Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність073

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

з дисципліни „Вища та прикладна математика”

для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»

заочної форми здобуття освіти

Розділ І

Харків 2019

Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 073

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

з дисципліни „Вища та прикладна математика”

для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»

заочної форми здобуття освіти.

Розділ І

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 12 від 29.08.2019

Харків 2019

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни „Вища та прикладна математика” для студентів спеціальності 073 «Менеджмент» заочної форми здобуття освіти. Розділ І /Укладач: О.О.Аршава.– Харків, ХНУБА, 2019. – 45с.

Рецензент В.О. Гаєвська

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Дисципліна „Вища та прикладна математика” є фундаментом математичної освіти бакалавра, що має важливе значення для успішного вивчення як дисциплін загальної підготовки, так і професійно орієнтовних дисциплін, які передбачено навчальним планом спеціальності «Менеджмент».

Основною формою навчання студента заочної форми здобуття освіти є самостійна робота над вивченням навчального матеріалу, яка передбачає: вивчення матеріалу за підручниками, навчально-методичними посібниками, текстами лекцій, розв’язання задач, виконання контрольних робіт, самоперевірку знань.

Мета даного видання – надання допомоги студентам заочної форми здобуття освіти в організації самостійної роботи під час вивчення таких тем з дисципліни «Вища та прикладна математика», як: «Лінійна та векторна алгебри», «Аналітична геометрія», «Диференціальне числення функцій однієї змінної», «Інтегральне числення функцій однієї змінної» та «Диференціальні рівняння».

Видання містить програму навчальної дисципліни, варіанти для виконання контрольних робіт, зразки виконання контрольних робіт. Зміст, повнота й рівень складності запропонованих завдань, відповідають рівню вимог до математичної підготовки студентів спеціальності 073 «Менеджмент».

Контрольні роботи №1 і №2 повинні виконуватися в одному зошиті, на обкладинці якого студенту слід розбірливо написати своє прізвище, ініціали, шифр, номер контрольної роботи і назву дисципліни.

Розв’язання завдань необхідно проводити в тій же послідовності, яка наводиться в умовах задач. При цьому умова завдання повинна бути повністю переписана перед її розв’язанням.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Модуль 1 (1-й семестр)

Змістовий модуль1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. Диференціальне числення функцій однієї змінної. Функції багатьох змінних.

Тема 1. Матриці. Визначники. Системи n-лінійних рівнянь з n невідомими.

Тема 2. Системи n-лінійних рівнянь з m невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі. Метод Гауса і Жордана-Гауса.

Тема 3. Векторна алгебра.

Тема 4. Аналітична геометрія на площині.

Тема 5. Аналітична геометрія у просторі.

Тема 6. Вступ в математичний аналіз.

Тема 7. Похідна функції однієї змінної.

Тема 8. Застосування похідної функції однієї змінної.

Тема 9. Функції багатьох змінних.

Змістовий модуль 2. Невизначений інтеграл. Застосування визначеного інтегралу. Диференціальні рівняння. Ряди.

Тема 10. Невизначений інтеграл.

Тема 11. Інтегрування раціональних дробів, тригонометричних і ірраціональних виразів.

Тема 12. Визначений інтеграл.

Тема 13. Застосування визначеного інтеграла.

Тема 14. Диференціальні рівняння першого порядку.

Тема 15. Диференціальні рівняння другого порядку.

Тема 16. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Тема 17. Числові ряди.

Тема 18. Функціональні ряди.

Контрольна робота №1
«Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної»

Завдання 1.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь
1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.

Виконати перевірку.

Варіант 1

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Варіант 2

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Варіант 3

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 = -2. \end{cases}$$

Варіант 4

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіант 5

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -17. \end{cases}$$

Варіант 6

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіант 7

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

Варіант 8

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Варіант 9

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9; \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$$

Варіант 10

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 \quad + \quad 3x_3 = 3; \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіант 11

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Варіант 12

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Варіант 13

$$\begin{cases} 3x_1 \quad + 5x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

Варіант 14

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

Варіант 15

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Варіант 16

$$\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 14; \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$$

Варіант 17

$$\begin{cases} 2x_1 \quad + \quad 5x_3 = 9; \\ x_1 - 3x_2 - 16x_3 = 14; \\ \quad x_2 - 10x_3 = 13. \end{cases}$$

Варіант 18

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$$

Варіант 19

Варіант 20

Варіант 21

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7; \\ x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 5; \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 12; \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 7. \end{cases}$$

Варіант 22

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_3 = 9; \\ x_2 - 10x_3 = -16. \end{cases}$$

Варіант 23

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіант 24

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \\ 2x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$$

Варіант 25

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 15x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Варіант 26

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

Варіант 27

$$\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$$

Варіант 28

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$$

Варіант 29

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$$

Варіант 30

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Завдання 1.2 Задана піраміда, координатами вершин якої є A_1, A_2, A_3, A_4 (координати точок наведено в таблиці 1). Методами векторної алгебри обчислити:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди.

Таблиця 1

Номер варіанту	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)
2	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;9)
3	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
4	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
5	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
6	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
7	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
8	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
9	(8:6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
10	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)
11	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
12	(1;2;3)	(2;0;0)	(3;2;5)	(4;0;0)

13	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
14	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
15	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
16	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
17	(6;1;5)	(5;1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
18	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
19	(0;4;-1)	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)
20	(8;5;8)	(3;3;9)	(6:9; I)	(1;7;3)
21	(6;4;8)	(3;5;4)	(5:8:3)	(1;9;9)
22	(3;6;7)	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)
23	(6;9;2)	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)
24	(3;9;8)	(0;7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)
25	(5;8;2)	(3;5;10)	(3;8;4)	(5:5;4)
26	(1;2;6)	(4;2;0)	(4;6;6)	(6;1;1)
27	(7;9;6)	(4;5;7)	(9;4;4)	(7;5;3)
28	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
29	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
30	(1;-2;l)	(0;0;4)	(1;4;2)	(2;0;0)

Завдання 1.3 Задано координати вершин трикутника *ABC*, що наведено в таблиці 2. Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони *AB*;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, яка проведена із вершини *C*;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони *AC*;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *C*.

Таблиця 2

Номер варіанту	*A*	*B*	*C*	Номер варіанту	*A*	*B*	*C*
1	(-6;-3)	(-4; 3)	(9;2)	16	(2;-1)	(8;7)	(-10;4)
2	(-3;1)	(-1;7)	(I2;6)	17	(5;-3)	(1;0)	(7;2)
3	(-1;3)	(1;9)	(4;7)	18	(4;-б)	(2;2)	(-2;-1)
4	(0;0)	(2;6)	(7;2)	19	(3;4)	(-1;7)	(-4;0)
5	(-2;-6)	(0;0)	(3;-2)	20	(1;-2)	(7;6)	(0;2)
6	(-2;-5)	(6;2)	(0;0)	21	(2;-1)	(-2;-3)	(-6;4)
7	(-2; 0)	(-4;-7)	(5;5)	22	(5;-8)	(3;-2)	(-3;-6)
8	(1;2)	(3;8)	(-4;-I)	23	(8;-2)	(-6;-5)	(0;4)

9	(4;4)	(1;-3)	(9; 0)	24	(7;5)	(3;2)	(4;0)
10	(5;6)	(7;2)	(-6; 0)	25	(3;-7)	(6;0)	(1;1)
11	(-6;-4)	(-1;2)	(6;1)	26	(5;3)	(-1;-2)	(-3;7)
12	(2;0)	(7;2)	(0;5)	27	(3;1)	(-2;8)	(-5;3)
13	(-2;-б)	(-6;-3)	(10;-1)	28	(9;2)	(-5;7)	(0;-3)
14	(-2;1)	(-2;1)	(-4;7)	29	(-3;-3)	(3;1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;-1)	(4; I)	30	(7;9)	(-2;0)	(-3;2)

Завдання 1.4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки A_1, A_2, A_3, A_4 (наведено в таблиці 3). Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;

2) скласти рівняння площини $A_1A_2\ A_3$;

3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2A_3$;

4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2\ A_3$.

Таблиця 3

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
2	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
3	(1;2;3)	(2;0; 0)	(0;2;5)	(4;0;0)
4	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
5	(-2;0;-1)	(0,0;4)	(1;3;2)	(3;2;7)
6	(1;-2;1)	(0;0,-4)	(1;4;2)	(2;0;0)
7	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
8	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
9	(6;-1;5)	(5,1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
10	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
11	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
12	(3;3;9)	(6;9;1)	(1;7;3)	(8;5;-8)
13	(3;5;4)	(5;8;3)	(1;9;9)	(6;4;8)
14	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)	(3;6;7)
15	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)	(6;9;2)
16	(0,7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)	(3;9;8)
17	(5;5;4)	(3;8;4)	(3;5;10)	(5;8;2)
18	(6;1;1)	(4;6;6)	(4;2;0)	(1;2;6)
19	(7;5;3)	(9;4;4)	(4;5;7)	(7;9;6)
20	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)

21	(4;2;5)	(0;7;1)	(0;2;7)	(1;5;0)
22	(4;4;10)	(7;10;2)	(2;6;4)	(9;6;9)
23	(4;6;5)	(6;9;4)	(1;10;10)	(7;5;9)
24	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
25	(10;6;6)	(-2;6;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
26	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
27	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
28	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;-7)
29	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
30	(7;7;3)	(6;5 ;8)	(3;5;8)	(8;4,1)

Завдання 1.5 Визначити похідні першого порядку функцій.

Варіант 1

1. $y = x\sqrt{1+x^2}$
2. $e^{xy} = xy$
3. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2-1) \\ y = \arccos 2t \end{cases}$

Варіант 2

1. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $\ln(x+y) - arctg\dfrac{x}{y} = 0$
3. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 4\sin^2 t \end{cases}$

Варіант 3

1. $y = \dfrac{\ln x}{x}$
2. $(x+y)^2 + (x-3y)^2 = 0$
3. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 4\sin^3 t \end{cases}$

Варіант 4

1. $y = xe^{-x}$
2. $\ln\dfrac{x}{y} - x + 2y = 0$
3. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

Варіант 5

1. $y = (1+x^2)arctgx$
2. $y\sin(x+y) - x = 0$
3. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1} \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2 \end{cases}$

Варіант 6

1. $y = x^3 e^{-x^2}$
2. $arcctg(x+y) - x - 2y = 0$
3. $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}$

Варіант 7

1. $y = \sqrt{1+x^2}\arcsin x$
2. $tg(x+2y) - 3x + y = 0$
3. $\begin{cases} x = a\cos t\sqrt{2\cos 2t} \\ y = a\sin t\sqrt{2\cos 2t} \end{cases}$

Варіант 8

1. $y = x^2 \ln x$
2. $y = x + arctgy$
3. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

Варіант 9

1. $y = xe^{-\frac{1}{x}}$
2. $\sin(2x+y) + 2x - 3y = 0$
3. $\begin{cases} x = 2\ln ctgt \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$

Варіант 10

1. $y = x\sin^2 x$
2. $e^{xy} - (x+3y) = 0$
3. $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

Варіант 11

1. $y = e^{-x}\sin x$
2. $tg(x+y) - xy = 0$
3. $\begin{cases} x = t^2 + 2 \\ y = \dfrac{t^3}{3-t} \end{cases}$

Варіант 12

1. $y = \arcsin^2 x$
2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
3. $\begin{cases} x = \varphi(1-\sin\varphi) \\ y = \varphi\cos\varphi \end{cases}$

Варіант 13

1. $y = (5x^2-1)\sin 2x$

Варіант 14

1. $y = \ln(1 - 2x\cos\alpha + x^2)$

Варіант 15

1. $y = x^2 e^{2x}$

2. $x+y=e^{x-y}$

3. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$

2. $x^2+y^2-xy=0$

3. $\begin{cases} x=2t^3+t \\ y=\ln t \end{cases}$

2. $e^x-e^y=y-x$

3. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\ln(1-t^2) \end{cases}$

Варіант 16

1. $y=\dfrac{x^2}{1-x}$

2. $x\ln y-y\ln x=1$

3. $\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=e^t\sin t \end{cases}$

Варіант 17

1. $y=\dfrac{1}{3}\arcsin(\cos^3\dfrac{x}{5})$

2. $y+\sqrt{x}=\arcsin y$

3. $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=4\ln t \end{cases}$

Варіант 18

1. $y=\dfrac{x^2}{4}(2\ln x+3)$

2. $x-y^2=\cos(xy)$

3. $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2} \\ y=\dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

Варіант 19

1. $y=-\dfrac{1}{9}x\sin 3x-\dfrac{2}{27}\cos 3x$

2. $xe^y+x^2=10$

3. $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t} \\ y=\sqrt{t-t^2} \end{cases}$

Варіант 20

1. $y=e^{-x}\cos 3x$

2. $\ln y+\dfrac{y}{x}=0$

3. $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2} \\ y=\dfrac{t-1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$

Варіант 21

1. $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$

2. $xy=ctgy$

3. $\begin{cases} x=1+e^{3\varphi} \\ y=3\varphi+e^{-3\varphi} \end{cases}$

Варіант 22

1. $f(x)=arctg\ln x$

2. $x^2-2xy^2+1=0$

3. $\begin{cases} x=t\ln t \\ y=\dfrac{\ln t}{t} \end{cases}$

Варіант 23

1. $f(x)=(3x^2+4)e^x$

2. $y=\cos(x+y)$

3. $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{1-t} \end{cases}$

Варіант 24

1. $f(x)=\ln(2x^2+7)$

2. $y^3+x^3-3xy=0$

3. $\begin{cases} x=e^{-t^2} \\ y=arctg(2t+1) \end{cases}$

Варіант 25

1. $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$

2. $e^y+xy=e$

3. $\begin{cases} x=2\ln ctg\dfrac{t}{2}-2\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$

Варіант 26

1. $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}}$

2. $y^2-2xy+3=0$

3. $\begin{cases} x=\dfrac{t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Варіант 27

1. $y=(arctgx)^2$

2. $y=x+\ln y$

3. $\begin{cases} x=\dfrac{1+t}{t^3} \\ y=\dfrac{3}{2t^2}+\dfrac{1}{2t} \end{cases}$

Варіант 28

1. $y=\dfrac{1}{1+x^3}$

2. $\cos(xy)=x$

3. $\begin{cases} x=4tg^2\dfrac{t}{2} \\ y=2\sin t+3\cos t \end{cases}$

Варіант 29

1. $f(x)=e^{2x}\sin 5x$

2. $y^3-3y+3x=1$

3. $\begin{cases} x=\dfrac{2t}{1+t^2} \\ y=\dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases}$

Варіант 30

1. $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$

2. $x^3+x^2y+y^2=0$

3. $\begin{cases} x=\dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} \\ y=\dfrac{\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \end{cases}$

Завдання 1.6 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Варіант 1
$$y=\frac{x}{x^2+1}$$

Варіант 2
$$y=\ln(2x^2+3)$$

Варіант 3
$$y=\frac{x}{(x-1)^2}$$

Варіант 4
$$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

Варіант 5
$$y=\frac{x^2}{x^2-1}$$

Варіант 6
$$y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Варіант 7
$$y=\frac{x^3+16}{x}$$

Варіант 8
$$y=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$$

Варіант 9
$$y=\frac{x^3-1}{4x^2}$$

Варіант 10
$$y=\frac{2}{x^2+x+1}$$

Варіант 11
$$y=\frac{x^3}{x^2+2x+3}$$

Варіант 12
$$y=x+\frac{x}{3x-1}$$

Варіант 13
$$y=\frac{x^3-8}{2x^2}$$

Варіант 14
$$y=\frac{4x}{4+x^2}$$

Варіант 15
$$y=xe^{-x^2}$$

Варіант 16
$$y=\frac{1}{2x+x^2}$$

Варіант 17
$$y=\ln(x^2+2x+2)$$

Варіант 18
$$y=\frac{x^3}{x^2+9}$$

Варіант 19
$$y=\frac{4x^3+5}{x}$$

Варіант 20
$$y=e^{\frac{1}{2-x}}$$

Варіант 21
$$y=\frac{x^2+1}{x}$$

Варіант 22
$$y=x\ln x$$

Варіант 23
$$y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

Варіант 24
$$y=\frac{x^2}{x^2+4}$$

Варіант 25
$$y=\frac{8}{x^2(x-4)}$$

Варіант 26
$$y=\frac{x^2-5}{x-3}$$

Варіант 27
$$y=(x^2+4)e^{-x^2}$$

Варіант 28
$$y=\frac{x^3+1}{x^2}$$

Варіант 29
$$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$$

Варіант 30
$$y=\frac{x^4+3}{x}$$

Зразок виконання контрольної роботи №1

Завдання 1.1 Розв’язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=2; \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1; \\ 5x_1-6x_2+4x_3=3. \end{cases}$

1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.

Виконати перевірку.

Розв’язання.

1) Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера. Для цього обчислюємо методом трикутників визначники: Δ - головний визначник системи; Δx_1, $\Delta x_2, \Delta x_3$ – додаткові визначники системи (визначники, що утворюються з головного визначника послідовною заміною першого, другого й третього стовпця відповідно стовпцем вільних членів системи рівнянь).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot(-6) + 2\cdot 5\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 5 - 3\cdot 2\cdot(-6) - 4\cdot 4\cdot(-3) = -4;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot(-6) + 3\cdot 2\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 3 - 2\cdot 2\cdot(-6) - 4\cdot 1\cdot(-3) = -4;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 3 + 5\cdot 2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot 5 - 3\cdot 3\cdot 2 - 4\cdot 4\cdot 2 = -4;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)\cdot 3 + 2\cdot 4\cdot(-6) + 5\cdot 1\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 5 - 3\cdot 1\cdot(-6) - 3\cdot 4\cdot(-3) = -4,$$

тоді

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

2) Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою оберненої матриці. Для цього запишемо систему в матричній формі: $A \cdot X = B$,
де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(A – матриця коефіцієнтів системи, X – стовпець невідомих, B – стовпець вільних членів).

Розв'язок системи знаходимо за формулою $X = A^{-1} \cdot B$, де A^{-1} – матриця, що є оберненою до матриці системи. Оскільки матриця А – квадратна та визначник матриці $\Delta = \det A = -4 \neq 0$, отже, обернена матриця A^{-1} існує та знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

M_{ij} - мінор, що відповідає елементу a_{ij} матриці A.

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} для кожного елементу матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-8;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=0;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -5 & 2\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-6;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & -6\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-3,$$

тоді

$$X=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 0 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-8\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 3\\ -6\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 3\\ 1\cdot 2+3\cdot 1+(-3)\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Аналогічна відповідь була одержана при розв’язанні системи методом Крамера: $x_1=x_2=x_3=1$.

Виконаємо перевірку одержаного результату, підставляючи значення змінних у вихідну систему: $\begin{cases}3\cdot 1-3\cdot 1+2\cdot 1=2;\\ 4\cdot 1-5\cdot 1+2\cdot 1=1;\\ 5\cdot 1-6\cdot 1+4\cdot 1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}2=2;\\ 1=1;\\ 3=3.\end{cases}$

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Завдання 1.2 Задана піраміда, координатами вершин якої є $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(2;0;0)$. Методами векторної алгебри обчислити:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об’єм піраміди (рис. 1.1).

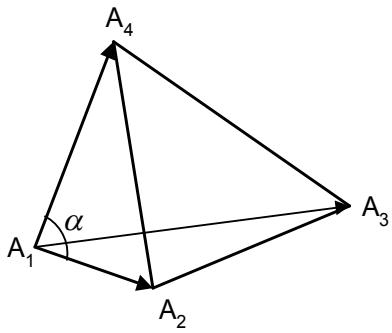

Рисунок 1.1

Розв’язання.

1) Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overline{(x_{A_2}-x_{A_1};\,y_{A_2}-y_{A_1};\,z_{A_2}-z_{A_1})}=\overline{(0-1;\,0-(-2);\,4-1)}=\overline{(-1;\,2;\,3)}.$$

Тоді довжина ребра A_1A_2 піраміди буде дорівнювати модулю вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \text{ (одиниць).}$$

2) Позначимо кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 через α, тоді

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}.$$

Координати вектора $\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{(2-1;\, 0-(-2);\, 0-1)} = \overrightarrow{(1;\, 2;\, -1)}$,

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (од).}$$

Скалярний добуток $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) = 0$.

Отже, $\cos\alpha = \dfrac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, тобто ребра A_1A_2 і A_1A_4 перпендикулярні.

3) Обчислюємо координати векторів

$\overrightarrow{A_1A_4} = \overrightarrow{(2-1;\, 0-(-2);\, 0-1)} = \overrightarrow{(1;\, 2;\, -1)}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overrightarrow{(0;\, 6;\, 1)}$.

Обчислюємо проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ за формулою:

$$пр_{\overrightarrow{A_1A_4}} \overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 6 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{6}}.$$

4) Оскільки векторним добутком векторів є вектор, довжина якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах у якості сторін, тоді площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює половині векторного добутку векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ (рис. 1.2), тобто S = $\frac{1}{2}\left|\vec{n}\right|$.

Вектор $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overrightarrow{(0;\, 6;\, 1)}$.

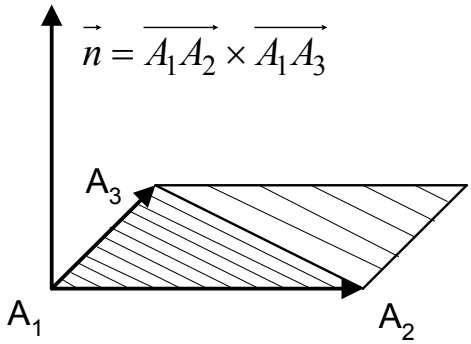

Рисунок 1.2

Координати вектора $\vec{n}$ визначимо, користуючись теоремою Лапласа про розвинення визначника за елементами першого рядку.

$$\vec{n}=\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 6\end{vmatrix}=-16\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k},$$

тобто $\vec{n}(-16;1;-6)$; $|\vec{n}|=\sqrt{(-16)^2+1^2+(-6)^2}=\sqrt{256+1+36}=\sqrt{293}$.

Таким чином, $S_{A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}\sqrt{293}$ (кв.од.).

5) Мішаним добутком векторів є число, що дорівнює об'єму паралелепіпеда, який побудований на цих векторах, а об'єм тетраедра дорівнює шостої частини об'єму цього паралелепіпеда (рис. 1.3).

Таким чином, об'єм піраміди обчислюється за формулою

$$V=\frac{1}{6}\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\right|.$$

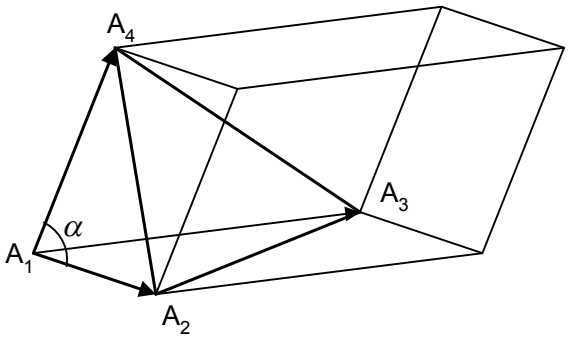

Рисунок 1.3

Обчислюємо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}6 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 6 & 1\end{vmatrix}=8-16=-8;$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\right|=|-8|=8\quad\Rightarrow\quad V=\frac{1}{6}\cdot 8=1\frac{1}{3}\ \text{(куб.од.)}.$$

Завдання 1.3 Задано координати вершин трикутника *ABC: A*(3;-2), *B*(1;4), *C*(-2;1). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони *AB*;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, яка проведена із вершини *C*;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони *AC*;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *C* (рис.1.4).

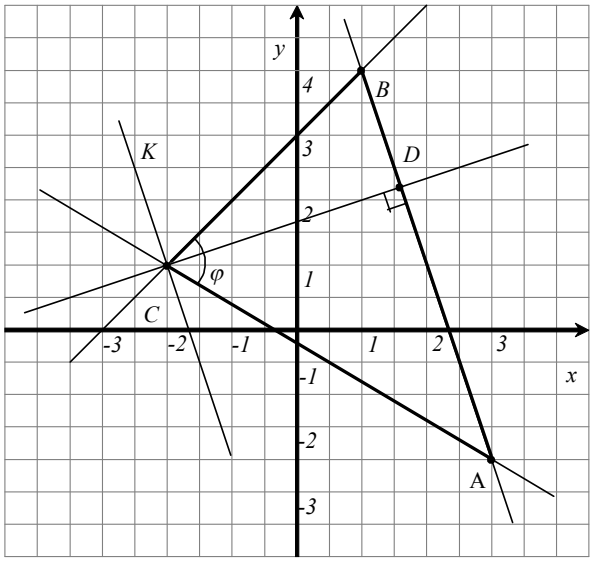

Рисунок 1.4

Розв'язання.

1) Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \quad .$$

Для $A(3;-2)$, $B(1;4)$ маємо:

$$\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-(-2)}{4-(-2)} \Rightarrow \frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{6}; \Rightarrow -3(x-3)=y+2$$

$3x+y-7=0$ – загальне рівняння прямої AB;

$y=-3x+7$ – рівняння прямої AB з кутовим коефіцієнтом, $k_{AB}=-3$.

2) Складаємо рівняння прямої $CD \perp AB$.

Із умови перпендикулярності прямих маємо: $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}} \quad \Rightarrow \quad k_{CD}=\dfrac{1}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку $C(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Для $C(-2;1)$ маємо: $y-1=\dfrac{1}{3}(x+2)$, тобто $x-3y+5=0$ – загальне рівняння прямої CD.

3) Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої AB за формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де $Ax+By+C=0$ – рівняння прямої AB.

$$d=\frac{|3\cdot(-2)+1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ (од.).}$$

4) Координати точки M – центра ваги трикутника обчислюємо як середнє арифметичне координат його вершин:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

$$x_M = \frac{3+1-2}{3} = \frac{2}{3}, \quad y_M = \frac{-2+4+1}{3} = 1, \text{ тобто } M\left(\frac{2}{3};1\right).$$

Кутовий коефіцієнт прямої AC: $k_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$, $k_{AC} = \frac{1+2}{-2-3} = -\frac{3}{5}$.

Кутовий коефіцієнт прямої, що паралельна прямій AC, також дорівнює $-\frac{3}{5}$.

Таким чином, рівняння прямої, що проходить через точку $M\left(\frac{2}{3};1\right)$ і має кутовий коефіцієнт $k = -\frac{3}{5}$, буде мати вигляд: $y - 1 = -\frac{3}{5}(x - \frac{2}{3})$;

$3x + 5y - 7 = 0$ – загальне рівняння шуканої прямої.

5) Для обчислення площі трикутника знайдемо довжину сторони АВ:

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Тоді $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{6\sqrt{10}}{5} = 12$ (кв. од.).

6) Тангенс кута φ (кута між прямими AC і BC) знаходимо за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}}.$$

$$k_{AC} = -\frac{3}{5}; \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-4}{-2-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad tg\varphi = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - 1 \cdot \frac{3}{5}} = 4, \quad \varphi = arctg4 \approx 76^\circ.$$

Завдання 1.4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$, $A_3(2;-1;-2)$, A_4 (-1;2;1). Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;

2) скласти рівняння площини $A_1A_2\,A_3$;

3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2A_3$;

4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2\,A_3$.

Розв'язання.

1) Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Для $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$ маємо:

$$\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)} = \frac{z-2}{-3-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-2}{-5}.$$

2) Рівняння площини, що проходить через три задані точки: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Підставимо координати заданих точок у вищенаведене рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 4-3 & 1+4 & -3-2 \\ 2-3 & -1+4 & -2+4 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Запишемо розвинення визначника за елементами першого рядку:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$25(x-3) + 3(y+4) + 8(z-2) = 0;$$

$25x + 3y + 8z - 79 = 0$ – рівняння площини $A_1A_2A_3$.

3) Канонічні рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_0; y_0; z_0)$ з напрямним вектором $\vec{s}(m; n; p)$, мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}.$$

Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$ – $\vec{n}(25; 3; 8)$ є напрямним вектором висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2A_3$, тобто $\vec{s}(m; n; p) = (25; 3; 8)$, тоді рівняння висоти має вигляд:

$$\frac{x+1}{25} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{8}.$$

4) Знаходимо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$ за формулою

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Через те, що нормальний вектор площини $\vec{n}(25; 3; 8)$ і напрямний вектор прямої $\vec{s}(m; n; p) = (-4; 6; -1)$, маємо

$$\sin\varphi = \frac{|25\cdot(-4) + 3\cdot 6 + 8\cdot(-1)|}{\sqrt{625+9+64}\cdot\sqrt{16+36+1}} = \frac{90}{\sqrt{698}\cdot\sqrt{53}} = 0{,}47.$$

Завдання 1.5 Визначити похідні першого порядку функцій.

1. $y = \frac{x}{2}\sqrt{2-x^2} + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$
2. $y\sin(x+y) - x = 0$
3. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$.

Розв'язання. Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, знаходимо похідні функції 1.

$$1\ \ y' = \left(\frac{x}{2}\right)' \cdot \sqrt{2-x^2} + \left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2-x^2}\right)' + \left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{2-x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-x^2-x^2+2}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{4-2x^2}{2\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \sqrt{2-x^2}.$$

2 Для знаходження похідної неявної функції $y\sin(x+y) - x = 0$ диференціюємо обидві частини рівності по x:

$$y' \cdot \sin(x+y) + y\cos(x+y) \cdot (1+y') - 1 = 0.$$

Розкриваючи дужки та групуючи доданки відносно y', одержуємо:

$$y' \cdot \sin(x+y) + y\cos(x+y) + y \cdot y'\cos(x+y) = 1,$$

$$y' \cdot (\sin(x+y) + y \cdot \cos(x+y)) = 1 - y\cos(x+y),$$

$$y' = \frac{1 - y\cos(x+y)}{\sin(x+y) + y \cdot \cos(x+y)}.$$

3 Для знаходження похідної параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ будемо використовувати формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Визначаємо похідні по t:

$$x'_t = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t,$$

$$y'_t = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$$

Тоді шукана похідна буде дорівнювати:

$$y'_x = \frac{t\sin t}{t\cos t} = tgt.$$

Завдання 1.6 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Розв'язання.

Повне дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:

1 Знайти область визначення функції

2 Встановити точки розриву та інтервали неперервності функції

3 Дослідити функцію на парність і непарність.

4 Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5 Знайти інтервали знакосталості функції.

6 Знайти асимптоти. Дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.

7 Знайти інтервали спадання і зростання функції та екстремуми.

8 Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину.

9 Побудувати графік функції за результатами дослідження.

Використовуючи запропоновану схему, маємо:

1 Знаходимо $3 - x^2 \neq 0, \quad x \neq \pm\sqrt{3}$;

$$D(y)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right).$$

2 $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ – точки розриву;

$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-y(x)$. Отже, задана функція є непарною. Її графік розташований симетрично відносно початку координат, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x\geq 0$.

4 При $x=0$ $y=0$; при $y=0$ $x=0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0;0)$ - початок координат.

5 $y=0$ при $x=0$; $y=\infty$ при $x=\pm\sqrt{3}$;

$y>0$ в інтервалі $\left(0;\sqrt{3}\right)$ і $y<0$ в інтервалі $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ (рис. 1.5).

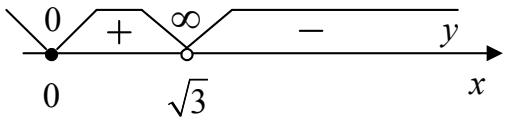

Рисунок 1.5

6 $x=\sqrt{3}$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0}y=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+0\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0}y=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}-0\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{+0}=+\infty\cdot$$

Отже, $x=\sqrt{3}$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(3-x^2\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0,$$

оскільки степінь многочлена чисельника менша степеня многочлена знаменника.

Отже, пряма $y=-x$ – похила асимптота.

7 $y'=\left(\dfrac{x^3}{3-x^2}\right)'=\dfrac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2}=\dfrac{x^2\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\dfrac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}$;

$y'(x)=0$, якщо $x^2\left(9-x^2\right)=0$, звідки $x=0$, $x=\pm 3$;

$y'(x)=\infty$, якщо $3-x^2=0$, звідки $x=\pm\sqrt{3}$,

$y_{\max}=y(3)=\dfrac{27}{3-9}=-\dfrac{9}{2}$ (рис. 1.6).

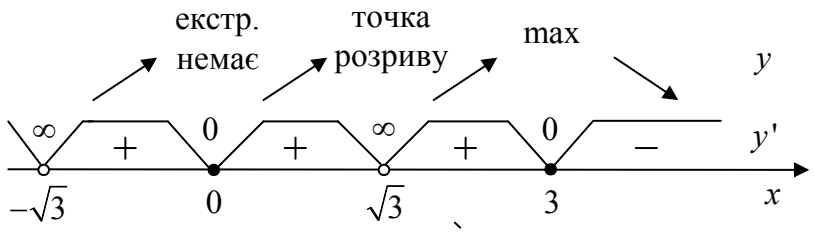

Рисунок 1.6

8 $$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-2\left(3-x^2\right)\left(-2x\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3-x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{2x\left(3-x^2\right)\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

$y''(x)=0$, якщо $x=0$;

$y''(x)=\infty$ якщо $x=\pm\sqrt{3}$.

$y_{перегину}=y(0)=0$ (рис. 1.7).

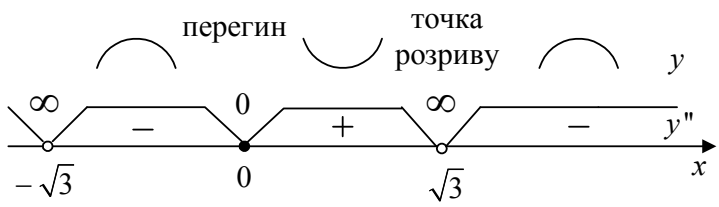

Рис. 1.7

Зауважимо, що у зв‘язку з тим, що точка $x=0$ знаходиться на межі півінтервалу $[0;+\infty)$, в якому досліджується функція, виникла необхідність дослідити знак $y'(x)$ і $y''(x)$ на півінтервалі $\left(-\sqrt{3};0\right]$.

9 Будуємо графік функції за результатами дослідження (рис. 1.8).

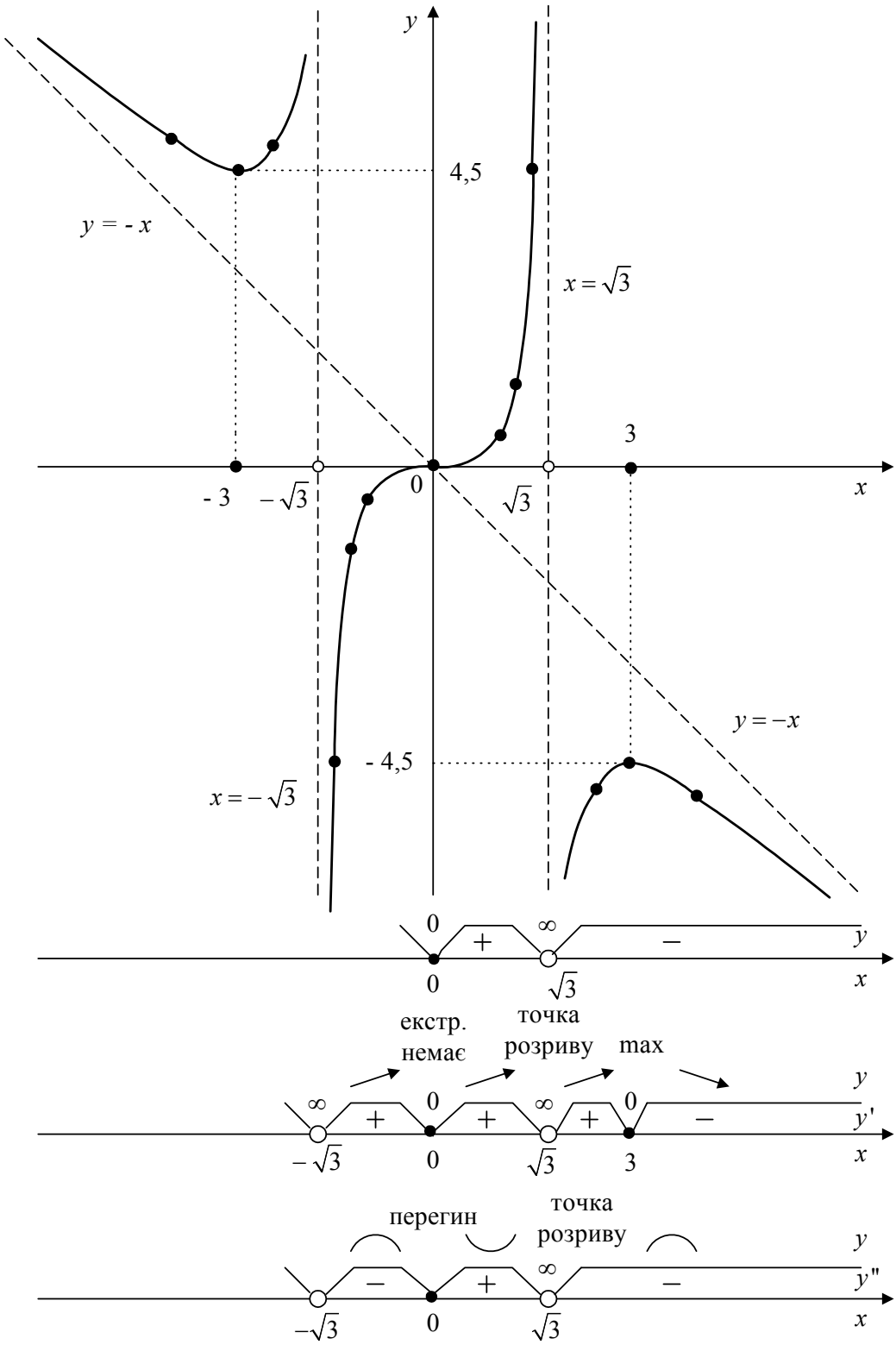
y
4,5
y = - x
x = √3
3
- 3
– √3
0
√3
x
y = –x
- 4,5
x = – √3
0
∞
+
–
y
0
√3
x
екстр.
немає
точка
розриву
max
y
∞
0
∞
0
+
+
+
–
y'
– √3
0
√3
3
x
перегин
точка
розриву
y
∞
–
+
–
y"
–√3
0
√3
x

Рисунок 1.8

Контрольна робота №2
«Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальні рівняння»

Завдання 2.1 Знайти невизначені інтеграли.

Варіант 1

1 $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x dx}}{1+x^2} dx$

2 $\int x \cos \frac{x}{3} dx$

3 $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7} dx$

4 $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$

5 $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[6]{x}-1)}$

Варіант 2

1 $\int \frac{dx}{(4x^2+1)\operatorname{arctg} 2x}$

2 $\int x e^{3x} dx$

3 $\int \frac{x^3+2x+5}{(x^2-4)(x+3)} dx$

4 $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

5 $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$

Варіант 3

1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$

2 $\int x \ln(x^2+1) dx$

3 $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4} dx$

4 $\int \cos x \sin 5x dx.$

5 $\int \frac{x dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$

Варіант 4

1 $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx$

2 $\int x^2 \sin 5x dx$

3 $\int \frac{(6x+3) dx}{(x-4)(x^2-2x+1)}$

4 $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$

5 $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx$

Варіант 5

1 $\int \sqrt[6]{1-2x^3} \cdot x^2 dx$

2 $\int (2x-1) e^{2x} dx$

3 $\int \frac{(1-x) dx}{x^3+4x^2+4x}$

4 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$

5 $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx$

Варіант 6

1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$

2 $\int x \arccos 3x dx$

3 $\int \frac{3x^2+13x+11}{(x+1)^2(x+2)} dx$

4 $\int \cos 2x \cos^2 x dx$

5 $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1) dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

Варіант 7

1 $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$

2 $\int x^2 \sin \frac{x}{3} dx$

3 $\int \frac{dx}{(x^2-x-2)(x-1)}$

4 $\int \cos 2x \cos \frac{x}{3} dx$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

Варіант 8

1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^7 x}$

2 $\int x \ln(x-5) dx$

3 $\int \frac{x^3-3x}{x^2-6x+8} dx$

4 $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

5 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

Варіант 9

1 $\int e^x \cos e^x dx$

2 $\int x \arcsin 2x dx$

3 $\int \frac{(x+1) dx}{x^3+x^2-2x}$

4 $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x}$

5 $\int \frac{(x+2) dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$

Варіант 10

1 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}$

2 $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$

Варіант 11

1 $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3 x}}{x} dx$

2 $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$

Варіант 12

1 $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

2 $\int (x^2-1) 10^{-2x} dx$

3 $\int \frac{x^2+5x+1}{x^2+4}dx$

4 $\int x\sin^2 7x dx$

5 $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-7x+13}}dx$

3 $\int \frac{x^6+1}{x^3-5x^2+4x}dx$

4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$

5 $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$

3 $\int \frac{4xdx}{2x^2-3x+1}$

4 $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$

5 $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+9}}dx$

Варіант 13

1 $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$

2 $\int \ln(x^2+9)dx$

3 $\int \frac{(x+2)dx}{x^3+2x^2-3x}$

4 $\int \frac{dx}{\cos x\sin^5 x}$

5 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$

Варіант 14

1 $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$

2 $\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}$

3 $\int \frac{x^4+3}{x(x^2+4x-5)}dx$

4 $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$

5 $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-2)}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$

Варіант 15

1 $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\cos^2 x}$

2 $\int x^3\arcsin\frac{1}{x}dx$

3 $\int \frac{x^3-3x^2+x}{(x-3)(x^2-1)}dx$

4 $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$

5 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x}}$

Варіант 16

1 $\int \frac{8^{3x}dx}{3+8^{6x}}$

2 $\int x^2\operatorname{arctg} 3xdx$

3 $\int \frac{x^2+4x+1}{2x+2}dx$

4 $\int \cos\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}dx$

5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$

Варіант 17

1 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-3\ln x}}$

2 $\int (x^2-3x)\sin 5xdx$

3 $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)(x-1)}dx$

4 $\int \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{5x}{2}dx$

5 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$

Варіант 18

1 $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$

2 $\int (x^2-1)\ln xdx$

3 $\int \frac{x^5+1}{16-x^4}dx$

4 $\int \frac{dx}{3+\operatorname{tg} x}$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$

Варіант 19

1 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$

2 $\int xe^{2x+3}dx$

3 $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$

4 $\int \frac{\sin xdx}{6-5\cos x+\cos^2 x}$

5 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{17-2x-x^2}}$

Варіант 20

1 $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$

2 $\int x\operatorname{arctg}(2x+3)dx$

3 $\int \frac{x^3+2}{x(x^2+2x-3)}dx$

4 $\int \frac{dx}{2+\cos x-2\sin x}$

5 $\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-7x+3}}$

Варіант 21

1 $\int \sin^7 7x\cos 7xdx$

2 $\int (2x-1)\cos\frac{x}{3}dx$

3 $\int \frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$

4 $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

5 $\int \frac{\sqrt{4-x}}{(\sqrt{4-x}+3)^3}dx$

Варіант 22

1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{4x^3-6}}$

Варіант 23

1 $\int \left(e^{2x}+5\right)^3 e^{2x}dx$

Варіант 24

1 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

2 $\int x\cdot 5^{2x}dx$

3 $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$

4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x-5\sin^2 x+2}$

5 $\int \frac{5x-3}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx$

2 $\int \ln(2x+1)dx$

3 $\int \frac{x^5-2x}{x^3-1}dx$

4 $\int \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3}dx$

5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{7+4x-2x^2}}$

2 $\int \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x}dx$

3 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$

4 $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx$

5 $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}-4}dx$

Варіант 25

1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-11x^6}}$

2 $\int \frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}dx$

3 $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

4 $\int \frac{2\operatorname{tg} x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$

5 $\int \frac{7x-1}{\sqrt{9+4x-x^2}}dx$

Варіант 26

1 $\int x^2e^{5-3x^3}dx$

2 $\int x\sin 3x\cos 3xdx$

3 $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$

4 $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}dx$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$

Варіант 27

1 $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{6-\sin^2 x}}$

2 $\int x\ln\left(1+x^3\right)dx$

3 $\int \frac{x^2+24}{x(x^2-7x+12)}dx$

4 $\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$

5 $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$

Варіант 28

1 $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{5-3e^{4x}}}$

2 $\int (x+1)\operatorname{arctg} xdx$

3 $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$

4 $\int \frac{dx}{1+5\sin^2 x}$

5 $\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$

Варіант 29

1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x(2-3\operatorname{ctg} x)}$

2 $\int x^2\sin\frac{x}{2}dx$

3 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

4 $\int \sin^3 2x\cos^2 2xdx$

5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+10x+29}}$

Варіант 30

1 $\int \frac{\cos^2 x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

2 $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^2}dx$

3 $\int \frac{x^3dx}{x^3-4x^2+3x}$

4 $\int \frac{dx}{5\cos x-3\sin x+2}$

5 $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{x(2+\sqrt[3]{x})}dx$

Завдання 2.2 Розв’язати задачі.

Варіант 1

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x=a\sin 2t, \\ y=a\sin t. \end{cases}$

2 Обчислити об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $y=x^3, y=0, x=2.$

Варіант 2

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \quad ; \quad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}.$$

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = \cos x, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$

Варіант 3

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x + 3$ і $y = 3x - 1$.

2 Обчислити довжину дуги кривої $r = e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Варіант 4

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}.$

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$ і $y = 2 - x.$

Варіант 5

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 2 + \sin\varphi.$

2 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Варіант 6

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = (x+2)^2, y = 4 - x$ і $y = 0.$

2 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(t^2 + 1), \\ y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$

Варіант 7

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2, \ y = x - 1.$

2 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = \frac{t^6}{6}, \\ y = 2 - \frac{t^4}{4}, \end{cases} \quad 0 \le t \le \sqrt[4]{8}$.

Варіант 8

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = e^{-2x}, y = 0, x = -\frac{1}{2}, x = 1.$

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$ і $y = x.$

Варіант 9

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = \cos 3\varphi.$

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = x + 4$ і $x = 0.$

Варіант 10

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2, \ xy = 8, \ x = 6$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = (x+4)^3$ і $x = 0$.

Варіант 11

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3}, \\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$ і $y = 0$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $x + y - 2 = 0$ і $x^2 + y^2 = 4$.

Варіант 12

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = tgx,\ \ y = ctgx,\ \ x = \dfrac{\pi}{6}$.

Варіант 13

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = 6 - x$ і $y = \dfrac{5}{x}$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

Варіант 14

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x$ і $y - 3 = 0$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ \ y = 1,\ \ y = 2,\ \ x = 0$.

Варіант 15

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = 4\cos 2\varphi$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = e^x,\ \ y = 0,\ \ x = 0, x = 1$.

Варіант 16

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 2 + \cos 2\varphi$.

2 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* дуги кривої $y = \dfrac{x^3}{3},\ -2 \le x \le 2$.

Варіант 17

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 1 - 2\sin\varphi$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

Варіант 18

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$ і $y = x + 2$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$ $x = -1$, $x = 1$.

Варіант 19

1 Обчислити площу фігури, обмеженої першим витком спіралі Архімеда $r = a\varphi$ і полярною віссю.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$, $y = x$.

Варіант 20

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $r = 2 - \cos\varphi$ і $r = \cos\varphi$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = x$, $y = \frac{x}{2}$.

Варіант 21

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x + y = 6$, $y = 0$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* криволінійної трапеції, що обмежена лініями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases} \text{ і } y = 4$$

Варіант 22

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 2(2 + \cos\varphi)$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = \frac{3}{2}x$, $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант 23

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sin 2\varphi$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = tgx$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$.

Варіант 24

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 3\sin 3\varphi$.

2 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Варіант 25

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t^3}{3} \end{cases}$ і $x = 4$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 2^x$, $y = 4^x$, $x = 1$.

Варіант 26

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 4$ і $x = 0$.

2 Обчислити довжину дуги кардіоїди $r = 2(1+\cos\varphi)$, що розташована в області, яка обмежена колом $r = 2$.

Варіант 27

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1-\cos\varphi)$.

2 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* кривої $y^2 = 4x$ від її вершини до точки з абсцисою $x = 2$.

Варіант 28

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y = ae^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{4} - 1$ і $y = 0$.

Варіант 29

1 Обчислити площу фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ і віссю абсцис.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 + x - 4 = 0$ і $x = 0$.

Варіант 30

1 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 12\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

2 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$ і $y = -x$.

Завдання 2.3 Визначити загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

Варіант 1

1. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$.
2. $(x + 2y)dx - xdy = 0$, $y(1) = 1$.
3. $y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x$.

Варіант 2

1. $y' = \frac{2x}{3y^2 + 1}$.
2. $3xy' = x + 4y$, $y(1) = 1$.
3. $y' = e^{2x} - ye^x$.

Варіант 3

1. $y' = y \cdot tgx$.
2. $xy^2 y' = x^3 + y^3$, $y(1) = 3$.
3. $xy' - 3y = x + 1$.

Варіант 4

1. $y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.
2. $xy' - x\cos^2\frac{y}{x} = y$.
3. $\frac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$.

Варіант 5

1. $y^2 y' + x^2 = 1$.

Варіант 6

1. $y' = y^2\cos 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

3. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.

Варіант 7

1. $y' = \frac{4y}{x^2 - 4}$.
2. $yy' + x = 0$.
3. $xydx + (x+1)dy = 0$.

Варіант 8

1. $y' = \frac{x^2 - 2}{1 - y^3}$.
2. $3xy' = x + 4y$.
3. $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(2) = 8$.

Варіант 9

1. $y' = e^{x+y}$.
2. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.
3. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = \mathrm{tg}^2 x$.

Варіант 10

1. $y \cdot y' + x = 5$.
2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $xy' + y = \ln x + 1$.

Варіант 11

1. $(x^2 + 1)y' - 4xy = 0$.
2. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.
3. $x(1 + x^2)dy = (y + yx^2 - x^2)dx$, $y\big|_{x=1} = -\frac{\pi}{4}$.

Варіант 12

1. $yy' = (1 - 3x^2)y^{-2}$.
2. $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$.
3. $(x+1)\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^2$.

Варіант 13

1. $y'\mathrm{tg}x - y = 1$.
2. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.
3. $y' - 2xe^x y^3 - y = 0, \quad y\big|_{x=0} = 1$.

Варіант 14

1. $yy' = -\frac{2x}{\cos y}$.
2. $(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x} \cdot dy = 0$.
3. $(y' - y)x = e^x, \quad y\big|_{x=1} = e$.

Варіант 15

1. $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$.
2. $(y + 2\sqrt{xy})dx - xdy = 0, \quad y(e) = e$.
3. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.

Варіант 16

1. $(1 + x^2)dy + ydx = 0$.
2. $xdy - ydx = x\sin^2\frac{y}{x} \cdot dx$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Варіант 17

1. $y' = \mathrm{tg}x \cdot \mathrm{tg}y$.
2. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.
3. $tds - 2sdt = t^2 \ln t \cdot dt$.

Варіант 18

1. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$.
2. $y = x(y' + \sqrt[x]{e^y})$.
3. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x, \quad y(\pi) = \frac{4}{3}$.

Варіант 19

1. $(x+1)y' = xy$.
2. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2 - x} = 1, \quad y(2) = -2\ln 2$.

Варіант 20

1. $(y+xy)dx + (x-xy)dy = 0$.
2. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.
3. $y'\operatorname{ctg} x - y = 2\cos^2 x \operatorname{ctg} x$.

Варіант 21

1. $ydx + ctg\, xdy = 0$.
2. $3xy' = x + 4y, \quad y(1) = 1$.
3. $(\varphi^2 - 1)r' - \varphi r = \varphi^3 - \varphi$.

Варіант 22

1. $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$.
2. $xy' - 3y = \frac{x^2}{y}$.
3. $xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y\big|_{x=1} = 1$.

Варіант 23

1. $xydx = -(x+1)dy$.
2. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y\big|_{x=0} = 2.$
3. $xy' - 2y = x + 1$.

Варіант 24

1. $y' - y\sin 2x = 0$.
2. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.
3. $y'\cos x + y\sin x = 1, y(0) = 1$.

Варіант 25

1. $yy' = \frac{2+x}{y}$.
2. $y' = \frac{x+2y}{x}$.
3. $y' + (1 + \frac{1}{x^2})y = e^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 26

1. $S\operatorname{tg} t \cdot dt + dS = 0$.
2. $\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad y(-1) = 2$.
3. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$.

Варіант 27

1. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$.
2. $xy'\sin\frac{y}{x} = y\sin\frac{y}{x} - x$.
3. $y' + \frac{3y}{x} = 7x^3 + 2x^2$.

Варіант 28

1. $y' = y^2\cos 2x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 1$,
2. $xy'\sin\frac{y}{x} = y\sin\frac{y}{x} - x$.
3. $y' + \frac{y}{x+1} = 3x - 1$.

Варіант 29

1. $(y+xy)dx + (x-xy)dy = 0$.
2. $(x+2y)dx - xdy = 0$.
3. $tdx + (x - t\sin t)dt = 0$.

Варіант 30

1. $(x+1)y' + xy = 0$.
2. $tx' + t\cos\frac{x}{t} - x + t = 0$.
3. $y'\cos x - 2y\sin x = 2$.

Завдання 2.4 Визначити загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $2y'' - 9y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 6$.
2. $y'' + 4y' + 5y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Варіант 2

1. $2y'' + 5y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
2. $y'' - 2y' = 5y = 0.$
3. $4y'' + 4y' + y = 0.$

Варіант 3

1. $3y'' + 5y'' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0.$
3. $y'' + 2y' + y = 0$

Варіант 4

1. $4y'' + y' - 3y = 0, y(0) = 1{,}5, y'(0) = 0{,}25.$
2. $y'' + 4y = 0.$
3. $y'' - 2y' + y = 0.$

Варіант 5

1. $10y'' - 3y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0{,}1.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 8y' + 16y = 0.$

Варіант 6

1. $3y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7.$
2. $y'' + 9y = 0.$
3. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

Варіант 7

1. $3y'' + 2y' - 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{14}{3}.$
2. $y'' - 4y' + 29y = 0.$
3. $0{,}04y'' + 0{,}4y' + y = 0.$

Варіант 8

1. $4y'' - 17y' = 15y = 0, y(0) = 7, y'(0) = 0{,}5.$
2. $y'' + 16y = 0.$
3. $y'' + y' + 0{,}25y = 0.$

Варіант 9

1. $5y'' - 8y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{5}.$
2. $y'' - 8y' + 20y = 0.$
3. $y'' - 14y' + 49y = 0.$

Варіант 10

1. $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$
2. $y'' + 8y' + 25y = 0.$
3. $25y'' - 10y' + y = 0.$

Варіант 11

1. $2y'' - 7y' + 6y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 4.$
2. $y'' + 25y = 0.$
3. $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

Варіант 12

1. $y'' - y' - 12y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 10.$
2. $y'' - 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 16y' + 64y = 0.$

Варіант 13

1. $y'' + 14y' + 24y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 20.$
2. $y'' - 4y' + 5y = 0.$
3. $\frac{1}{4}y'' - y' + y = 0.$

Варіант 14

1. $y'' - 11y' - 60y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 4$.
2. $y'' + y' = 0.$
3. $9y'' + 24y' + 16y = 0.$

Варіант 15

1. $y'' - y' - 20y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 8.$
2. $y'' - 6y' + 10y = 0.$
3. $4y'' - 20y' + 25y = 0.$

Варіант 16

1. $9y'' - 6y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$
3. $y'' - 10y' = 0.$

Варіант 17

1. $y'' + 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

Варіант 18

1. $y'' + 7y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6.$
2. $\frac{4}{9}y'' - \frac{4}{3}y'' + y = 0.$

3. $y'' - 2y' + 4y = 0.$

Варіант 19

1. $4y'' - 8y' + 5y = 0, y(0) - 2, y'(0) = 3.$
2. $y'' + 5y' - 14y = 0.$
3. $16y'' - 40y' + 25y = 0.$

Варіант 20

1. $y'' + 4y' - 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 8.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $169y'' + 26y' + y = 0.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' = 0, y(0)2, y'(0)2.$
2. $y'' - 6y' + 34y = 0.$
3. $y'' - 22y' + 121y = 0.$

Варіант 22

1. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $81y'' - 18y' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 17y = 0.$

Варіант 23

1. $y'' - 3y' - 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$
2. $100y'' - 20y' + y = 0.$
3. $y'' - 6y' + 25y = 0.$

Варіант 24

1. $4y'' - 7y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{4}.$
2. $y'' + 10y' + 61y = 0.$
3. $121y'' - 44y' + 4y = 0.$

Варіант 25

1. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1.$
2. $y'' - 8y' + 15y = 0.$
3. $17y'' + 2y' + y = 0.$

Варіант 26

1. $3y'' + 7y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + 49y = 0.$
3. $4y'' - 28y' + 49y = 0.$

Варіант 27

1. $y'' + 4y' + 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 5y' - 14y = 0.$
3. $1{,}44y'' - 2{,}4y' + y = 0.$

Варіант 28

1. $2y'' - 3y' - 35y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5.$
2. $y'' - 14y' + 58y = 0.$
3. $81y'' - 36y'' + 4y = 0.$

Варіант 29

1. $y'' - 13y' + 22y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 3.$
2. $y'' + 81y = 0.$
3. $y'' - 30y' + 225y = 0.$

Варіант 30

1. $5y'' - 6y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' + 26y = 0.$
3. $y'' - 5y' + 6{,}25y = 0.$

Завдання 2.5 Визначити загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1, y(0) = \frac{29}{32}, y'(0) = -\frac{3}{8}.$
2. $y'' + 4y = 8\sin 2x.$

Варіант 2

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y''(0) = 11.$
2. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + \cos 2x.$

Варіант 3

1. $y'' + 4y = 8x, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$

Варіант 4

1. $y'' + 4y' + 4y = 5e^{3x}, y(0) = \frac{1}{5}, y'(0) = \frac{8}{5}.$
2. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$

Варіант 5

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}, y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 3y' = 9x.$

Варіант 6

1. $y'' + 4y = 4\sin x, y(0) = 0, y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$

Варіант 7

1. $y'' - 2y' = x^2 - x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + 2y' + 2y = 4\sin 2x + 2\cos 2x.$

Варіант 8

1. $y'' + y = x^2, y(0) = 0, y'(0) = 0.$
2. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 2k\sin kt.$

Варіант 9

1. $y'' - 2y' + 10y = 5x + 9, y(0) = 4, y'(0) = 6{,}5.$
2. $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx.$

Варіант 10

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$
2. $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 2.$

Варіант 11

1. $y'' + y = \cos 2x, y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 4y = 4e^{2x}x^2.$

Варіант 12

1. $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0.$
2. $y'' + y = 4\sin x.$

Варіант 13

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x + 3, y(0) = 2, y'(0) = 6.$
2. $y'' + 2y' - 3y = e^x x^2.$

Варіант 14

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

Варіант 15

1. $y'' - 3y' = x + \cos x, y(0) = -\frac{1}{10}, y'(0) = -\frac{1}{9}.$
2. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$

Варіант 16

1. $y'' - 2y' + y = e^x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$
2. $y'' + 4y' + 8y = 20\sin 2x.$

Варіант 17

1. $y'' - 4y = 8x + 3, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
2. $y'' + 9y = e^x \cos 3x.$

Варіант 18

1. $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

Варіант 19

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y'(0) = 11.$
2. $y'' + 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

Варіант 20

1. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, y(0) = \frac{4}{3}, y'(0) = \frac{1}{27}.$
2. $y'' + 4y' = 8e^{4x}.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, y(0) = 2, y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' = 6e^{3x}.$

Варіант 22

1. $4y'' + y' - 3y = 3x^2 + x.$
2. $y'' - y = 8e^x, y(0) = 2, y'(0) = 4.$

Варіант 23

1. $y'' + 4y = \sin x, y(0) = y'(0) = 1.$
2. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$

Варіант 24

1. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x.$

Варіант 25

1. $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x, y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' - 8y' + 16y = 32x.$

Варіант 26

1. $y'' - 2y' + y = 4\sin x + 4\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' + y' = 49 - 2x^2.$

Варіант 27

1. $y'' - 3y' = 6 - 3x^2, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Варіант 28

1. $y'' - 2y' + y = 16e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' + y = \sin x - \cos x.$

Варіант 29

1.
$y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

2. $y'' + 2y' + y = 3\sin x.$

2. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x + 3.$

Варіант 30

1. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

2. $y'' + y' = 49 - 24x^3.$

Зразок виконання контрольної роботи №2

Завдання 2.1 Знайти невизначені інтеграли

1 $\int \frac{dx}{(5 + 7tgx)\cos^2 x}.$

2 $\int x^2 \sin 3x dx.$

3 $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx.$

4 $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}.$

5 $\int \cos^4 x \sin^5 x dx.$

Розв'язання.

1 Оскільки похідна виразу $5+7tgx$ дорівнює $\frac{7}{\cos^2 x}$, а множник $\frac{1}{\cos^2 x}$ відрізняється від цієї похідної лише сталим множником 7, то змінною інтегрування тут можна вважати вираз $5+7tgx$, і, таким чином, знайти інтеграл:

$$\int \frac{dx}{(5 + 7tgx)\cos^2 x} = \frac{1}{7}\int \frac{1}{5 + 7tgx} \cdot \frac{7}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 5 + 7tgx \\ u_x' = \frac{7}{\cos^2 x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{u} \cdot u_x' dx = \frac{1}{7}\ln|5 + 7tgx| + C.$$

2 Покладемо $u=x^2$, $dv=\sin 3x dx$. Тоді

$$du=2xdx, \quad v = \int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою інтегрування частинами знаходимо

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right) \cdot 2x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \cos 3x dx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x$, $dv=\cos 3x dx$, тоді

$$du = dx, v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x \cos 3x dx = \frac{1}{3}x \sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x dx = \frac{1}{3}x \sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right) + C =$$

$$=\frac{1}{27}\left(-9x^2\cos 3x+6x\sin 3x+2\cos 3x\right)+C.$$

3 Переконуємося, що підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Враховуючи, що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x=0$ і $x=3$ – прості, а $x=1$- двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}$. Отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-3)(x-1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

4 Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=4$, тому $к=12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Покладемо $x=t^{12}$. Тоді

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\left|\begin{array}{c} x=t^{12} \\ dx=12t^{11}dt \end{array}\right|=\int\frac{t^6}{t^8-t^3}12t^{11}dt=$$

$$=12\int\frac{t^{17}dt}{t^3(t^5-1)}=12\int\frac{t^{14}dt}{t^5-1}=$$

$$=\left|\begin{array}{l|l} -\begin{array}{l} t^{14} \\ \underline{t^{14}-t^9} \\ \quad t^9 \\ \quad -\underline{t^9-t^4} \\ \qquad t^4 \end{array} & \begin{array}{l} t^5-1 \\ \hline t^9+t^4 \end{array} \end{array}\right|=$$

$$=12\int\left(t^9+t^4+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt=12\left(\int t^9dt+\int t^4dt+\frac{1}{5}\int\frac{5t^4dt}{t^5-1}\right)=$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C=\frac{6}{5}\left(t^{10}+2t^5+2\ln\left|t^5-1\right|\right)+C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C.$$

5 Маємо інтеграл вигляду $\int\sin^m x\cos^n xdx$, де $m=5$, $n=4$.

Враховуючи, що $m=5>0$ і непарне, одержимо

$$\int\cos^4 x\sin^5 xdx=\int\cos^4 x\cdot\sin^4 x\cdot\sin xdx=\int\cos^4 x(1-\cos^2 x)^2\cdot\sin xdx=$$

$$=\left|\begin{matrix} t=\cos x \\ dt=-\sin xdx\end{matrix}\right|=-\int t^4(1-t^2)^2dt=-\int t^4(1-2t^2+t^4)dt=$$

$$=-\int(t^4-2t^6+t^8)dt=-\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^9}{9}\right)+C=-\left(\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{2\cos^7 x}{7}+\frac{\cos^9 x}{9}\right)+C.$$

Завдання 2.2 Розв’язати задачі.

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y=\frac{1}{1+x^2}$ і параболою $y=\frac{x^2}{2}$.

2 Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням параболи $y^2=4x$ навколо своєї осі (параболоїд обертання) і площиною, перпендикулярною до його осі та віддаленою від вершини параболи на відстань, що дорівнює одиниці.

3 Обчислити довжину петлі лінії $x=t^2$, $y=t-\frac{t^3}{3}$.

Розв’язання.

1 Крива $y=\frac{x^2}{2}$ – парабола з вершиною в точці $O(0;0)$ і віссю симетрії Oy. Вітки параболи направлені вгору (рис. 2.1).

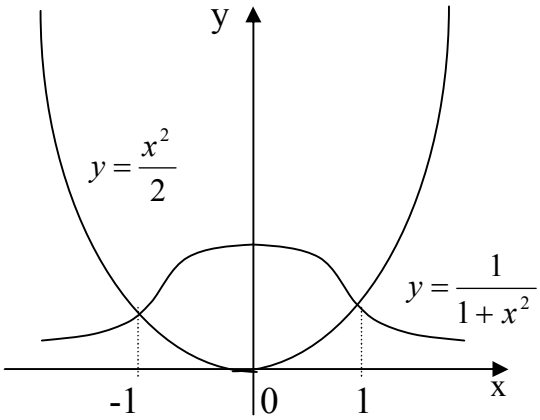

Рисунок 2.1

Крива $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ – локон Аньєзі. Із рівняння видно, що при будь-якому x функція набуває лише додатних значень, а тому її графік розташований вище осі Ox, а вісь Oy є її віссю симетрії, бо $y(-x)=y(x)$. Найбільше значення, яке дорівнює одиниці, функція набуває при $x=0$, а при $x\to\pm\infty$ $y\to 0$.

Схематично графік цієї функції зображений на рис. 2.1. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рис. 2.1. Площу заштрихованої фігури обчислимо за формулою:

$$S=\int_a^b\left(y_в(x)-y_н(x)\right)dx.$$

Для визначення меж інтегрування обчислимо абсциси точок перетину ліній, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{1+x^2}, \\ y=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Звідси $x_1=-1$, $x_2=1$. Отже, $a=-1$, $b=1$.

Враховуючи також, що $y_в=\dfrac{1}{1+x^2}$, а $y_н=\dfrac{x^2}{2}$ будемо мати $S=\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{x^2}{2}\right)dx$, а з урахуванням симетрії фігури відносно осі Oy одержуємо

$$S=2\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\left(arctgx-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1=2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{6}\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}.$$

2 Побудуємо тіло (рис.2.2).

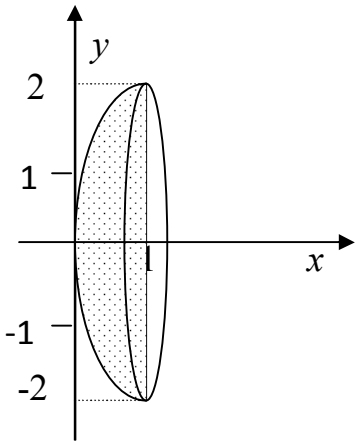

Рисунок 2.2

Враховуючи, що $y_в = 2\sqrt{x}$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$, за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b \left(y_в{}^2(x) - y_н{}^2(x)\right)dx$$

будемо мати

$$V_x = \pi\int_0^1 4xdx = 2\pi x^2\Big|_0^1 = 2\pi.$$

3 Оскільки межі інтегрування не задані, то слід побудувати лінію, для чого доцільно виключити параметр t із параметричних рівнянь: $y^2 = x\left(1-\frac{x}{3}\right)^2$. На довжині петлі (рис.2.3) параметр t змінюється від $-\sqrt{3}$ до $\sqrt{3}$.

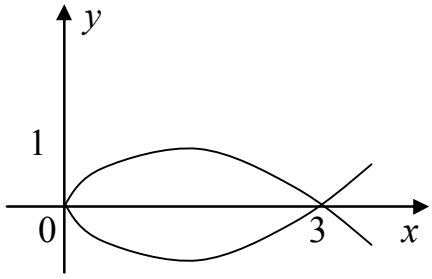

Рисунок 2.3

Із урахуванням симетрії лінії відносно осі Ox, обчислюємо її довжину за формулою: $L = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt.$

$$L = 2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2 + \left(1-t^2\right)^2}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1 + 2t^2 + t^4}\,dt =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{\left(1+t^2\right)^2}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left(1+t^2\right)dt = 2\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}.$$

Зауважимо, що при добуванні квадратного кореня з виразу $\left(1+t^2\right)^2$ враховано, що $1+t^2>0$ для всіх дійсних значень t.

Завдання 2.3 Визначити загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

1 $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

2 $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

3 $y' - ytgx = \sec x$, $y(0) = 0$.

Розв'язання.

1 Розв`яжемо рівняння відносно y': $y' = \dfrac{1-2x}{y^2}$. Отримаємо рівняння типу $y' = f_1(x)f_2(y)$, оскільки $\dfrac{1-2x}{y^2} = (1-2x)\dfrac{1}{y^2}$. Замінимо y' на $\dfrac{dy}{dx}$, тоді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-2x}{y^2}$.

Помноживши обидві частини на y^2dx, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$y^2dy = (1-2x)dx,$$

інтегруючи яке, знаходимо $\dfrac{y^3}{3} = x - x^2 + C$ (загальний інтеграл)

або, розв`язавши відносно y, $y = \sqrt[3]{C+3x-3x^2}$ (загальний розв'язок).

2 Це рівняння типу $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тобто однорідне відносно змінних x і y диференціальне рівняння першого порядку.

Зробимо заміну $\dfrac{y}{x} = u(x)$, звідки $y = ux$, а $y' = u'x + u.$. Підставляючи ці вирази в дане рівняння, отримаємо

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

а після відокремлювання змінних $udu = \dfrac{dx}{x}$. Інтегруючи цю рівність, знаходимо $\dfrac{u^2}{2} = \ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln|C|$ або $u^2 = \ln\left|Cx^2\right|$. Повертаючись до y, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння $\dfrac{y^2}{x^2} = \ln\left|Cx^2\right|$, а, розв`язавши відносно $y$, – загальний розв`язок рівняння

$$y = \pm\sqrt{\ln\left|Cx^2\right|}.$$

3 Задане рівняння є лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Знайдемо спочатку його загальний розв`язок. Для цього покладемо $y = uv$, $y' = u'v + v'u$ і підставимо знайдені вирази в рівняння

$$u'v + v'u - uvtgx = \sec x$$

або

$$u'v + u(v' - vtgx) = \sec x.$$

Тоді

1. $v' - vtgx = 0;$

$\frac{dv}{dx} = vtgx;$

$\frac{dv}{v} = tgxdx;$

$\ln|v| = -\ln|\cos x|;$

$v = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.$

2. $u'v = \sec x;$

$u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x};$

$u' = 1;$

$u = x + C.$

$y = uv = (x + C)\frac{1}{\cos x}$ – загальний розв`язок.

При x=0 і y=0 знаходимо значення довільної сталої C

$$0 = (0 + C)\frac{1}{\cos 0} \Rightarrow C = 0.$$

Отже, шуканий частинний розв`язок рівняння буде мати наступний вигляд: $y = \frac{x}{\cos x}$.

Завдання 2.4 Визначити загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 6; y'(0) = 10.$

2 $y'' - 2y' + y = 0.$

3 $y'' + 6y' + 13y = 0.$

Розв'язання.

1 Спочатку знайдемо загальний розв`язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння $к^2$–4$к$+3 = 0. Його корені $к_1$ = 1 і $к_2$ = 3 дійсні й різні, тому загальний розв`язок має вигляд $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Диференціюючи y, отримаємо $y' = C_1e^x + 3C_2e^{3x}$. Використовуючи початкові умови, знаходимо значення C_1 і C_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6 = C_1 + C_2, \\ 10 = C_1 + 3C_2. \end{cases}$$

Розв`язуючи систему, одержимо $C_1$ = 4, $C_2$ = 2. Підставляючи ці значення в загальний розв`язок, знаходимо шуканий частинний розв`язок $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

2 Складемо характеристичне рівняння $к^2$ –2$к$ +1=0.

Оскільки $к^2$ –2$к$ +1=$(к-1)^2$=0, $к_1$=$к_2$ =1. Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні, тому загальний розв`язок запишемо у вигляді $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

3 Складемо характеристичне рівняння $к^2+6к+13=0$. Його корені знайдемо за формулою $k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, згідно з якою

$$k_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-13}=-3\pm\sqrt{-4}=-3\pm\sqrt{4i}=-3\pm 2i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ($к_{1,2}=\alpha\pm\beta i$). Отже, $\alpha = -3$; $\beta = 2$. Тоді загальний розв`язок даного рівняння набуде вигляду

$$y=e^{3x}\left(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x\right).$$

Завдання 2.5 Визначити загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $2y''+y'-y=2e^x$.

2 $y''+y+\sin 2x=0,\ y(\pi)=y'(\pi)=1$.

Розв'язання.

1 Дане рівняння є ЛНДР – 2 зі сталими коефіцієнтами й спеціальною правою частиною. Його загальний розв`язок шукаємо у вигляді $y=\bar{y}+Y$. Для знаходження $\bar{y}$ ЛОДР – 2, яке відповідає даному ЛНДР – 2: $2y''+y'-y=0$.

Складемо характеристичне рівняння $2к^2+к-1=0$. Його корені $к_1=-1$ і $k_2=\frac{1}{2}$. Отже,

$$\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}.$$

Підставимо Y,Y',Y'' в дане рівняння: $2Ae^x+Ae^x-Ae^x\equiv 2e^x$. Права частина $f(x)=2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, де $\alpha=1$, а $n=0$, тому $Y=Ae^x$ бо $\alpha\neq к_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y'=Ae^x, Y''=Ae^x$. Звідки знаходимо $A = 1$. Отже, $Y=e^x$, а загальний розв`язок вихідного рівняння

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x.$$

2 Зведемо рівняння до загального вигляду: $y''+y=-\sin 2x$.

Далі, розв`язуючи його відповідним методом, будемо мати:

$$y=\bar{y}+Y;$$

$$y''+y=0;\quad к^2+1=0;\quad к_{1,2}=\pm i;\quad \alpha=0;\beta=1;$$

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Оскільки $f(x)=-\sin 2x$, то $b=2(\pm bi=\pm 2i\neq k_{1,2})$ і тому

$$\begin{array}{l|l} 1 & Y=M\cos 2x+N\sin 2x \\ 0 & Y'=-2M\sin 2x+2N\cos 2x \\ 1 & Y''=-4M\cos 2x-4N\sin 2x \end{array}\qquad \begin{array}{l|l} \cos 2x & M-4M=0;M=0; \\ \sin 2x & N-3N=-1;N=\frac{1}{3}. \end{array}$$

Отже, $Y = \frac{1}{3}\sin 2x$ і загальний розв`язок неоднорідного рівняння набуде вигляду: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$.

Знаходимо $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x.$ Ураховуючи початкові умови: при $x = \pi; y = y' = 1,$ отримаємо систему

$$\begin{cases} 1 = -C_1, \\ 1 = -C_2 + \frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знаходимо $C_1 = -1,$ $C_2 = -\frac{1}{3}.$ Підставляючи числові значення C_1 і C_2 в загальний розв`язок, одержимо шуканий частинний розв`язок

$$y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Бібліографічний список

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.

2 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука, 1985.

3 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

4 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. шк., 2001.

5 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : В. 2т.- М. : Наука, 1985.

6 Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах – Т.3. – М.: Высш. шк., 1978.

7 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972.

8 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

9 Поклонський Є.В. Вища та прикладна математика. Тексти лекцій для студентів спеціальності 073 «Менеджмент». – Х.: ХНУБА, 2016. – 319 с.

10 Поклонський Є.В. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності 073 «Менеджмент». – Харків: ХНУБА, 2016. – 282 с.

11 Поклонський Є.В. Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності 073 «Менеджмент». – Харків: ХНУБА, 2016. – 158 с.

ЗМІСТ

Вступ……..... 3
Програма навчальної дисципліни .....…… 4
Контрольна робота №1…… 5
Зразок виконання контрольної роботи №1 ...…… 11
Контрольна робота № 2……..……. 23
Зразок виконання контрольної роботи №2 ..…… 35
Бібліографічний список …….. 43

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни „Вища та прикладна математика” для студентів спеціальності 073 «Менеджмент» заочної форми здобуття освіти. Розділ І

Укладач: Аршава Олена Олександрівна

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор В.І. Пуцик

План 2020 р., поз 93.20 Формат 60х84 1/16. Папір друк. №2.
Підп. до друку 09.09.19 Безкоштовно.
Надруковано на різографі. Умов. друк. арк. 2.0.
Тираж 50 прим. Зам. № 5828.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури