Министерство образования и науки Украины

**ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ**

**Специальности: 6.060101; 6.050502;
6.050202; 6.040106**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

**к выполнению заданий модуля
«Линейная и векторная алгебра.
Аналитическая геометрия»
по курсу «Высшая математика»**

Харьков 2009

Министерство образования и науки Украины

ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ

Специальности: 6.060101; 6.050502; 6.050202; 6.040106

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению заданий модуля «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия» по курсу «Высшая математика» для иностранных студентов

Утверждено
на заседании кафедры
высшей математики.
Протокол № 1 от 08.09.2008

Харьков 2009

Методические указания к выполнению заданий модуля «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия» по курсу «Высшая математика» для иностранных студентов специальностей: 6.060101; 6.050502 6.050202; 6.040106; / Составители: А.И.Кононенко, А.В.Лысянская, Р.В.Посылаева. – Харьков: ХГТУСА, 2008. - 56 с.

Рецензент Л.И.Щелкунова

Кафедра высшей математики

ВВЕДЕНИЕ

Общий курс высшей математики предусматривает:

- развитие логического и алгоритмического мышления;
- овладение основными методами исследования и решения математических задач;
- выработку умения самостоятельно углублять знания и проводить математический анализ прикладных задач.

В современных условиях одной из основных форм обучения является самостоятельная работа, которая состоит из следующих элементов:

- изучение учебного материала по учебникам, учебным пособиям и конспектам лекций;
- решение задач и примеров;
- выполнение индивидуальных домашних заданий (в том числе и итоговых);
- сдача модульного контроля.

Предлагаемое издание предназначено для оказания помощи студентам при организации самостоятельной работы и содержит рабочую программу по модулю, индивидуальные домашние задания, варианты итогового задания, образец его выполнения и вопросы для самопроверки, а также варианты тестовых заданий, образец выполнения модульного контроля и вопросы для подготовки к его сдаче.

1 ПРОГРАММА МОДУЛЯ

1.1 Элементы линейной алгебры

1 Линейные операторы и матрицы. Линейные операторы и матрицы в заданном базисе в пространстве в R_2. Сложение, умножение на число, произведение линейных операторов и соответствующих матриц. Линейные операторы и матрицы в R_n. Сложение, умножение на число, произведение линейных операторов и соответствующих матриц. Сопряженный оператор. Сопряженная матрица. Самосопряженные операторы и симметричные матрицы. Ортогональные матрицы.

2 Определители второго, третьего порядков. Основные свойства. Определители n-го порядка, их свойства. Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

3 Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Правило Крамера. Обратная матрица. Решение матричных уравнений. Теорема Кронекера-Капелли.

1.2 Элементы векторной алгебры

1 Трехмерное пространство. Векторы. Линейные операции над векторами. Линейные пространства. Линейно независимые системы векторов. Базис.

2 Скалярное произведение в R_3 и его свойства. Аксиоматическое определение скалярного произведения в линейном пространстве. Длина вектора. Расстояние. Угол между векторами. Пространство R_n. Ортогональный базис. Разложение векторов.

3 Векторное произведение. Основные свойства. Смешанное произведение и его свойства.

1.3 Аналитическая геометрия на плоскости

1 Координаты точки на плоскости. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в заданном отношении. Координаты середины отрезка.

2 Различные виды уравнения прямой. Исследование общего уравнения прямой. Построение прямой по ее уравнению.

3 Уравнение прямой, проходящей через заданною точку в данном направлении. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. Угол между прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности двух прямых. Определение точки пересечения двух прямых.

4 Расстояние от данной точки до данной прямой.

5 Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

6 Преобразование прямоугольных координат. Параллельный перенос координатных осей без изменения их направления. Преобразование координат поворотом координатных осей без изменения начала координат. Упрощение общего уравнения кривой второго порядка.

7 Полярная система координат. Переход от полярных координат к декартовым и обратно. Построение кривой, определяемой уравнением в.полярных координатах.

1.4 Аналитическая геометрия в пространстве

1 Плоскость в пространстве. Различные виды уравнения плоскости. Исследование общего уравнения плоскости.

2 Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки. Угол между двумя плоскостями. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

3 Прямая в пространстве. Векторное уравнение прямой. Параметрические уравнения прямой. Каноническое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности двух прямых. Условие перпендикулярности двух прямых. Направляющие косинусы прямых.

4 Плоскость и прямая в пространстве. Условие параллельности прямой и плоскости. Условие перпендикулярности прямой и плоскости. Точка пересечения прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью.

2 ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Задание 1 Решить систему линейных уравнений
1) методом Крамера;
2) методом Гауса;
3) с помощью обратной матрицы.

Сделать проверку.

Вариант №1

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 8; \\ 3x_1 - x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Вариант №2

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Вариант №3

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 14; \\ -3x_1 - 2x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 = -2. \end{cases}$

Вариант №4

а) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 7; \\ -11x_1 + 3x_2 = -19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант №5

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -17; \\ -3x_1 + 4x_2 = -18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -17. \end{cases}$

Вариант №6

а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 18; \\ -7x_1 + 5x_2 = -31; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант №7

а) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 17; \\ 7x_1 + 4x_2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

Вариант №8

а) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 12; \\ 9x_1 - 5x_2 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Вариант №9

а) $\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 = 19; \\ 2x_1 - 3x_2 = -7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9; \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Вариант №10

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -1; \\ 8x_1 - 7x_2 = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 \quad + \quad 3x_3 = 3; \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант №11

а) $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 = -19; \\ 2x_1 + 9x_2 = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

Вариант №12

а) $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 = 18; \\ 7x_1 + 2x_2 = -25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Вариант №13

а) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 12; \\ 9x_1 - 4x_2 = -17; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 \quad + 5x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

Вариант №14

а) $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 = -3; \\ -7x_1 + 9x_2 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Вариант №15

а) $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 = -25; \\ -9x_1 - 2x_2 = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

Вариант №16

а) $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = -18; \\ -5x_1 + 4x_2 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 14; \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

Вариант №17

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 19; \\ 7x_1 - 11x_2 = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 9; \\ x_1 - 3x_2 - 16x_3 = 14; \\ x_2 - 10x_3 = 13. \end{cases}$

Вариант №18

а) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = -9; \\ 2x_1 + 7x_2 = -25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Вариант №19

а) $\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 = -17; \\ 3x_1 - 4x_2 = -18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

Вариант №20

а) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 11; \\ -4x_1 + 3x_2 = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7; \\ x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$

Вариант №21

а) $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 = 16; \\ -7x_1 - 4x_2 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 5; \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 12; \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 7. \end{cases}$

Вариант №22

а) $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 = 17; \\ -9x_1 + 5x_2 = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_3 = 9; \\ x_2 - 10x_3 = -16. \end{cases}$

Вариант №23

а) $\begin{cases} 7x_1 - 11x_2 = 3; \\ 6x_1 + 5x_2 = 17; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант №24

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 13; \\ -7x_1 - 4x_2 = -10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \\ 2x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант №25

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -6; \\ 2x_1 - 5x_2 = -11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 15x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Вариант №26

а) $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 = -11; \\ -7x_1 + 2x_2 = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

Вариант №27

а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 = -6; \\ -7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

Вариант №28

а) $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = -23; \\ -4x_1 - 7x_2 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

Вариант №29

а) $\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 = -3; \\ 5x_1 + 2x_2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$

Вариант №30

а) $\begin{cases} -9x_1 - 4x_2 = 19; \\ 5x_1 + 3x_2 = -9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Задание 2 Исследовать систему с помощью теоремы Кронекера – Капелли и в случае ее совместимости найти все решения.

Вариант №1

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = -2; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 14. \end{cases}$$

Вариант №2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Вариант №3

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Вариант №4

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 21; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13; \\ x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Вариант №5

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 5; \\ x_1 + 3x_3 = 16; \\ 5x_1 - x_3 + 3x_4 = 10; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1. \end{cases}$$

Вариант №6

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Вариант №7

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 - 14x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №8

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 20; \\ x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант №9

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Вариант №10

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_3 = 3; \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант №11

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 15; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 10; \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант №12

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_2 + 7x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант №13

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант №14

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 2; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 2x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Вариант №15

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ 10x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №16

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 23; \\ x_2 + x_4 = 1; \\ 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Вариант №17

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = -2; \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №18

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Вариант №19

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 3; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10; \\ x_1 - x_2 = 0; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 14. \end{cases}$$

Вариант №20

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2. \end{cases}$$

Вариант №21

$$\begin{cases} 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_3 = 16; \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 x_4 = 5. \end{cases}$$

Вариант №22

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 - 14x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2; \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант №23

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Вариант №24

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1; \\ 2x_1 + 9x_2 + 4x_3 + x_4 = 3; \\ 6x_1 - 3x_2 + 12x_3 - x_4 = -1; \\ -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2. \end{cases}$$

Вариант №25

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_3 = 3; \\ 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант №26

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 5; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -6; \\ x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Вариант №27

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 8; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4; \\ x_2 - 7x_3 = 8. \end{cases}$$

Вариант №28

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант №29

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 14; \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$$

Вариант №30

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \\ 10x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Задание 3 Задана пирамида, координатами вершин которой являются A_1, A_2, A_3, A_4 (координаты точек приведены в таблице 1). Методами векторной алгебры найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) проекцию вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площадь грани $A_1A_2A_3$;
5) объем пирамиды.

Таблица 1

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)
2	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;9)
3	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
4	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
5	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
6	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
7	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
8	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
9	(8:6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
10	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)
11	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
12	(1;2;3)	(2;0;0)	(3;2;5)	(4;0;0)
13	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
14	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
15	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
16	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
17	(6;1;5)	(5;1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
18	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
19	(0;4;-1)	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)
20	(8;5;8)	(3;3;9)	(6:9; I)	(1;7;3)
21	(6;4;8)	(3;5;4)	(5:8:3)	(1;9;9)
22	(3;6;7)	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)
23	(6;9;2)	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)
24	(3;9;8)	(0;7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)
25	(5;8;2)	(3;5;10)	(3;8;4)	(5:5;4)
26	(1;2;6)	(4;2;0)	(4;6;6)	(6;1;1)
27	(7;9;6)	(4;5;7)	(9;4;4)	(7;5;3)
28	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
29	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
30	(1;-2;l)	(0;0;4)	(1;4;2)	(2;0;0)

Задание 4 Заданы координаты вершин треугольника АВС (приведены в таблице 2). Методами аналитической геометрии

1) составить уравнение стороны АВ;
2) составить уравнение высоты, проведенной из вершины С;
3) вычислить длину высоты, проведенной из вершины В;
4) составить уравнение прямой, проходящей через центр тяжести треугольника параллельно стороне АС;
5) найти площадь треугольника;
6) найти внутренний угол треугольника при вершине А.

Таблица 2

Номер варианта	А	В	С	Номер варианта	А	В	С
1	(-6;-3)	(-4; 3)	(9;2)	16	(2;-1)	(8;7)	(-10;4)
2	(-3;1)	(-1;7)	(I2;6)	17	(5;-3)	(1;0)	(7;2)
3	(-1;3)	(1;9)	(4;7)	18	(4;-б)	(2;2)	(-2;-1)
4	(0;0)	(2;6)	(7;2)	19	(3;4)	(-1;7)	(-4;0)
5	(-2;-6)	(0;0)	(3;-2)	20	(1;-2)	(7;6)	(0;2)
6	(-2;-5)	(6;2)	(0;0)	21	(2;-1)	(-2;-3)	(-6;4)
7	(-2; 0)	(-4;-7)	(5;5)	22	(5;-8)	(3;-2)	(-3;-6)
8	(1;2)	(3;8)	(-4;-I)	23	(8;-2)	(-6;-5)	(0;4)
9	(4;4)	(1;-3)	(9; 0)	24	(7;5)	(3;2)	(4;0)
10	(5;6)	(7;2)	(-6; 0)	25	(3;-7)	(6;0)	(1;1)
11	(-6;-4)	(-1;2)	(6;1)	26	(5;3)	(-1;-2)	(-3;7)
12	(2;0)	(7;2)	(0;5)	27	(3;1)	(-2;8)	(-5;3)
13	(-2;-б)	(-6;-3)	(10;-1)	28	(9;2)	(-5;7)	(0;-3)
14	(-2;1)	(-2;1)	(-4;7)	29	(-3;-3)	(3;1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;-1)	(4; I)	30	(7;9)	(-2;0)	(-3;2)

Задание 5 Задана пирамида, координатами вершин которой являются A_1, A_2, A_3, A_4 (приведены в таблице 3). Требуется:

1) составить уравнение стороны A_1A_2;
2) составить уравнение плоскости $A_1A_2\ A_3$;
3) записать уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на плоскость $A_1A_2\ A_3$;
4) найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2\ A_3$.

Таблица3

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
2	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
3	(1;2;3)	(2;0; 0)	(0;2;5)	(4;0;0)
4	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
5	(-2;0;-1)	(0,0;4)	(1;3;2)	(3;2;7)
6	(1;-2;1)	(0;0,-4)	(1;4;2)	(2;0;0)
7	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
8	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
9	(6;-1;5)	(5,1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
10	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
11	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
12	(3;3;9)	(6;9;1)	(1;7;3)	(8;5;-8)
13	(3;5;4)	(5;8;3)	(1;9;9)	(6;4;8)
14	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)	(3;6;7)
15	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)	(6;9;2)
16	(0,7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)	(3;9;8)
17	(5;5;4)	(3;8;4)	(3;5;10)	(5;8;2)
18	(6;1;1)	(4;6;6)	(4;2;0)	(1;2;6)
19	(7;5;3)	(9;4;4)	(4;5;7)	(7;9;6)
20	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
21	(4;2;5)	(0;7;1)	(0;2;7)	(1;5;0)
22	(4;4;10)	(7;10;2)	(2;6;4)	(9;6;9)
23	(4;6;5)	(6;9;4)	(1;10;10)	(7;5;9)
24	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
25	(10;6;6)	(-2;6;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
26	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
27	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
28	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;-7)
29	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
30	(7;7;3)	(6;5 ;8)	(3;5;8)	(8;4,1)

Задание 6 Привести уравнение линии (приведены в таблице 4) к каноническому виду, построить эту линию и в зависимости от полученного результата найти:

1) координаты центра круга и его радиус;

2) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса;

3) координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы и записать уравнения ее асимптот;

4) координаты вершины и фокуса параболы, величину параметра, записать уравнение ее директрисы.

Таблица 4

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$x^2-6x-4y+29=0$	16	$2y^2+x-4y-8=0$
2	$x^2+y^2+2x-6y+1=0$	17	$-3x^2+y^2-6x-4y-11=0$
3	$x^2-4y^2+6x+16y-11=0$	18	$9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$
4	$9x^2+4y^2+18x+16y-11=0$	19	$x^2-4y^2-8y+12=0$
5	$y^2-2x+8y+10=0$	20	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$
6	$7x^2-2y^2+28x+14=0$	21	$x^2-y^2-4x+2y+2=0$
7	$2y^2+x+4y+6=0$	22	$16x^2+25y^2+64x-50y-311=0$
8	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$	23	$2x^2-8x+y+5=0$
9	$4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$	24	$9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
10	$x^2-10x-4y-3=0$	25	$x^2+y^2-2x+6y-6=0$
11	$-x^2+3y^2+6x-12y=0$	26	$9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$
12	$x^2+y^2-6x-8y+9=0$	27	$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$
13	$2y^2+x-8y+3=0$	28	$x^2+y^2+4y-5=0$
14	$x^2-4y^2-2x-8y+13=0$	29	$4x^2-y^2-8x-6y-25=0$
15	$x^2+y^2-14x-8y+40=0$	30	$4x^2-8x+y+7=0$

Задание 7 Задана функция $r=f(\varphi)$ на отрезке $0\le\varphi\le 2\pi$ (уравнения функций, взависимости от варианта, приведены в таблице 5).

1) Построить график функции в полярной системе координат по точкам, задавая значения φ через промежуток $\frac{\pi}{6}$, начиная от $\varphi=0$.

2) Записать уравнение заданной линии в прямоугольной декартовой системе

координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительное направление оси абсцисс – с полярной осью. По полученному уравнению определить вид кривой.

Таблица 5

Номер варианта	Уравнение	Номер варианта	Уравнение
1	$r = 2\cos\varphi - 5\sin\varphi$	16	$r = 4\cos\varphi$
2	$r = \frac{21}{5 - 2\cos\varphi}$	17	$r = \frac{5}{1 + \sin\varphi}$
3	$r = \frac{5}{1 + \sin\varphi}$	18	$r = \frac{4}{2 + 3\cos\varphi}$
4	$r = -\frac{3}{\cos\varphi}$	19	$r = \frac{6}{1 - \cos\varphi}$
5	$r = \frac{16}{3 - 5\cos\varphi}$	20	$r = \frac{15}{3 - 4\sin\varphi}$
6	$r = -5\sin\varphi$	21	$r = -6\cos\varphi$
7	$r = \frac{1}{3 - 3\cos\varphi}$	22	$r = \frac{5}{4 - 3\cos\varphi}$
8	$r = \frac{12}{2 - \cos\varphi}$	23	$r = \frac{2}{\sin\varphi}$
9	$r = \frac{3}{2 + \cos\varphi}$	24	$r = \frac{6}{3 + 2\cos\varphi}$
10	$r = -3\cos\varphi + 5\sin\varphi$	25	$r = 2\sin\varphi$
11	$r = \frac{1}{2 + 2\sin\varphi}$	26	$r = \frac{4}{1 + \cos\varphi}$
12	$r = \frac{2}{1 - \cos\varphi}$	27	$r = \frac{18}{5 - 4\sin\varphi}$
13	$r = -\frac{4}{\sin\varphi}$	28	$r = \frac{3}{2\cos\varphi}$
14	$r = \frac{5}{4 + 3\sin\varphi}$	29	$r = \frac{3}{5 + 6\sin\varphi}$
15	$r = -4\cos\varphi - 3\sin\varphi$	30	$r = 3\cos\varphi + \sin\varphi$

3 ВАРИАНТЫ ИТОГОВОГО ЗАДАНИЯ

Вариант №1

1 Доказать, что матрицы $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ взаимно обратные.

2 Даны точки $A(2;\ 4;\ 0)$ и $B(5;\ 2;\ -6)$. Вычислить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину.

3 Две стороны квадрата лежат на прямых $x-2y+2=0$ и $x-2y-5=0$. Вычислить его площадь.

4 Определить вид кривой 2-го порядка $9x^2+25y^2-225=0$ и построить ее. Найти в зависимости от вида кривой координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот.

5 Через точку пересечения прямой $\frac{x-7}{5}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ и плоскости $3x-y+2z+5=0$ провести плоскость, перпендикулярную прямой $\frac{x-3}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{1}$.

6 Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(3;\ -1;\ 2)$ и $M_2(2;\ 1;\ 1)$.

Вариант №2

1 Найти матрицу $D=AC+BC$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Найти координаты точки A, с которой совпадает конец вектора $\vec{a}(2;-1;3)$, если его начало совпадает с точкой $B(3;\ 0;\ 1)$.

3 Для треугольника с вершинами в точках $M(3;\ 2)$, $N(-2;\ 5)$, $P(6;\ -2)$ найти уравнение высоты, проведенной из вершины N.

4 Определить вид кривой 2-го порядка $16x^2-9y^2=144$ и построить ее. Найти в зависимости от вида кривой координаты фокусов, эксцентриситет, уравнения асимптот.

5 Через прямую $\frac{x-7}{5}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-5}{4}$ и точку $M(2;\ 1;\ 3)$ проведена плоскость. Записать ее уравнение.

6 Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

Вариант №3

1 Найти ранг матрицы $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Найти орт вектора $\vec{a}(4;0;-3)$.

3 Найти проекцию точки $P(1;\ -2)$ на прямую $3x-y-9=0$.

4 Определить вид кривой 2-го порядка $2x-5y^2-8=0$ и построить ее. Найти

в зависимости от вида кривой координаты фокусов, уравнения директрисы.

5 Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{1}=\frac{z-2}{-3}$ параллельно прямой $\frac{x+5}{4}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{2}$.

6 Найти острый угол между прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}$ и $\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}$.

Вариант №4

1 Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ методом обрамляющих миноров.

2 Даны точки $A(1;\,2;\,-3)$, $B(0;\,2;\,1)$ и $C(0;\,1;\,-1)$. Найти скалярное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

3 Через точку $M(-1;3)$ провести прямые, параллельные асимптотам гиперболы $x^2-\frac{y^2}{16}=1$.

4 Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 10, а расстояние между фокусами равняется 8.

5 Найти уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $3x-4y+2z-7=0$ и $x+5y-3z+1=0$.

6 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;0;-3)$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-z=0$.

Вариант №5

1 Задан определитель $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -8 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{32}.

2 Определить, при каком значении α вектора $\vec{a}(\alpha;-3;2)$ и $\vec{b}(1;1;3)$ взаимно перпендикулярны.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $Q(-1;0)$ перпендикулярно прямой PQ, если $P(2;3)$.

4 Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

5 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3;\,-2;\,0)$ перпендикулярно плоскости, задаваемой точками $M_1(1;\,0;\,-1)$, $M_2(2;\,1;\,-2)$, $M_3(3;-1;-2)$.

6 Определить, при каких l и m следующие уравнения определяют

параллельные плоскости: $3x-y+lz-9=0$, $2x+my+2z-3=0$.

Вариант №6

1 Решить неравенство $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ -2x+2 & -2 \end{vmatrix} > 0.$

2 Найти угол между векторами $\vec{a}(-4;0;3)$ и $\vec{b}(-2;6;-3)$.

3 Найти уравнение какой-либо средней линии треугольника ABC с вершинами в точках $A(3;\ 2)$, $B(-2;\ 5)$ и $C(6;\ -2)$.

4 Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его большая ось равна 20, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

5 Найти угол между прямой $\begin{cases} 3x-2y-24=0; \\ 3x-z+4=0. \end{cases}$ и плоскостью $6x+15y-10z+31=0$.

6 Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и имеет нормальный вектор $\vec{n}(5;0;-3)$.

Вариант №7

1 Не вычисляя определитель, доказать справедливость равенства

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -9 & 6 \end{vmatrix}=0.$$

2 Даны вершины треугольника $A(1;\ 2;\ -3)$, $B(0;\ 2;\ 1)$ і $C(0;\ 1;\ -1)$. Найти его внутренний угол при вершине A.

3 Найти проекцию точки $P(-4;\ 2)$ на прямую $4x-5y+3=0$.

4 Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что его малая ось равна 10, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{12}{13}$.

5 Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{4}$ и $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{4}$.

6 При каком значении p прямая $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-1}{p}$ и плоскость $3x-4y+7z-33=0$ параллельны?

Вариант №8

1 Найти алгебраическое дополнение элемента a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

2 Даны векторы $\vec{a}(-3;-2;4)$, $\vec{b}(-3;4;0)$ и $\vec{c}(-2;-3;0)$.
Вычислить $np_{\vec{b}}(\vec{a}+\vec{b})$.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(6;3)$ перпендикулярно прямой $2x+3y+4=0$.

4 Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что расстояние между фокусами равно 10, а длина мнимой оси $2b=8$.

5 Написать уравнение прямой, проходящей через начало координат перпендикулярно прямым $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{2}$ и $\frac{x}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

6 Найти угол межу прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{2}$ и плоскостью $2x+y-z+4=0$.

Вариант №9

1 Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$. Найти их произведение.

2 Вычислить длину вектора $\vec{a}(2;1;-2)$ и его направляющие косинусы.

3 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;1)$ параллельно прямой $2x+3y+4=0$.

4 Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что длина действительной оси $2a=16$, а эксцентриситет $\varepsilon=\frac{5}{4}$.

5 Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(2;-5;3)$, $M_2(9;1;-2)$.

6 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-3;-6)$ перпендикулярно плоскости $6x-3y-5z+2=0$.

Вариант №10

1 Решить систему уравнений: $\begin{cases}x+3y+5=0;\\ 2x-y-4=0.\end{cases}$

2 Даны три точки: $A(1;0;2)$, $B(3;3;1)$ и $C(5;-1;7)$. Доказать, что векторы $\vec{AB}$ і $\vec{AC}$ взаимно перпендикулярны.

3 Составить уравнение прямой, если точка $P(-4;2)$ является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

4 Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что действительная ось равна 6 и гипербола приходит через точку $(9;-4)$.

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 3x-2y-24=0 \\ 3x-z+4=0 \end{cases}$ параллельно прямой $\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-2}$.

6 Проверить, лежит ли точка $A(4;\ 5;\ 2)$ на прямой, проходящей через точки $M_1(4;\ -2;\ 1)$ и $M_2(-1;\ 3;\ -4)$.

Вариант №11

1 Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1-2x_2+\quad x_3=0; \\ 2x_1+4x_2-6x_3=0; \\ x_1-5x_2+4x_3=0. \end{cases}$

2 Вычислить смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, если $\vec{a}(1;1;3)$, $\vec{b}(0;-1;2)$, $\vec{c}(0;-4;5)$.

3 Найти координаты точки M, симметричной точке $N(-5;\ 13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

4 Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси Оx и ее параметр $p=3$.

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Оx и через точку $M(-3;4;-2)$.

6 Даны вершины треугольника $A(3;\ 6;\ -7)$, $B(-5;\ 2;\ 3)$ и $C(4;\ -7;\ -2)$. Составить параметрическое уравнение его медианы, проведенной из вершины C.

Вариант №12

1 Найти все решения системы $\begin{cases} x-2y+z=0; \\ z-\quad x-y=0. \end{cases}$

2 Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}(2;-1;1)$, $\vec{b}(1;2;3\}$, $\vec{c}(1;-3;-2)$.

3 Найти угол между прямыми $4x+2y-5=0$ и $5x-3y+1=0$.

4 Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси Оy, и ее параметр $p=3$.

5 Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(4;\ -3;\ 1)$ параллельно прямой $\begin{cases} 3x-y-2z+8=0; \\ x+2y-z+1=0. \end{cases}$

6 Проверить параллельность прямой $\frac{x-8}{12}=\frac{y+5}{1}=\frac{z+4}{2}$ и плоскости $2y-z=2$.

Вариант №13

1 Найти x и y из уравнения $(x \quad y)\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}=(1 \quad 2)$.

2 Выяснить, компланарны ли векторы $\vec{a}(2;1;0)$, $\vec{b}(1;\,0;\,3)$, $\vec{c}(0;5;-1)$.

3 Центр тяжести однородного стержня находится в точке $M(1;\,4)$, один из его концов - в точке $P(-2;\,2)$. Определить координаты точки Q - второго конца этого стержня.

4 Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена симметрично относительно оси Оx и проходит через точку $A(9;\,6)$.

5 Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\,-3;\,1)$ параллельно прямым $\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{3}$ и $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+5}{4}$.

6 Найти острый угол между прямыми $\begin{cases}x=3t-2;\\ y=0;\\ z=-t+3\end{cases}$ и $\begin{cases}x=2t-1;\\ y=0;\\ z=t-3.\end{cases}$

Вариант №14

1 Определить x и y из уравнения $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

2 Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(1;\,0;\,-1)$, $B(1;\,2;\,2)$, $C(2;\,0;\,-1)$, $D(3;\,1;\,-2)$.

3 Даны три вершины параллелограмма $A(3;\,-5)$, $B(5;\,-3)$, $C(-1;\,3)$. Найти четвертую вершину D, противолежащую вершине B.

4 Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что парабола расположена симметрично относительно оси Оy и проходит через точку $D(4;\,-8)$.

5 Найти расстояние от точки $M_0(4;\,3;\,0)$ до плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1;\,3;\,0)$, $M_2(4;\,1;\,2)$, $M_3(3;\,0;\,1)$.

6 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;\,-3;\,2)$ перпендикулярно плоскости $6x-3y-4z+2=0$.

Вариант №15

1 Дана матрица $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 4\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Найти A_{21} та M_{11}.

2 Доказать, что точки $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,1;\,2)$, $C(2;\,4;\,-3)$, $D(4;\,-2;\,7)$ принадлежат одной плоскости.

3 Найти точку пересечения прямых $3x-4y-29=0$ и $2x+5y+19=0$.

4 Привести уравнение линии к каноническому виду, определить вид кривой и построить ее: $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$.

5 Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z-3}{-2}$ и плоскости $2x-y+3z=1$ и точку $M(-1;\ 2;\ 3)$.

6 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(4;\ 6;\ -1)$ и $C(3;\ 5;\ 4)$.

Вариант №16

1 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}$.

2 Найти площадь треугольника ABC, если заданы координаты вершин треугольника $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ 0;\ 1)$.

3 Даны уравнения двух сторон прямоугольника: $2x-3y+5=0$ и $3x+2y-7=0$ и одна из его вершин $A(2;\ -3)$. Составить уравнения двух других сторон прямоугольника.

4 Привести уравнение линии к каноническому виду, определить вид кривой и построить ее: $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.

5 Определить площадь треугольника, образованного осями координат Ox и Oy и прямой пересечения плоскости $5x-6y+3z+120=0$ с плоскостью Oxy.

6 Записать канонические уравнения прямой, проходящей через точки $A(1;\ -2;\ -3)$ и $B(2;\ 3;\ -1)$.

Вариант №17

1 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

2 Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}(1;3;2)$, $\vec{b}(1;2;-1)$ и $\vec{c}(3;8;\alpha)$ компланарны.

3 Даны вершины треугольника $M_1(2;\ 1)$, $M_2(-1;\ -1)$ и $M_3(3;\ 2)$. Составить уравнение его высоты, проведенной из вершины M_1.

4 Привести уравнение линии к каноническому виду, определить вид кривой и построить ее: $x^2-4y^2+6x+5=0$.

5 Найти проекцию точки $M(3;\ -1;\ 4)$ на плоскость $4x-y+5z-7=0$.

6 Определить, при каком значении l уравнения $5x+y-3z-3=0$ и $2x+ly-3z+1=0$ определяют перпендикулярные плоскости.

Вариант №18

1 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, раскрывая его по элементам первой строки.

2 Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a}(3;-1;2)$ и $\vec{b}(1;5;-1)$.

3 Даны вершины треугольника $M_1(2;\ 1)$, $M_2(-1;\ -1)$ и $M_3(3;\ 2)$. Составить уравнение его высоты, проведенной из вершины M_2.

4 Привести уравнение линии к каноническому виду, определить вид кривой и построить ее: $5x^2-6y^2+10x-12y-31=0$.

5 Найти проекцию точки $M(2;\ -1;\ 3)$ на плоскость $2x-y+3z-1=0$.

6 Записать уравнение плоскости, параллельной оси Оy и отсекающей на осях Оx и Оz отрезки $a=3$, $c=5$.

Вариант №19

1 Упростить выражение $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$.

2 Даны векторы $\vec{a}(0;-1;5)$, $\vec{b}(3;1;2)$, $\vec{c}(1;4;-3)$.

Доказать, что $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

3 Даны вершины треугольника $M_1(2;\ 1)$, $M_2(-1;\ -1)$ и $M_3(3;\ 2)$. Составить уравнение его высоты, проведенной из вершины M_3.

4 Определить вид кривой $y^2-10x-2y-19=0$ и построить ее.

5 Составить канонические уравнения прямой $\begin{cases} 2x+3y-z-4=0; \\ 3x-5y+2z+1=0. \end{cases}$

6 Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;\ 2;\ -2)$ параллельно плоскости $x-2y-3z=0$.

Вариант №20

1 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$, раскрывая его по элементам первой строки.

2 Даны вершины четырехугольника $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ 3;\ -5)$, $C(-2;\ 1;\ 2)$, $D(0;\ 5;\ -6)$. Доказать, что его стороны AB і CD параллельны.

3 Даны координаты вершин треугольника $A(-6;-3)$, $B(-4;3)$ и $C(9;2)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины A.

4 Определить вид кривой $y^2-6x+14y+49=0$ и построить ее.

5 Записать уравнение плоскости, проходящей через начало координат перпендикулярно плоскостям $2x-y+3z-1=0$ и $x+2y+z=0$.

6 Построить прямую $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$ и найти ее направляющий вектор.

Вариант №21

1 Найти x из уравнения $\begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix}=0$.

2 Даны векторы $\vec{a}(1;-2;2)$, $\vec{b}(-2;1;3)$. Вычислить $пр_{\vec{a}}\vec{b}$.

3 Даны координаты вершин треугольника $A(-6; -3)$, $B(-4; 3)$ и $C(9; 2)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины B.

4 Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат, зная, что ее центр совпадает с точкой $C(6;-8)$.

5 Найти расстояние от начала координат до плоскости, проходящей через три заданные точки: $A(1;2;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(-1;1;3)$.

6 При каких значениях A и B плоскость $Ax+By+3z-5=0$ перпендикулярна прямой $x=2t+3,\quad y=-3t+5,\quad z=-2t-2$.

Вариант №22

1 Вычислить минор M_{11} определителя четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\pi/4$. Вычислить $|\vec{a}\times\vec{b}|$, если $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=4\sqrt{2}$.

3 Даны координаты вершин треугольника $A(-6; -3)$, $B(-4; 3)$ и $C(9; 2)$. Вычислить длину высоты, проведенной из вершины C.

4 Составить уравнение окружности с центром в точке $C(-1; 2)$, проходящей через точку $A(1; 2)$.

5 Доказать параллельность прямых $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0; \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

6 Найти расстояние от точки $A(5; 1; -1)$ до плоскости $x-2y-2z+4=0$.

Вариант №23

1 Решить систему $\begin{cases} 3y-4x=1; \\ 3x+4y=18. \end{cases}$

2 Вычислить площадь треугольника, если его вершины находятся в точках $A(1; -8; 1)$, $B(5; 0; -1)$, $C(1; -2; 1)$.

3 Даны координаты вершин треугольника $A(7;9)$, $B(-2;0)$ и $C(-3;2)$. Составить уравнение прямой, проходящей через центр тяжести треугольника параллельно стороне AB.

4 Составить уравнение окружности, зная, что точки $A(3; 2)$ и $B(-1; 6)$ являются концами одного из ее диаметров .

5 Составить уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}(-2;1;3)$ и отсекающей на оси Oz отрезок $c=-5$.

6 Через точки $M_1(-6; 6; -5)$ і $M_2(12; -6; 1)$ проведена прямая. Определить точки пересечения этой прямой с координатными плоскостями.

Вариант №24

1 Найти все решения системы $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ y-8+2x=0 \end{cases}$.

2 Вычислить смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, если $\vec{a}(6;0;1)$, $\vec{b}(2;-1;-1)$, $\vec{c}(3;5;6)$.

3 Даны координаты вершин треугольника $A(7;9)$, $B(-2;0)$ и $C(-3;2)$. Составить уравнение прямой, проходящей через центр тяжести треугольника параллельно стороне AC.

4 Составить уравнение окружности, центр которой совпадает с началом координат и прямая $3x-4y+20=0$ является ее касательной.

5 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;-1;3)$ перпендикулярно векторам $\vec{a}_1=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{a}_2=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

6 Найти расстояние между параллельными плоскостями $x-y+z-1=0$ и $2x-2y+2z-5=0$.

Вариант №25

1 Найти все решения системы $\begin{cases} 3x-2y+z=0; \\ 3y+2x+z=0. \end{cases}$

2 Даны три точки: $A(1;0;5)$, $B(-1;3;1)$ и $C(2;-1;0)$. Определить, будут ли векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$ взаимно перпендикулярны.

3 Даны координаты вершин треугольника $A(7;9)$, $B(-2;0)$ и $C(-3;2)$. Составить уравнение прямой, проходящей через центр тяжести треугольника параллельно стороне BC.

4 Составить каноническое уравнение параболы, если уравнение ее директрисы $y-6=0$.

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;-1;4)$ и $B(3;2;-1)$ перпендикулярно плоскости $x+y+2z-3=0$.

6 Проверить, лежит ли точка $M(5;0;-5)$ на прямой, проходящей через точки $A(1;2;1)$ и $B(3;1;-2)$.

Вариант №26

1 Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=5; \\ 2x_1-x_2-x_3=2; \\ 4x_1-2x_2-2x_3=-3. \end{cases}$

2 Вычислить векторное произведение векторов $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$, если $A(0;3;1)$, $B(1;1;-1)$, $C(2;-2;1)$.

3 Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $6x+5y-19=0$.

4 Фокус параболы имеет координаты $F(-6;0)$, а уравнение директрисы – $x-6=0$. Составить каноническое уравнение параболы.

5 Доказать, что прямая $\begin{cases} 5x-3y+2z-5=0; \\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$ лежит в плоскости $4x-3y+7z-7=0$.

6 Даны точки $M_1(0; -1; 3)$ и $M_2(1; 3; 5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Вариант №27

1 Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}(1;\alpha;4)$ и $\vec{b}(2\alpha;\alpha;-\frac{1}{4})$ взаимно перпендикулярны.

3 Через точку $M(2; -1)$ провести прямую, параллельную прямой $4x-7y+12=0$.

4 Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Оy, если она проходит через точку пересечения прямой $x+y=0$ и окружности $x^2+y^2+8y=0$.

5 Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1=0$.

6 Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $2x-3y+6z-12=0$ и координатными плоскостями.

Вариант №28

1 Найти матрицу $C=2A^T-B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$.

2 Даны точки $A(1; 2; -2)$ і $B(1; 5; 2)$. Найти длину вектора $\vec{AB}$ и его направляющие косинусы.

3 Через точку $M(1; -1)$ провести прямую, перпендикулярную прямой $4x-7y+12=0$.

4 Найти точки пересечения прямой $x+2y-7=0$ и эллипса $x^2+4y^2=25$.

5 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1; -2; 1)$ параллельно прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0; \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

6 Найти угол между прямой $x=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-3/2}$ и плоскостью $2x+y+z-4=0$.

Вариант №29

1 Найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2 Даны точки $A(1;\,0;\,-1)$, $B(1;\,2;\,2)$, $C(2;\,0;\,-1)$, $D(3;\,1;\,-2)$. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$.

3 Доказать параллельность прямых $3x+5y-4=0$ и $6x+10y+7=0$.

4 Составить уравнение эллипса, большая ось которого равна 26, а фокусы находятся в точках $F_1(-10;\,0)$, $F_2(10;\,0)$.

5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1;\,-2;\,1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0; \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

6 Найти угол между прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-2}=z$ и прямой, проходящей через начало координат и точку $A(1;\,-1;\,-1)$.

Вариант №30

1 Показать, что матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ не коммутативны.

2 Вычислить векторное произведение векторов $\vec{a}(-1;2;3)$ и $\vec{b}(2;5;-1)$.

3 Доказать перпендикулярность прямых $3x+4y-4=0$ и $8x-6y+7=0$.

4 Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если эллипс проходит через точку $M_1(-2\sqrt{5};\,2)$ и его малая полуось $b=3$.

5 Найти проекцию точки $P(1;\,3;\,-4)$ на плоскость $3x+y-2z=0$.

6 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\,-1;\,2)$ параллельно прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0; \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

4 ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ИТОГОВОГО ЗАДАНИЯ

Задание 1 Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=2; \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1; \\ 5x_1-6x_2+4x_3=3. \end{cases}$

Решение Решим систему уравнений методом Крамера. Для этого вычислим методом треугольников определители: Δ - главный определитель системы; Δx_1, $\Delta x_2, \Delta x_3$ - определители, составленные из главного путем последовательной замены в нём соответственно первого, второго и третьего столбца столбцом свободных членов системы уравнений.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -6 & 4\end{vmatrix}=3\cdot(-5)\cdot 4+2\cdot 4\cdot(-6)+2\cdot 5\cdot(-3)-2\cdot(-5)\cdot 5-3\cdot 2\cdot(-6)-4\cdot 4\cdot(-3)=-4;$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & -5 & 2\\ 3 & -6 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-5)\cdot 4+2\cdot 1\cdot(-6)+3\cdot 2\cdot(-3)-2\cdot(-5)\cdot 3-2\cdot 2\cdot(-6)-4\cdot 1\cdot(-3)=-4;$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 4\end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot 4+2\cdot 4\cdot 3+5\cdot 2\cdot 2-2\cdot 1\cdot 5-3\cdot 3\cdot 2-4\cdot 4\cdot 2=-4;$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 1\\ 5 & -6 & 3\end{vmatrix}=3\cdot(-5)\cdot 3+2\cdot 4\cdot(-6)+5\cdot 1\cdot(-3)-2\cdot(-5)\cdot 5-3\cdot 1\cdot(-6)-3\cdot 4\cdot(-3)=-4,$$

тогда $x_1=\dfrac{\Delta x_1}{\Delta}=\dfrac{-4}{-4}=1$, $x_2=\dfrac{\Delta x_2}{\Delta}=\dfrac{-4}{-4}=1$, $x_3=\dfrac{\Delta x_3}{\Delta}=\dfrac{-4}{-4}=1$.

Решим систему уравнений с помощью обратной матрицы. Для этого запишем систему в матричной форме: $A\cdot X=B$,

где $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -6 & 4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

(A – матрица коэффициентов системы, X– столбец неизвестных, B – столбец свободных членов).

Решение системы находится по формуле $X=A^{-1}\cdot B$, где A^{-1} – матрица, обратная матрице системы. Так как матрица А – квадратная и определитель матрицы $\Delta=\det A=-4\neq 0$, следовательно обратная матрица A^{-1} существует и находится по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},\ \text{где } A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

где M_{ij}- минор, который соответствует элементу a_{ij} матрицы А.

Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} для каждого элемента матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-8;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=0;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -5 & 2\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-6;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & -6\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-3,$$

тогда

$$X=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 0 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-8\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 3\\ -6\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 3\\ 1\cdot 2+3\cdot 1+(-3)\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Такой же ответ был получен при решении системы методом Крамера: $x_1=x_2=x_3=1$.

Сделаем проверку полученного решения, подставив значения переменных в исходную систему: $\begin{cases}3\cdot 1-3\cdot 1+2\cdot 1=2;\\ 4\cdot 1-5\cdot 1+2\cdot 1=1;\\ 5\cdot 1-6\cdot 1+4\cdot 1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}2=2;\\ 1=1;\\ 3=3.\end{cases}$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Задание 2 Задана пирамида, вершины которой находятся в точках $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(2;0;0)$. Методами векторной алгебры найти:

1) длину ребра A_1A_2;
2)угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
3) площадь грани $A_1A_2A_3$;
4) объем пирамиды (рис. 4.1).

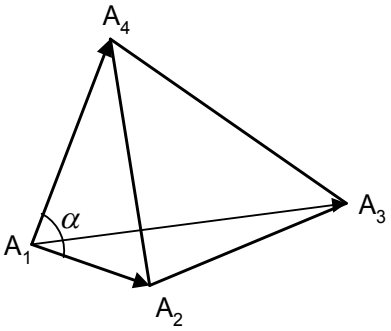


Рис. 4.1

Решение:

1 Найдем координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{(x_{A_2}-x_{A_1};y_{A_2}-y_{A_1};z_{A_2}-z_{A_1})}=\overrightarrow{(0-1;0-(-2);4-1)}=\overrightarrow{(-1;2;3)}$. Тогда длина ребра A_1A_2 пирамиды будет равна модулю вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$ (единиц).

2 Пусть угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 равен α,

тогда $\cos\alpha=\dfrac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}$.

Координаты вектора $\overrightarrow{A_1A_4}=\overrightarrow{(2-1;0-(-2);0-1)}=\overrightarrow{(1;2;-1)}$,

$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ (ед).

Скалярное произведение $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=(-1)\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot(-1)=0$.

Итак, $\cos\alpha = \dfrac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 90^\circ$, т.е. ребра A_1A_2 и A_1A_4 перпендикулярны.

3 Так как векторным произведением векторов является вектор, длина которого равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах, то площадь грани $A_1A_2A_3$ равна половине векторного произведения векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_3}$ (рис. 4.2), т.е. $S = \frac{1}{2}\left|\vec{n}\right|$.

Вектор $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overrightarrow{(0;\, 6;\, 1)}$.

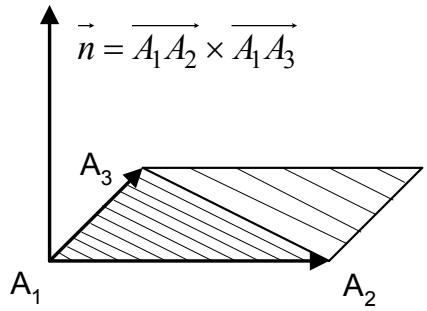


Рис. 4.2

Координаты вектора $\vec{n}$ определим, воспользовавшись теоремой Лапласа разложения определителя по элементам первой строки.

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k},$$

т.е. $\vec{n}(-16;1;-6)$; $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{(-16)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{256+1+36} = \sqrt{293}$.

Таким образом, $S_{A_1A_2A_3} = \dfrac{1}{2}\sqrt{293}$ (кв.ед.).

4 Смешанным произведением векторов является число, равное объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, а объем тетраэдра (пирамиды) равен шестой части объема этого параллелепипеда (рис. 4.2).

Таким образом, объем пирамиды

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|\ \overrightarrow{A_1A_2}\ \ \overrightarrow{A_1A_3}\ \ \overrightarrow{A_1A_4}\ \right|.$$

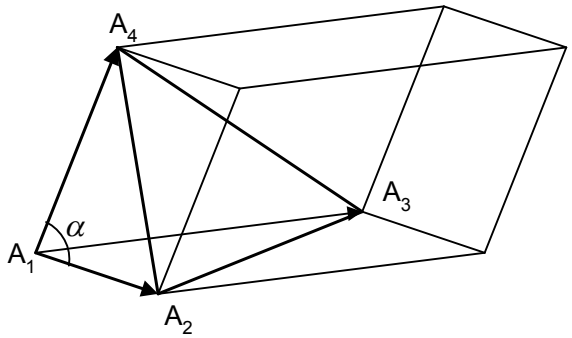


Рис. 4.3

Вычислим смешанное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 16 = -8;$$

$$\left| \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} \right| = |-8| = 8 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{6} \cdot 8 = 1\frac{1}{3} \text{ (куб.ед.).}$$

Задание 3 Даны координаты вершин треугольника ABC: $A(3;-2)$, $B(1;4)$, $C(-2;1)$. Методами аналитической геометрии требуется:

1) составить уравнение стороны AB;
2) составить уравнение высоты, проведенной из вершины C;
3) вычислить длину высоты CD;
4) составить уравнение прямой, проведенной через центр тяжести треугольника параллельно стороне AC;
5) найти внутренний угол треугольника при вершине C (рис. 4.4).

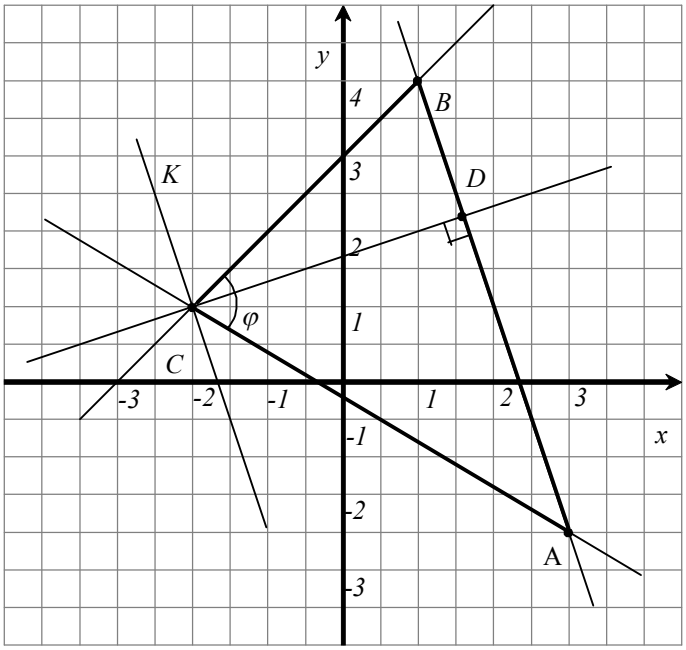


Рис. 4.4

Решение:

1 Запишем уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Для $A(3;-2)$, $B(1;4)$ имеем: $\dfrac{x-3}{1-3} = \dfrac{y-(-2)}{4-(-2)} \Rightarrow \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+2}{6}; \Rightarrow$

$-3(x-3) = y+2 \Rightarrow 3x + y - 7 = 0$ - общее уравнение прямой AB;

$y = -3x + 7$ - уравнение прямой AB с угловым коэффициентом , $k_{AB} = -3$.

2 Составим уравнение прямой $CD \perp AB$.

Из условия перпендикулярности прямых $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}} \quad \Rightarrow \quad k_{CD} = \dfrac{1}{3}$.

Запишем уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через точку $C(x_0;y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Для $C(-2;1)$ имеем: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x+2)$, т.е. $x - 3y + 5 = 0$ - общее уравнение прямой CD.

3 Длину высоты CD найдем как расстояние от точки $C(x_0;y_0)$ до прямой AB по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, где $Ax + By + C = 0$ - уравнение прямой AB.

$$d = \frac{|3\cdot(-2) + 1 - 7|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ (ед.)}.$$

4 Координаты точки M – центра тяжести треугольника находятся как среднее арифметическое координат его вершин:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

$$x_M = \frac{3+1-2}{3} = \frac{2}{3}, \quad y_M = \frac{-2+4+1}{3} = 1, \text{ т.е. } M\left(\frac{2}{3};1\right).$$

Угловой коэффициент прямой AC: $k_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$, $\quad k_{AC} = \dfrac{1+2}{-2-3} = -\dfrac{3}{5}$.

Угловой коэффициент прямой, параллельной прямой AC, также равен $-\dfrac{3}{5}$.

Таким образом, уравнение прямой, проходящей через точку $M\left(\dfrac{2}{3};1\right)$ и имеющей угловой коэффициент $k = -\dfrac{3}{5}$ будет иметь вид: $y - 1 = -\dfrac{3}{5}(x - \dfrac{2}{3})$;

$3x + 5y - 7 = 0$ - общее уравнение искомой прямой.

5) Тангенс угла φ (угла между прямыми AC и BC) находится по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC}\cdot k_{AC}}.$$

$$k_{AC} = -\frac{3}{5}; \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-4}{-2-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad tg\varphi = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - 1\cdot\frac{3}{5}} = 4, \quad \varphi = arctg4 \approx 76^\circ.$$

Задание 4 Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, если расстояние между фокусами $2c = 10$, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Решение По условию задачи фокусы гиперболы расположены на оси ординат, поэтому ее уравнение будет иметь вид $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Параметры a и b находятся из системы $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2; \\ \varepsilon = \frac{c}{b}. \end{cases}$ Учитывая, что $c = 5$, имеем $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25; \\ \frac{5}{b} = \frac{5}{3}. \end{cases}$

Из второго уравнения системы $b = 3$, поэтому из первого уравнения $a^2 = 25 - 9 = 16$.

Таким образом, уравнение гиперболы имеет вид: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

Задание 5 Составить уравнение плоскости (α), проходящей через точку $M_0(2; -1; 1)$ перпендикулярно плоскостям (α_1): $y = 0$ и (α_2): $2x - z + 1 = 0$.

Решение. Уравнения плоскости (α)запишем как уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}(A; B; C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Точка M принадлежит искомой плоскости, поэтому уравнение плоскости (α) будет иметь вид: $A(x - 2) + B(y + 1) + C(z - 1) = 0$.

Из уравнений плоскостей следует, что их нормальные векторы соответственно имеют вид $\overrightarrow{n_1}(0; 1; 0)$, $\overrightarrow{n_2}(2; 0; -1)$

Из условия перпендикулярности плоскостей следует перпендикулярность их нормальных векторов, т.е. $\begin{cases} \alpha \perp \alpha_1 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n_1}(0; 1; 0); \\ \alpha \perp \alpha_2 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{n_2}(2; 0; -1) \end{cases} \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2}$.

$$\overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{k}, \text{ а значит, } \vec{n} = \overrightarrow{(A; B; C)} = \overrightarrow{(-1; 0; -2)}.$$

Таким образом, (α): $-1(x - 2) + -2(z - 1) = 0$ или (α): $x + 2z - 4 = 0$.

Задание 6 Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(-1;2;1)$ на плоскость, проходящую через три точки: $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$, $A_3(2;-1;-2)$.

Решение Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$ находится по формуле

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подставим координаты заданных точек в данное уравнение:

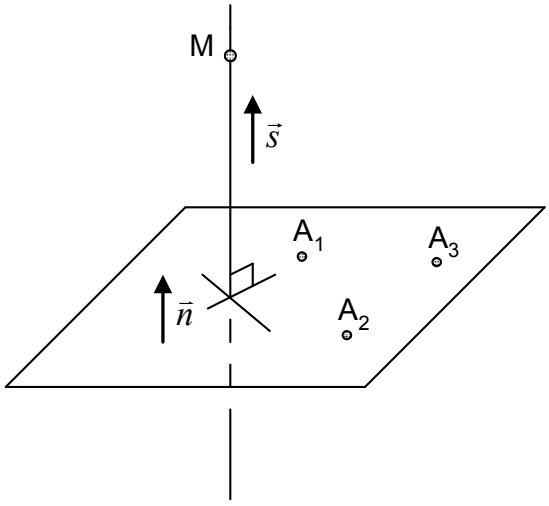
$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 4-3 & 1+4 & -3-2 \\ 2-3 & -1+4 & -2+4 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель по элементам первой строки:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$25(x-3)+3(y+4)+8(z-2)=0;$$

$25x+3y+8z-79=0$ - уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.



Каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0; y_0; z_0)$ с направляющим вектором $\vec{s}(m; n; p)$ имеет вид

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Нормальный вектор плоскости $A_1A_2A_3$ $\vec{n}(25; 3; 8)$ является направляющим вектором ее перпендикуляра, т.е. $\vec{s}(m; n; p) = (25; 3; 8)$, и тогда уравнение искомой прямой $\dfrac{x+1}{25} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-1}{8}$.

5 ВАРИАНТ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЯ И ОБРАЗЕЦ ЕГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Часть первая (тестовая)

1 Если $K = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = 7$, то $N = \lambda K$ имеет вид :

a) $N = \begin{pmatrix} 0 & -14 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$; b) $N = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$; c) $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$; d) $N = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$.

2 Из перечисленных матриц : 1) K_{31}, 2) D_{22}, 3) M_{35}, 4) A_{32}, 5) C_{15} можно перемножить :

a) 1 и 4; b) 2 и 5; c) 1 и 5; d) 3 и 5.

3 Даны векторы $\vec{a}(-4; 2; 1)$ и $\vec{b}(0; 5; -3)$, следовательно вектор $(3\vec{a} + 2\vec{b})$ имеет координаты :

a) (-12 ; 16; -3); b) (12 ; -16 ; 3); c) (-9 ; 16 ; -3); d) (–12 ; 16 ; 9).

4 Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид :

a) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$; b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$; c) $\vec{a} - \vec{b} = 0$; d) $\vec{a} + \vec{b} = 0$.

5 Косинус угла между векторами $\vec{a}$ (3 ; 4 ; 2) и $\vec{b}$ (-3 ; 2 ; 4) равен :

a) $\frac{1}{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{7}{29}$; d) $\frac{3}{2}$.

6 Геометрическое место точек, равноудаленных от точки (фокуса) и прямой (директрисы), есть:

a) окружность; b) эллипс; c) гипербола; d) парабола.

7 Уравнение эллипса с полуосями a = 3, b = 2 имеет вид :

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$; c) $3x^2 + 2y^2 = 1$; d) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

8 Две прямые: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$ перпендикулярны, если:

a) $k_1 = k_2$; b) $k_1 = -k_2$; c) $k_1 \cdot k_2 = 1$; d) $k_1 \cdot k_2 = -1$.

9 Параметрические уравнения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{0}$ имеют вид :

a) $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t + 1 \\ z = -3t \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -2 + t \\ z = 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t + 2 \\ z = -3 \end{cases}$.

10 Прямая $\frac{X+1}{2} = \frac{Y}{-3} = \frac{Z+3}{1}$ и плоскость AX + 2Y + 2Z – 5 = 0 параллельны при A равном :

a) - 3; b) - 1; c) 2; d) 1.

Часть вторая

1 Доказать, что матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}6 & -9 & 1\\ -11 & 5 & 2\\ -2 & 3 & -8\end{pmatrix}$ взаимно обратные.

2 Даны силы $\vec{F}_1(1;-2;3)$, $\vec{F}_2(3;4;-1)$ и $\vec{F}_3(-2;0;5)$, приложенные к одной точке. Вычислить работу, выполняемую равнодействующей этих сил, если ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $M_1(1;-3;5)$ в точку $M_2(2;4;3)$.

3 Найти полуоси эллипса $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$.

4 Найти синус угла между прямой $\begin{cases}x+y+z-4=0;\\ 2x-y+4z+5=0\end{cases}$ и плоскостью $x+y+3z-1=0$.

Решение:

Часть первая (тестовая)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	c	a	b	c	d	d	d	d	c

1 Чтобы умножить матрицу на число, нужно каждый элемент матрицы умножить на это число.

2 Матрицы можно перемножить, если количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй матрицы. Тоесть можно перемножить матрицы $К_{31}$ и $С_{15}$.

3 $3\vec{a}+2\vec{b}=3\cdot\overline{(-4;2;1)}+2\cdot\overline{(0;5;-3)}=\overline{(-12;6;3)}+\overline{(0;10;-6)}=\overline{(-12;16;-3)}$.

4 Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

5 Воспользуемся формулой $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3\cdot(-3)+4\cdot2+2\cdot4}{\sqrt{3^2+4^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+2^2+4^2}}=\dfrac{7}{29}$.

6 Геометрическое место точек, равноудаленных от точки (фокуса) и прямой (директрисы), есть парабола.

7 Каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, поэтому уравнение эллипса с полуосями $a=3$, $b=2$ имеет вид $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

8 Две прямые: $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ перпендикулярны, если $k_1\cdot k_2=-1$.

9 Параметрические уравнения прямой (l): $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$, где $A(x_1;\,y_1;\,z_1)\in l$ и $\vec{s}(m;\,n;\,p)$ - ее направляющий вектор, имеет вид $\begin{cases} x=mt+x_1 \\ y=nt+y_1 \\ z=pt+z_1 \end{cases}$.

10 Прямая $\frac{X+1}{2}=\frac{Y}{-3}=\frac{Z+3}{1}$ и плоскость AX + 2Y + 2Z – 5 = 0 параллельны, если направляющий вектор прямой перпендикулярен нормальному вектору плоскости, т.е. $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$.
$\vec{s}\cdot\vec{n}=2A+(-3)\cdot 2+1\cdot 2=2A-4$; $2A-4=0$ при $A=2$.

Часть вторая

1 $A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -9 & 2 \\ -5 & 27 & -6 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 0\cdot(-1)+3\cdot 2+1\cdot(-5) & 0\cdot 5+3\cdot(-9)+1\cdot 27 & 0\cdot(-1)+3\cdot 2+1\cdot(-6) \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 2+0\cdot(-5) & 2\cdot 5+1\cdot(-9)+0\cdot 27 & 2\cdot(-1)+1\cdot 2+0\cdot(-6) \\ 9\cdot(-1)+2\cdot 2+(-1)\cdot(-5) & 9\cdot 5+2\cdot(-9)+(-1)\cdot 27 & 9\cdot(-1)+2\cdot 2+(-1)\cdot(-6) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$B\cdot A=\begin{pmatrix} -1 & 5 & -1 \\ 2 & -9 & 2 \\ -5 & 27 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 9 & 2 & -1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} (-1)\cdot 0+5\cdot 2+(-1)\cdot 9 & (-1)\cdot 3+5\cdot 1+(-1)\cdot 2 & (-1)\cdot 1+5\cdot 0+(-1)\cdot(-1) \\ 2\cdot 0+(-9)\cdot 2+2\cdot 9 & 2\cdot 3+(-9)\cdot 1+2\cdot 2 & 2\cdot 1+(-9)\cdot 0+2\cdot(-1) \\ (-5)\cdot 0+27\cdot 2+(-6)\cdot 9 & (-5)\cdot 3+27\cdot 1+(-6)\cdot 2 & (-5)\cdot 1+27\cdot 0+(-6)\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $A\cdot B=B\cdot A=E$, т.е. матрицы A и B взаимно обратные.

2 Механическая интерпретация скалярного произведения векторов состоит в том, что работа A постоянной силы $\vec{F}$ на прямолинейном участке пути $\vec{S}$ равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения, т.е. $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

Найдем равнодействующую сил $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$:

$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\overrightarrow{(1+3-2;\,-2+4+0;\,3-1+5)}=\overrightarrow{(2;\,2;\,7)}$.

Вектор перемещения $\vec{S}=\overrightarrow{M_1M_2}(2-1;\ 4-(-3);\ 3-5)=\overrightarrow{(1;\,7;\,-2)}$.

Тогда $A=\vec{F}\cdot\vec{S}=2\cdot 1+2\cdot 7+7\cdot(-2)=2+14-14=2$.

Ответ: $A=2$.

3 Приведем уравнение эллипса к каноническому виду $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ алгебраическими преобразованиями:

$$4(x^2-2x)+3(y^2+4y)-32=0;$$
$$4(x^2-2x+1-1)+3(y^2+4y+4-4)-32=0;$$
$$4(x-1)^2-4+3(y+2)^2-12-32=0;$$
$$4(x-1)^2+3(y+2)^2=48;$$
$$\frac{(x-1)^2}{12}+\frac{(y+2)^2}{16}=1.$$

Таким образом, полуоси эллипса: $a=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$; $b=4$.

Ответ: $a=2\sqrt{3}$; $b=4$.

4 Воспользуемся формулой $\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$.

Направляющий вектор плоскости $\vec{n}=\overrightarrow{(A;B;C)}=\overrightarrow{(1;1;3)}$, а направляющий вектор прямой

$$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=5\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}.$$

$\vec{s}=\overrightarrow{(m;n;p)}=\overrightarrow{(5;-2;-3)}$.

Тогда $\sin\varphi=\frac{|1\cdot5+1\cdot(-2)+3\cdot(-3)|}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}\cdot\sqrt{5^2+(-2)^2+(-3)^2}}=\frac{|-6|}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{38}}=\frac{6}{\sqrt{418}}=\frac{3\sqrt{418}}{209}$.

Ответ: $\sin\varphi=\frac{3\sqrt{418}}{209}$.

6 ПЕРЕЧЕНЬ ТЕСТОВЫХ ЗАДАНИЙ

6.1 Линейная алгебра

1 Если матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, то их сумма равна:

a) $\begin{pmatrix}3 & 2\\ 5 & 3\end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 24 & 0\end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix}1 & 6\\ 11 & 3\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}4 & 8\\ -8 & 9\end{pmatrix}$.

2 Если $K=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $\lambda=7$, то $N=\lambda K$ имеет вид :

a) $N=\begin{pmatrix}0 & -14\\ 7 & 7\end{pmatrix}$; b) $N=\begin{pmatrix}7 & -9\\ 7 & 7\end{pmatrix}$; c) $N=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 7\end{pmatrix}$; d) $N=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 7 & 7\end{pmatrix}$.

3 Из перечисленных матриц : 1) K_{31}, 2) D_{22}, 3) M_{35}, 4) A_{32}, 5) C_{15}

можно перемножить :

a) 1 и 4; b) 2 и 5; c) 1 и 5; d) 3 и 5.

4 Квадратная матрица A называется невырожденной, если ее определитель Δ

a) $\Delta > 0$; b) $\Delta < 0$; c) $\Delta \neq 0$; d) $\Delta = 0$.

5 Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 6 & -1 \\ 2 & 2 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ равен :

a) $\Delta = 3$; b) $\Delta = 21$; c) $\Delta = 0$; d) $\Delta = 9$.

6 Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ равен нулю при значении x :

a) $x = \pm 1$; b) $x = 0$; c) $x = 2$; d) x = 3.

7 Определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ равен :

a) 4 ; b) -2 ; c) 0 ; d) -3 .

8 Алгебраическое дополнение элемента a_{13} матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ имеет вид:

a) $-\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$; c) $-\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$.

9 Алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ равно:

a) -1; b) 1; c) -22; d) 22 .

10 Разложение определителя $\Lambda = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -4 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ по элементам второй строки имеет вид:

a) $-a_{21} + a_{23}$; c) $2a_{21} + 10a_{22} - a_{23}$;

b) $3a_{21} + a_{22} - 4a_{23}$; d) $-2a_{21} + 2a_{22} - a_{23}$.

11 Разложение определителя $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & 3 \\ -1 & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & 1 \end{vmatrix}$ по элементам второго столбца имеет вид :

a) $3a_{12} + a_{32}$; c) $a_{12} - a_{22}$;

b) $-a_{12} - a_{22} - 3a_{32}$; d) $a_{12} + a_{22} - 3a_{32}$.

12 Матрица системы $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = -1 \end{cases}$ имеет вид :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

13 Расширенная матрица системы $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + x_1 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ имеет вид :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

14 Главный определитель системы уравнений $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$ равен:

a) $\Delta = 7$; b) $\Delta = -7$; c) $\Delta = -5$; d) $\Delta = 1$.

15 Матрица A^T, транспонированная к матрице $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, имеет вид :

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

16 Для матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ и $\lambda = 2$ произведение $A^T \cdot \lambda$ (A^T - транспонированная матрица) имеет вид :

a) $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$.

17 Произведение матриц A = (3 1 2) и B^T , если B = (- 2 1 4), равно :

a) (0); b) (3); c) (- 6 2 4); d) $\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

18 Матрица B называется обратной к матрице A (A - квадратная , невырожденная), если выполняются условия :

a) $A \cdot B^{-1} = E$; c) AB = BA = E ;

b) A + B = E ; d) $A \cdot B^T = E$, где E – единичная матрица .

19 Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$ не имеет обратной при λ, равном :

a) - 2; b) - 1; c) 2; d) 1.

20 Решением системы A·X = B, где A- невырожденная матрица , есть:

a) $X = \dfrac{B}{A}$; b) $X = A - BE$; c) $X = A^{-1} \cdot B$; d) $X = B \cdot A^{-1}$.

6.2 Векторная алгебра

1 Вектор $\vec{e}(x; y; z)$ является единичным, если $x; y; z$ удовлетворяют условию:

a) $x = y = z = 1$; b) $x + y + z = 1$; c) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; d) $x = 0; y = 0; z = 1$.

2 Начало вектора $\overrightarrow{AB}$ (7; -1; 3) совпадает с точкой A(-3; 1; 0). Тогда конец вектора имеет координаты :

a) (4; 0; 3) ; b) (-4; 0; -3) ; c) (10; -2; 3) ; d) (-10; 2; -3) .

3 Вектор, противоположный вектору $2\vec{a}$, если $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, имеет координаты:

a) (6; - 4; 2) ; b) (-6; 8; -2) ; c) (2; 4; 6) ; d) (- 2; 4; - 6) .

4 Линейная комбинация векторов $3\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a}$ (0; - 1; 3); $\vec{b}$ (4; - 2; 1), имеет координаты :

a) (7; 5; 10) ; b) (7; - 5; 10) ; c) (4; - 5; 10) ; d) (4; 5; 10) .

5 Задано : $\overrightarrow{AB}$ (4; - 1; 2); $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$; точка D (- 3; 0; 1). Тогда координаты точки A равны :

a) (- 11; 2; - 3) ; b) (11; - 2; 3) ; c) (5; - 2; 5) ; d) (- 5; 2; - 5) .

6 Диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$ и выходящая из их общего начала, равна :

a) $\vec{d} = (9;\ 1;\ 4)$; c) $\vec{d} = -9\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$;

b) $\vec{d}(18; -6; -12)$; d) $\vec{d} = -18\vec{i} + 6\vec{j} + 12\vec{k}$.

7 Если $\vec{a}$ (3;-4; 2) и λ =3, то длина вектора $\lambda\vec{a}$ равна:

a) 29 ; b) $\sqrt{29}$; c) 87; d) 3 $\sqrt{29}$.

8 Длина вектора $\vec{a}(3;\ y;-1)$ равна $\sqrt{35}$. Тогда координата y принимает значение :

a) y = 33 ; b) y = ± 5 ; c) y = $\pm 3\sqrt{3}$; d) y = 31.

9 Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ (6; 0; 8) равны :

a) $\cos\alpha = \frac{3}{7},\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = \frac{4}{7}$; c) $\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{14}},\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = \frac{8}{\sqrt{14}}$;

b) $\cos\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = \frac{4}{5}$; d) $\cos\alpha = \frac{3}{5},\ \cos\beta = 1,\ \cos\gamma = \frac{4}{5}$.

10 Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется так:

a) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$; b) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$; c) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot tg\varphi$; d) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot ctg\varphi$.

11 Задано : $|\vec{a}| = 2$; $|\vec{b}| = 5$; угол между этими векторами равен $\frac{\pi}{3}$. Тогда их скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно :

a) 10 ; b) 5 ; c) $5\sqrt{3}$; d) $10\sqrt{3}$.

12 Косинус угла между векторами $\vec{a}$ (3 ; 4 ; 2) и $\vec{b}$ (-3 ; 2 ; 4) равен :

a) $\frac{1}{3}$; b) $\sqrt{3}$; c) $\frac{7}{29}$; d) $\frac{3}{2}$.

13 Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ (3; - 1; - 4) и $\vec{b}$ (1; - 3; 5) равно :

a) - 14 ; b) $\overrightarrow{(3;\ 3;-20)}$; c) 14 ; d) $\overrightarrow{(-3;-3;20)}$.

14 Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет вид :

a) $\vec{a}\times\vec{b} = 0$; b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; c) $\vec{a}-\vec{b} = 0$; d) $\vec{a}+\vec{b} = 0$.

15 Вектор $\vec{a}(2;\alpha;-1)$ перпендикулярен вектору $\vec{b}(\alpha;\ 4;\ 6)$ при значении α , равном :

a) 4 ; b) 2 ; c) 1; d) - 1 .

16 Проекция вектора $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{b}$ определяется по формуле:

a) $\frac{\vec{a}\times\vec{в}}{|\vec{в}|}$; b) $\frac{\vec{a}\times\vec{в}}{|\vec{a}|}$; c) $\frac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{a}|}$; d) $\frac{\vec{a}\cdot\vec{в}}{|\vec{в}|}$.

17 Модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен :

a) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$; b) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\varphi$; c) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi$; d) $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot tg\,\varphi$.

18 Треугольник построен на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда площадь треугольника определяется по формуле :

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; b) $\vec{a}\times\vec{b}$; c) $\frac{1}{2}\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|$; d) $\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

19 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=\frac{\pi}{6}$, причем $|\vec{a}|$ = 7, $|\vec{b}|$ = 6. Тогда $|\vec{a}\times\vec{b}|$ равен :

a) $21\sqrt{3}$; b) 21 ; c) 10,5 ; d) $\frac{21\sqrt{3}}{2}$.

20 Векторное произведение векторов, заданных своими координатами, находится по формуле:

a) $\vec{a}\times\vec{в}$ = (x_1x_2; y_1y_2; z_1z_2); b) $\vec{a}\times\vec{в}$ = $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$;

c) $\vec{a}\times\vec{в}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$; d) $\vec{a}\times\vec{в}=.\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

21 Векторное произведение векторов $\vec{a}$(3; -1; 2) и $\vec{b}$(-3; 1; -2) равно :

a) - 14 ; b) $\overrightarrow{(-9;\ -1;\ -4)}$; c) 0 ; d) $\overrightarrow{(9;\ 1;\ 4)}$.

22 Если два вектора: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны, то выполнено условие :

a) $\vec{a}=\lambda\cdot\vec{b}$; b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; c) $\vec{a}+\vec{b}=0$; d) $\vec{a}-\vec{b}=0$.

23 Два вектора $\vec{a}=\alpha\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}(3;2;\beta)$ коллинеарны при значениях α и β, равных :

a) $\alpha=3,\ \beta=-1$; b) $\alpha=6,\ \beta=-2$; c) $\alpha=3,\ \beta=-2$; d) $\alpha=6,\ \beta=-\frac{1}{2}$.

24 Объём пирамиды, построенной на векторах $\vec{a},\vec{в},\vec{c}$, вычисляется по формуле:

a) $\vec{a}\cdot\vec{в}\cdot\vec{c}$; b) $|\vec{a}\cdot\vec{в}\cdot\vec{c}|$; c) $\frac{1}{6}\vec{a}\cdot\vec{в}\cdot\vec{c}$; d) $\frac{1}{6}|\vec{a}\cdot\vec{в}\cdot\vec{c}|$.

25 Условие компланарности трех векторов: $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет вид :

a) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$; b) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=0$; c) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$; d) $\vec{a}=\vec{b}=\vec{c}$.

6.3 Аналитическая геометрия на плоскости

6.3.1 Прямая на плоскости

1 Какие из перечисленных точек : $M_1(3;\ 1)$, $M_2(2;\ 3)$, $M_3(-\ 2;\ 1)$, $M_4(5;\ 1)$, $M_5(0;\ 4)$ лежат на прямой 2x + 3y – 13 = 0 :

a) M_1 и M_3; b) M_2 и M_4; c) M_1 и M_5; d) M_3 и M_5?

2 Точка пересечения двух прямых : $x + y - 2 = 0$ и $2x + y + 1 = 0$ имеет координаты:

a) (3 ; -5) ; b) (1 ; -1) ; c) (-1 ; 1) ; d) (-3 ; 5) .

3 Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид :

a) $y = kx + b$; b) $y - y_1 = k(x - x_1)$; c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; d) $ax + by + c = 0$.

4 Прямая проходит через точку A (- 2; 5) перпендикулярно вектору $\vec{S}(3;4)$. Тогда уравнение прямой имеет вид :

a) 3(x – 2) + 4(y + 5) = 0 ; c) - 2 (x – 3) + 5(y – 4) = 0 ;
b) 3(x + 2) + 4(y - 5) = 0 ; d) - 2 (x + 3) + 5(y + 4) = 0 .

5 Уравнение прямой, проходящей через точку M (1 ; 2) перпендикулярно вектору $\vec{a}$(2 ; -3), имеет вид:

a) 2x - 3y – 8 = 0; b) 2x + 3y + 4 = 0; c) 2x - 3y + 4 = 0; d) 2x - 3y – 4 = 0.

6 Прямая $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ имеет нормальный вектор с координатами:

a) (3;4); b) (4;3); c) $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$; d) $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right)$.

7 Уравнение прямой, проходящей через точку M(- 3; 1) параллельно вектору $\vec{S}$(2; 5), имеет вид :

a) $2(x - 3) + 5(y + 1) = 0$; c) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5}$;
b) $2(x + 3) + 5(y - 1) = 0$; d) $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{5}$.

8 Уравнение прямой, проходящей через точки M_1(-3; 1) и M_2(0; -2), имеет вид:

a) $\frac{X-3}{-3} = \frac{Y+1}{-1}$; b) $\frac{X+3}{3} = \frac{Y-1}{-3}$; c) $\frac{X-3}{0} = \frac{Y+1}{-2}$; d) $\frac{X+3}{0} = \frac{Y-1}{-2}$.

9 Заданы точки A (1; 2) и B (2 ; 2) . Уравнение прямой AB имеет вид :

a) x – 1 = 0 ; b) y = 2 ; c) y + 2 = 0 ; d) x + 1 = 0.

10 Уравнение прямой, проходящей через точки M (1; 1) и N (3; 3), имеет вид:

a) Y = X ; b) Y = 3X ; c) X = 3Y ; d) X + Y = 0 .

11 Уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку М (3; 4), имеет вид :

a) $y = \frac{3}{4}x$; b) $4x - 3y = 0$; c) $3x + 4y = 0$; d) $4x + 3y = 0$.

12 Угловой коэффициент прямой $-2x + y - 5 = 0$ равен:

a) –2 ; b) 2 ; c) $-\frac{2}{5}$; d) $\frac{2}{5}$.

13 Уравнение прямой, проходящей через точку М (- 2; 3) и имеющей угловой коэффициент $k = 2$, имеет вид :

a) $(x - 2) = 2(y + 3)$; c) $(x + 2) = 2(y - 3)$;
b) $y - 3 = 2(x + 2)$; d) $y + 3 = 2(x - 2)$.

14 Прямая $x + y = 3$ образует с осью ОХ угол, равный :

a) 45° ; b) 135° ; c) 30° ; d) 60° .

15 Уравнение прямой, проходящей через точку (3; 4) параллельно оси ОХ, имеет вид:

a) $x = 3$; b) $y = 4$; c) $y = -3$; d) $y = -4$.

16 Уравнение прямой, проходящей через точку М (- 2; - 5) параллельно оси OY, имеет вид :

a) $x = 2$; b) $y = 5$; c) $x = -2$; d) $y = -5$.

17 Уравнение прямой, проходящей через точку М(-3 ; 4) перпендикулярно оси ОХ, имеет вид :

a) $x = 3$; b) $y = -4$; c) $x = -3$; d) $y = 4$.

18 Прямая $3x - 4y + 12 = 0$ отсекает на осях координат отрезки :

a) 3 и -4 ; b) –3 и 4 ; c) –4 и 3 ; d) 4 и –3 .

19 Уравнение прямой, отсекающей на осях координат отрезки 2 и 4, имеет вид :

a) $y = 4 - 2x$; b) $2x + 4y = 1$; c) $4x + 2y = 1$; d) $x = 2y$.

20 Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты удовлетворяют условию :

a) $k_1 + k_2 = 0$; b) $k_1 - k_2 = 0$; c) $k_1 \cdot k_2 = 1$; d) $k_1 \cdot k_2 = -1$;

21 Из перечисленных прямых :

1) $y = \frac{2}{3}x + 1$, 2) $3x - 2y + 5 = 0$, 3) $y = -\frac{2}{3}x + 3$, 4) $4x - 6y - 3 = 0$,
5) $3y - 2x + 7 = 0$ являются параллельными:

a) 1 и 2 ; b) 1, 2 и 4 ; c) 1, 4 и 5 ; d) 2 и 3.

22 Прямые $3x - 2y + 4 = 0$ и $x + my - 5 = 0$ параллельны при значении m, равном :

a) $\frac{2}{3}$; b) $-\frac{2}{3}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $-\frac{3}{2}$.

23 Две прямые: $y = k_1 \cdot x + b_1$ и $y = k_2 \cdot x + b_2$ перпендикулярны, если :

a) $k_1 = k_2$; b) $k_1 = -k_2$; c) $k_1 \cdot k_2 = 1$; d) $k_1 \cdot k_2 = -1$.

24 Из перечисленных прямых :

1) 3x – 2y = 0, 2) 2x + 3y – 5 = 0, 3) 3x + 2y – 1 = 0, 4) 2x – 3y + 2 = 0

перпендикулярными являются :

a) 1 и 2 ; b) 2 и 3 ; c) 1 и 4 ; d) 2 и 4.

25 Угол между двумя прямыми на плоскости определяется формулой :

a) $\sin\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$; b) $tg\varphi = \dfrac{k_2 + k_1}{1 - k_1 \cdot k_2}$; c) $\cos\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 - k_1 \cdot k_2}$; d) $tg\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$.

26 Угол между прямыми 2x – 3y + 1 = 0 и 3x + 2y _2 = 0 равен:

a) 0°; b) π/4; c) π/2; d) π/3.

27 Расстояние от точки $M(x_0 ; y_0)$ до прямой A*x* + B*y* + C = 0 определяется формулой :

a) $d = |Ax_0 + By_0 + C|$; c) $d = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot |Ax_0 + By_0 + C|$;

b) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{A^2 + B^2}$; d) $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

6.3.2 Кривые второго порядка

1 Геометрическое место точек, равноудаленных от одной точки, есть:

a) окружность; b) эллипс ; c) гипербола ; d) парабола .

2 Какие из перечисленных уравнений определяют окружность:

a) $3X^2 + 4Y^2 = 12$; b) $3X^2 - 4Y^2 = 12$; c) $X^2 + Y^2 - 9 = 0$; d) $2X^2 = 4Y + 2$.

3 Задано уравнение окружности $(X - 1)^2 + (Y + 3)^2 = 16$. Ее радиус и координаты центра равны:

a) R = 16, C (1; -3); c) R = 4, C (-1 ; 3);

b) R = 4, C (1; -3); d) R = 4, C(0 ; 0).

4 Геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух заданных точек постоянна, называется :

a) окружность; b) эллипс; c) гипербола; d) парабола.

5 Уравнение эллипса с полуосями a = 3 ; b = 2 имеет вид:

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1$; c) $3x^2 + 2y^2 = 1$; d) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

6 Полуоси эллипса $X^2 + 4Y^2 = 16$ равны:

a) 1 и 4; b) 16 и 4 ; c) 4 и 2 ; d) 1 и 16.

7 Большая ось эллипса $5x^2 + 16y^2 = 80$ равна:

a) 5 ; b) 4 ; c) 8 ; d) $2\sqrt{5}$.

8 Малая ось эллипса $4x^2+9y^2=36$ равна:

a) 9 ; b) 2 ; c) 6 ; d) 4.

9 Полуоси эллипса a = 2, b = 3, тогда межфокусное расстояние равно:

a) 2C = 10 ; b) $2C=2\sqrt{5}$; c) 2C = 2 ; d) 2C = $\sqrt{5}$.

10 Координаты вершин эллипса $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ равны:

a) $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(-2;0)$, $B_2(2;0)$; c) $A_1(0;-3)$, $A_2(0;3)$, $B_1(0;-2)$, $B_2(0;2)$;

b) $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$, $B_1(0;-2)$, $B_2(0;2)$; d) $A_1(0;-9)$, $A_2(0;9)$, $B_1(4;0)$, $B_2(-4;0)$.

11 Какие из перечисленных уравнений:

1) $3x^2 + 4y^2 = 12$, 2) $x^2 - y^2 = 1$, 3) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}=1$, 4) $2x^2 - y^2 = 2$, 5) $x^2 + y^2 = 4$

определяют гиперболу?

a) 1 и 3 ; b) 2 и 4 ; c) 1 и 5 ; d) 3 и 5 .

12 Оси гиперболы $9X^2-16Y^2=144$ равны :

a) 8 и 6 ; b) 9 и 16 ; c) 8 и 3 ; d) 4 и 3 .

13 Действительная ось гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ равна:

a) 9; b) 4; c) 6; d) 3.

14 Мнимая ось гиперболы $9x^2-16y^2=144$ равна:

a) 9; b) 16; c) 6; d) 8.

15 Координаты фокусов гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ равны:

a) $F_1(4;3)$, $F_2(-4;3)$; c) $F_1(0;5)$, $F_2(0;-5)$;

b) $F_1(4;3)$, $F_2(4;-3)$; d) $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$.

16 Вершины гиперболы $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ находятся в точках :

a) (3; 0) и (- 3; 0); c) (0; - 3) и (0; 3);

b) (0; 2) и (0; - 2); d) (- 2; 0) и (2; 0).

17 Для гиперболы $\frac{X^2}{25}-\frac{Y^2}{16}=1$ уравнения асимптот имеют вид :

a) $y=\pm\frac{4}{5}x$; b) $y=\pm\frac{5}{4}x$; c) $y=\pm\frac{25}{16}x$; d) $y=\pm\frac{16}{25}x$.

18 Геометрическое место точек, равноудаленных от точки (фокуса) и прямой (директрисы), есть:

a) окружность; b) эллипс; c) гипербола; d) парабола.

19 Координаты фокуса F параболы $Y^2 = 4X$ равны :

a) (-1; 0); b) (1; 0); c) (2; 0); d) (4 ; 0).

20 Уравнение директрисы параболы $y^2 = 4x$ имеет вид :

a) $x = 1$; b) $x = -1$; c) $x = 2$; d) $x = -2$.

6.4 Аналитическая геометрия в пространстве

1 Каким из перечисленных плоскостей :

1. $3x - y + 2z - 4 = 0$,
2. $x + 3y + z + 1 = 0$,
3. $2x - 5y + z - 5 = 0$,
4. $x + 3y + z + 5 = 0$,
5. $5x + y - z - 2 = 0$

принадлежит точка M (0 ; -2 ; 1) ?

a) 1 и 5; b) 1 и 4; c) 2 и 3; d) 2 и 5.

2 Среди перечисленных плоскостей:

1. $3x - z + 2 = 0$,
2. $3x + 2z = 0$,
3. $x - 3y + z = 0$,
4. $z - x = 0$,
5. $x - 2y = 0$,
6. $z + 3y + 1 = 0$

через ось OY проходят :

a) 1, 2 и 3; b) 3 и 5; c) 2 и 4; d) 1 и 6.

3 Какая из перечисленных плоскостей:

1. $X + 3Z - 2 = 0$,
2. $2X + Y + 1 = 0$,
3. $-X + 4Y = 0$,
4. $2Y + 3Z - 1 = 0$,
5. $5X - 3Y = 0$,
6. $3Y - 4Z = 0$

проходит через ось OZ ?

a) 1 и 4; b) 2, 3 и 5; c) 4 и 6; d) 3 и 5.

4 Какие из перечисленных плоскостей :

1. $3X - Y + 2Z - 1 = 0$,
2. $Y - 4Z + 2 = 0$,
3. $5X + 2Y + 3 = 0$,
4. $3Y - Z + 1 = 0$,
5. $3X - 4Y + 1 = 0$

параллельны оси OX ?

a) 1, 3 и 5; b) 1, 2 и 3; c) 3 и 5; d) 2 и 4.

5 Какая из перечисленных плоскостей :

1. $3x - y + 2 = 0$,
2. $x + y - 3z = 0$,
3. $2x + 5z = 0$,
4. $z - y + 3 = 0$,
5. $2x - z + 1 = 0$

проходит через начало координат ?

a) 1, 4 и 5; b) 3 и 4; c) 2 и 3; d) 2 и 4.

6 Плоскость $3X + 2Z - 1 = 0$ проходит :

a) через ось OY;
b) параллельно плоскости XOZ;
c) через начало координат;
d) параллельно оси OY.

7 Уравнение плоскости, проходящей через точку M (2; 3; 5) параллельно плоскости XOY имеет вид :

a) $x = 2$; b) $y = 3$; c) $z = 5$; d) $2x + 3y + 5z = 0$.

8 Уравнение плоскости, проходящей через точку M (- 3; 2; 4) параллельно плоскости YOZ имеет вид :

a) X = 3; b) X = - 3; c) Y = 2; d) Z = 4.

9 Нормальный вектор плоскости 3Z = 2X + 4Y – 5 имеет координаты:

a) (3; 2; 4); b) (2; 4; 3); c) (-3; 2; 4); d) (2; 4; -3).

10 Длина нормального вектора плоскости - X + 3Y + 2Z – 1 = 0 равна :

a) 14; b) $\sqrt{14}$; c) 12 ; d) $\sqrt{12}$.

11 Уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}$ (- 4; 1; 3) имеет вид :

a) $-4(x+x_0)+(y+y_0)+3(z+z_0)=0$; c) $\frac{x-x_0}{-4}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{3}$;

b) $-4(x-x_0)+(y-y_0)+3(z-z_0)=0$; d) $4(x-x_0)=-(y-y_0)=-3(z-z_0)$.

12 Две плоскости: AX + 3Y + Z – 1 = 0 и 2X + Y + 5Z + 3 = 0 перпендикулярны при A, равном :

a) A = 2; b) A = 4; c) A = -2; d) A = -4.

13 Направляющий вектор $\vec{S}$ прямой $\frac{X-1}{2}=\frac{Y-3}{-2}=\frac{Z+4}{3}$ имеет координаты :

a) (1; 3; -4); b) (2; -2; 3); c) (1; 3; 4); d) $(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};\frac{4}{3})$.

14 Уравнение прямой, проходящей через точку A (- 2; 1; - 3) параллельно вектору $\vec{a}(2;0;-3)$, имеет вид :

a) $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{-3}$; c) $\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{-3}$;

b) 2(x + 2) – 3(y + 3) = 0; d) 2(x - 2) – 3(y - 3) = 0.

15 Две прямые: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ параллельны, если :

a) $m_1m_2=n_1n_2=p_1p_2$; *c*) $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$;

b) $\frac{m_1}{m_2}+\frac{n_1}{n_2}+\frac{p_1}{p_2}=0$; *d*) $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

16 Условие перпендикулярности двух прямых: $\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$ записывается в виде :

a) $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$; c) $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\neq 0$;

b) $m_1m_2=n_1n_2=p_1p_2$; d) $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

17 Параметрические уравнения прямой в пространстве имеют вид :

$a)\ \dfrac{X-X_0}{m}=\dfrac{Y-Y_0}{n}=\dfrac{Z-Z_0}{p}$; c) $\begin{cases} x=mt+x_0 \\ y=nt-y_0 \\ z=pt-z_0 \end{cases}$;

$b)\ \dfrac{X-X_1}{X_2-X_1}=\dfrac{Y-Y_1}{Y_2-Y_1}=\dfrac{Z-Z_1}{Z_2-Z_1}$; $d)\ \begin{cases} x-x_0=t \\ y-y_0=t \\ z-z_0=t \end{cases}$.

18 Параметрические уравнения прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+3}{0}$ имеют вид :

a) $\begin{cases} x=t+2 \\ y=2t+1 \\ z=-3t \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+t \\ z=3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=2t \\ z=-3t \end{cases}$; d) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=t+2 \\ z=-3 \end{cases}$.

19 Направляющий вектор прямой $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=-t+2 \\ z=3t-5 \end{cases}$ имеет координаты :

a) (-2; 1; -3) ; b) (2; -1; 3) ; c) (-3; 2; -5) ; d) (3; -2; 5).

20 Прямая $\dfrac{X-1}{2}=\dfrac{Y+3}{n}=\dfrac{Z}{-1}$ и плоскость AX + 3Y – 3Z + 5 = 0 перпендикулярны при

a) n = 1, A = -3; b) n = 1, A = 6; c) n = 3, A = 2; d) n = 2, A = 3.

21 Прямая $\dfrac{X+1}{2}=\dfrac{Y}{-3}=\dfrac{Z+3}{1}$ и плоскость AX + 2Y + 2Z – 5 = 0 параллельны при A равном :

a) A = -3; b) A = -1; c) A = 2; d) A = 1.

7 ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПОДГОТОВКИ

7.1 Элементы линейной алгебры

1 Что называется матрицей? Как определяются линейные операции над матрицами и каковы их свойства? Приведите примеры.

2 Что называется определителем? Каковы основные свойства определителей?

3 Что называется минором и алгебраическим дополнением? Приведите примеры.

4 Каковы способы вычисления определителей? Приведите примеры.

5 Что называется матрицей и расширенной матрицей системы m линейных уравнений с n неизвестными? Приведите примеры.

6 Что называется решением системы m линейных уравнений с n неизвестными? Какие системы называются совместными, а какие – несовместными?

7 Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.

8 Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?

9 При каком условии система линейных уравнений имеет единственное решение?

10 Что можно сказать о системе m линейных уравнений с n неизвестными, если ее определитель равен нулю?

11 При каком условии однородная система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными имеет ненулевое решение?

12 Опишите метод Гаусса решения и исследования систем линейных уравнений.

13 Какие вы знаете разновидности метода Гаусса?

14 Что называется рангом матрицы? Как его можно найти?

15 Что называется рангом системы линейных уравнений? Как, пользуясь методом Гаусса, можно найти ранг системы линейных уравнений?

16 Какие неизвестные в системе линейных уравнений и в каком случае называют свободными, а какие – базисными? Что называется общим решением системы линейных уравнений, базисным решением?

17 Что называется произведением двух матриц? Условие перемножения матриц. Каковы свойства произведения матриц?

18 Какая матрица называется единичной?

19 Какая матрица называется обратной для данной матрицы? Всегда ли существует обратная матрица? Как можно найти обратную матрицу?

20 В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?

7.2 Векторная алгебра

1 Что называется вектором и модулем вектора?

2 Какие векторы называются коллинеарными, компланарными, равными?

3 Могут ли два вектора, имеющих равные модули, быть не равными? Если да, то чем они отличаются друг от друга?

4 Все векторы, имеющие один и тот же модуль, отложены из одной точки *A* пространства. Где будут находиться концы этих векторов?

5 Какие операции над векторами называются линейными и каковы свойства этих операций?

6 Что называется базисом на прямой, на плоскости и в пространстве?

7 В каком случае векторы называются линейно зависимыми и в каком – линейно независимыми?

8 Докажите, что линейным операциям над векторами соответствуют такие же операции над их компонентами (координатами) в некотором базисе.

9 Какой базис называется ортонормированным?

10 Как определяется декартова система координат?

11 Как выражаются координаты вектора через координаты его начальной и конечной точек?

12 Выведите формулы деления отрезка в данном отношении.

13 Центром тяжести треугольника является точка пересечения его медиан. Выведите формулы, выражающие координаты центра тяжести треугольника через координаты его вершин.

14 Что называется скалярным произведением двух векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?

15 Выведите формулы для длины вектора, угла между двумя векторами и расстояния между двумя точками в декартовой прямоугольной системе координат.

16 Что называется векторным произведением двух векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?

17 Что называется смешанным произведением трех векторов, каковы его свойства и как оно выражается через координаты векторов-сомножителей в ортонормированном базисе?

18 Что называется определителем (детерминантом) второго и третьего порядков, каковы их свойства и способы вычисления?

19 Как преобразуются координаты вектора при замене базиса пространства (плоскости)?

20 Какому условию должны удовлетворять координаты трех векторов, чтобы их можно было принять за базис пространства?

21 Каковы формулы преобразования декартовых прямоугольных координат на плоскости?

22 Опишите полярную, цилиндрическую и сферическую системы координат.

7.3 Аналитическая геометрия на плоскости

1 Как определяется декартова прямоугольная и полярная системы координат?

2 Укажите связь между декартовой прямоугольной и полярной системами координат.

3 Что называется геометрическим местом точек?

4 По какой формуле находят расстояние между двумя заданными точками на плоскости? Как найти координаты середины отрезка?

5 Как найти точки пересечения линии с осями координат? Как найти точки пересечения двух линий?

6 Какой вид имеют параметрические уравнения прямой? Что называют параметром линии, заданной параметрическими уравнениями?

7 Что называется угловым коэффициентом прямой? Какой вид имеет уравнение прямой с угловым коэффициентом? Сформулируйте условие

параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$.

8 Какой вид имеет общее уравнение прямой? Как найти угловой коэффициент прямой, заданной общим уравнением?

9 При каких условиях прямые $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ а) параллельны; б) совпадают; в) перпендикулярны?

10 Как записать уравнение прямой: а) проходящей через начало координат; б) параллельной оси Ox, в) параллельной оси Oy? Запишите уравнения осей координат.

11 По какой формуле находится расстояние между точкой и прямой?

12 Что называется окружностью? Запишите уравнение окружности радиуса R с центром в точке $(x_0; y_0)$. Какой вид имеет каноническое уравнение окружности?

13 Что называется эллипсом? Запишите каноническое уравнение эллипса, его характерные точки и величины. Что называется эксцентриситетом эллипса? Укажите соотношения между величинами a, b и c для эллипса. Где находятся фокусы эллипса?

14 Что называется гиперболой? Назовите характерные точки и величины гиперболы. Какая гипербола называется равнобокой? Запишите каноническое уравнение гиперболы и соотношения между величинами a, b и c. Что называется эксцентриситетом гиперболы? Напишите уравнения асимптот гиперболы. Где находятся фокусы гиперболы?

15 Что называется параболой? Запишите каноническое уравнение параболы. Что называется параметром параболы? Чему равен эксцентриситет параболы? Напишите уравнения директрисы и укажите координаты фокуса параболы $y^2 = 2px$.

7.4 Аналитическая геометрия в пространстве

1 Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через заданную точку в заданном направлении?

2 Какой вектор называется нормальным вектором плоскости? Назовите его координаты.

3 Напишите общее уравнение плоскости.

4 Запишите уравнение плоскости: а) проходящей через начало координат; б) параллельной одной из осей координат; в) параллельной одной из плоскостей; г) проходят через одну из осей координат. Запишите уравнения координатных плоскостей.

5 Какой вид имеет уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащих на одной прямой?

6 Запишите уравнение плоскости в отрезках и выясните сути параметров.

7 Что называется углом между двумя плоскостями и по какой формуле он находится?

8 Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.

9 Запишите формулу расстояния от точки до плоскости.

10 Как можно задать прямую в пространстве?

11 Какой вектор называется направляющим вектором прямой?

12 Напишите каноническое уравнение прямой.

13 Какой вид имеют параметрические уравнения прямой?

14 Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через две заданные точки?

15 Как найти направляющий вектор прямой, заданной общим уравнением?

16 Запишите формулу, по которой находится угол между двумя прямыми.

17 Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности двух прямых.

18 Что называется направляющими косинусами прямой и как их находят?

19 Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

20 Что называется углом между прямой и плоскостью и как его находят?

21 Как находится точка пересечения прямой и плоскости?

СПИСОК ИСТОЧНИКОВ ИНФОРМАЦИИ

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.

2 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

3 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. Шк., 2001.

4 Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: «Банки и биржи», 1998.

5 Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под ред. В.И. Ермакова – М.: Инфра – М, 2000.

6 Мелентьєв Б.В., Оранська А.І., Харченко А.П.. Вища математика у прикладах і задачах. – Київ УМК ВО, І ч., 1994.

7 Мелентьєв Б.В., Оранська А.І., Харченко А.П.. Вища математика у прикладах і задачах. – Київ УМК ВО, ІІ ч., 1994.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение……...3

1 Программа модуля……3

2 Варианты индивидуальных домашних заданий……5

Задание 1 ……...……...5

Задание 2 ……...……...9

Задание 3 ……...……12

Задание 4 ……...……13

Задание 5 ……...……14

Задание 6 ……...……15

Задание 7 ……...……15

3 Варианты итогового задания……17

4 Образец выполнения итогового задания……..28

5 Вариант модульного контроля и образец его выполнения……36

6 Перечень тестовых задач……...…39

7 Вопросы для самоподготовки……...51

8 Список источников информации……56

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання завдань модуля «Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія» з курсу «Вища математика» для іноземних студентів спеціальностей: 6.060101; 6.050502; 6.050202; 6.040106

Укладачі: Кононенко Анатолій Іванович
Лисянська Ганна Володимирівна
Посилаєва Раїса Вікторівна

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор В.І.Пуцик

План 2009р., поз. 72. Формат 60х84 1/16.
Підп. до друку Обл.-вид. арк. 2,9
Надруковано на ризографі. Умов. друк. арк. 2,6. Папір друк. № 2.
Тираж 100 прим. Зам. № 1452. Безкоштовно.

ХДТУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського державного технічного університету будівництва та архітектур