоїда.

Якщо всі ці числа різні, то еліпсоїд називають трьохвісним. Якщо деякі дві піввісі рівні, то еліпсоїд можна розглядати як поверхню, яка утворена обертанням еліпса навколо однієї з його осей.

2.3 Симетрія як елемент архітектурної досконалості

Поняття симетрії увійшло в наше життя ще зі шкільного курсу геометрії. Коли ми його вимовляємо, то згадуємо метелика або кленовий лист, в яких можно провести пряму вісь і частини, що будуть розташовані по різні боки від цієї прямої, будуть практично однаковими. Таке уявлення є правильним. Але це тільки один із видів симетрії, яку вивчає математика, так звана осьова симетрія. Існує більш загальне поняття симетрії.

Загальне поняття симетрії характеризує особливу структуру організації будь-яких систем, в якій зберігаються (говорячи математичною мовою, залишаються інваріантними) певні ознаки при виконанні певних перетворень. Ознаки, що зберігаються, можуть бути геометричними, фізичними, біологічними, хімічними, інформаційними тощо.

Розглядаючи симетрію в архітектурі, цікавить, насамперед, геометрична симетрія, тобто симетрія форми як відповідність частин цілому. Помічено, що при виконанні певних перетворень над геометричними фігурами їх частини, що переміщуються в нове положення, знову будуть утворювати вихідну фігуру. Наприклад, якщо провести пряму через висоту рівнобедреного трикутника до основи, та частини трикутника, що розташовані по різні боки від цієї прямої, поміняти місцями, тоді ми отримаємо той же трикутник за формою та розмірами; п’ятикутна зірка при повороті на кут 72^0 навколо центральної точки, тобто точки перетину її променів, займе початкове положення.

У наведених прикладах розглядаються різні види симетрії. У першому випадку йдеться про осьову симетрію. Частини, що взаємозаміняють одна іншу, утворені деякою прямою, яка називається віссю симетрії. У просторі аналогом осі симетрії є площина симетрії. Тому в просторі зазвичай розглядається симетрія відносно площини симетрії. Наприклад, куб симетричний відносно площини, що проходить через його діагональ.

Маючи на увазі обидві випадки (площини й простору), цей вид симетрії іноді називають дзеркальною. Така назва виправдана тим, що обидві частини

фігури, що знаходяться по різні сторони від осі симетрії або площини симетрії, схожі на деякий об'єкт і його відображення в дзеркалі. Зауважимо, що можна зустрітися з іншою назвою цього виду симетрії. Наприклад, в біології вказаний вид симетрії називають білатеральним, а площину симетрії – білатеральною площиною.

Окрім дзеркальної симетрії розглядається центральна або поворотна симетрія. В цьому випадку перехід частин до нового положення та утворення вихідної фігури відбувається за допомогою повороту цієї фігури на певний кут навколо точки, що називається центром повороту. Звідси походять наведені вище назви зазначеного виду симетрії. Поворотна симетрія розглядалася в прикладі з п'ятикутною зіркою.

Поворотна симетрія може здійснюватися й в просторі. Куб при повороті навколо точки перетину його діагоналей на кут 90^0 у площині, що паралельна будь-якої грані, перейде в себе. Тому можна куб називати тілом центрально симетричним, бо він володіє поворотною симетрією.

Ще одним видом симетрії є переносна симетрія. Це випадок симетрії, коли частини цілої форми організовано таким чином, що кожна наступна повторює попередню та віддалена від неї на певний інтервал в певному напрямку. Цей інтервал називають кроком симетрії. Переносна симетрія зазвичай використовується під час побудови бордюрів.

У творах архітектурного мистецтва її можна побачити в орнаментах або решітках, що використовуються для їх прикраси. Переносна симетрія також достатньо широко представлена й в інтер'єрах будівель. На рисунку 10 наведено приклад поворотної симетрії 12-го порядку – мозаїка купола баптістерія в Равенні V ст.

Архітектурні споруди, що створено людиною, в більшості є симетричними. Вони приємні для ока, їх вважають красивими. З чим це пов'язано? В цього приводу можна висловити тільки припущення.

Рисунок 10

По-перше, ми з вами живемо в симетричному світі, що обумовлений умовами життя на планеті Земля, насамперед, існуючою гравітацією. І підсвідомо людина розуміє, що симетрія – це форма стійкості, а значить існування на нашій планеті. Тому під час створення архітектурних форм інтуїтивно прагне до симетрії.

По-друге, те, що оточує людину – люди, рослини, тварини тощо – є речами симетричними. Однак при найближчому розгляді виявляється, що природні об’єкти (на відміну від рукотворних) тільки майже симетричні. Але цей факт око людини не завжди сприймає. Воно звикає бачити симетричні об’єкти, що сприймаються як гармонічні й досконалі.

Симетрія сприймається людиною як прояв закономірності, а значить внутрішнього порядку. Зовні цей внутрішній порядок сприймається як краса.

Симетричні об’єкти мають високий ступінь доцільності, адже симетричні предмети мають більшу стійкість і рівну функціональність у різних напрямках.

Саме такі міркування призвели людину до думки, що споруда повинна бути симетричною.

Симетрія використовується при спорудженні культових і побутових споруд у Стародавньому Єгипті. Прикраси цих споруд також представляють собою зразки використання симетрії. Але найбільш яскраво симетрія проявляється в античних спорудах Стародавньої Греції, предметах розкоші й орнаментах, що їх прикрашали. З тих часів і до наших днів симетрія в свідомості людини стала об'єктивною ознакою краси. Дотримання симетрії є першим правилом архітектора при проектуванні будь-якої споруди.

Окрім симетрії в архітектурі можна розглядати антисиметрію й диссиметрію. Антисиметрія – це протилежність симетрії, її відсутність. Диссиметрія – це часткова відсутність симетрії, розлад симетрії, виражене в наявності одних симетричних властивостей і відсутності інших.

У сучасній архітектурі все частіше використовуються прийоми як антисиметрії, так і диссиметрії. Ці пошуки часто призводять до вельми цікавих результатів. З'являється нова естетика містобудування.

Підводячи підсумки, можна констатувати той факт, що краса являє собою єдність симетрії й диссиметрії.

2.4 Золотий переріз

Золотий переріз – це особливе співвідношення, що використовується в мистецтві й архітектурі протягом століть. Термін «золотий переріз» був згаданий римським архітектором М. Вітрувієм у якості основи пропорції класичної грецької архітектури. Пропорції Парфенона в Афінах є прикладом золотого перерізу в архітектурних пропорціях (рис. 11).

Людина розрізняє навколишні предмети за формою. Інтерес до форми будь-якого предмета викликається як життєвою необхідністю, так і красою форми.

Форма, в основі побудови якої лежить поєднання симетрії та золотого перерізу, сприяє найкращому зоровому сприйняттю й появи відчуття краси та гармонії.

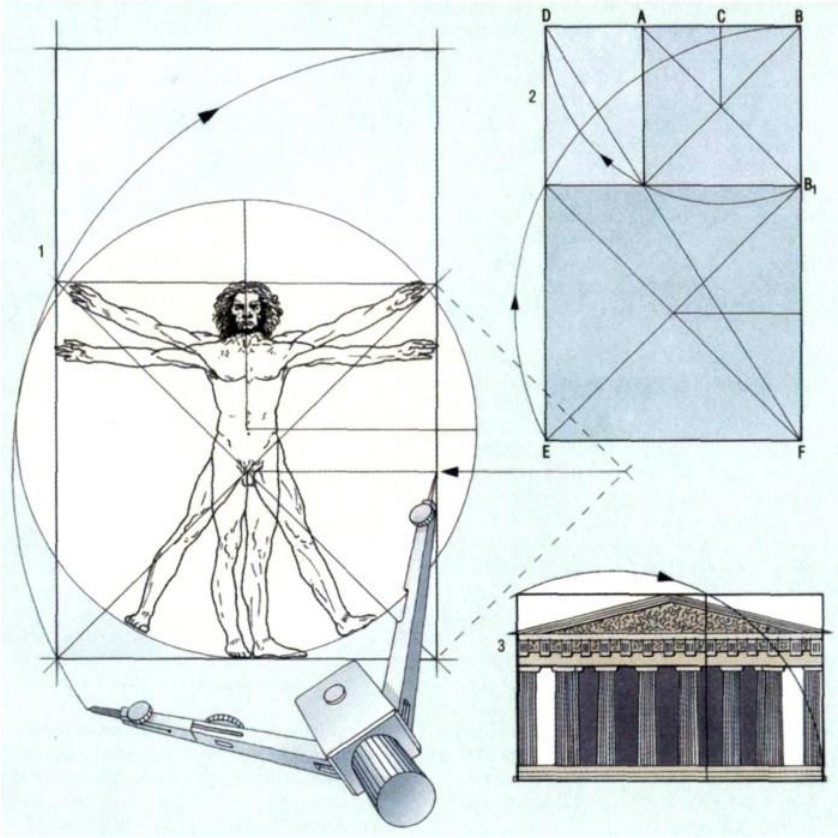

Рисунок 11

Ціле завжди складається з частин, а частини різної величини в свою чергу знаходяться в певному відношенні одна до одної й до цілого.

Принцип золотого перерізу – вищий прояв структурної й функціональної досконалості цілого та його частин в мистецтві, науці, техніці й природі.

У математиці пропорцією називають рівність двох відносин: $a:b=c:d$. Відрізок прямої AB можна розділити на дві частини наступними способами:

- ✓ на дві рівні частини $AB:AC=AB:BC$,
- ✓ на дві нерівні частини в будь-якому відношенні (такі частини пропорції не утворюють),

таким чином, коли $AB:AC=AC:BC$.

Останнє і є золотий розподіл або розподіл відрізка в крайньому й середньому відношенні.

Золотий переріз (золота пропорція, розподіл у крайньому й середньому відношенні, гармонічний розподіл) – це поділ відрізка *AC* на дві частини таким чином, що більша його частина *AB* відноситься до меншої *BC* як увесь відрізок *AC* відноситься до *AB* (тобто *AB:BC=AC:AB*).

Одним із найкрасивіших творів давньогрецької архітектури є Парфенон (V ст. до н.е.) (рис. 12). Парфенон має 8 колон вздовж коротких стін і 17 – вздовж довгих. Виступи зроблено цілком із квадратів пентілейського мармуру. Благородство матеріалу, з якого побудований храм, дозволило обмежити застосування звичайної в грецькій архітектурі розмальовки, вона лише підкреслює деталі й утворює кольоровий фон (синій і червоний) для скульптури.

Рисунок 12

Відношення висоти будівлі до її довжини дорівнює 0,618. Якщо зробити розподіл Парфенона за золотим перерізом, тоді отримаємо ті чи інші виступи фасаду.

Література [3, 4, 6, 12, 13].

Питання для самоперевірки

1 Яким чином пов'язані поняття красоти в архітектурі та дія математичних законів?

2 Що є математичним механізмом сприйняття людиною оточуючого світу?

3 Надайте характеристику основних геометричних форм в архітектурних стилях.

4 У чому полягає поняття симетрії?

5 Яку роль відіграє симетрія в архітектурі?

6 Що називають золотим перерізом? Наведіть приклади такого співвідношення в архітектурних спорудах.

Тема 3 Математика в сучасній архітектурі

Важко переоцінити роль математики в архітектурі сьогодення. Сучасний архітектор повинен бути знайомий із різними співвідношеннями ритмічних рядів, що дозволяють створити об'єкт, пам'ятаючи про те, що «архітектура – це застигла музика», найбільш гармонічним і виразним. Крім того, він повинен знати аналітичну геометрію і математичний аналіз, основи лінійної алгебри і володіти методами математичного моделювання та оптимізації.

Ще більш математизованою є професія містобудівника, що пов'язана, перш за все, з пошуком оптимальних планувальних рішень, найкращих варіантів розміщення об'єктів на заданій території, які забезпечують виконання основних функцій міста. Для цього функціональні основні зони міста повинні бути гармонічного пов'язані між собою. При вирішення подібних задач використовують не лише традиційні, але й найбільш сучасні розділи

математики, а саме: теорія ймовірностей, теорія графів, теорія багатовимірних матриць. Іноді для вирішення містобудівних задач доводиться розробляти спеціальні математичні методи.

Із метою вирішення проблеми отримання студентами міждисциплінарних знань (як однієї із ключових компетенцій спеціалістів) викладачами кафедри вищої математики ХНУБА продовжується розробка форм впровадження у освітній процес інтегративних технологій навчання шляхом встановлення міждисциплінарних зв’язків. Зокрема, для вирішення актуальної задачі підвищення якості математичної освіти здобувачів вищої освіти спеціальності 191 «Архітектура та містобудування» важливо й корисно продовжити роботу в напрямку координації зусиль фахівців-математиків, архітекторів і спеціалістів з комп'ютерних наук для побудови інтегративної моделі викладання дисципліни «Вища математика» для архітекторів. Поставлену задачу можна вирішити шляхом аналізу архітектурних ситуацій із використанням математичних методів, розробкою критеріїв оптимальності архітектурних композицій за певними параметрами.

Силами науково-педагогічного персоналу кафедри вищої математики продовжується робота в напряму підготовки і створення системи спецкурсів. Зокрема, така робота ведеться для викладання методів теорії графів, розділів геометрії (у тому числі некласичної), оптимізаційних методів. У рамках роботи СНТ знайдено форми інтеграції математичних, комп’ютерних та архітектурних знань під час розв’язання задач «Використання методів теорії графів в архітектурному проектуванні», «Моделювання фракталів з використанням програмних засобів», «Інструменти аналізу графів».

Основні результати в рамках науково-методичних досліджень доповідалися на Міжнародних, Всеукраїнських та Міжвузівських конференціях викладачами кафедри вищої математики.

Література [7-11].

Висновки

Підбиваючи підсумки проведеного аналізу взаємозв’язку між математикою та архітектурою, можна зробити наступні висновки.

1. Першим кроком до створення інтеграційної моделі підготовки бакалаврів із спеціальності 191 «Архітектура та містобудування» є узагальнення матеріалу по використанню математичних методів у архітектурному проєктуванні. На цьому етапі є важливою класифікація математичних методів, що існують сьогодні в архітектурному проєктуванні. Основними принципами формування такої класифікації є: відокремлення в групи математичні методи, що використовуються в архітектурному проєктуванні, формулювання проєктних завдань для містобудування та об’ємної архітектури.

2. Другим кроком є визначення можливого місця математичних методів у проєктуванні сьогодення й майбутнього. Сам е в цьому ховається відповідь на питання про універсальну формулу процесу проєктування. Але більш вірогідні розробки по впровадженню алгоритму розв’язання математичних задач у каркас проєктного методу. Дослідження, що проводяться на другому ріні, відносяться до області теорії й методології.

3. Третій рівень, на якому коректуються результати, представляє окремий інтерес. Він важливий для архітекторів-практиків. До нього відносяться системи пропорціювання, що дозволяють гармонізувати об’єкт алгоритмами, які максимізують результат, графами, використання яких дозволяє коригувати зв’язок всередині об’єкта. Дослідження третього рівня можна віднести як до області практики, так і до теорії.

Збільшення в архітектурі частки точних наук є показником того, що вона переходить до числа наук. І це є дуже важливим у зв’язку з тим, що окрім відповіді на питання: «Як це зробити?», тепер починається пошук відповіді на питання: «Чому так?»

Математика в такому контексті відіграє роль комутатор, що з'єднує архітектуру з безліччю дисциплін, здатних надати відповіді на такі питання.

Використовуючи термінологію архітектора, можна сказати, що математика – це уявна споруда, що в згорнутому, понятійному, символьному вигляді моделює навколишній світ та явища, які в ньому відбуваються. Фундамент цієї споруди утворюють невизначені поняття, а тектоніка визначається тими логічними зв'язками, що створюються цими поняттями, як постулати.

Остаточно можна зробити висновок про те, що архітектура й математика, будучи відповідними проявами людської культури, протягом багатьох століть активно впливали один на одного. Вони надавали один одному нові ідеї й стимули, спільно ставили та вирішувати завдання. Інакше кажучи, кожна з них є істотним і необхідним доповненням іншої.

Бібліографічний опис

1 Волошинов А.В. Математика и искусство. М.: Просвещение, 2000. 400 с.

2 Иконников А.В. Художественный язык архитектуры. М.: Искусство, 1985. 175с.

3 Шевелев И.Ш., Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое сечение: Три взгляда на природу гармонии. М.: Стройиздат, 1990. 343 с.

4 Захидов П.Ш. Основы канона гармонии в архитектуре. Ташкент: ФАН, 1982. 163 с.

5 Фейнберг Е.Л. Две культуры : Интуиция и логика в искусстве и науке. Фрязино : Век 2, 2004. 287 с.

6 Основы динамического формообразования в архитектуре: учебник для вузов/ Н.А. Сапрыкина. М.: «Архитектура - С», 2005. 312 с.

7 Щелкунова Л.І., Шульгіна С.С. Про підходи до вдосконалення змісту навчальної дисципліни «Вища математика» для студентів архітектурних спеціальностей /Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. Вип. IX. Кривий Ріг: Вид. відділ НМетАУ, 2011. С. 625.

8 Аршава Е.А., Щелкунова Л.И., Шульгина С.С., Скрипник М.А. Фракталы в математике, строительстве и архитектуре/ Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика, Т. 3, вып 8-3 (19-3). 2015. С. 194-197.

9 Щелкунова Л.И., Аршава Е.А., Шульгина С.С. Интегрированное обучение студентов-архитекторов на основе создания спецкурса «Фрактальная геометрия» / Современные проблемы естественных наук. Сборник тезисов докладов Международной конференциии «Тараповские чтения», 2016. С. 21-22.

10 Щелкунова Л.И. Дифференциальная геометрия и фрактальный анализ в архитектурном проектировании / Научно-исследовательские публикации, вып. 2(40), 2017. С. 63-68.

11 Щелкунова Л.И..Моделирование фракталов с использованием программных средств. – Всеукраїнська конференція «Проблеми викладання геометрії у закладах освіти: теорія, методика, практика». На честь 100 річчя з дня народження О.В. Погорєлова. Тези доповідей. 2019. С. 141-142.

12 Архитектурная бионика/ Ю.С.Лебедев, В.И.Рабинович, Е.Д.Положай и др.; под редакцией Ю. С. Лебедева. Москва: Стройиздат, 1990. 268 с.

13 Щелкунова Л.І. Вища математика для архитекторів: навчальний посібник з грифом Вченої Ради ХНУБА/Л.І. Щелкунова. Харків, ФОП Панов А.М., 2018. 150 с.

ЗМІСТ

Вступ ……... 3
Тема 1 Історичні витоки взаємозв'язку математики та архітектури 3
Тема 2 Класичні задачі математики в архітектурі ……..... 9
2.1 Красота – зовнішнє відображення математичних законів в архітектурі ……... 9
2.2 Геометричні форми в різних архітектурних стилях ……. 12
2.3 Симетрія як елемент архітектурної досконалості …… 17
2.4 Золотий переріз . ...……... 20
Тема 3 Математика в сучасній архітектурі ……... 23
Висновки ……. 25
Бібліографічний опис …… 27

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання самостійної роботи «Прикладні задачі математики в архітектурі» з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 191 «Архітектура та містобудування» першого (бакалаврського) рівня

Укладачі: АРШАВА Олена Олександрівна

ПИХТІН Сергій Анатолійович

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

За редакцією авторів

План 2021 р., поз. 143

Підп. до друку 03.11.20. Формат 60x84 1/16. Папір офсетний.

Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 1,5.

Тираж 50 прим. Зам. № 6351. Безкоштовно.

ХНУБА, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури