Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 151

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання завдань модуля

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Харків 2016

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 151

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання завдань модуля

ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики,
протокол № 7 від17.02.16

Харків 2016

Методичні вказівки до виконання завдань модуля «Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення» для студентів спеціальності 151 / Укладачі: М.І.Несвіт, Є.В. Поклонський – Харків: ХНУБА, 2016. – 51 с.

Рецензент А.П. Харченко

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Мета даного видання „Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення” – допомогти студентам краще оволодіти математичним апаратом, що застосовує теорію функцій комплексної змінної та операційне числення.

Основне завдання модуля „Теорія функцій комплексної змінної та операційне числення” – виробити у студентів уміння, навички дій з комплексними числами та функціями комплексної змінної, з’ясовувати аналітичність функцій та зображення областей на комплексній площині, розкладання функцій в ряд Лорана, знаходження ізольованих особливих точок, похідної та інтеграла від функції комплексної змінної, знаходження оригінала та зображення Лапласа, розв’язання задачі Коші операційним методом та застосовування їх в прикладних задачах фахових спеціальностей.

Важливим елементом засвоєння понять та методів теорії функцій комплексної змінної та операційного числення є самостійна робота студентів, що складається з виконання індивідуальних домашніх завдань.

Метою індивідуальних завдань є перевірка результативності самостійної роботи з даного модуля. Студент повинен самостійно розв’язати індивідуальні завдання свого варіанта, який відповідає номеру студента у списку навчальної групи.

Розв’язання завдань із поясненнями подати на аркушах формату А4 (або у шкільному зошиті), на обкладинці яких необхідно написати назву дисципліни та модуля; прізвище студента, його ім’я, ім’я по батькові; номер та назву спеціальності, курс, номер групи; номер варіанта. Кожне завдання необхідно позначати його номером, позначеним у завданні. Умову завдання треба повністю переписати.

Результативність самостійної роботи студентів забезпечується системою контролю, яка включає письмову контрольну роботу, захист індивідуального домашнього завдання .

1 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МОДУЛЯ

Тема 1 Функції комплексної змінної

Комплексні числа та дії з ними. Основні елементарні функції комплексної змінної. Лінії та області на комплексній площині. Границя та неперервність функції. Аналітичність функції та диференційованість. Умови Коші-Рімана. Інтегрування функції комплексної змінної. Формула Ньютона-Лейбниця. Інтегральна формула Коші. Інтеграл типа Коші. Ряд Лорана та область його збіжності. Способи розкладання функції в ряд Лорана. Ізольовані особливі точки аналітичної функції. Нулі функції. Лишки. Основна теорема про лишки.

Тема 2 Операційне числення

Перетворення Лапласа та його властивості. Оригінал та зображення найпростіших функцій. Зображення кусково-лінійної функції. Диференційованість оригінала та зображення. Інтегрування оригінала та зображення. Згортка функцій та її властивості. Множення зображень. Теорема Бореля. Інтеграл Дюамеля. Розв’язання диференціальних рівнянь операційним методом. Обернене перетворення Лапласа. Решітчасті функції. D та Z-перетворення.

Контрольні заходи модуля

1 Письмова контрольна робота.
2 Захист індивідуального домашнього завдання.
3 Модульна контрольна робота.

2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ З ТЕМИ «ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Варіант 1

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{1}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2 + (1+2i)x + 6 - 8i = 0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$z + \bar{z} + 2 = 0, \qquad 1 \le |z - i + 2| < 3.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0

$$u(x,y) = x^2 - y^2 - 4x + 5y + 3, \qquad z_0 = 1 + 2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0 = -1$ функції

$$f(z) = (z+1)e^{\frac{1}{z+1}}.$$

6 Обчислити інтеграли :

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z + 1)dz, \qquad \int_{|z-i|=1} \frac{\sin z}{z-i} dz.$$

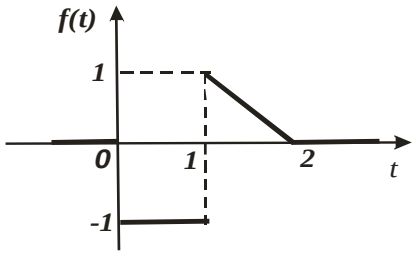
7 Знайти лишки функції

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+3)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t) = \cos 2t + 2e^{4t} + 1, \qquad F(p) = \frac{p+3}{p^2 + 6p + 34}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x'' + x' + x = \cos t; \qquad x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

Варіант 2

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{8}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-3-2i)x-1+3i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} 2z=5,\quad |z-2i+5|>4.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0

$$v(x,y)=y^2-x^2-4x-3y+2x-1,\qquad z_0=-1+3i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2$ функції

$$f(z)=(z-2)^2\sin\frac{1}{z-2}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2-z+2)dz,\qquad \int_{|z|=3}\frac{z^2}{z-2i}dz.$$

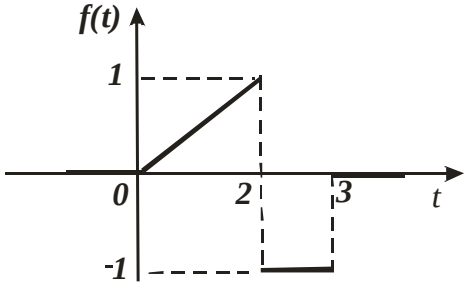
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1}{z^2+4}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 3t+6t\cdot e^{-5t}+2t,\qquad F(p)=\frac{6}{p^2-10p+61}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''+x'-x=e^t;\qquad x(0)=1,x'(0)=1.$$

Варіант 3

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{27}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-2-4i)x-3+2i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$3+i(\bar{z}-z)=0, \qquad \operatorname{Im} 2z>1.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0

$$u(x,y)=x^2-y^2-2x+4y-1, \qquad z_0=-2+3i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2$ функції

$$f(z)=\frac{1}{2-z}\cos\frac{1}{z-2}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1+i}^{1-3i}(z^3-z+1)dz, \qquad \int_{|z-\pi|=1}\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz.$$

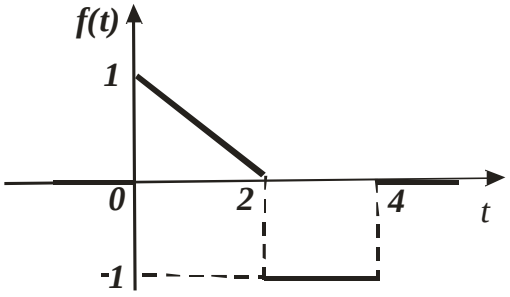
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-1)^2}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 7t+4e^{5t}+3, \qquad F(p)=\frac{p+7}{p^2+14p+53}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''+x'+2x=1+2t; \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

Варіант 4

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{64}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(2-i)x+2-4i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Re}(z^2)-4=0,\quad 1<|z-3i-2|\le 2.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$v(x,y)=x^2-y^2-5x+y+2,\qquad z_0=1+4i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=3$ функції

$$f(z)=(z-3)^2e^{\frac{1}{3-z}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+3z+1)dz,\qquad \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z(z-2)}dz.$$

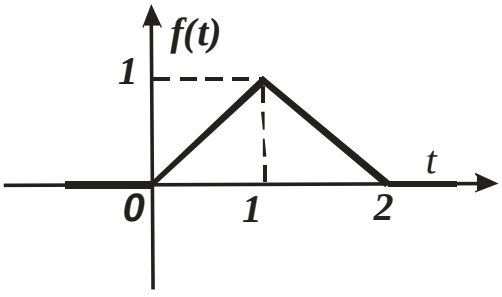
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1-\cos 2z}{3z^2}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 6t+e^{-6t}+4t,\quad F(p)=\frac{7}{p^2-6p+58}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''+x'+2x=8e^{2t};\qquad x(0)=1,\ x'(0)=2.$$

Варіант 5

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{125}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(4-i)x+3-i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$z\cdot\bar{z}-4=0\,,\qquad \operatorname{Re}4\bar{z}<1.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=y^3-3yx^2-4x+1,\qquad z_0=-1-2i\,.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=1$ функції

$$f(z)=(z-1)\cos\frac{4}{z-1}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-i}^{2+i}(z^2+2-1)dz\,,\qquad \int_{|z|=1}\frac{\ln(e+z)}{z(z+\pi)}dz\,.$$

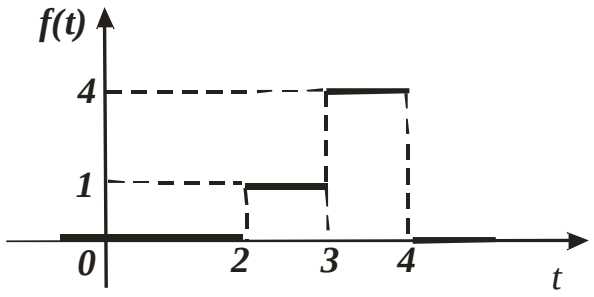
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z+1}{z(z+2)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p:)$

$$f(t)=\cos 5t+2e^{7t}+5,\quad F(p)=\frac{p+4}{p^2+8p+97}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-2x'+x=9e^{-2t};\qquad x(0)=1,x'(0)=-2\,.$$

Варіант 6

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-1}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2 + (1+2i)x - 3 + i = 0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\operatorname{Im} 3z + \operatorname{Re} z = 1, \qquad |z - 4i + 1| > 2.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 4x + 2y + 1, \qquad z_0 = 2 + 3i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0 = -2$ функції

$$f(z) = (z+2)e^{\frac{1}{z+2}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1+i}^{1+2i} (z^2 + 2z + 5)dz, \qquad \int_{|z+1|=2} \frac{\sin^2 z - 3}{z^2 + 2\pi z} dz.$$

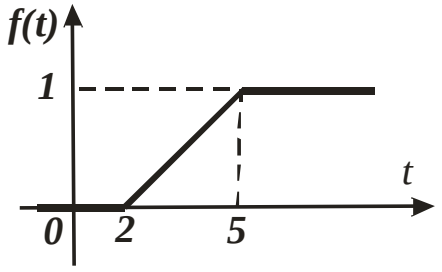
7 Знайти лишки функції

$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)^3}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t) = \sin 4t + 3e^{-8t} + 6t, \qquad F(p) = \frac{5}{p^2 - 4p + 29}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x'' - 3x' + 2x = 2e^{3t}; \qquad x(0) = 1, x'(0) = 3.$$

Варіант 7

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-8}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(3-5i)x-4-3i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$z\cdot\bar{z}+i(z-\bar{z})=8, \qquad 1<\operatorname{Im}2z\le 3.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$v(x,y)=3x-5y-2xy+1, \qquad z_0=-1+4i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=1$ функції

$$f(z)=(z-1)^2\sin\frac{1}{z-1}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-i}^{3+i}(z^2-z-1)dz\,, \qquad \int_{|z+\pi|=1}\frac{\cos z}{z^2-\pi^2}dz\,.$$

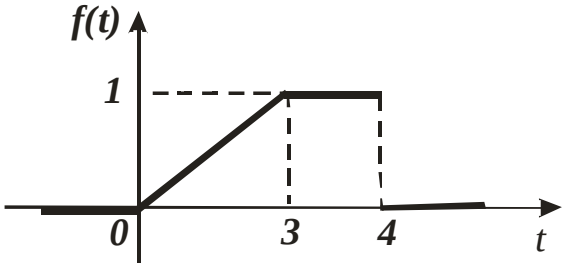
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z}{(z-2)(z+1)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 3t+6e^{9t}+7, \qquad F(p)=\frac{p+5}{p^2+10p+74}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''+x'-2x=-2e^{-t}; \qquad x(0)=1, x'(0)=-1.$$

Варіант 8

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-27}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(4+2i)x+2+4i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$|z-2i-3|=1, \qquad \operatorname{Re} 3z>5.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$u(x,y)=x^2-y^2-2x+4y+3, \qquad z_0=-2+5i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=3$ функції

$$f(z)=\frac{1}{3-z}\cos\frac{1}{z-3}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1+3i}^{1+i}(z^2+5z+2)dz, \qquad \int_{|z+3|=1}\frac{1}{z^2+3z}dz.$$

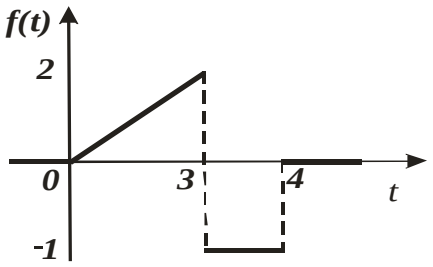
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1}{z^2+9}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 2t+5e^{-2t}+8t, \qquad F(p)=\frac{8}{p^2-12p+100}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''+5x'-2x=15-6t; \qquad x(0)=0, x'(0)=3.$$

Варіант 9

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-64}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(3+2i)x+2+4i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{z}\right)=\tfrac{1}{6}\ , \qquad |z-3+i|>1.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$v(x,y)=2x-3y-4xy+5, \qquad z_0=-1+4i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2$ функції

$$f(z)=(z-2)^2 e^{\frac{1}{2-z}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(3z^2+2z+1)dz, \qquad \int_{|z+i|=1}\frac{\sin z}{z+i}dz.$$

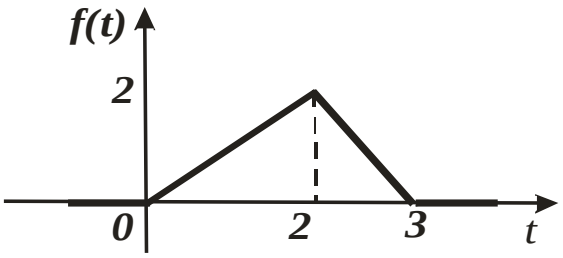
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-2)^2}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 3t+3\sin 2t+4e^{5t}, \qquad F(p)=\frac{p+7}{p^2+14p+74}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-2x'+x=4\sin t; \qquad x(0)=2, x'(0)=0.$$

Варіант 10

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-125}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(1+2i)x+3-i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Im}(\overline{z^2})=9, \qquad 2\le|z-2i+1|<4.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$u(x,y)=x^2-y^2-7x+4y+1, \qquad z_0=-1-5i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2$ функції

$$f(z)=(z-2)\cos\frac{4}{z-2}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-i}^{2+i}(2z^2-z+1)dz, \qquad \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz.$$

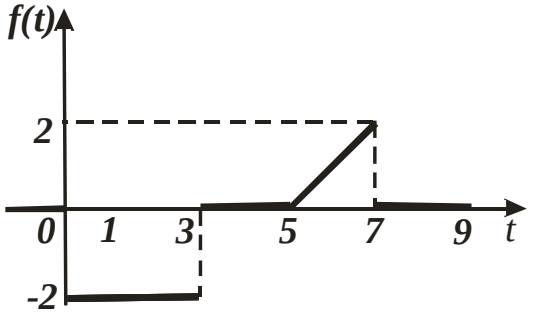
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1-e^{-2z}}{z}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 4t+3e^{-4t}+t, \quad F(p)=\frac{3}{p^2-10p+34}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-4x'+3x=6t-8; \qquad x(0)=0, x'(0)=2.$$

Варіант 11

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-2+3i)x+4+2i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\operatorname{Im}4z+\operatorname{Re}2z=3,\qquad |z+3i-5|>2.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$u(x,y)=x^2-y^2-3x+6y+1,\qquad z_0=-2+3i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=1$ функції

$$f(z)=(z-1)e^{\frac{1}{z-1}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{2-2i}^{1+3i}(z^2+2z-3)dz\,,\qquad \int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{\ln(e+2z)}{z(z-1)}dz.$$

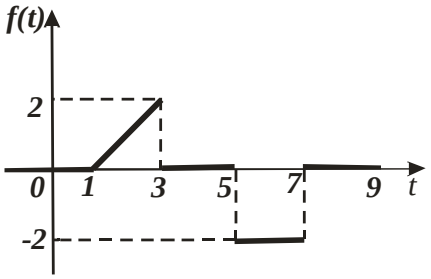
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z+2}{z(z-3)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 5t+2e^{6t}+3t,\quad F(p)=\frac{4}{p^2-6p+25}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-2x'+x=16e^{-3t};\qquad x(0)=1,\,x'(0)=-3.$$

Варіант 12

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{8i}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-3-6i)x-7+9i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$z+\bar{z}+5=0, \qquad 1<\operatorname{Im}5z\le 2.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0

$$v(x,y)=4xy-3y-5x+1, \qquad z_0=-1+2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=-2$ функції

$$f(z)=(z+2)^2\sin\frac{1}{z+2}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{3-2i}^{1-i}(z^2-z+2)dz, \qquad \int_{|z|=1}\frac{e^z\cos z}{z(z+2i)}dz.$$

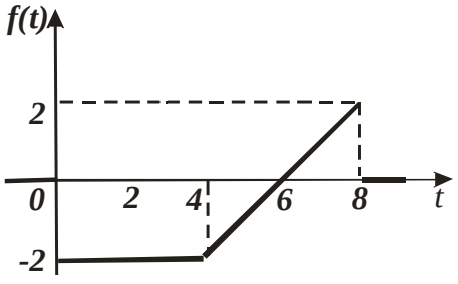
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^3}{(z-2)^3}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=e^{5t}+\sin 2t+4t, \qquad F(p)=\frac{p+2}{p^2+4p+13}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-2x'+3x=15t-10; \qquad x(0)=0, x'(0)=5.$$

Варіант 13

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{27i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(2-2i)x-5-14i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} 2\bar{z}=1, \qquad 1<\left|z-5i+3\right|\le 2.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0

$$u(x,y)=2x-3y-6xy+1, \qquad z_0=-2+3i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=1$ функції

$$f(z)=\frac{1}{1-z}\cos\frac{1}{z-1}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+2z-4)dz, \qquad \int_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{z\pi}{2}}{(z-1)z}dz.$$

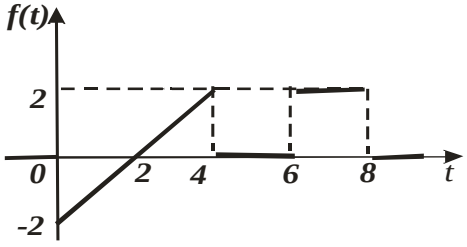
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z}{(z-2)(z+3)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 7t+3\sin 8t+2e^{9t}, \quad F(p)=\frac{2}{p^2-18p+85}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-2x'+5x=5e^{2t}; \qquad x(0)=1, x'(0)=2.$$

Варіант 14

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{64i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-1+4i)x-5+i=0\,.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$i(\bar{z}-z)+4=0, \qquad \operatorname{Re} 2z>4.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0

$$v(x,y)=4x-3y-2xy+7, \qquad z_0=-2+4i\,.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=1$ функції

$$f(z)=(z-1)^2 e^{\frac{1}{1-z}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1+3i}^{1+i}(z^2+2z+2)dz\,, \qquad \int_{|z+i|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z^2+4}dz\,.$$

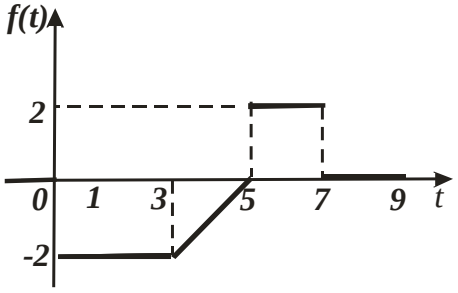
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1}{z^2+16}\,.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=e^{-5t}+3\sin 3t+2, \quad F(p)=\frac{p+4}{p^2+8p+65}\,.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-x'+x=-\cos t; \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

Варіант 15

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{125i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-1+7i)x-12+i=0\,.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{z}\right)=\tfrac{1}{8}, \qquad 1\le\left|z-4i+5\right|<3\,.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$u(x,y)=x^3-3xy^2+5x-2y, \qquad z_0=-1-3i\,.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=-i$ функції

$$f(z)=(z+i)\sin\frac{2}{(z+i)^2}\,.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{2-i}(z^2-2z+1)dz\,, \qquad \int_{|z+i|=\frac{1}{2}}\frac{\sin z}{z(z+i)}dz\,.$$

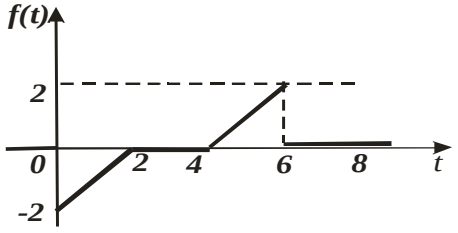
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-3)^2}\,.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=e^{2t}+4\cos 6t+6t\,, \qquad F(p)=\frac{p+2}{p^2+4p+85}\,.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-2x'+x=2\sin t; \qquad x(0)=1, x'(0)=0\,.$$

Варіант 16

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(2+6i)x-11+10i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Im}(3z+2\bar{z})=6, \qquad |z-3i|\le 4.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=x^2-y^2-7x+5y-3, \qquad z_0=-3+2i\,.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2$ функції

$$f(z)=(z-2)e^{\frac{1}{z-2}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{3-2i}^{1+2i}(z^2-3z+1)dz\,, \qquad \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z(z+2)}dz\,.$$

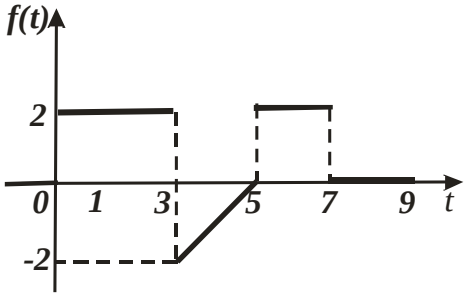
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1-\cos 3z}{2z^2}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 6t+2t+4e^{3t}, \qquad F(p)=\frac{p+4}{p^2+8p+97}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-x'+2x=8e^{-2t}; \qquad x(0)=1, x'(0)=-2\,.$$

Варіант 17

1. Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-8i}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-2+3i)x+11-3i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$z\cdot\bar{z}-9=0, \qquad 1\le \operatorname{Re} 3\bar{z}<4.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$v(x,y)=4xy-3y-2x+7, \qquad z_0=-3+2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=-1$ функції

$$f(z)=(z+1)^2\sin\frac{1}{z+1}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+2z+3)dz, \qquad \int_{|z-1|=1}\frac{\cos z}{z-1}dz.$$

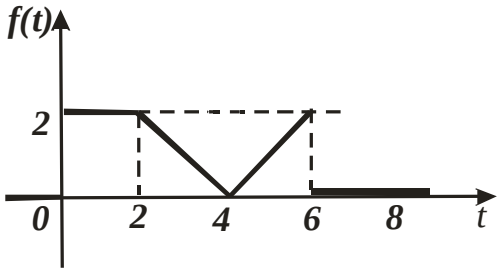
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z+3}{z(z+4)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 3t+3\cos 2t+5e^{-9t}, \quad F(p)=\frac{3}{p^2-16p+73}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-4x'+5x=5t-4; \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

Варіант 18

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-27i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-3+2i)x+5-5i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Re}(2z+\bar{z})=2, \qquad 2\le|z-2i-1|<5.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=x^2-y^2-5y+3x+1, \qquad z_0=-2+3i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=4$ функції

$$f(z)=\frac{1}{4-z}\cos\frac{1}{z-4}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-i}^{2-i}(z^2+3z-1)dz\,, \qquad \int_{|z|=2}\frac{e^z}{z(z-4i)}dz\,.$$

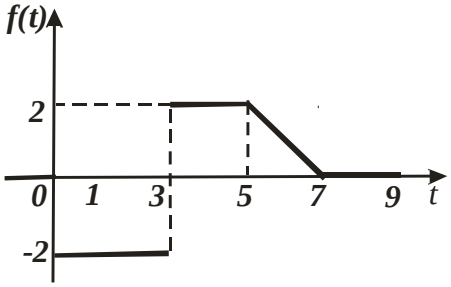
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^3}{(z+3)^3}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 8t+3\sin 7t+3e^{4t}, \qquad F(p)=\frac{2p+10}{p^2+10p+89}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-3x'+x=2; \qquad x(0)=2,\,x'(0)=0.$$

Варіант 19

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-64i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(5-6i)x+11-3i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$|z+2i-4|=5, \qquad -1<\operatorname{Im}4z\le 1.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина , та знайти її похідну в точці z_0 :

$$v(x,y)=3x-6y+2xy+1, \qquad z_0=-1+2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=i$ функції

$$f(z)=(z-i)^2 e^{\frac{1}{i-z}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{2-i}^{1+2i}(z^2+2z+3)dz\,, \qquad \int_{|z-i|=1}\frac{\sin\frac{i\cdot z\pi}{2}}{z^2+1}dz.$$

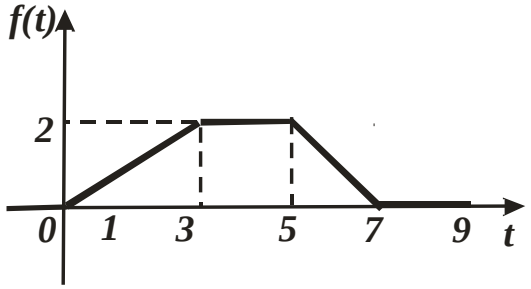
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-4)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 3t+t+6e^{-5t}, \quad F(p)=\frac{3}{p^2-16p+73}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-2x'+x=3t-6; \qquad x(0)=0,\ x'(0)=3.$$

Варіант 20

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-125i}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(6-4i)x+5-10i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Re}(z+3\overline{z})=4, \qquad |z+5i-2|>3.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=y^2-x^2-10x+3y+4, \qquad z_0=1-3i$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=-2$ функції

$$f(z)=(z+2)\sin\frac{3}{(z+2)^2},$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+4z+1)dz\ , \qquad \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z(z-2i)}dz.$$

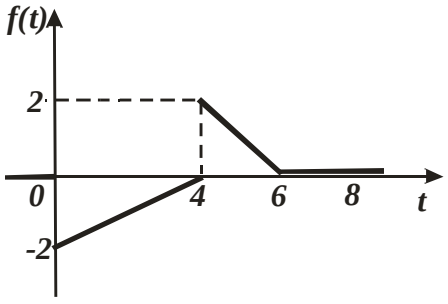
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1}{z^2+25}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 9t+3\sin 7t+8e^{6t}, \quad F(p)=\frac{p+9}{p^2+18p+117}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



.

10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-5x'+x=t-5 \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

Варіант 21

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{216}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-5-4i)x+3+11i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\operatorname{Re}2\overline{(z)}+\operatorname{Im}\overline{z}=3\,, \qquad |z-5-i|\le 4.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=y^2-x^2+5x+y-2, \qquad z_0=-1+2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=i$ функції

$$f(z)=(z-i)e^{\frac{1}{z-i}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1+i}^{2+i}(z^2+2z+4)dz\,, \qquad \int_{|z|=4}\frac{z^2}{z+2i}dz.$$

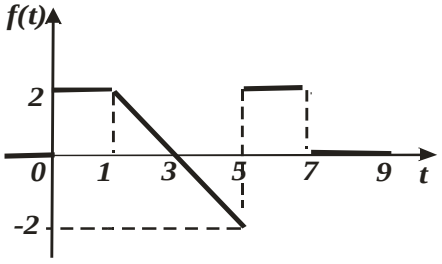
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-4)^2}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 3t+3t+5e^{-9t}, \quad F(p)=\frac{5}{p^2-4p+29}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-4x'+x=-6e^t; \qquad x(0)=3, x'(0)=3.$$

Варіант 22

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{343}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-2-5i)x-9+3i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Im}(\bar{z}+4z)=2\,, \qquad 2\le|z+6i+1|<3.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$v(x,y)=2xy-4y-3x+2, \qquad z_0=-3+2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=i$ функції

$$f(z)=(z-i)^2\sin\frac{1}{z-i}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-i}^{2-i}(z^2+4z+1)dz\,, \qquad \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz\,.$$

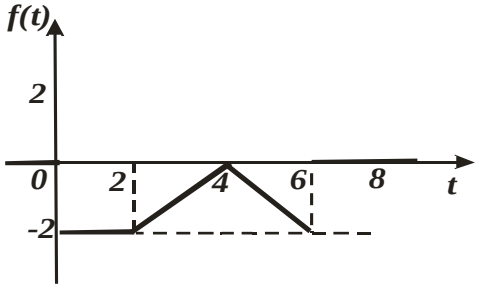
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1-e^{-3z}}{2z}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 5t+3\sin 8t+9e^{2t}, \qquad F(p)=\frac{p+5}{p^2+10p+41}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''+2x'+x=6\cos t; \qquad x(0)=0, x'(0)=3.$$

Варіант 23

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{512}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-2-4i)x+2-8i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Im}\left(z^2\right)=9, \qquad -1\le \mathrm{Re}\,5\bar{z}<2.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0

$$u(x,y)=x^2-y^2-x+3y-5, \qquad z_0=-2+5i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=i$ функції

$$f(z)=\frac{1}{i-z}\cos\frac{1}{z-i}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{3+i}^{1+i}(z^2+3z-1)dz, \qquad \int_{|z+i|=1}\frac{\sin\frac{i\cdot z\pi}{2}}{z^2+1}dz.$$

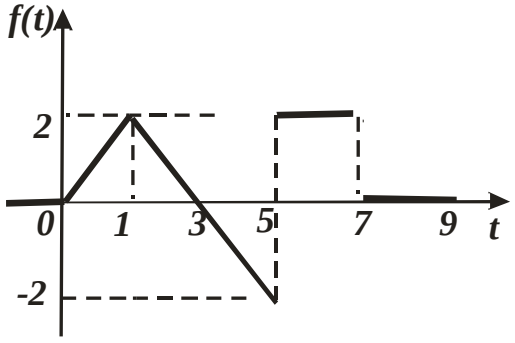
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z+4}{z(z-5)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 8t+t+3e^{-7t}, \qquad F(p)=\frac{p+6}{p^2+12p+85}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-3x'+2x=2t-3; \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

Варіант 24

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{216i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-3-4i)x-7+11i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Re}\left(\tfrac{1}{z}\right)=0{,}1\,, \qquad |z+3i-1|>2\,.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$v(x,y)=4x-3y+x^2-y^2+2, \qquad z_0=-1+3i\,.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2i$ функції

$$f(z)=(z-2i)^2 e^{\frac{1}{2i-z}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-i}^{1+2i}(z^2+2z-1)dz\,, \qquad \int_{|z-1|=1}\frac{e^z}{z^2-1}dz\,.$$

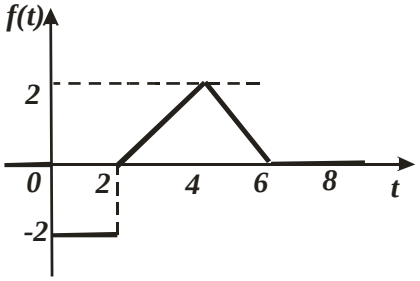
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^3}{(z+4)^3}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 7t+3\sin 8t+2e^{9t}, \quad F(p)=\frac{6}{p^2-10p+61}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-4x'+x=6e^{-t}; \qquad x(0)=1, x'(0)=-1.$$

Варіант 25

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{343i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(1+3i)x-4+3i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$i(\bar{z}-z)+5=0, \qquad 2<\operatorname{Im}4\bar{z}\le 3.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=2x^2-2y^2-7x+5y+1, \qquad z_0=1-2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=1$ функції

$$f(z)=(1-z)\cos\frac{1}{z-1}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+5z+1)dz\,, \qquad \int_{|z-\pi|=1}\frac{z^2\cos z}{z-\pi}dz\,.$$

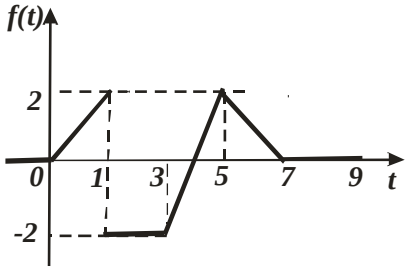
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z}{(z-5)(z+2)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 5t+t+3e^{-8t}, \qquad F(p)=\frac{p+4}{p^2+8p+41}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-3x'+x=3t-9 \qquad x(0)=0,\,x'(0)=3.$$

Варіант 26

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-216i}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-1+4i)x-6-2i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$z\cdot\bar{z}+i(z-\bar{z})=15, \qquad 3\le \operatorname{Re} 2\bar{z}<6.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0

$$u(x,y)=x-6xy+5y+4, \qquad z_0=-1-i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2i$ функції

$$f(z)=(z-2i)e^{\frac{1}{z-2i}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{2-i}^{1+2i}(z^2+3z-1)dz, \qquad \int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{1}{z(z^2+1)}dz.$$

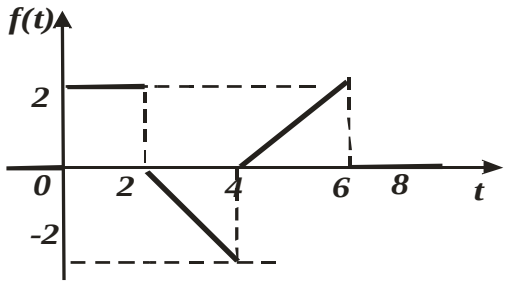
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1}{z^2+36}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 9t+7\sin 3t+2e^{5t}, \qquad F(p)=\frac{p+8}{p^2+16p+73}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-2x'+x=t-2 \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

Варіант 27

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-343i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(1+3i)x-2+6i=0\,.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$|z+3i+7|=2, \qquad \operatorname{Re} 4z\ge 1.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$v(x,y)=2xy-8y-3x+1, \qquad z_0=-3+2i\,.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2i$ функції

$$f(z)=(z-2i)^2\sin\frac{1}{z-2i}\,.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+6z+1)dz\,, \qquad \int_{|z|=\frac{1}{2}}\frac{e^z+1}{z(z-1)}dz\,.$$

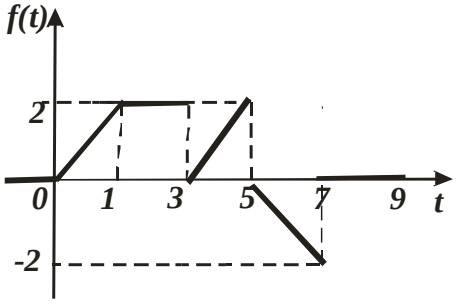
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^2}{(z-5)^2}\,.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 7t+t+3e^{-2t}, \quad F(p)=\frac{4}{p^2-14p+65}\,.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-x'+2x=4e^{2t} \qquad x(0)=1, x'(0)=2\,.$$

Варіант 28

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-512}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(1-4i)x-5-5i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\operatorname{Im} 5\bar{z}+\operatorname{Re} 2\bar{z}=1, \qquad 1<|z+i-5|<3.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$u(x,y)=x^2-y^2+2x-5y+1, \qquad z_0=-1+2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2i$ функції

$$f(z)=\frac{1}{2i-z}\cos\frac{1}{z-2i}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+2z+5)dz \quad , \qquad \int_{|z-2|=3}\frac{\cos^2 z}{z^2-\pi^2}dz.$$

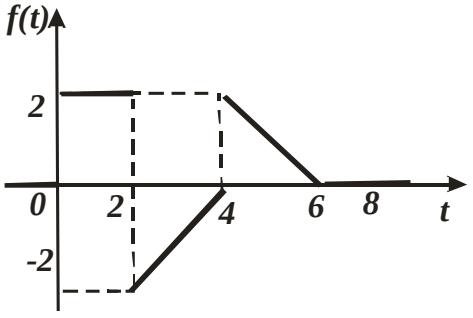
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{1-\cos 4z}{3z^2}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 2t+t+2e^{4t}, \qquad F(p)=\frac{2p+12}{p^2+12p+61}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''+3x'+x=3\cos t \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

Варіант 29

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-216}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-4-6i)x-5+10i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\mathrm{Re}(\bar{z})^2-8=0, \qquad |z+2i-5|\le 2.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$v(x,y)=3y+2x-6xy+1, \qquad z_0=-1+3i$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=3i$ функції

$$f(z)=(z-3i)^2 e^{\frac{1}{3i-z}}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{2-2i}^{1+i}(z^2+3z+1)dz, \qquad \int_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{1}{z^2+4}dz.$$

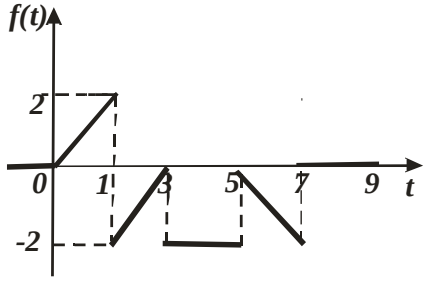
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z+5}{z(z+6)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\sin 6t+t+3e^{-4t}, \quad F(p)=\frac{6}{p^2-10p+61}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-x'+3x=9e^{-2t} \qquad x(0)=1, x'(0)=-2.$$

Варіант 30

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{512i}\,.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2+(-2-i)x-1+7i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\operatorname{Im} z+\operatorname{Re} 2\bar{z}=3\ , \qquad |z-3i-2|>4.$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її уявна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=x^2-y^2-9x+4y-1, \qquad z_0=1-2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2$ функції

$$f(z)=(2-z)\cos\frac{1}{z-2}.$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int_{1-2i}^{2+i}(z^2-2z+1)dz\ , \qquad \int_{|z+\pi|=1}\frac{\sin z+2}{z^2+\pi z}dz.$$

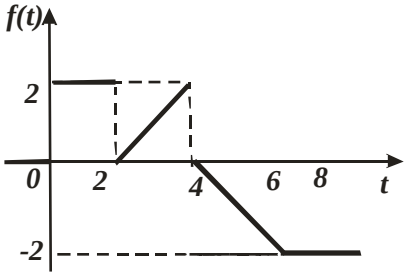
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^3}{(z-5)^3}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 5t+4t+9e^{2t}, \quad F(p)=\frac{8}{p^2-6p+73}.$$

9 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа.



10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-4x'+x=t-4; \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

Варіант 31

1 Знайти всі значення кореня

$$\sqrt[3]{-512i}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння

$$x^2-(2+i)x-1+7i=0.$$

3 Зобразити на комплексній площині лінію та область:

$$\operatorname{Im} 2z+\operatorname{Re} 3\bar{z}=6, \qquad 1<\left|z+3-2i\right|\le 2$$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0:

$$u(x,y)=x^2-y^2-9x+4y-1, \qquad z_0=1-2i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=i$ функції

$$f(z)=(z-i)\cos\frac{2}{z-i}.$$

6 Обчислити інтеграли :

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+2z+5)dz, \qquad \oint_{|z+2|=3}\frac{\cos^2 z}{z^2-\pi^2}dz \ .$$

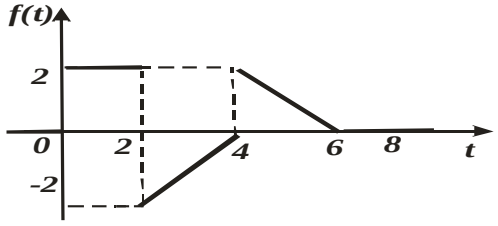
7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-6)}.$$

8 Знайти зображення для функції $f(t)$ та оригінал для функції $F(p)$:

$$f(t)=\cos 5t+9e^{2t}+4t \ , \qquad F(p)=\frac{p+6}{p^2+12p+61} \ .$$

9 За заданим графіком (мал.1) оригіналу знайти зображення Лапласа.



Малюнок 1

10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x''-4x'+x=t-4; \qquad x(0)=0, x'(0)=1.$$

3 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІДЗ «ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ»

Варіант 31

1 Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{-512i}$.

Подамо підкореневий вираз у тригонометричній формі і знайдемо всі значення кореня за формулою

$$Z_K = \sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$

де k=0,1,2,3,…,n-1;

де корінь ліворуч розуміють в алгебраїчному сенсі, а праворуч, тобто $\sqrt[n]{|z|}$, - в арифметичному :

$$Z_K = \sqrt[3]{-512i} = \sqrt[3]{512\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)} =$$

$$= 8\left(\cos\frac{3\pi/2+2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/2+2\pi k}{3}\right) \qquad k=0,1,2.$$

$k = 0$

$$Z_0 = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i;$$

$k = 1$

$$Z_1 = 8\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 8\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) =$$

$$= 8\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} - 4i;$$

$k = 2$

$$Z_2 = 8\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)\right] = 8\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right) =$$

$$8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 4\sqrt{3} - 4i\ .$$

Відповідь: $\sqrt[3]{-512i} = \begin{bmatrix} 8i; \\ -4\sqrt{3} - 4i; \\ 4\sqrt{3} - 4i; \end{bmatrix}$

2 Розв’язати квадратне рівняння

$$x^2-(2+i)x-1+7i=0.$$

Знаходимо два кореня за відомою формулою

$$x_{1,2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{(2+i)^2-4(-1+7i)}}{2}=$$

$$=\frac{(2+i)\pm\sqrt{4+4i-1+4-28i}}{2}=\frac{(2+i)\pm\sqrt{7-24i}}{2}.$$

Обчислимо окремо $\sqrt{7-24i}$:

$$\sqrt{7-24i}=s+ti,\qquad s,t\in R.$$

$$7-24i=(s+ti)^2=s^2+2sti-t^2,$$

$$\begin{cases}7=s^2-t^2\\-24=2st\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7=s^2-t^2\\s=-\dfrac{12}{t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}7=\dfrac{144}{t^2}-t^2\\s=-\dfrac{12}{t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t^4+7t^2-144=0\\s=-\dfrac{12}{t}\end{cases},(t\neq 0),$$

$$\begin{cases}t^2=-16\\t^2=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t^2>0\\t=\pm 3\end{cases},\qquad\begin{cases}t=3\\s=-4,\end{cases}\qquad\begin{cases}t=-3\\s=4\end{cases},$$

Тому маємо

$$\sqrt{7-24i}=\begin{cases}-4+3i\\4-3i\end{cases}=\pm(4-3i)$$

Звідси, отримаємо

$$x_{1,2}=\frac{(2+i)\pm(4-3i)}{2}.$$

$$x_1=\frac{2+i+4-3i}{2}=\frac{6-2i}{2}=3-i.$$

$$x_2=\frac{2+i-4+3i}{2}=\frac{-2+4i}{2}=-1+2i.$$

Відповідь: $\begin{cases}x_1=3-i\\x_2=-1+2i\end{cases}.$

3 Зобразити на комплексній площині лінію $\operatorname{Im} 2z + \operatorname{Re} 3\bar{z} = 6$.

Враховуючи, що $z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$ виконаємо перетворення:

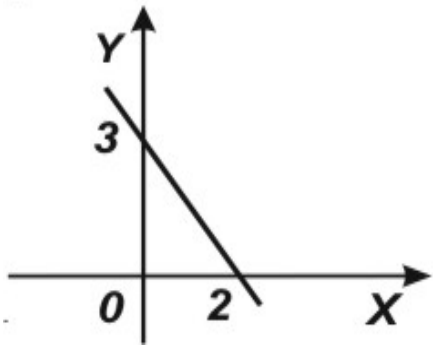
$2z = 2x + 2iy, \quad 3\bar{z} = 3x - 3iy$

$\operatorname{Im} 2z = 2y, \quad \operatorname{Re} 3\bar{z} = 3x$

$\operatorname{Im} 2z + \operatorname{Re} 3\bar{z} = 2y + 3x$

$3x + 2y = 6,$

, $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ - це пряма лінія (мал.2).



Малюнок 2

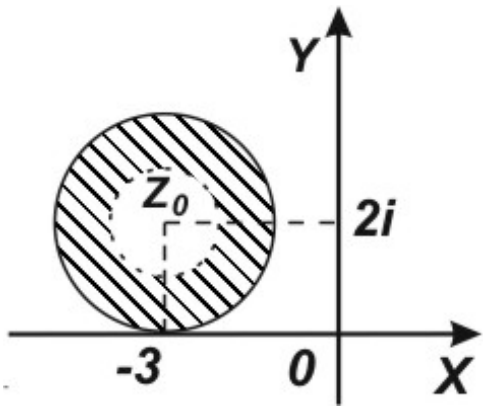
Зобразити на комплексній площині область: $1 < |z + 3 - 2i| \le 2$

Враховуючи, що $1 < |z - z_0| \le 2$ - це кільце радіусів 1 та 2 з центром в точці z_0, знайдемо точку z_0:

$$1 < |z - (-3 + 2i)| \le 2,$$

$$z_0 = -3 + 2i.$$

Причому межа з радіусом 2 належить області, а межа радіуса 1 не належить області.



Малюнок 3

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна частина, та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=x^2-y^2-9x+4y-1, \qquad z_0=1-2i$$

Для відновлення аналітичної функції будемо застосовувати умови Коші-Рімана:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, & \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

Знайдемо похідні:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-9=\frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y+4=-\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \text{або} \quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y-4.$$

З інтегруємо похідну $\dfrac{\partial v}{\partial y}$:

$$v(x,y)=\int(2x-9)dy+f(x)=2xy-9y+f(x),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2y+f'(x)=2y-4,$$

$$f'(x)=-4$$

$$f(x)=-4x+C.$$

Тому уявна частина аналітичної функції має вигляд:

$$v(x,y)=2xy-9y-4x+C,$$

а вся аналітична функція

$$f(z)=x^2-y^2-9x+4y-1+i(2xy-9y-4x+C).$$

Перейдемо до змінної z:

$$f(z)=(x^2+2xyi-y^2)-9(x+iy)+4(y-ix)-1+iC$$

$$f(z)=(x+iy)^2-9(x+iy)-4i(x+iy)-1+iC \qquad ,$$

$$f(z)=z^2-9z-4iz-1+iC.$$

Знаходимо похідну та її значення в точці $z_0=1-2i$:

$$f'(z)=2z-9-4i$$

$$f'(z_0)=2(1-2i)-9-4i=2-4i-9-4i=-7-8i.$$

Похідну також можна знайти диференціюванням дійсної та уявної частини:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x-9+i(2y-4),$$

$$f'(z_0)=f'(1;-2)=2-9+i(-4-4)=-7-8i.$$

Відповідь: $f(z)=x^2-y^2-9x+4y-1+i(2xy-9y-4x+C)$

$$f'(z_0)=-7-8i.$$

5 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0 = i$ функції

$$f(z) = (z-i)\cos\frac{2}{z-i}.$$

Розвинення функції у ряд Лорана в околі т. $z_0 = i$ має вигляд

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n (z-i)^n, \qquad \text{де} \quad C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - i)^{n+1}},$$

де γ - замкнутий контур, який проходять у додатному напрямку (проти годинникової стрілки) у відповідному кільці аналітичності функції *f(z)* з центром у точці $z_0 = i$.

За теоремою єдиності розкладання функції *f(z)* у ряд Лорана у відповідному кільці аналітичності випливає, що будь-яке розкладання *f(z)* у цьому кільці за степенями $(z-i)$ є лоранівським.

У функції

$$f(z) = (z-i)\cos\frac{2}{z-i}$$

дві особливі точки $z_0 = i$ та $z = \infty$, тобто єдине кільце аналітичності

$$0 < |z-i| < \infty.$$

Працюючи в цьому кільці і використовуючи розкладання функції cos ζ

$$\cos\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + \frac{\zeta^4}{4!} - \frac{\zeta^6}{6!} + \ldots$$

у ряд Тейлора за степенями ζ, де роль ζ відіграє $\frac{2}{z-i}$, одержуємо

$$f(z) = (z-i)\left[1 - \frac{1}{2!}\frac{4}{(z-i)^2} + \frac{1}{4!}\frac{2^4}{(z-i)^4} - \frac{1}{6!}\frac{2^6}{(z-i)^6} + \ldots\right] =$$

$$= (z-i) - \frac{2}{(z-i)} + \frac{2}{3(z-i)^3} - \frac{4}{45(z-i)^5} + \ldots$$

$$C_{-1} = -2.$$

Відповідь: $C_{-1} = -2.$

6.1 Обчислити інтеграл

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+2z+5)dz,$$

підінтегральна функція є аналітичною. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбниця

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2)-F(z_1)$$

знаходимо

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+2z+5)dz=\left(\frac{z^3}{3}+z^2+5z\right)\Bigg|_{1-2i}^{1+i}=$$

$$=\frac{1}{3}(1+i)^3+(1+i)^2+5(1+i)-$$

$$-\frac{1}{3}(1-2i)^3-(1-2i)^2-5(1-2i)=$$

$$=\frac{1}{3}(1+3i+3i^2+i^3)+(1+2i+i^2)+5+5i-$$

$$-\frac{1}{3}(1-6i+12i^2-8i^3)-(1-4i+4i^2)-5+10i$$

Враховуючи, що $i^2=-1,\quad i^3=-i,$ маємо

$$\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+2z+5)dz=\frac{1}{3}(1+3i-3-i)+(1+2i-1)+5+5i-$$

$$-\frac{1}{3}(1-6i-12+8i)-(1-4i-4)-5+10i=$$

$$=\frac{1}{3}(-2+2i)+2i+15i-\frac{1}{3}(-11+2i)+3+4i=$$

$$=\frac{1}{3}(-2+2i+11-2i)+21i+3=6+21i$$

Відповідь: $\int_{1-2i}^{1+i}(z^2+2z+5)dz=6+21i.$

6. 2 Обчислити інтеграл

$$\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{\cos^2 z}{z^2-\pi^2}dz\ .$$

Контур інтегрування $|z+2|=3$ – коло радіуса 3 з центром в точці (-2;0) (мал.4), який проходять в додатному напрямку.

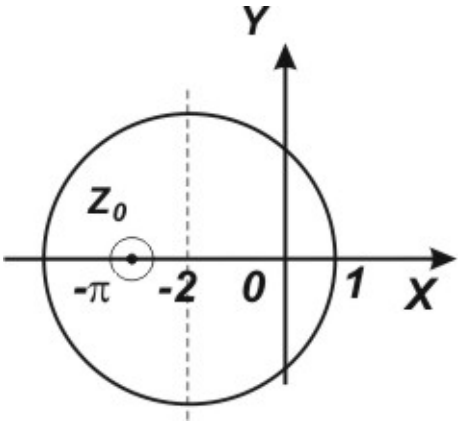
Знаходимо особливі точки підінтегральної функції

$$f(z)=\frac{\cos^2 z}{z^2-\pi^2},$$

які знаходяться в середині контуру інтегрування.

Для цього виконаємо перетворення знаменника:

$$f(z)=\frac{\cos^2 z}{z^2-\pi^2}=\frac{\cos^2 z}{(z-\pi)(z+\pi)}$$



Малюнок 4

і знайдемо особливі точки: $z_0 = -\pi$, $z_1 = \pi$.

z_0 - полюс першого порядку, z_1- не належить області, що обмежена заданим контуром. Тому маємо одну особливу точку $z_0 = -\pi$, що знаходиться всередині контуру інтегрування . Підінтегральна функція є аналітичною в області, що обмежена цим контуром, за виключенням точки z_0.

За інтегральною формулою Коші

$$\int\limits_{l^+} \frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0).$$

Обчислимо заданий інтеграл:

$$\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{\cos^2 z}{z^2-\pi^2}dz=\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{\dfrac{\cos^2 z}{z-\pi}}{z+\pi}dz=\left|f(z)=\frac{\cos^2 z}{z-\pi}\right|=$$

$$\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{\dfrac{\cos^2 z}{z-\pi}}{z-(-\pi)}dz=2\pi i\left(\frac{\cos^2 z}{z-\pi}\right)\Bigg|_{z=-\pi}=2\pi i\cdot\left(\frac{1}{-2\pi}\right)=-i.$$

Відповідь: $\oint\limits_{|z+2|=3} \frac{\cos^2 z}{z^2-\pi^2}dz=-i.$

7 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z}{(z+1)(z-6)}.$$

Функція має дві особливі точки, де псується її аналітичність – нулі знаменника:

$$z=-1,\qquad z=6.$$

Для визначення типу цих особливих точок, знайдемо границі функції *f(z):*

$$\lim_{z\to -1}\frac{z}{(z+1)(z-6)}=\infty,\qquad \lim_{z\to 6}\frac{z}{(z+1)(z-6)}=\infty.$$

Оскільки границі нескінченні, то ці точки є полюсами.

Крім того,

$$\lim_{z\to -1}\frac{-1}{(z+1)^1(-7)}=\infty,\qquad \lim_{z\to 6}\frac{6}{7(z-6)^1}=\infty,$$

а це означає, що порядок полюсів дорівнює 1.

Тому $z_1=-1,\quad z_2=6$ - полюси першого порядку.

Лишки функції *f(z)* відносно z_0 - полюса першого порядку обчислюються за формулою

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z)=\lim_{z\to z_0}\{(z-z_0)\cdot f(z)\}.$$

Знаходимо лишок функції *f(z)* відносно z_1:

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=\lim_{z\to -1}\left\{(z+1)\cdot\frac{z}{(z+1)(z-6)}\right\}=\lim_{z\to -1}\left\{\frac{z}{(z-6)}\right\}=\frac{1}{7}.$$

Знаходимо лишок функції *f(z)* відносно z_2:

$$\operatorname*{res}_{z=6} f(z)=\lim_{z\to 6}\left\{(z-6)\cdot\frac{z}{(z+1)(z-6)}\right\}=\lim_{z\to 6}\left\{\frac{z}{(z+1)}\right\}=\frac{6}{7}.$$

Відповідь: $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=\frac{1}{7},\quad \operatorname*{res}_{z=6} f(z)=\frac{6}{7}.$

8.1 Знайти зображення для функції *f(t)* $f(t)=\cos 5t+9e^{2t}+4t$.

Для знаходження зображення функції f(t) скористуємося формулами

$$\cos at \to \frac{p}{p^2+a^2}, \qquad e^{\alpha t} \to \frac{1}{p-\alpha}, \qquad \frac{t^n}{n!} \to \frac{1}{p^{n+1}}.$$

Враховуючи властивість лінійності, маємо

$$f(t)=\cos 5t+9e^{2t}+4t \to \frac{p}{p^2+25}+\frac{9}{p-2}+\frac{4}{p^2},$$

тобто зображення має вигляд

$$F(p)=\frac{p}{p^2+25}+\frac{9}{p-2}+\frac{4}{p^2}.$$

8.2 Знайти оригінал для функції $F(p)=\frac{p+6}{p^2+12p+61}$.

Для знаходження оригінала за даним зображенням застосуємо таблицю зображень основних елементарних функцій та метод виділення повного квадрата в знаменнику.

$$F(p)=\frac{p+6}{p^2+12p+61}=\frac{p+6}{(p+6)^2+25}.$$

З таблиці зображень маємо формулу

$$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \to e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t,$$

тому

$$\frac{p+6}{(p+6)^2+25} \to e^{-6t}\cdot\cos 5t.$$

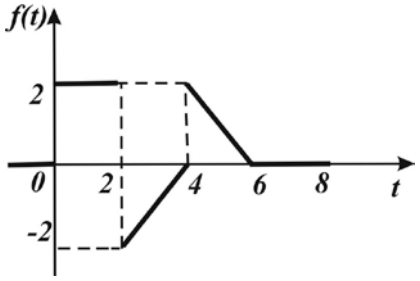
Звідси маємо шуканий оригінал f(t):

$$f(t)=e^{-6t}\cdot\cos 5t.$$

Відповідь: зображення - $F(p)=\frac{p}{p^2+25}+\frac{9}{p-2}+\frac{4}{p^2}$,

оригінал - $f(t)=e^{-6t}\cdot\cos 5t$.

9 За заданим графіком (мал.5)оригіналу знайти зображення Лапласа.



Малюнок 5

Зображення Лапласа F(p) для кусково-неперервної функції можна знайти за формулою

$$F(p)=\sum_{k=1}^{n} e^{-p\tau_k}\left(\frac{\alpha_k}{p}+\frac{\beta_k}{p^2}\right),$$

де τ_k – точки розриву $f(t)$ та $f'(t)$;

α_k – стрибки $f(t)$ в точках τ_k;

β_k – стрибки $f'(t)$ в точках τ_k.

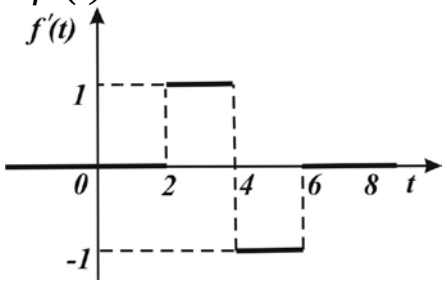
Знаходимо точки розриву заданої функції та похідної:

$$\tau_1=0,\quad \tau_2=2,\quad \tau_3=4,\quad \tau_4=6,$$

Знаходимо стрибки функції в точках τ_k:

$$\alpha_1=2,\quad \alpha_2=-4,\quad \alpha_3=2,\quad \alpha_4=0.$$

Побудуємо графік похідної $f'(t)$:



Малюнок 6

Запишемо стрибки похідної:

$$\beta_1=0,\quad \beta_2=1,\quad \beta_3=-2,\quad \beta_4=1.$$

Тому, шукане зображення має вигляд

$$F(p)=e^{-p\tau_1}\cdot\left(\frac{\alpha_1}{p}+\frac{\beta_1}{p^2}\right)+e^{-p\tau_2}\left(\frac{\alpha_2}{p}+\frac{\beta_2}{p^2}\right)+e^{-p\tau_3}\left(\frac{\alpha_3}{p}+\frac{\beta_3}{p^2}\right)+e^{-p\tau_4}\left(\frac{\alpha_4}{p}+\frac{\beta_4}{p^2}\right)=$$

$$=e^{-0p}\cdot\left(\frac{2}{p}+\frac{0}{p^2}\right)+e^{-2p}\left(\frac{-4}{p}+\frac{1}{p^2}\right)+e^{-4p}\left(\frac{2}{p}-\frac{2}{p^2}\right)+e^{-6p}\left(\frac{0}{p}+\frac{1}{p^2}\right).$$

Відповідь: $F(p)=\frac{1}{p}\left(2-4e^{-2p}+2e^{-4p}\right)+\frac{1}{p^2}\left(e^{-2p}-2e^{-4p}+e^{-6p}\right).$.

10 Операційним методом розв'язати задачу Коші:

$$x'' - 4x' + x = t - 4; \qquad x(0) = 0, x'(0) = 1.$$

Застосовуючи операторний метод, переходимо у простір зображень.

Знаходимо зображення похідних та правої частини заданого рівняння:

$$x(t) \to X(p);$$
$$x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p);$$
$$x''(t) \to p^2X(p) - px(0) - x'(0) = p^2X(p) - 1;$$
$$t - 4 \to \frac{1}{p^2} - \frac{4}{p}.$$

Підставляємо знайдені зображення в задане рівняння та отримуємо операторне рівняння:

$$p^2X(p) - 1 - 4pX(p) + X(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{4}{p} = \frac{1-4p}{p^2},$$

Знаходимо зображення $X(p)$:

$$X(p)\left[p^2 - 4p + 1\right] = 1 + \frac{1-4p}{p^2},$$

$$X(p)\left[p^2 - 4p + 1\right] = \frac{p^2 - 4p + 1}{p^2},$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2}.$$

По знайденому зображенню $X(p)$ шукаємо оригінал $x(t)$:

$$X(p) \to x(t)$$
$$\frac{1}{p^2} \to t \qquad .$$

Тому розв'язком заданої задачі Коші є $x(t) = t.$

Відповідь: $x(t) = t.$

4 ЗРАЗОК ПИСЬМОВОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

з теми „Теорія функцій комплексної змінної”

1 Розв’язати квадратне рівняння $x^2+(-2-i)x-1+7i=0$.

2 Зобразити на комплексній площині область: $|z-3i-2|>4$.

3 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки $z_0=2$ функції $f(z)=(2-z)\cos\dfrac{1}{z-2}$.

4 Обчислити інтеграл $\int\limits_{1-2i}^{2+i}(z^2-2z+1)dz$. .

з т еми „Операційне числення”

1 Знайти зображення для функції *f(t)* та оригінал для функції *F(p)*:

$$f(t)=\cos 5t+4t+9e^{2t},\quad F(p)=\frac{8}{p^2-6p+73}.$$

2 Операційним методом розв’язати задачу Коші

$$x''-4x'+x=t-4;\qquad x(0)=0,\,x'(0)=1.$$

ЗРАЗОК МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

1 Знайти всі значення кореня $\sqrt[3]{512i}$.

2 Відновити аналітичну функцію *f(z)=u(x,y)+iv(x,y),*якщо задана її дійсна частина та знайти її похідну в точці z_0 :

$$u(x,y)=x^2-y^2-9x+4y-1,\qquad z_0=1-2i.$$

3 Обчислити інтеграл

$$\int\limits_{|z+\pi|=1}\frac{\sin z+2}{z^2+\pi z}dz.$$

4 Знайти лишки функції

$$f(z)=\frac{z^3}{(z-5)^3}.$$

5 Операційним методом розв’язати задачу Коші:

$$x''-4x'+x=t-4;\qquad x(0)=0,\,x'(0)=1.$$

5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПІДГОТОВКИ

1 Знайти всі значення кореня :

$$\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{8},\sqrt[3]{27},\sqrt[3]{64},\sqrt[3]{125},\sqrt[3]{-1},\sqrt[3]{-8},\sqrt[3]{-27},\sqrt[3]{-343i},$$

$$\sqrt[3]{-27i},\sqrt[3]{64i},\sqrt[3]{125i},\sqrt[3]{-i},\sqrt[3]{-8i},\sqrt[3]{-27i},\sqrt[3]{-64i},\sqrt[3]{-216i}.$$

2 Розв'язати квадратне рівняння:

$$x^2+(1+2i)x+6-8i=0,\qquad x^2+(-3-2i)x-1+3i=0,$$
$$x^2+(-2-4i)x-3+2i=0,\quad x^2+(2-i)x+2-4i=0,$$
$$x^2+(4-i)x+3-i=0,\qquad x^2+(1+2i)x-3+i=0,$$
$$x^2+(3-5i)x-4-3i=0,\qquad x^2+(4+2i)x+2+4i=0,$$
$$x^2+(3+2i)x+2+4i=0,\qquad x^2+(1+2i)x+3-i=0.$$

3 Побудувати лінії та області на комплексній площині:

Рівняння лінії	Нерівність , яка задає область
$z+\bar{z}+2=0,$	$1\le\lvert z-i+2\rvert<3,$
$\operatorname{Re}z+\operatorname{Im}2z=5,$	$\lvert z-2i+5\rvert>4,$
$3+i(\bar{z}-z)=0,$	$\operatorname{Im}2z>1,$
$\operatorname{Re}(z^2)-4=0,$	$1<\lvert z-3i-2\rvert\le 2,$
$z\cdot\bar{z}-4=0,$	$\operatorname{Re}4\bar{z}<1,$
$z\cdot\bar{z}+i(z-\bar{z})=8,$	$1<\operatorname{Im}2z\le 3.$

4 Відновити аналітичну функцію $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, якщо задана її дійсна, або уявна частина та знайти її похідну в точці z_0

$$u(x,y)=x^2-y^2-4x+5y+3,\qquad z_0=1+2i,$$
$$v(x,y)=y^2-x^2-4x-3y+2x-1,\qquad z_0=-1+3i,$$
$$u(x,y)=x^2-y^2-2x+4y-1,\qquad z_0=-2+3i,$$
$$v(x,y)=x^2-y^2-5x+y+2,\qquad z_0=1+4i,$$
$$u(x,y)=y^3-3yx^2-4x+1,\qquad z_0=-1-2i,$$
$$v(x,y)=3x-5y-2xy+1,\qquad z_0=-1+4i,$$
$$u(x,y)=x^2-y^2-2x+4y+3,\qquad z_0=-2+5i,$$
$$v(x,y)=2x-3y-4xy+5,\qquad z_0=-1+4i,$$
$$u(x,y)=x^2-y^2-7x+4y+1,\qquad z_0=-1-5i.$$

5 Обчислити інтеграли:

$$\int\limits_{|z-i|=1}\frac{\sin z}{z-i}dz\ ,\qquad \int\limits_{|z|=4}\frac{z^2}{z+2i}dz,\qquad \int\limits_{|z+i|=1}\frac{\sin\frac{i\cdot z\pi}{2}}{z^2+1}dz\ .$$

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z^2+2z}dz\ ,\qquad \int\limits_{|z-1|=\frac{1}{2}}\frac{\sin\frac{z\pi}{2}}{(z-1)z}dz,\qquad \int\limits_{|z|=1}\frac{e^z\cos z}{z(z+2i)}dz\ .$$

6 Обчислити інтеграли:

$$\int\limits_{1-2i}^{2+i}(z^2-2z+1)dz,\quad \int\limits_{2-2i}^{1+i}(z^2+3z+1)dz,\quad \int\limits_{2-i}^{1+2i}(z^2+3z-1)dz,$$

$$\int\limits_{1-i}^{1+2i}(z^2+2z-1)dz,\quad \int\limits_{1-2i}^{1+i}(z^2+4z+1)dz,\ .\int\limits_{1-2i}^{1+i}(z^2+3z+1)dz.$$

7 Знайти коефіцієнт C_{-1} при розкладанні у ряд Лорана в околі точки z_0 функції

$$f(z)=(z-i)^2\sin\frac{1}{z-i},\quad z_0=i.$$

$$f(z)=(z+2)e^{\frac{1}{z+2}},\ z_0=-2.$$

$$f(z)=\frac{1}{4-z}\cos\frac{1}{z-4},\ \ z_0=4.$$

8 Знайти лишки функцій

$$f(z)=\frac{z^3}{(z-5)^3},\quad f(z)=\frac{1-\cos 3z}{2z^2},\quad f(z)=\frac{1}{z^2+25}.$$

$$f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-4)},\ \ f(z)=\frac{z+3}{z(z+4)},\ \ f(z)=\frac{1-e^{-3z}}{2z}.$$

9 Знайти зображення для функції *f(t)* та оригінал для функції *F(p)*:

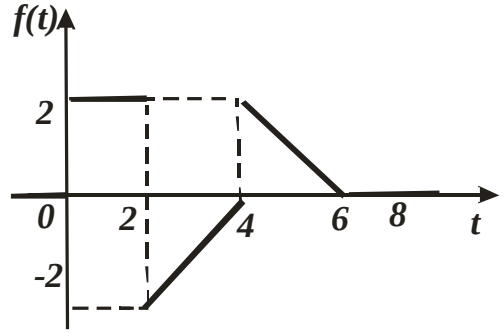
$$f(t)=\cos 5t+3\sin 8t+9e^{2t},\qquad F(p)=\frac{p+5}{p^2+10p+41}.$$

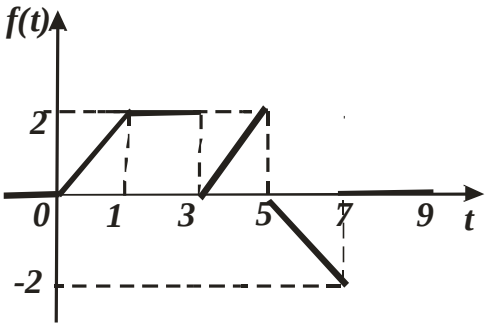
$$f(t)=\cos 7t+3\sin 8t+2e^{9t},\quad F(p)=\frac{2}{p^2-18p+85}.$$

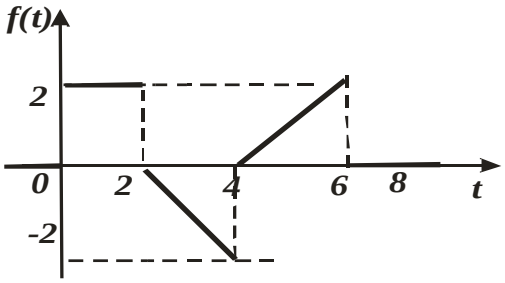
$$f(t)=\sin 3t+t+6e^{-5t},\quad F(p)=\frac{3}{p^2-16p+73}.$$

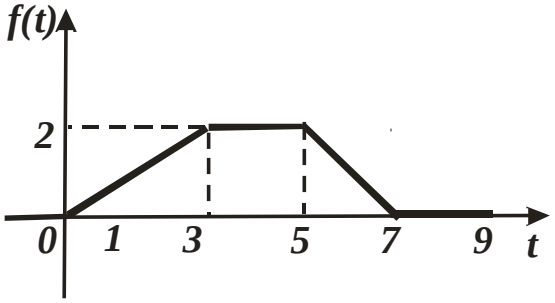
$$f(t)=\sin 8t+t+3e^{-7t},\quad F(p)=\frac{p+6}{p^2+12p+85}.$$

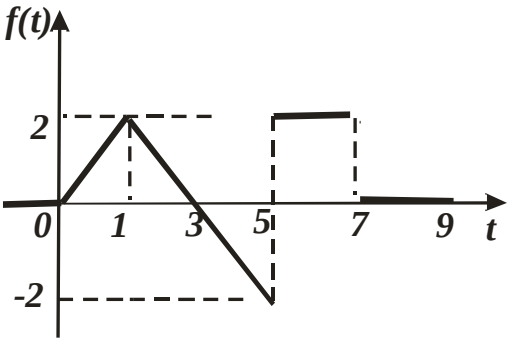
10 За заданим графіком оригіналу знайти зображення Лапласа

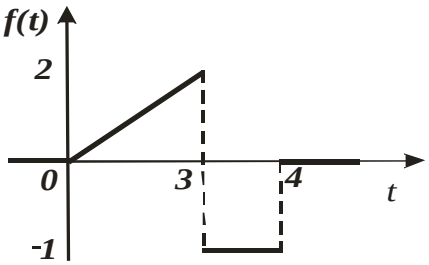












11.Операційним методом розв’язати задачу Коші:

$x''-4x'+x=6e^{-t};\qquad x(0)=1, x'(0)=-1.$

$x''-4x'+x=t-4;\qquad x(0)=0, x'(0)=1.$

$x''-3x'+x=2;\qquad x(0)=2, x'(0)=0.$

$x''-2x'+x=4\sin t;\qquad x(0)=2, x'(0)=0.$

$x''-2x'+x=9e^{-2t};\qquad x(0)=1, x'(0)=-2.$

$x''+x'+2x=1+2t;\qquad x(0)=0, x'(0)=1.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной.- М. Наука, 1974. -319с.
2 Сборник задач по теории аналитических функций под редакцией М.А. Евграфова. -Изд-во «Наука, 1969.-387с.
3 Мартыненко В.С. Операционное исчисление. -Киев: Вища школа,1990.-356с.

ЗМІСТ

ВСТУП..... 3
1 ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА МОДУЛЯ 4
2 ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ (ІДЗ) «ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ» 5
3 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІДЗ.. «ТЕОРІЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ ТА ОПЕРАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ»…….. 36
4 ЗРАЗОК ПИСЬМОВОЇ КОНТРОЛЬНОЇ ТА МОДУЛЬНОЇ РОБОТИ..... 47
5 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПІДГОТОВКИ 48
СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ..... 51

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання завдань модуля модуля «Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення» для студентів спеціальності 151.

Укладачі: Несвіт Марина Ігорівна

Поклонський Євген Васильович

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор Л.І. Христенко

План 2016 р., поз Формат 60х84 1/16. Папір друк. №2.
Підп. До друку Обл. вид. арк.
Надруковано на різографі. Умов. друк арк.
Тираж 50 прим. Зам. №_____ Безкоштовно.

ХНУБА, 61002, Харків, вул. Сумська,40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного Університету будівництва та архітектури