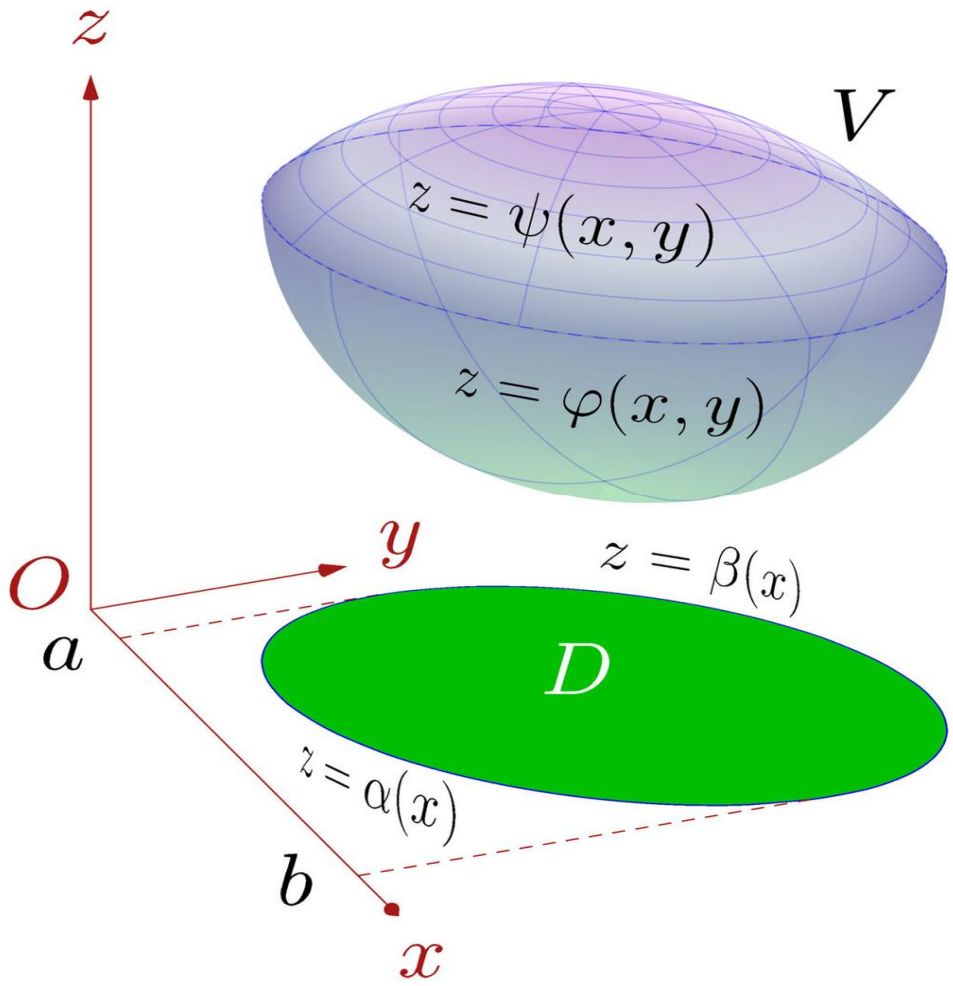
О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник



Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Рекомендовано
Вченою радою університету
як навчальний посібник для студентів
закладу вищої освіти

Харків, ТОВ «Цифрова типографія» 2018

УДК 517.21.3
А 89

Гриф надано Вченою радою
Харківського національного університету будівництва та архітектури
(протокол № 9 від 27 квітня 2018 року).

Рецензенти:

Л.Б. Коваленко, к.ф.-м. наук, доц., кафедра вищої математики Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова (ХНУМГ)

А.А. Янцевич, д. ф.-м. наук, проф., кафедра математичних методів в економіці Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна (ХНУ)

А.Ю. Петрова, к. ф.-м. наук, доц., кафедра вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА)

Аршава О.О., Харченко А.П., Щелкунова Л.І.
А-89 Інтегральне числення функцій багатьох змінних: Навчальний посібник. – Харків: ТОВ «Цифрова типографія», 2018. – 137 с.
ISBN 978-617-7722-13-6

Навчальний посібник присвячений одному з головних розділів математичного аналізу – інтегральному численню функцій багатьох змінних. Головна увага при цьому приділяється застосуванню кратних, криволінійних та поверхневих інтегралів до геометричних задач і задач механіки. Теоретичний матеріал супроводжується значною кількістю прикладів, які подаються з розв’язанням. Подаються завдання для самостійного виконання студентами, а також питання для самоперевірки.

Видання розроблено відповідно до діючої програми з „Вищої математики” для технічних університетів.

Іл.: 77; табл.: 2; бібліогр.: 9 назв.

УДК 517.21.3

ISBN 978-617-7722-13-6

© О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова, 2018

ВСТУП

Дане видання призначається для студентів технічних вишів, які навчаються за освітнім ступенем „Бакалавр” за спеціальностями 192, 133, 144, 151, 194. Нові вимоги до випускників інженерно-технічних закладів вищої освіти полягають у необхідності підняття рівня фундаментальної математичної підготовки та застосуванні методів класичної математики – вміння ставити математичну задачу, вміння будувати математичну модель задачі, вміння обирати необхідний математичний метод розв’язання задачі, на підставі проведеного математичного аналізу вміти виробити практичні рекомендації. Саме таку мету переслідує запропонований посібник.

Навчальний посібник присвячений одному з головних розділів математичного аналізу – інтегральному численню функції багатьох змінних. У посібнику розглядаються кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли: методи інтегрування, застосування до розв’язання прикладних задач. Кожен параграф починається з короткого теоретичного вступу, наводяться основні означення, теореми, формули, графічні зображення та інші короткі відомості з теорії, методичні рекомендації, а також розв’язки типових задач із короткими поясненнями теоретичних положень і задачі для самостійного розв’язку. До всіх задач подані відповіді.

Видання містять не тільки необхідний матеріал, який викладається на лекціях, але і допоміжні відомості для більш глибокого самостійного вивчення. Крім того, видання має допомогти студенту в тих випадках, коли деякі питання містять багато фактичного матеріалу, який слід вивчити за обмежену кількість часу.

Приклади і задачі, що ілюструють основні поняття і теореми, допоможуть студентам глибше засвоїти загальноосвітні та спеціальні курси. Особливу увагу приділено питанням, що недостатньо висвітлені в навчальних посібниках такого типу, в тому числі пов’язаних із задачами будівництва та архітектури.

Дане видання буде корисним студенту при проведенні лекцій, як додатковий матеріал; при організації самостійної роботи, як джерело нових відомостей; при проведенні заняття – семінару, присвяченого застосуванню методів інтегрального числення функції багатьох змінних у будівництві та архітектурі; при управлінні пошуково – дослідною роботою, як базовий матеріал для подальшої організації проектної роботи. Посібник також може бути використаний як збірка задач для проведення практичних занять.

При написанні посібника автори ставили за мету наступне:

- допомогти студентам оволодіти необхідними теоретичними знаннями;
- сформувати первинні навички математичного дослідження прикладних задач;
- виробити вміння самостійно розв’язувати задачі та використовувати літературу; навчити поглиблювати свої знання, розвиваючи у студентів стійкій інтерес до застосування методів математики в будівництві та архітектурі, у тому числі з використанням інформаційних технологій.

1 ПОДВІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

1.1 Подвійний інтеграл. Теорема існування

Нехай G – деяка замкнена і обмежена область площини Oxy, в якій визначена функція $z = f(x, y)$. Тут і надалі будемо припускати, що область G має скінченну площу й обмежена однією або кількома лініями. Виконаємо наступні дії:

1. Розбиваємо область G довільно сіткою кривих на скінченне число областей $\Delta G_1, \Delta G_2, ..., \Delta G_n$, площі яких будуть $\Delta G_1, \Delta G_2, ..., \Delta G_n$ (для зручності області й їх площі позначені однаковими літерами).

2. У кожній області ΔG_i вибираємо довільно точку $P_i(x_i, y_i), i = 1,2,...,n.$

3. Складаємо суму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta G_i. \qquad (1)$$

Сума виду (1) називається інтегральною сумою.

4. Нехай $d = \max\limits_{1 \le i \le n}\{d_i\}$, де d_i – діаметр області ΔG_i, тобто найбільша відстань між двома точками цієї області.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми за умови $d \to 0$ і ця границя не залежить ні від способу розбиття області G на частини $\Delta G_i, i = 1,2,...,n,$ ні від вибору точок $P_i(x_i, y_i)$, тоді її називають подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області G.

Позначають подвійний інтеграл символом $\iint\limits_G f(x, y)dG.$

Отже, за означенням $\iint\limits_G f(x, y)dG = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta G_i.$

Область G називають областю інтегрування, x і y – змінними інтегрування, dG – елементом площі.

Оскільки означення подвійного інтеграла не залежить від способу розбиття області G, тоді розбиття можна взяти прямими, паралельними координатним осям. Тоді $dG = dxdy.$

Вираз $dxdy$ називають елементом площі в декартових координатах, а інтеграл позначають таким чином: $\iint\limits_G f(x, y)dxdy.$

Теорема існування. Якщо функція $z = f(x, y)$ неперервна в замкненій обмеженій області G, тоді подвійний інтеграл від указаної функції існує.

Функції, для яких інтеграл існує, називають інтегровними.

1.2 Властивості подвійного інтеграла

1. Якщо k – стала й функція $f(x, y)$ інтегровна в області G, тоді функція $kf(x, y)$ також інтегровна в області G і

$$\iint\limits_G kf(x, y)dxdy = k\iint\limits_G f(x, y)dxdy.$$

2. Якщо функції $f(x,y)$ і $g(x,y)$ інтегровні в області G, тоді їх алгебраїчна сума також інтегровна в цій області і

$$\iint_G (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint_G f(x,y)dxdy \pm \iint_G g(x,y)dxdy.$$

Сукупність властивостей 1,2 називають властивістю лінійності подвійного інтеграла.

3. Якщо область G є об'єднанням областей G_1 і G_2, які не мають спільних внутрішніх точок, в кожній із яких функція $f(x,y)$ інтегровна, тоді в G ця функція також інтегровна в має місце рівність

$$\iint_G f(x,y)dxdy = \iint_{G_1} f(x,y)dxdy + \iint_{G_2} f(x,y)dxdy.$$

Така властивість називається адитивністю подвійного інтеграла за областю інтегрування.

4. Якщо в області G функція $f(x,y)$ інтегровна і $f(x,y) \geq 0,$ тоді

$$\iint_G f(x,y)dxdy \geq 0.$$

5. Якщо для інтегровних в області G функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ виконується нерівність $f(x,y) \leq g(x,y),$ тоді

$$\iint_G f(x,y)dxdy \leq \iint_G g(x,y)dxdy.$$

6. Теорема про середнє значення. Якщо функція $f(x,y)$ неперервна в замкненій обмеженій області G, тоді в цій області знайдеться така точка $P_0(x_0, y_0),$ що виконується рівність

$$\iint_G f(x,y)dxdy = f(x_0, y_0) \cdot S,$$

де S – площа області G.

1.3 Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторного (двократного) інтеграла, тобто до послідовного обчислення двох визначених інтегралів. Будемо розрізняти два основні види області інтегрування.

1. Область інтегрування (*Д*) (рис. 1.1) обмежена зліва і справа прямими $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), а знизу і зверху неперервними кривими $y = \varphi_1(x)$ і $y = \varphi_2(x)$ $(\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x))$, кожна з яких перетинається з прямою $x = const$ лише один раз. $y = \varphi_1(x)$ – нижня межа області (лінія входу), $y = \varphi_2(x)$ – верхня межа області (лінія виходу). Така область називається правильною відносно осі *0y*.

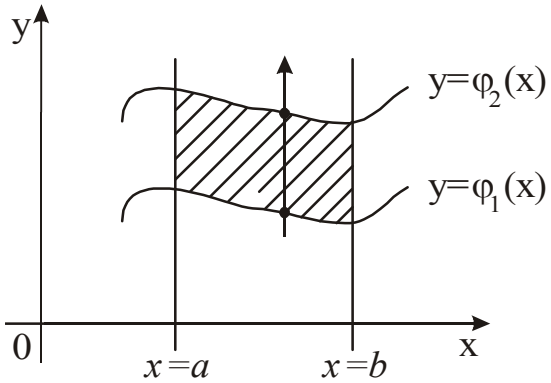


Рисунок 1.1

В області (Д) змінна x змінюється від a до b, а змінна y при сталому x змінюється від $y = \varphi_1(x)$ до $y = \varphi_2(x)$.

Для такої області подвійний інтеграл обчислюється за формулою:

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^в dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy .$$

Область інтегрування (*Д*) (рис. 1.2) знизу і зверху обмежена прямими $y = c$ і $y = d$ ($c < d$), а зліва і справа неперервними кривими $x = \psi_1(y)$ і $x = \psi_2(y)$ $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$, кожна з яких перетинається з прямою $y = const$ лише один раз.

$x = \psi_1(y)$ – ліва межа області (лінія входу), $x = \psi_2(y)$ – права межа області (лінія виходу). Така область називається правильною відносно осі *0x*.

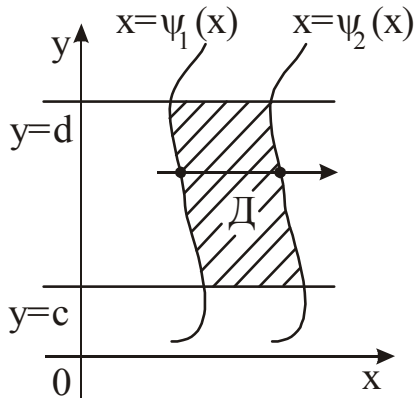


Рисунок 1.2

В області (*Д*) змінна y змінюється від c до d, а змінна x при сталому y змінюється від $x = \psi_1(y)$ до $x = \psi_2(y)$. Для такої області подвійний інтеграл обчислюється за формулою

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx .$$

Зазначимо, що коли границя області складається з кількох ліній входу і виходу, то область (*Д*) розбивають на частини, кожна з яких має одну лінію входу й одну лінію виходу, і тоді інтеграл відносно області, наприклад, (*Д*) = ($Д_1$) + ($Д_2$) розглядають як суму інтегралів відносно кожної з них, тобто

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(Д_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(Д_2)} f(x,y)dxdy.$$

Обчислюючи подвійний інтеграл у прямокутних координатах, доцільно користуватися наступним правилом.

Правило обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах

1.Побудувати область інтегрування (*Д*) і перевірити, чи є вона правильною (прямі, паралельні осям координат, перетинають межу області не більше, ніж в двох точках). Якщо область не є правильною, тоді її треба розрізати на правильні частини.

2. Обрати раціональний підхід інтегрування.

3. Перейти від подвійного інтеграла до повторного.

4. Розставити межі інтегрування в повторному інтегралі, пам'ятаючи, що межі зовнішнього інтеграла завжди сталі (це кінці інтервалу, що належить осі *Ox* або осі *Oy*, на який проектується область (*Д*)), а межі внутрішнього інтеграла є функціями тієї змінної, відносно якої береться зовнішній інтеграл.

5. Знайти внутрішній інтеграл, вважаючи сталою змінну зовнішнього інтеграла.

6. Знайти зовнішній інтеграл від функції, одержаної в результаті знаходження внутрішнього інтеграла.

Зауважимо, що коли область інтегрування (*Д*) – прямокутник, сторони якого паралельні осям координат, тоді всі чотири межі інтегрування в повторному інтегралі сталі.

Приклади

Приклад 1. Обчислити повторний інтеграл:

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx.$$

Розв'язання. Обчислюємо внутрішній інтеграл, вважаючи *y* сталою.

$$\int_0^1 (x^2 + 2y)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 2y dx = \int_0^1 x^2 dx + 2y\int_0^1 dx = \left(\frac{x^3}{3} + 2yx\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} + 2y.$$

Обчислюємо зовнішній інтеграл від одержаної функції

$$\int_0^2 (\frac{1}{3} + 2y)dy = \int_0^2 \frac{1}{3} dy + \int_0^2 2y dy = \left(\frac{1}{3}y + y^2\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3} + 4 = 4\frac{2}{3}.$$

Таким чином,

$$\int_0^2 dy \int_0^1 (x^2 + 2y)dx = 4\frac{2}{3}.$$

Розв'язання цього прикладу інакше можна записати таким чином:

$$\int_0^2 dy\int_0^1 (x^2+2y)dx=\int_0^2\left(\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 2ydx\right)dy=\int_0^2\left(\frac{x^3}{3}+2xy\right)\Bigg|_0^1 dy=\int_0^2(\frac{1}{3}+2y)dy=$$

$$=\int_0^2\frac{1}{3}dy+\int_0^2 2ydy=\left(\frac{1}{3}y+y^2\right)\Bigg|_0^2=\frac{2}{3}+4=4\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+4=4\frac{2}{3}$$

Приклад 2. Обчислити повторний інтеграл $\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}$.

Розв'язання. У даному інтегралі змінною внутрішнього інтеграла є y. Отже,

$$\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{x^2dy}{y^2}=\int_1^2 x^2dx\int_{\frac{1}{x}}^{x}\frac{dy}{y^2}=\int_1^2 x^2\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)\Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x}dx=-\int_1^2 x^2\left(\frac{1}{x}-x\right)dx=-\int_1^2\left(x-x^3\right)dx=\int_1^2\left(x^3-x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=4-2-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=2\frac{1}{4}.$$

Приклад 3. Побудувати область (*Д*), обмежену лініями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$, перейти від подвійного інтеграла, взятого відносно цієї області, до повторного і розставити межі інтегрування.

Розв'язання. Побудуємо область (*Д*) (рис. 1.3,*а*).

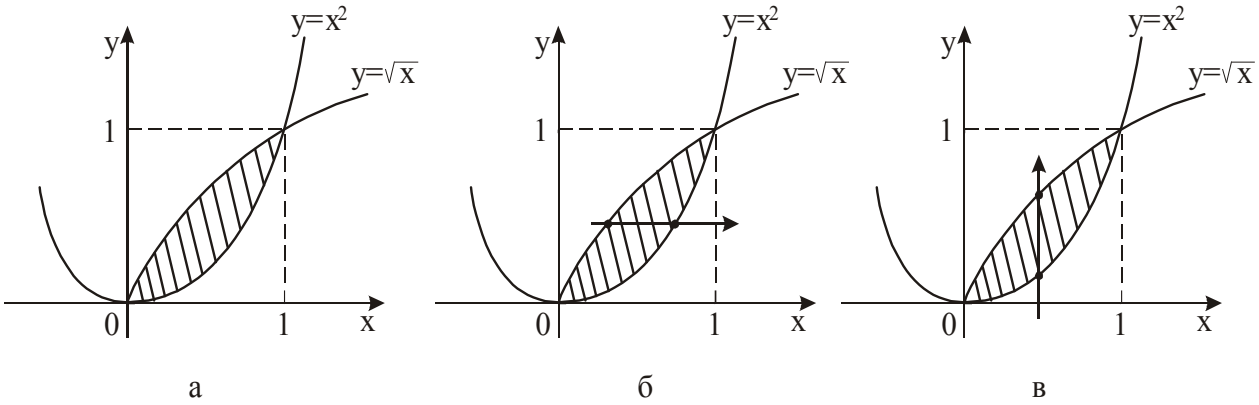


Рисунок 1.3

Для обрання раціонального порядку інтегрування перетнемо область (*Д*) прямими, паралельними осям координат (рис. 1.3,*б* – паралельними осі *Ox*, рис. 1.3,*в* – паралельними осі *Oy*). Оскільки в кожному випадку маємо одну лінію входу і одну лінію виходу, тоді порядок інтегрування буде будь–яким і подвійний інтеграл відносно області (*Д*) можна записати у вигляді одного повторного інтеграла.

$\int dy\int f(x,y)dx$ (див. рис. 1.3,*б*);

$\int dx\int f(x,y)dy$ (див. рис. 1.3,*в*).

Зауважимо, що підінтегральна функція $f(x,y)$ завжди записується під знак внутрішнього інтеграла.

Визначимо межі інтегрування в інтегралі $\int dy \int f(x,y)dx$. Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтеграла спроектуємо область (*Д*) на вісь *Oy* $(0 \le y \le 1)$. Межі внутрішнього інтеграла знайдемо з рівняння лінії входу $x = y^2$ (нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $x=\sqrt{y}$ (верхня межа інтегрування).

Таким чином,

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

Далі визначимо межі в інтегралі $\int dx \int f(x,y)dy$. Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтеграла спроектуємо область (*Д*) на вісь *Ox* $(0 \le x \le 1)$. Межі внутрішнього інтеграла знаходимо з рівняння лінії входу $y = x^2$ (нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $y = \sqrt{x}$ (верхня межа інтегрування).

Тоді

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy.$$

Приклад 4. Перейти від подвійного інтеграла, взятого відносно області (*Д*), обмеженої лініями $y = 0$, $y = 2$, $y = x$ і $y = x - 4$, до повторного.

Розв'язання. Побудуємо область (*Д*) (рис. 1.4,*а*).

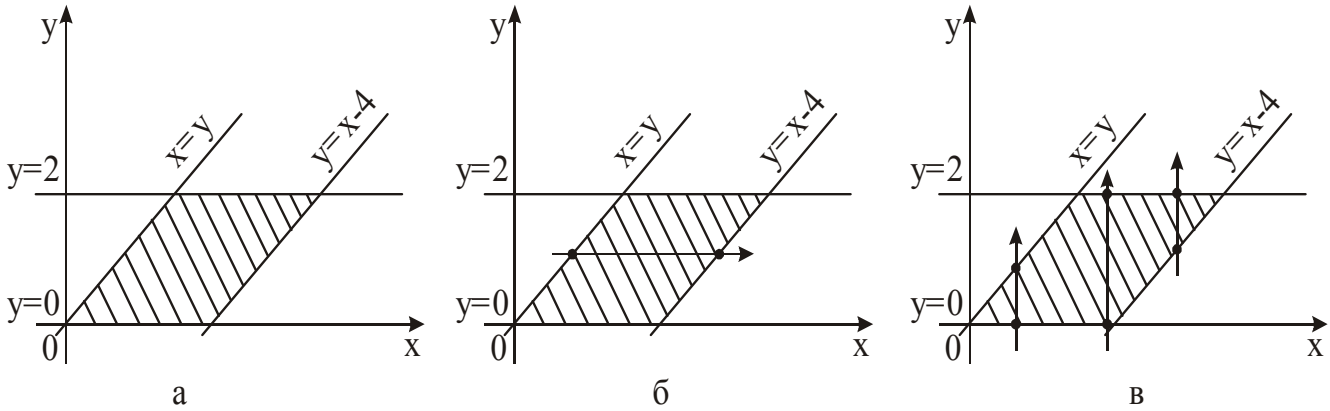


Рисунок 1.4

Для обрання раціонального порядку інтегрування перетнемо область інтегрування прямими, паралельними осям координат (рис. 1.4,*б* – паралельними осі *Ox,* рис. 1.4,*в* – паралельними осі *Oy*).

У першому випадку (рис. 1.4,*б*) маємо одну лінію входу: $y = x$, і одну лінію виходу $y = x - 4$, тому подвійний інтеграл відносно області (Д) можна записати у вигляді одного повторного інтеграла вигляду

$$\int dy \int f(x,y)dx.$$

У другому випадку маємо дві лінії входу: $y = 0$ і $y = x - 4$ і дві лінії виходу: $y = x$ і $y = 2$, тому область (*Д*) розбиваємо на три частини (рис. 1.4,*в*) і тоді подвійний інтеграл відносно області (*Д*) = ($Д_1$) + ($Д_2$) + ($Д_3$) можна записати як суму подвійних інтегралів відносно кожної з них, тобто:

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(Д_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(Д_2)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(Д_3)} f(x,y)dxdy,$$

де кожний із одержаних інтегралів можна записати у вигляді одного повторного інтеграла виду $\int dx \int f(x,y)dy$.

Таким чином, зрозуміло, що порядок інтегрування буде раціональним у першому випадку, оскільки веде до обчислення меншої кількості повторних інтегралів і обчислення значно меншої кількості визначених інтегралів.

Визначимо межі інтегрування в повторному інтегралі

$$\int dy \int f(x,y)dx.$$

Для визначення меж інтегрування зовнішнього інтеграла спроектуємо область (*Д*) на вісь *Oy* $(0 \le y \le 2)$. Межі внутрішнього інтеграла знайдемо з рівняння лінії входу $x = y$ (нижня межа інтегрування) і рівняння лінії виходу $x = y + 4$ (верхня межа інтегрування).

Отже,

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_y^{y+4} f(x,y)dx.$$

Приклад 5. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy.$$

Розв'язання. У даному повторному інтегралі порядок інтегрування наступний. Внутрішнє інтегрування виконується відносно змінної *y*, а зовнішнє виконується відносно змінної *x*. Змінити порядок інтегрування в даному інтегралі означає те, що внутрішнє інтегрування треба виконати відносно змінної *x*, а зовнішнє – відносно змінної *y*, тобто записати інтеграл у вигляді

$$\int dy \int f(x,y)dx.$$

Але, як показує попередній приклад, поки що не відомо, скільки таких інтегралів буде. Щоб відповісти на це питання, відновимо область (*Д*). Оскільки змінна внутрішнього інтеграла – *y*, тоді рівняння нижньої межі області $y = 2x$ (лінія входу), а рівняння верхньої межі області $y = 6 - x$ (лінія виходу). Змінна *x* зовнішнього інтеграла змінюється від $x = 0$ до $x = 2$.

Таким чином, рівняння меж області: $y = 2x$, $y = 6 - x$, $x = 0$ і $x = 2$. Побудуємо область (*Д*) (рис. 1.5).

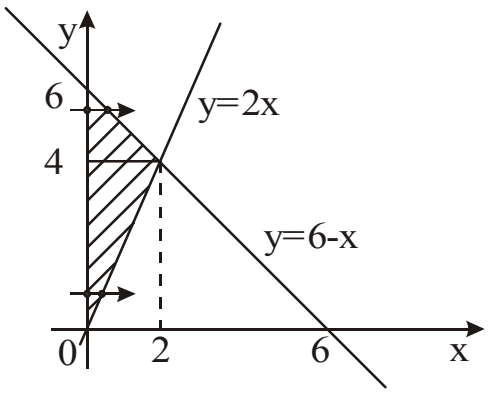


Рисунок 1.5

Перетнувши область (*Д*) в напрямку осі *Ox* бачимо, що точки входу знаходяться на одній лінії $x = 0$, а точки виходу – на двох різних лініях: $y = 2x$ і $y = 6 - x$, тому область (*Д*) доведеться розбити на дві частини ($Д_1$) (нижня) і ($Д_2$) (верхня).

Тоді

$$\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(Д_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(Д_2)} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_4^6 dy \int\limits_0^{6-y} f(x,y)dx .$$

Приклад 6. Змінюючи порядок інтегрування, записати вираз

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy$$

у вигляді одного двократного інтеграла.

Розв'язання. Запишемо рівняння меж області (*Д*):

$$\left\{ x = 0; x = 1; x = 3; y = 0; y = x^2; y = \frac{1}{2}(3-x) \right\}.$$

Побудуємо область (*Д*) = ($Д_1$) + ($Д_2$) (рис. 1.6).

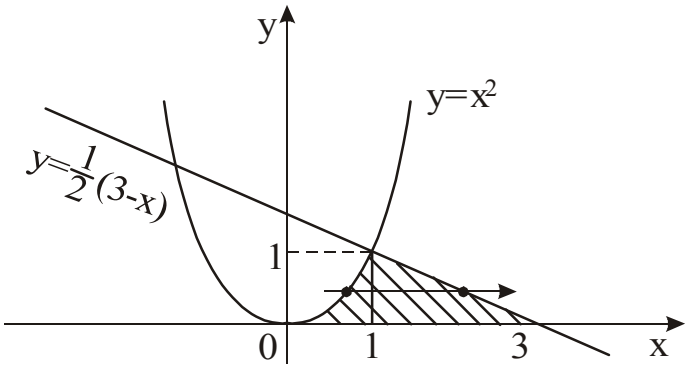


Рисунок 1.6

Дійсно, в області ($Д_1$) (ліва межа) $(0 \le x \le 1)$, $\left(0 \le y \le x^2\right)$, а в області ($Д_2$) (права межа) $(1 \le x \le 3)$, $\left(0 \le y \le \frac{1}{2}(3-x)\right)$.

Перетинаючи область ($Д$) в напрямку осі Ox, бачимо, що лінія входу одна – $y=x^2$ і лінія виходу одна – $y = \frac{1}{2}(3-x)$, а тому при зміні порядку інтегрування одержимо один двократний інтеграл вигляду:

$$\int dy \int f(x,y)dx .$$

Розставимо межі інтегрування. Змінна, що стоїть поряд із зовнішнім інтегралом змінюється від 0 до 1, оскільки область ($Д$) проектується на вісь Oy у відрізок [0;1]. Змінна x внутрішнього інтеграла змінюється від $x = \sqrt{y}$ (лінія входу) до $x = 3 - 2y$ (лінія виходу).

Таким чином,

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x,y)dx .$$

Приклад 7. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(Д)} (x^2 + y)dxdy$ відносно області ($Д$), обмеженої лініями $y = x^2$ і $y^2 = x$.

Розв'язання. Перейдемо до повторного інтеграла (див. рис. 1.3,*а*) і обчислимо його.

Тоді

$$\iint\limits_{(Д)} (x^2 + y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} \left(x^2 + y\right)dx = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{\sqrt{y}} x^2 dx + \int_{y^2}^{\sqrt{y}} y dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + yx \right)\Bigg|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} + y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^6}{3} - y^3 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{y^6}{3} - y^3 \right) dy = \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2y^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{y^7}{21} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{8}{15} - \frac{1}{21} - \frac{1}{4} = \frac{224 - 20 - 105}{420} = \frac{99}{420} = \frac{33}{140}.$$

Або (див. рис. 1.3,*в*):

$$\iint\limits_{(Д)}(x^2+y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(x^2+y\right)dy=\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x}{2}-x^4-\frac{x^4}{2}\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^{\frac{5}{2}}+\frac{x}{2}-\frac{3}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{x^2}{4}-\frac{3x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{3}{10}=\frac{80+70-84}{280}=\frac{66}{280}=\frac{33}{140}.$$

Як бачимо, результати обчислень у кожному випадку однакові.

Приклад 8. Обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(Д)}\cos(x+y)dxdy$ відносно області (*Д*), обмеженої лініями $x = 0$, $y = \pi$ і $y = x$.

Розв'язання. Побудуємо область (*Д*) (рис. 1.7,*а*):

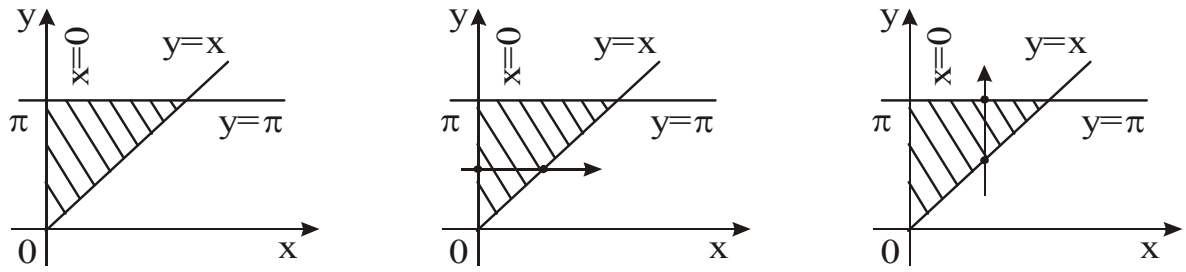


Рисунок 1.7

Із рис. 1.7,*б* і рис. 1.7,*в* бачимо, що подвійний інтеграл відносно області (*Д*) можна записати у вигляді одного повторного інтеграла незалежно від того, в якому порядку буде виконуватися інтегрування в повторному інтегралі. Однак, враховуючи, що межі внутрішнього інтеграла будуть простішими у випадку, зображеному на рис. 1.7,*б*, обчислення подвійного інтеграла раціонально виконати таким чином:

$$\iint\limits_{(Д)}\cos(x+y)dxdy=\int\limits_0^{\pi}dy\int\limits_0^{y}\cos(x+y)dx=\int\limits_0^{\pi}\sin(x+y)\Bigg|_0^{y}dy=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}(\sin 2y-\sin y)dy=\left(-\frac{1}{2}\cos 2y+\cos y\right)\Bigg|_0^{\pi}=-\frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}-1=-2.$$

1.4 Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

Одним із методів спрощення обчислення визначених інтегралів був метод заміни змінної. Аналогічно, введення нових змінних у подвійних інтегралах

дуже часто приводить до більш раціональних обчислень. Обмежимося найбільш важливим для практичних застосувань частинним випадком заміни змінних , а саме, заміною декартових координат x і y полярними координатами r і φ.

У випадку, коли полярна вісь полярної системи координат співпадає з віссю абсцис декартової системи координат, а полюс співпадає з початком декартової системи координат (саме такий випадок і будемо розгядати далі), тоді зв'язок між цими двома системами задається співвідношеннями

$$x = r\cos\varphi, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$y = r\sin\varphi, \qquad r \ge 0.$$

Ці формули виражають декартові координати точки M через її полярні координати.

Навпаки, знаючи декартові координати x і y точки можно знайти її полярні координати за формулами

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

Нехай тепер треба обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy$ від неперервної функції $z = f(x,y)$ по області (D). Перехід до полярної системи координат приводить до формули

$$\iint\limits_{(D)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(D')} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

Ця формула називається формулою перетворення подвійного інтеграла до полярної системи координат. Вираз $rdrd\varphi$ називають елементом площі в полярній системі координат.

Отже, для того, щоб у подвійному інтегралі перейти до полярних координат, потрібно змінні x і y в підінтегральній функції $f(x,y)$ замінити відповідно на $r\cos\varphi, r\sin\varphi,$ а елемент площі $dxdy$ замінити його виразом у полярних координатах $rdrd\varphi$.

Для обчислення подвійного інтеграла $\iint\limits_{(D')} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$ застосовують правило зведення його до повторного інтеграла, але тільки в цьому випадку роль змінних x і y відіграють r і φ.

Розглянемо три випадки розташування області (D).

1. Припустимо, що область (D) обмежена двома променями, які виходять із полюса під кутами α і β і двома кривими, рівняння яких у полярній системі координат $r=r_1(\varphi)$ і $r=r_2(\varphi)$ (рис. 1.8, а). Тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

2. Якщо область інтегрування (D) має вигляд, який наведено на рис. 1.8 б (полюс належить границі області), тоді

$$\iint\limits_{(D)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

3. У випадку, коли полюс лежить всередині області (D) (рис. 1.8 в), будемо мати:

$$\iint\limits_{(D)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdr.$$

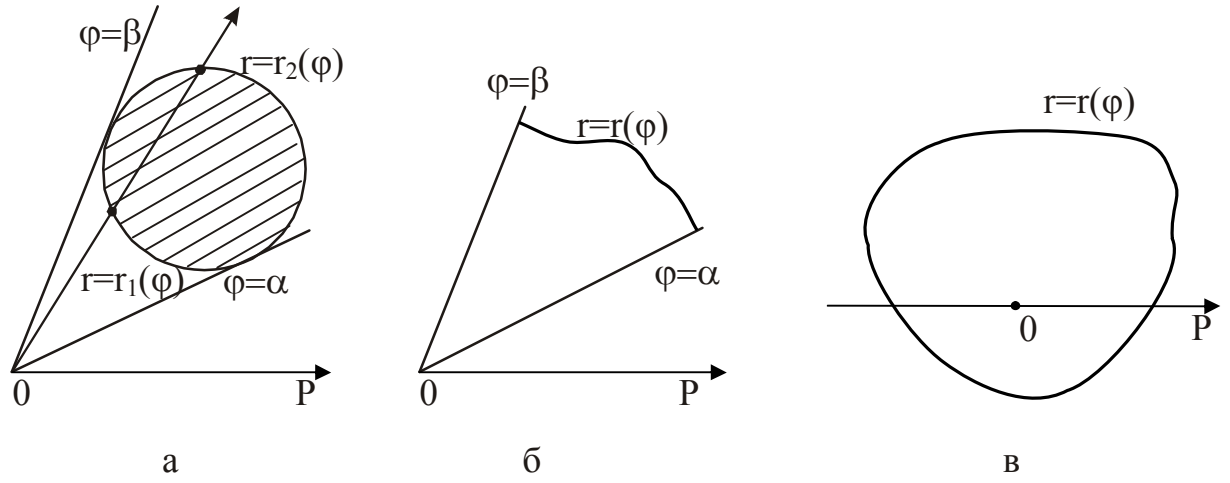


Рисунок 1.8

Правило обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах

1. Побудувати область інтегрування (*Д*).

2. Замінити змінні x і y, від яких залежить підінтегральна функція, на $r\cos\varphi$ і $r\sin\varphi$ відповідно, а елемент площі $dxdy$ на $rdrd\varphi$.

3. Перейти до повторного інтеграла, пам'ятаючи при цьому, що зовнішній інтеграл завжди береться за змінною φ, а внутрішній – за змінною r.

4. Розставити межі інтегрування. Для цього перевести рівняння меж області в полярну систему координат і визначити межі зміни полярного кута φ і полярного радіуса r в області (*Д*).

5. Виконати обчислення.

Слід зазначити, якщо область інтегрування є круг або його частина, тоді вигідно перейти до полярних координат.

Приклад 9. Обчислити

$$\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} rdr.$$

Розв'язання. Обчислюючи спочатку внутрішній інтеграл, потім, інтегруючи одержану функцію, знаходимо

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a\sin\varphi}^{a} rdr = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Bigg|_{a\sin\varphi}^{a} d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(a^2 - a^2\sin^2\varphi\right)d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\sin^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi = \frac{1}{4}a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{4}\cdot 2\pi = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Приклад 10. Обчислити

$$\iint_{(Д)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

де (*Д*) – частина круга радіуса *a* з центром у точці O(0;0), яка розташована в першій чверті.

Розв'язання. Побудуємо область (Д) (рис. 1.9).

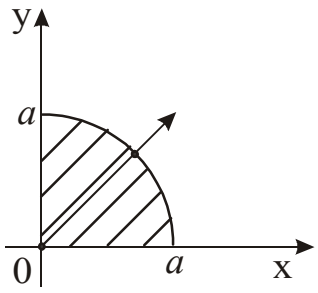


Рисунок 1.9

Переходячи до полярних координат у подвійному інтегралі, будемо мати

$$\iint_{(Д)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} = \iint_{(Д)} \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - \left(x^2 + y^2\right)}} = \iint_{(Д')} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Далі, переходячи від подвійного інтеграла в полярних координатах відносно області (*Д*) до повторного, і враховуючи, що в області (*Д*) $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le r \le a$, будемо мати

$$\iint_{(Д')} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - r^2}\Bigg|_0^a d\varphi = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}(0-a)d\varphi = a\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a}{2}.$$

Приклад 11. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} arctg\frac{y}{x}dxdy$,

де (*Д*) – частина кільця $x^2 + y^2 \ge 1$, $x^2 + y^2 \le 9$, $y \ge \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y \le x\sqrt{3}$.

Розв'язання. Побудуємо область (Д) (рис. 1.10):

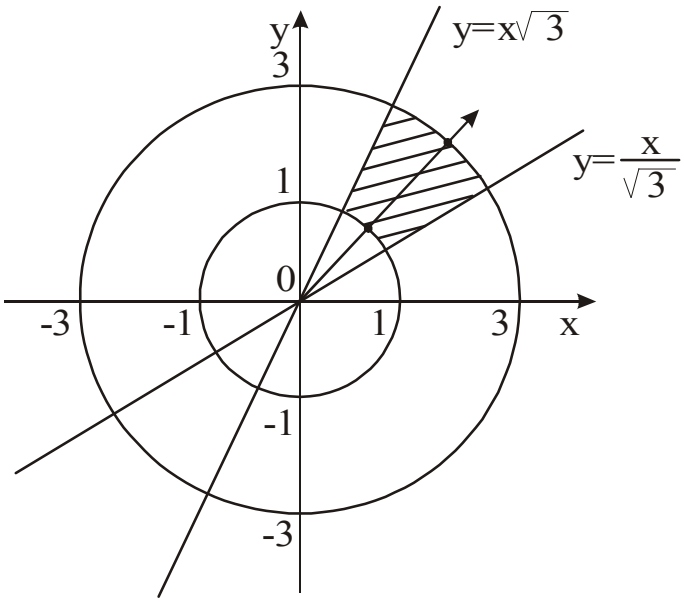


Рисунок 1.10

Переходячи до полярних координат в подвійному інтегралі, будемо мати

$$\iint\limits_{(Д)} arctg\,\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{(Д')} arctgtg\,\varphi \cdot rdrd\,\varphi = \iint\limits_{(Д')} \varphi \cdot rdrd\,\varphi\,.$$

Далі, переходячи до повторного інтеграла, одержимо

$$\iint\limits_{(Д')} \varphi \cdot rdrd\varphi = \int \varphi \cdot d\varphi \int rdr\,.$$

Для розстановки меж інтегрування в повторному інтегралі переведемо рівняння меж області в полярну систему координат.

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow r^2 = 1,\ r = 1;$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r^2 = 9,\ r = 3;$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \varphi = \frac{\pi}{6};$$

$$y = x\sqrt{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow tg\varphi = \sqrt{3},\ \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Таким чином,

$$\iint\limits_{(Д')} \varphi \cdot rdrd\,\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot d\varphi \int\limits_{1}^{3} rdr = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot \left.\frac{r^2}{2}\right|_1^3 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi(9-1)d\varphi = 4\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot d\varphi = 4 \cdot \left.\frac{r^2}{2}\right|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right) = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Отже,

$$\iint\limits_{(Д)} arctg\frac{y}{x}dxdy = \iint\limits_{(Д')} \varphi \cdot rdrd\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot d\varphi \int\limits_{1}^{3} rdr = \frac{\pi^2}{6}.$$

Зауважимо, що оскільки в повторному інтегралі $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot d\varphi \int\limits_{1}^{3} rdr$ всі чотири межі інтегрування сталі й кожний із інтегралів (внутрішній і зовнішній) залежить лише від однієї змінної, тоді обчислювати їх можна було б незалежно один від одного, тобто

$$\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \varphi \cdot d\varphi \int\limits_{1}^{3} rdr = \frac{\varphi^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_{1}^{3} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{36}\right) \cdot (9-1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{12} \cdot 8 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулювати означення правильної області (*Д*) на площині *xOy*.
2. Що називають подвійним інтегралом від заданої функції відносно даної області?
3. Сформулювати теорему існування подвійного інтеграла.
4. Сформулюйте властивості подвійного інтеграла і вкажіть, де це можливо, їх геометричне тлумачення.
5. Вивести правило обчислення подвійного інтеграла у випадку області, обмеженої лінією, яка перетинається з прямими, паралельними осям координат, не більше ніж у двох точках. Записати відповідну формулу.
6. Яким чином обчислюється подвійний інтеграл за допомогою повторних у випадку довільної області інтегрування в декартовій системі координат?
7. Яким чином виражається елемент площі в полярних координатах?
8. Вивести правило переходу від подвійного інтеграла в декартових координатах до подвійного інтеграла в полярних координатах. Записати відповідну формулу.
9. Яким чином обчислюється подвійний інтеграл у полярних координатах за допомогою повторного інтегрування?
10. У яких випадках доцільно здійснювати перехід від декартових координат до полярних у подвійному інтегралі?
11. Про що потрібно пам’ятати при розстановці меж інтегрування в повторному інтегралі?
12. Указати, в якому порядку треба обчислювати повторний інтеграл.
13. Що можна сказати про межі інтегрування повторного інтеграла, якщо область інтегрування (*Д*) відповідного йому подвійного інтеграла являє собою прямокутник?

14. Яким чином обрати раціональний порядок інтегрування при переході від подвійного до повторного інтеграла?

15. Указати порядок інтегрування при переході від подвійного до повторного інтеграла в полярних координатах.

Завдання для самостійної роботи

1. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі:

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx .$$

Відповідь: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} f(x,y)dy$.

2. Змінити порядок інтегрування в двократному інтегралі

$$\int_0^R dx \int_x^{\sqrt{2Rx-x^2}} f(x,y)dy .$$

Відповідь: $\int_0^R dy \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{y} f(x,y)dx$.

Вказівка. $y=\sqrt{2Rx-x^2}$ це рівняння півкола з центром в точці $O_1(R;0)$ і радіусом, рівним R. Щоб переконатися в цьому, приведіть рівняння кола до канонічного вигляду.

3. Перейти від подвійного інтеграла $\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy$ відносно області (*Д*) до повторного і розставити межі інтегрування, якщо область (Д):

а) трикутник із сторонами $y = x$, $y = 2x$ і $x + y = 6$;

б) $y \ge x^2$, $y \le 4 - x^2$;

в) $y - 2x \le 0$, $2y - x \ge 0$, $xy \le 2$.

Відповідь:

а) $\int_0^2 dx \int_0^{2x} f(x,y)dy + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} f(x,y)dy$;

б) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{2y} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{\frac{2}{y}} f(x,y)dx$.

4. Змінюючи порядок інтегрування, записати даний вираз у вигляді одного двократного інтеграла

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy.$$

Відповідь: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} f(x,y)dx$.

5. Перейти в подвійному інтегралі $\iint\limits_{(Д)} f(x,y)dxdy$ до полярних координат r і φ $(x = r\cos\varphi,\ \ y = \sin\varphi)$ і розставити межі інтегрування, якщо область (*Д*) обмежена колами $x^2 + y^2 = 4x$, $x^2 + y^2 = 8x$ і прямими $y = x$ і $y = 2x$.

Відповідь: $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{arctg 2} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi,\ \ r\sin\varphi)rdr$.

6. Подвійний інтеграл $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x^2 + y^2)dy$ записати в полярних координатах.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}\int\limits_0^3 f\left(r^2\right)\cdot rdr$.

7. Обчислити інтеграли:

а) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{2x} \frac{y}{x} dy$;

б) $\int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\ln y} e^x dx$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2\varphi \cdot dr$;

д) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy$.

Відповідь: а) 9/4; б) 0.5. Вказівка: $a^{\log_a N} = N;$ в) 2.4; г) $\frac{\pi}{6}$.

8. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \frac{x^2}{y^2} dxdy$ відносно області (*Д*), обмеженої лініями $x = 2$, $y = x$ і $xy = 1$.

Відповідь: 2.25.

9. Обчислити подвійний інтеграл: $\iint\limits_{(Д)} xy^2 dxdy$, якщо область (*Д*), обмежена параболою $y^2 = 4x$ і прямою $x = 2$.

Відповідь: $\frac{256\sqrt{2}}{21}$.

10. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\, dxdy$, де область (Д) – круг $x^2 + y^2 \le Rx$.

Відповідь: $\frac{R^3}{3}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

1.5 Застосування подвійного інтеграла для розв'язання задач геометрії й механіки

Таблиця 1 Вираз деяких величин через подвійний інтеграл

Назва величини	Формула для обчислення	
	у прямокутних координатах	у полярних координатах
Площа плоскої фігури	$S = \iint\limits_{(Д)} dxdy$ (2)	$S = \iint\limits_{(Д)} rdrd\varphi$ (2,а)
Об'єм циліндричного тіла	$V = \iint\limits_{(Д)} zdxdy$ (3)	$V = \iint\limits_{(Д)} z(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$ (3,а)
Маса плоскої фігури	$m = \iint\limits_{(Д)} \gamma(x,y)dxdy$ (4)	$m = \iint\limits_{(Д)} \gamma(r,\varphi)rdrd\varphi$ (4,а)

Статичні моменти плоскої фігури, відносно осей координат	$M_x = \iint\limits_{(Д)} \gamma(x,y)y dxdy$ (5) $M_y = \iint\limits_{(Д)} \gamma(x,y)x dxdy$ (6)	$M_x = \iint\limits_{(Д)} \gamma(r,\varphi)r^2 \sin\varphi \cdot drd\varphi$ (5,a) $M_x = \iint\limits_{(Д)} \gamma(r,\varphi)r^2 \cos\varphi \cdot drd\varphi$ (6,a)
Моменти інерції плоскої фігури, відносно осей координат і точки *O(0;0)*	$I_x = \iint\limits_{(Д)} \gamma(x,y)y^2 dxdy$ (7) $I_y = \iint\limits_{(Д)} \gamma(x,y)x^2 dxdy$ (8) $I_0 = \iint\limits_{(Д)} \gamma(x,y)(x^2+y^2) dxdy$ (9)	$I_x = \iint\limits_{(Д)} \gamma(r,\varphi)r^3 \sin^2\varphi \cdot drd\varphi$ (7,a) $I_x = \iint\limits_{(Д)} \gamma(r,\varphi)r^3 \cos^2\varphi \cdot drd\varphi$ (8,a) $I_x = \iint\limits_{(Д)} \gamma(r,\varphi)r^3 drd\varphi$ (9,a)
Координати центра ваги плоскої фігури	$x_c = \dfrac{M_y}{m}$ (10) $y_c = \dfrac{M_x}{m}$ (11)	–

Зауважимо, що коли плоска фігура однорідна, тоді $\gamma(x,y)=const$, яку приймають рівною одиниці.

Приклади

Приклад 12. Знайти подвійним інтегруванням площу фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ і $x=4$.

Розв'язання. Побудуємо фігуру, обмежену даними лініями область (*Д*) (рис. 1.11). Її площу обчислимо за формулою 2, (табл. 1), згідно до якої

$$S = \iint\limits_{(Д)} dxdy .$$

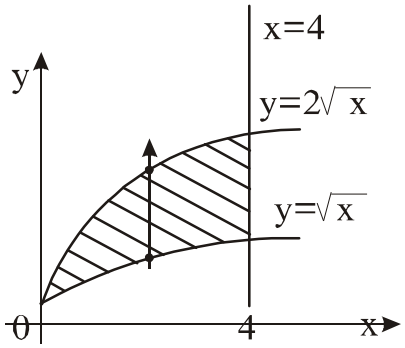


Рисунок 1.11

Переходячи до повторного інтеграла й обчислюючи його, одержимо:

$$S = \iint\limits_{(Д)} dxdy = \int_0^4 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int_0^4 y \Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 (2\sqrt{x} - \sqrt{x})dx = \int_0^4 \sqrt{x}dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}.$$

Приклад 13. Обчислити подвійним інтегруванням площу області, обмеженої лінією $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2a^2\left(x^2 - y^2\right)$ (лемніската Бернуллі).

Розв'язання. Насамперед помічаємо, що заміна x на $-x$ і y на $-y$ не змінює рівняння кривої. А це свідчить про те, що крива розташована симетрично відносно координатних осей. Тому досить побудувати криву лише в першій чверті, а потім, враховуючи симетрію її відносно координатних осей, побудувати її в трьох інших четвертях.

Для побудови кривої запишемо її рівняння в полярній системі координат, поклавши $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Виконуючи перетворення, одержимо:

$$\left(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi\right)^2 = 2a^2\left(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right);$$

$$\left(r^2\right)^2 = 2a^2r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right);$$

$$r^2 = 2a^2\cos 2\varphi;$$

$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Оскільки полярний радіус r може набувати лише дійсних значень, тоді $\cos 2\varphi$ в одержаному рівнянні не може бути від'ємним, тобто $\cos 2\varphi \geq 0$.

Це означає, що кут 2φ повинен знаходитися або в першій, або в четвертій чверті. З'ясувавши, що досить побудувати криву лише в першій чверті, розглянемо значення 2φ, яке задовольняє умові $0 \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Звідси випливає, що для побудови кривої в першій чверті куту φ необхідно надавати значення від $\varphi = 0$ до $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Крива зображена на рис. 1.12.

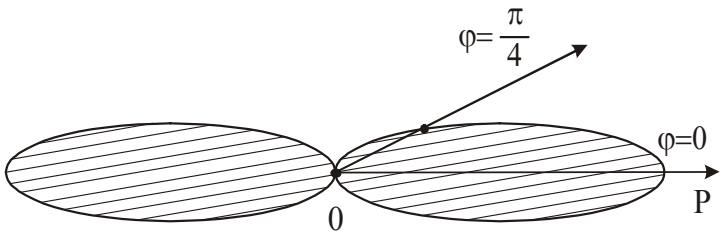


Рисунок 1.12

Площу фігури, обмеженої даною лінією, обчислимо за формулою 2,*а* (табл. 1):

$$S = \iint\limits_{(Д)} r dr d\varphi .$$

Переходячи до повторного інтеграла й враховуючи симетрію фігури відносно осей координат, одержимо:

$$S = \iint\limits_{(Д)} r dr d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} r dr = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} d\varphi =$$

$$= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi \cdot d\varphi = 2a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 2a^2.$$

Приклад 14. Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2$, координатними площинами і площиною $x + y = 1$.

Розв'язання. Тіло, об'єм якого потрібно обчислити, обмежене знизу площиною $z = 0$, з боків площинами $x = 0$, $y = 0$ і $x + y = 1$ і зверху поверхнею $z = x^2 + y^2$. Отже, це циліндричне тіло (рис. 1.13,*а*).

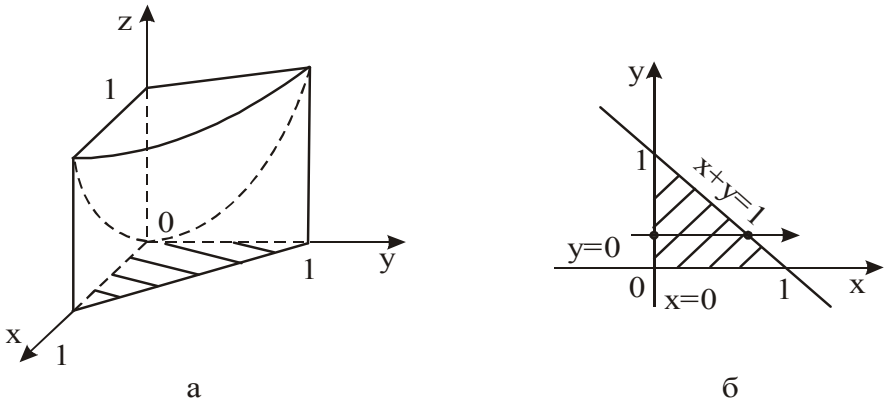


Рисунок 1.13

Проекцією тіла на площину *xOy* є область (*Д*) (рис. 1.13,*б*). Згідно до (3), (табл. 1) об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою

$$V = \iint\limits_{(Д)} z dx dy ,$$

де $z = f(x, y)$ – рівняння поверхні, яка обмежує тіло зверху. У нашому випадку

$$V = \iint\limits_{(Д)} \left(x^2 + y^2\right) dx dy$$

і задача зводиться до обчислення подвійного інтеграла відносно області (*Д*).

Виконуючи обчислення, одержимо:

$$V = \iint\limits_{(Д)} \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} \left(x^2 + y^2\right) dx = \int\limits_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right)\Bigg|_0^{1-y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{(1-y)^3}{3} + y^2 - y^3 \right) dy = \left(-\frac{(1-y)^4}{12} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 15. Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $z = 4 - x^2$, координатними площинами і площиною $2x + y = 4$ ($x \geq 0$).

Розв'язання. Побудувавши тіло (рис. 1.14), переконуємося, що воно циліндричне.

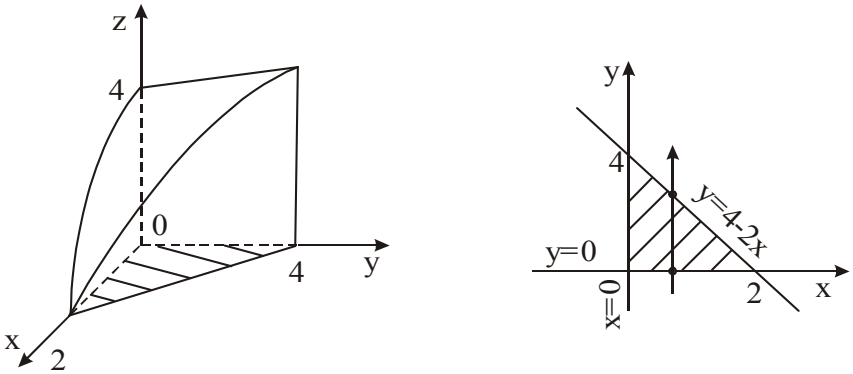


Рисунок 1.14

Проекцією тіла на площину xOy є область ($Д$) (рис. 1.14,*б*). Згідно з (3), (табл. 1) об'єм циліндричного тіла обчислюється за формулою $V = \iint\limits_{(Д)} z dxdy$.

Оскільки зверху тіло обмежене поверхнею $z = 4 - x^2$, тоді $V = \iint\limits_{(Д)} \left(4 - x^2\right) dxdy$.

Обчислення будуть простішими, якщо інтегрування в повторному інтегралі виконувати в такому порядку, як показано на рис. 1.14,*б*.

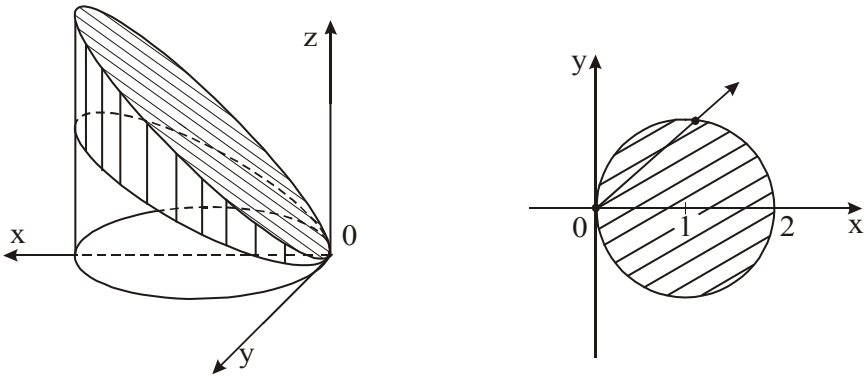
Отже,

$$V = \iint\limits_{(Д)} \left(4 - x^2\right) dxdy = \int\limits_0^2 \left(4 - x^2\right) dx \int\limits_0^{4-2x} dy = \int\limits_0^2 \left(4 - x^2\right)(4 - 2x) dx = 2\int\limits_0^2 \left(4 - x^2\right)(2 - x) dx =$$

$$= 2\int\limits_0^2 \left(8 - 4x - 2x^2 + x^3\right) dx = 2\left(8x - 2x^2 - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right)\Bigg|_0^2 = 2\left(16 - 8 - \frac{16}{3} + 4 \right) = 13\frac{1}{3}.$$

Приклад 16. Знайти подвійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 2x$ і площинами $2x - z = 0$ і $4x - z = 0$.

Розв'язання. Побудуємо тіло (рис. 1.15,*а*). Його проекцією на площину *xOy* є область (*Д*) (рис. 1.15,*б*).



а б

Рисунок 1.15

Переконуємося в тому, що тіло не є циліндричним, бо знизу обмежене площиною $2x - z = 0$, а тому застосувати безпосередньо формулу (3), (табл. 1) для обчислення його об'єму не можна. Однак, не важко зрозуміти, що шуканий об'єм буде дорівнювати різниці об'ємів двох циліндричних тіл, одне з яких обмежене зверху поверхнею $4x - z = 0$, а друге – поверхнею $2x - z = 0$.

Тоді

$$V = \iint\limits_{(Д)} (z_в - z_н)dxdy = \iint\limits_{(Д)} (4x - 2x)dxdy = 2\iint\limits_{(Д)} xdxdy.$$

Оскільки область інтегрування (*Д*) є круг, тоді доцільно перейти до полярних координат.

Внаслідок чого будемо мати

$$V = 2\iint\limits_{(Д')} r^2 \cos\varphi \cdot drd\varphi.$$

Межа області (*Д*) в полярних координатах набуде вигляду $r = 2\cos\varphi$. Переходячи тепер від подвійного інтеграла до повторного й виконуючи обчислення, одержимо:

$$V = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 \cos\varphi \cdot dr = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \cdot d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^{2\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \cdot d\varphi = \frac{32}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+\cos 2\varphi)^2}{4} d\varphi = \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + 2\cos 2\varphi + \frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{8}{3}\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Отже, шуканий об'єм $V = 2\pi$.

Приклад 17. Знайти масу квадратної пластинки із стороною 2*a*, якщо густина матеріалу пластинки пропорційна квадрату відстані від точки перетину

діагоналей і на кутах квадрата дорівнює одиниці.

Розв'язання. Квадратну пластинку в системі xOy зручно розташувати таким чином, щоб точка перетину діагоналей квадрата співпала з початком координат, а сторони були паралельні осям координат (рис. 1.16).

Для обчислення маси пластинки скористаємося формулою 4, (табл. 1), згідно з якою маса плоскої фігури

$$m = \iint\limits_{(Д)} \gamma(x, y)dxdy .$$

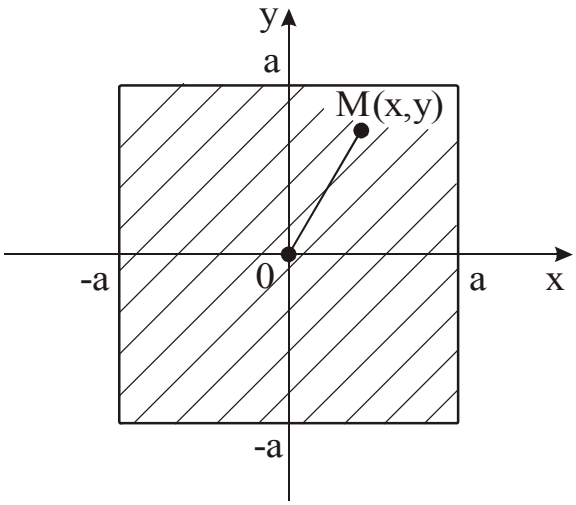


Рисунок 1.16

За умовою задачі поверхнева густина

$$\gamma(x, y) = kd^2 = k\left(x^2 + y^2\right)$$

Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови, що на кутах квадрата $\gamma = 1$, а $d = a\sqrt{2}$. Тоді $1 = k \cdot 2a^2$, звідки $k = \dfrac{1}{2a^2}$ і $\gamma(x, y) = \dfrac{1}{2a^2}\left(x^2 + y^2\right)$.

Таким чином,

$$m = \iint\limits_{(Д)} \gamma(x, y)dxdy = \frac{1}{2a^2} \iint\limits_{(Д)} \left(x^2 + y^2\right)dxdy = \frac{1}{2a^2} \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-a}^{a} \left(x^2 + y^2\right)dy .$$

Враховуючи симетрію фігури відносно координатних осей, остаточно будемо мати:

$$m = 4 \cdot \frac{1}{2a^2} \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a \left(x^2 + y^2\right)dy = \frac{2}{a^2} \int\limits_0^a \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^a dx = \frac{2}{a^2} \int\limits_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3} \right)dx =$$

$$= \frac{2}{a^2} \left(a \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{a^3}{3} \cdot x \right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{a^2} \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3} \right) = \frac{4a^2}{3} .$$

Приклад 18. Знайти статичний момент однорідного півкруга з радіусом R відносно діаметра.

Розв'язання. **1-й спосіб**. Оскільки нам відомі формули для обчислення статичних моментів плоскої фігури відносно осей координат (5) і (6), (табл. 1), тоді в системі xOy півкруг зручно розташувати таким чином, щоб його діаметр співпадав із однією з осей координат, наприклад Ox, а центр – із початком

координат (рис. 1.17). У цьому випадку область (*Д*) буде обмежена лініями, рівняння яких $y = 0$ і $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

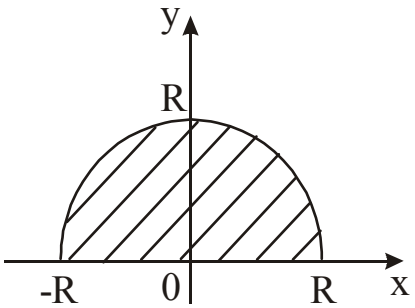


Рисунок 1.17

Тоді, враховуючи однорідність фігури й її симетрію відносно осі *Oy*, одержимо:

$$M_x = \iint\limits_{(Д)} ydxdy = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} ydy = 2\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} ydy = 2\int\limits_{0}^{R} \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = R^3 - \frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}R^3.$$

2-й спосіб. Оскільки область інтегрування (*Д*) являє собою частину круга, то обчислення інтеграла можна було б виконувати і в полярних координатах. Згідно до формули (5,*а)*, (табл. 1) і однорідності фігури

$$M_x = \iint\limits_{(Д')} r^2 \sin\varphi dr d\varphi = \int\limits_0^{\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi \int\limits_0^R r^2 dr = -\cos\varphi\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^3}{3}\Bigg|_0^R = \frac{R^3}{3}\left(-\cos\pi + \cos 0\right) =$$

$$= \frac{R^3}{3}(1+1) = \frac{2R^3}{3}.$$

Приклад 19. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої синусоїдою *y = sinx*, віссю *Ox* і прямою $x = \frac{\pi}{4}$ (рис. 1.18).

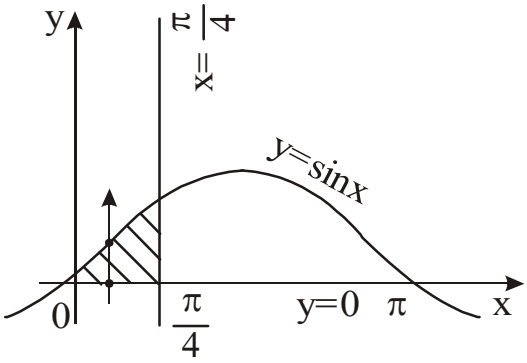


Рисунок 1.18

Розв'язання. За формулами (10) і (11) (табл. 1) маємо

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Обчислимо насамперед m, M_x і M_y, скориставшись відповідно формулами (4), (5), (6), (табл. 1) і враховуючи, що $\gamma(x, y) = 1$ в силу однорідності фігури.

Перетинаючи область (*Д*) в напрямку осі *Oy*, бачимо, що $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$, $0 \le y \le \sin x$. Тоді

$$m = \iint\limits_{(Д)} dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \Big|_0^{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\cos\frac{\pi}{4} + \cos 0 =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

$$M_x = \iint\limits_{(Д)} ydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} ydy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sin x} dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi - 2}{16}.$$

$$M_y = \iint\limits_{(Д)} xdxdy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} xdx \int_0^{\sin x} dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx = (-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}.$$

Отже,

$$x_c = \frac{(4-\pi)\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{4-\pi}{4(\sqrt{2}-1)} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)\left(\sqrt{2}+1\right);$$

$$y_c = \frac{\pi - 2}{16}\cdot\frac{2}{2-\sqrt{2}} = \frac{\pi - 2}{8(2-\sqrt{2})} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\left(\sqrt{2}+2\right).$$

Приклад 20. Знайти момент інерції однорідного рівнобедреного трикутника з основою *a* і висотою *h* відносно вершини.

Розв'язання. У даній задачі треба знайти момент інерції плоскої фігури відносно точки, тому трикутник слід розташувати в системі *xOy* таким чином,

щоб його вершина співпадала з початком координат.

Тоді в силу однорідності фігури і формули (9) (табл. 1)

$$I_0 = \iint\limits_{(Д)} (x^2 + y^2)dxdy .$$

Якщо висоту трикутника сумістити з однією з осей координат, наприклад, з Ox (рис. 1.19), тоді рівняння меж області будуть мати найпростіший вигляд:

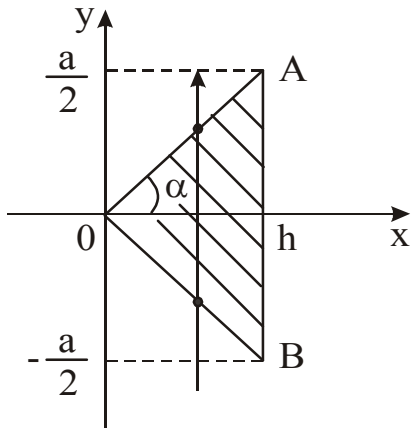


Рисунок 1.19

OA: $y = kx$, *де* $k = tg\alpha = \dfrac{a}{2h}$, *тобто* $y = \dfrac{a}{2h}x$.

OB: $y = -\dfrac{a}{2h}x$.

AB: $x = h$.

Перетинаючи область ($Д$) в напрямку осі Oy, бачимо, що змінна x змінюється від 0 до h, а змінна y змінюється від $-\dfrac{a}{2h}x$ до $\dfrac{a}{2h}x$.

Тоді

$$I_0 = \iint\limits_{(Д)} (x^2 + y^2)dxdy = \int_0^h dx \int_{-\frac{\alpha}{2h}x}^{\frac{\alpha}{2h}x} (x^2 + y^2)dy ,$$

а, враховуючи симетрію фігури відносно осі Ox,

$$I_0 = 2\int_0^h dx \int_0^{\frac{a}{2h}x} (x^2 + y^2)dy = 2\int_0^h \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2h}x} dx = 2\int_0^h \left(\frac{a}{2h}x^3 + \frac{a^3}{24h^3}x^3 \right)dx =$$

$$= 2\left(\frac{a}{2h} + \frac{a^3}{24h^3} \right)\int_0^h x^3 dx = \left(\frac{a}{h} + \frac{a^3}{12h^3} \right) \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^h = \left(\frac{a}{h} + \frac{a^3}{12h^3} \right) \cdot \frac{h^4}{4} = \frac{ah\left(12h^2 + a^2\right)}{48}.$$

Питання для самоперевірки

1. Сформулювати задачі, які приводять до поняття подвійного інтеграла.

2. Яке тіло називають циліндричним?

3. За якою формулою обчислюється об'єм циліндричного тіла?

4. Вивести формулу для обчислення маси неоднорідної пластинки з заданою поверхневою густиною.

5. Що називають статичним моментом і моментом інерції плоскої фігури відносно осей координат?

6. Пригадати й записати формули для обчислення статичних моментів і моментів інерції неоднорідної плоскої фігури відносно осей координат.

7. Як обчислюється момент інерції неоднорідної плоскої фігури відносно початку координат?

8. За якими формулами обчислюються координати центра ваги плоскої фігури?

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити подвійним інтегруванням площу фігури, яка розташована над віссю Ox і обмежена цією віссю, параболою $y^2 = 4x$ і прямою $x + y = 3$.

Відповідь: $\frac{10}{3}$.

2. Знайти подвійним інтегруванням площу фігури, обмеженої лініями $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 4x$, $y = x$ і $y = 0$.

Відповідь: $3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)$.

3. За допомогою подвійного інтеграла знайти об'єм тіла, обмеженого координатними площинами, площинами $x = 4$ і $y = 4$ і параболоїдом обертання $z = x^2 + y^2 + 1$.

Відповідь: $186\frac{2}{3}$.

4. Подвійним інтегруванням обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндром $z = 9 - x^2$, координатними площинами і площиною $3x + 4y = 12$ ($y \geq 0$).

Відповідь: 45.

5. За допомогою подвійного інтегрування обчислити об'єм тіла, обмеженого циліндром $x^2 + y^2 = 4$ і площинами $z = 0$ *і* $z = x + y + 10$.

Відповідь: 40π.

6. Знайти статичні моменти однорідного прямокутника зі сторонами a і b відносно сторони a.

Відповідь: $\frac{ab^2}{2}$.

Вказівка. Розташувати прямокутник таким чином, щоб його сторони співпадали з осями координат.

7. Знайти координати центра ваги однорідного кругового сектора, який відповідає центральному куту α (радіус круга R).

Відповідь. Центр ваги знаходиться на бісектрисі кута α на відстані $\frac{4}{3}R\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ від центра круга.

Вказівка. Центр круга потрібно сумістити з початком координат, а бісектрису кута α з віссю Ox. Тоді $y_c = 0$, а x_c знайдіть за формулою (9), (табл. 1). Слід також врахувати, що областю інтегрування є частина круга, обмежена двома радіусами.

8. Знайти момент інерції однорідного квадрата зі стороною a відносно вершини.

Відповідь: $\frac{2}{3}a^4$.

9. Знайти масу круглої пластинки радіуса R, якщо густина її пропорційна відстані точки від центра і дорівнює δ на краю пластинки.

Відповідь: $\frac{2}{3}\pi\delta R^2$.

Вказівка: $\gamma(x,y)=\frac{\delta}{R}\sqrt{x^2+y^2}$.

10. Обчислити координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої параболами $y^2 = 4x + 4$ і $y^2 = -2x + 4$.

Відповідь: $x_c=\frac{2}{5},\quad y_c=0$.

2. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

2.1 Потрійний інтеграл. Теорема існування

Потрійний інтеграл являє собою повний аналог подвійного інтеграла.

Нехай в деякій замкненій обмеженій області V простору $Oxyz$ задана функція $u=f(x,y,z)$. Розбиваємо область V на n довільних областей $\Delta V_1,\Delta V_2,...,\Delta V_n$, що не мають спільних внутрішніх точок, з об'ємами $\Delta V_1,\Delta V_2,...,\Delta V_n$. У кожній області виберемо довільну точку $P_i(x_i,y_i,z_i)$ і складемо суму

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i,$$

яка називається інтегральною сумою для функції $f(x,y,z)$ на області V. Позначимо через d найбільший із діаметрів областей $\Delta V_1,\Delta V_2,...,\Delta V_n$.

Означення. Якщо існує границя інтегральної суми при $d\to 0$ і вона не залежить ні від способу розбиття області V, ні від вибору точок P_i, тоді її називають потрійним інтегралом від функції $f(x,y,z)$ по області V.

Позначають потрійний інтеграл символом

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

Вираз $dV = dxdydz$ називають елементом об'єму.

Теорема існування. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області V, тоді потрійний інтеграл існує.

Функції, для яких потрійний інтеграл існує, називають інтегровними.

2.2 Властивості потрійного інтеграла

1. Якщо k – стала і функція $f(x,y,z)$ інтегровна в області V, тоді функція $kf(x,y,z)$ також інтегровна в області V і має місце рівність

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)dxdydz = k\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz.$$

2. Якщо функції $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ інтегровні в області V, тоді їх алгебраїчна сума також інтегрована в цій області й виконується рівність

$$\iiint\limits_V (f(x,y,z) \pm g(x,y,z))dxdydz = \iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \pm \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz,$$

(властивості 1-2 – властивості лінійності).

3. якщо область V є об'єднанням областей V_1 і V_2, які не мають спільних внутрішніх точок, в кожній із яких функція $f(x,y,z)$ інтегровна, тоді в області V ця функція також інтегровна і

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint\limits_{V_2} f(x,y,z)dxdydz,$$

(властивість адитивності потрійного інтеграла по області інтегрування).

4. Якщо в області V функція $f(x,y,z)$ інтегровна і $f(x,y,z) \geq 0$, тоді

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \geq 0.$$

5. Якщо для інтегровних в області V функцій $f(x,y,z)$ і $g(x,y,z)$ виконується нерівність $f(x,y,z) \leq g(x,y,z)$, тоді

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz.$$

6. Теорема про середнє значення. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій обмеженій області V, тоді в цій області існує така точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$, що

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V,$$

де V – об'єм області V.

2.3 Обчислення потрійного інтеграла в прямокутних координатах

Обчислення потрійного інтеграла зводиться до послідовного обчислення трьох звичайних (однократних) інтегралів або до обчислення одного подвійного й одного однократного інтегралів.

Якщо область (V) така, що будь-яка пряма, що проходить всередині цієї області паралельно осі Oz, перетинає її межу в двох точках, тобто є правильною відносно осі Oz (рис. 2.1),

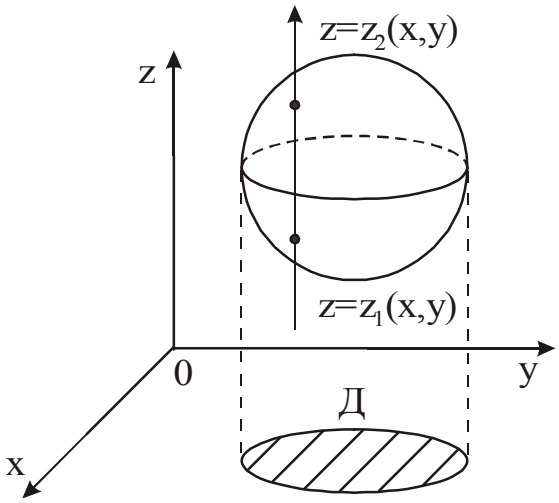


Рисунок 2.1

тоді потрійний інтеграл можна обчислити за формулою

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(Д)} dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz,$$

де ($Д$) – проекція області (V) на площину xOy; $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$ – рівняння нижньої і верхньої поверхонь, які обмежують область (V).

Міняючи ролями змінні x, y і z у цій формулі, можна одержати й інші аналогічні формули для обчислення потрійного інтеграла.

Якщо область (V) має більш складний вигляд, тоді її потрібно розбити на частини вказаного простого виду і потім обчислити даний інтеграл як суму інтегралів за складовими областями.

Якщо область інтегрування (V) визначається нерівностями

$$x_1 \le x \le x_2, \quad y_1(x) \le y \le y_2(x), \quad z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y),$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$ *і* $z_2(x,y)$ – неперервні функції, тоді потрійний інтеграл від функції $f(x,y,z)$, поширений на область (V), обчислюється за формулою

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Правило обчислення потрійного інтеграла в прямокутних координатах

1. Побудувати область (V).
2. Спроектувати область (V) на площину xOy в область ($Д$).

3. Перетинаючи область (V) будь-якою прямою, паралельною осі Oz, знайти нижню і верхню межі інтегрування внутрішнього інтеграла.

4. Знайти внутрішній інтеграл від підінтегральної функції, вважаючи x і y сталими.

5. Обчислити подвійний інтеграл від одержаної функції відносно області ($Д$).

Приклади

Приклад 21. Обчислити інтеграл

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz$$

Розв'язання. Маємо

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz = \int_0^a dx \int_0^x x^3 y^2 dy \int_0^{xy} z dz = \int_0^a dx \int_0^x x^3 y^2 \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{xy} dy = \frac{1}{2}\int_0^a dx \int_0^x x^5 y^4 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^a x^5 dx \int_0^x y^4 dy = \frac{1}{2}\int_0^a x^5 \cdot \left.\frac{y^5}{5}\right|_0^x dx = \frac{1}{10}\int_0^a x^{10} dx = \frac{1}{10}\cdot\left.\frac{x^{11}}{11}\right|_0^a = \frac{a^{11}}{110}.$$

Приклад 22. Обчислити інтеграл

$$\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{2}}} x dz .$$

Розв'язання. Аналогічно до попереднього прикладу маємо

$$\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{2}}} x dz = \int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} \left. xz \right|_0^{\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{2}}} dy = \int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} x \cdot \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\sqrt{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 x dx \int_0^{2\sqrt{x}} \sqrt{4x-y^2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 x \left.\left(\frac{1}{2} y\sqrt{4x-y^2} + \frac{4x}{2}\arcsin\frac{y}{2\sqrt{x}}\right)\right|_0^{2\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^2 x\left(4x\arcsin 1 - 4x\arcsin 0\right) dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^2 x\left(4x\cdot\frac{\pi}{2} - 0\right) dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8\pi}{3\sqrt{2}} = \frac{4\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Зауважимо, що при інтегруванні за змінною y використовувалася формула

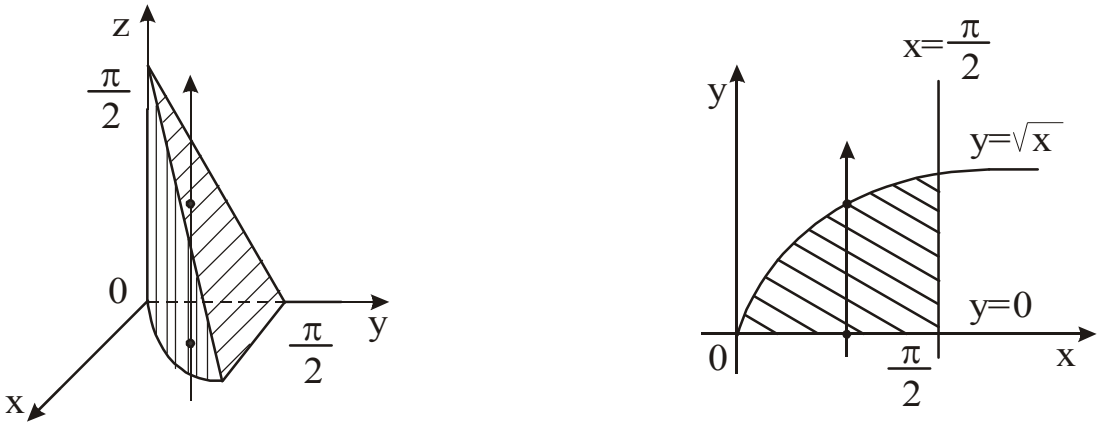
$$\int \sqrt{a^2-u^2}\cdot u' dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + c .$$

Приклад 23. Обчислити інтеграл

$$\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+z)dxdydz,$$

якщо (V) – область, обмежена циліндром $y = \sqrt{x}$ і площинами $y = 0$, $z = 0$ і $x+z=\frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Побудуємо область (V) (рис. 2.2,*а*).



а б

Рисунок 2.2

Спроектуємо область (V) на площину xOy в область (Д) (рис. 2.2,*б*). Перетинаючи область (V) в напрямку осі Oz, а область (*Д*) – в напрямку осі Oy, встановлюємо, що

$$0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \sqrt{x} \text{ і } 0 \le z \le \frac{\pi}{2} - x.$$

Таким чином,

$$\iiint\limits_{(V)} y\cos(x+z)dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} y\cos(x+z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y\cdot\sin(x+z)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-x} dy =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin x\right)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\sqrt{x}} y(1-\sin x)dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\cdot\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(1-\sin x)dx = \begin{vmatrix} u = x; & du = dx \\ dv = (1-\sin x)dx; & v = x+\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x(x+\cos x) - \int (x+\cos x)dx\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(x(x+\cos x) - \frac{x^2}{2} - \sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8} - 1\right) = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2 - 8}{16}.$$

Приклад 24. Обчислити $\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dxdydz$, де (V) – область, обмежена координатними площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і площиною $x + y + z = 1$ (піраміда, зображена на рис. 2.3, *а*).

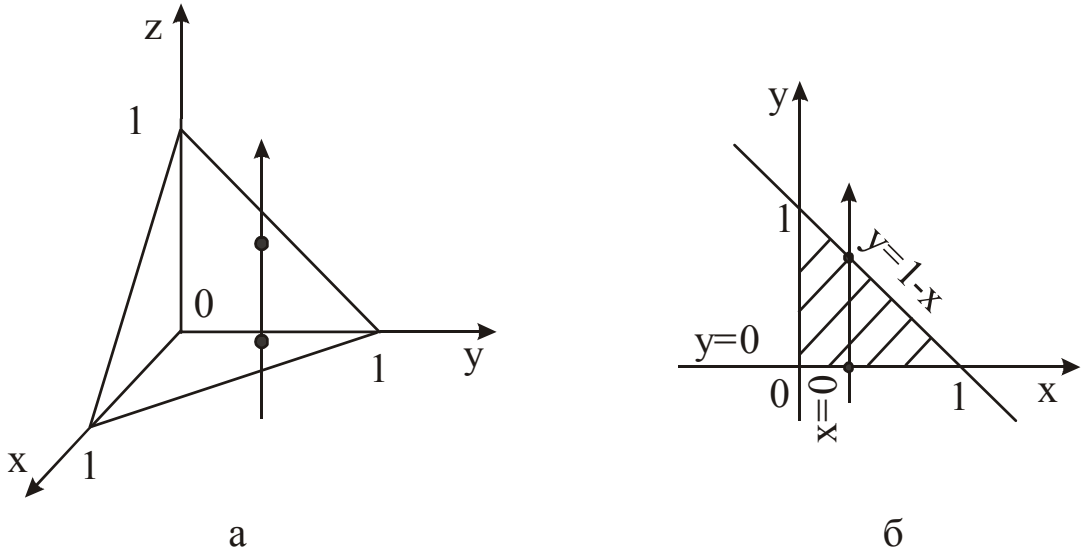


Рисунок 2.3

Розв'язання. Перетинаючи область (V) в напрямку осі Oz, бачимо, що інтегрування за змінною z здійснюється від $z = 0$ до $z = 1 - x - y$. Тому, позначаючи проекцію області (V) на площину xOy через $(Д)$, одержимо:

$$\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dxdydz = \iint\limits_{(Д)} dxdy \int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)dz = \iint\limits_{(Д)}\left((x+y)z+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{(Д)}\left((x+y)(1-x-y)+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dxdy = \iint\limits_{(Д)}\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dxdy.$$

Переходячи далі до повторного інтеграла і розставляючи межі інтегрування відносно області $(Д)$ – трикутнику, сторони якого: $x = 0$, $y = 0$ і $x + y = 1$ (рис. 2.3, *б*), остаточно будемо мати:

$$\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)dxdydz = \iint\limits_{(Д)}\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x}\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dy =$$

$$= \int\limits_0^1\left(\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{1}{6}x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}-\frac{(1-x)^4}{24}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

2.4 Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах

Нагадаємо, що прямокутні координати *x, y* і *z* пов'язані з циліндричними координатами r, φ, і z (рис. 2.4) наступними співвідношеннями: $x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$, причому $0 \le r < +\infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty$.

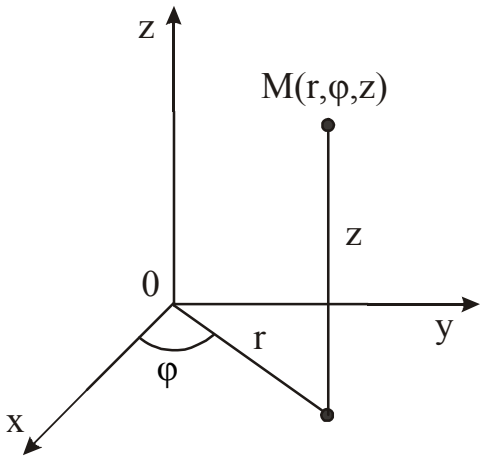


Рисунок 2.4

Елемент об'єму *dv* в циліндричних координатах дорівнює $rdrd\varphi dz$, тому формула переходу від потрійного інтеграла в прямокутних координатах до потрійного інтеграла в циліндричних координат має такий вигляд:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V')} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi \cdot dz .$$

Зауважимо, що перехід до циліндричних координат доцільно виконувати, коли область (*V*) циліндрична і проектується в область (*Д*) – круг, або його частини.

Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах виконують у такій послідовності:

$$\iiint\limits_{(V)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi \cdot dz = \iint\limits_{(Д)} drd\varphi \int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdz$$

або

$$\iiint\limits_{(V)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdrd\varphi dz = \int d\varphi \int dr \int f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)rdz$$

Межі інтегрування для змінної *z* визначають згідно до області (*V*), а для змінних r і φ – згідно до області (*Д*). При цьому рівняння областей (*V*) і (*Д*) записують у циліндричних координатах.

Приклади

Приклад 25. Обчислити інтеграл

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz$$

за допомогою переходу до циліндричних координат.

Розв'язання. Відновлюємо область (V) (рис. 124,a) і область ($Д$) (рис. 2.5, $б$), враховуючи, що $0 \le x \le 1$, $-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$, $0 \le z \le a$.

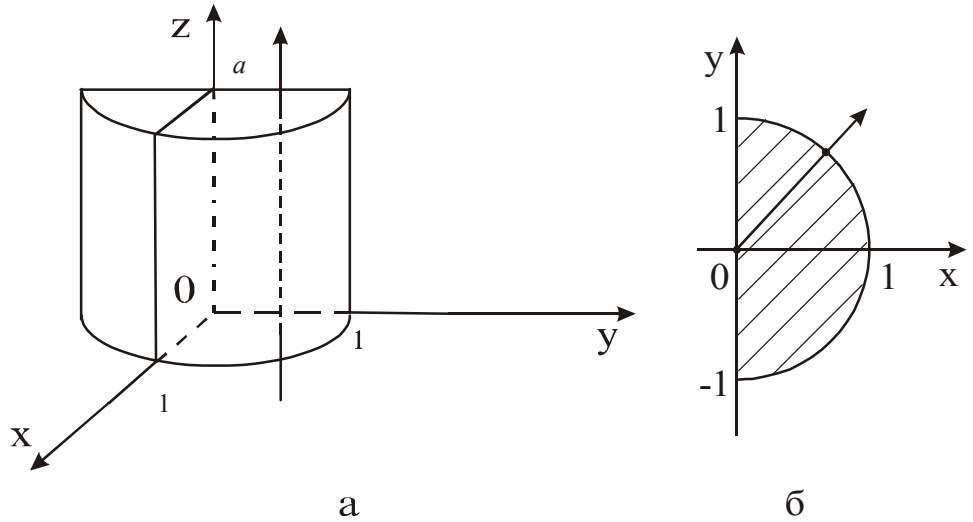


Рисунок 2.5

Переходячи до циліндричних координат та враховуючи симетрію області інтегрування, нові змінні r, φ, і z змінюються в межах:

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le z \le a,$$

тому

$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^a dz = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^a dz = 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^2}{2}\Bigg|_0^1 \cdot z\Big|_0^a = \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{\pi a}{2}.$$

Приклад 26. Обчислити

$$\iiint\limits_{(V)} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

якщо область (V) обмежена циліндром $y = \sqrt{2x - x^2}$ і площинами $y = 0$, $z = 0$ і $z = a$.

Розв'язання. Побудуємо область (V) (рис. 2.6, a).

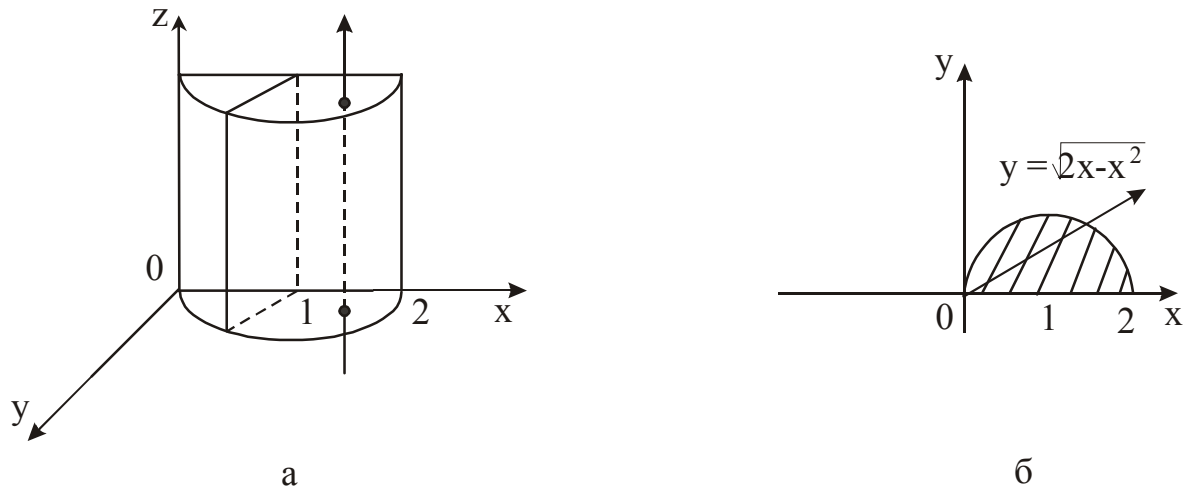


Рисунок 2.6

Спроектуємо область (V) на площину xOy в область ($Д$) (рис. 2.6, *б*). Переконуємося, що область (V) – циліндрична, а область ($Д$) – півкруг.

Отже, переходячи до циліндричних координат і враховуючи, що

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le 2\cos\varphi, \quad 0 \le z \le a,$$

знайдемо

$$\iiint\limits_{(V)} z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{(V')} z \cdot r \cdot rdrd\varphi \cdot dz = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr \int\limits_0^a zdz = \frac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2 dr =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \cdot d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2\varphi\right) \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi = \frac{4}{3}a^2 \left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{4}{3}a^2 \cdot \left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{9}a^2.$$

2.5 Обчислення потрійного інтеграла в сферичних координатах

Нагадаємо, що прямокутні координати *x, y,* і *z* пов'язані із сферичними координатами ρ, φ *і* θ (рис. 2.7) наступними співвідношеннями:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \quad z = \rho\cos\theta,$$

причому $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

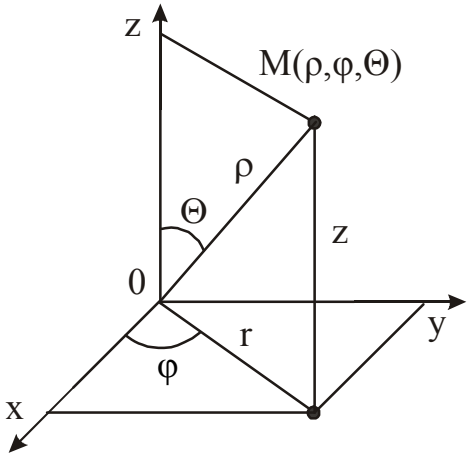


Рисунок 2.7

Елемент об'єму dv у сферичних координатах дорівнює $\rho^2\sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta$. Тому формула переходу від потрійного інтеграла в прямокутних координатах до потрійного інтеграла в сферичних координатах має такий вигляд:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{(V)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta.$$

Зауважимо, що перехід до сферичних координат виконують тоді, коли область (V) – сфера або її частини.

Обчислення потрійного інтеграла в сферичних координатах виконують в такій послідовності:

$$\iiint\limits_{(V)} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\cdot d\rho\cdot d\varphi\cdot d\theta =$$

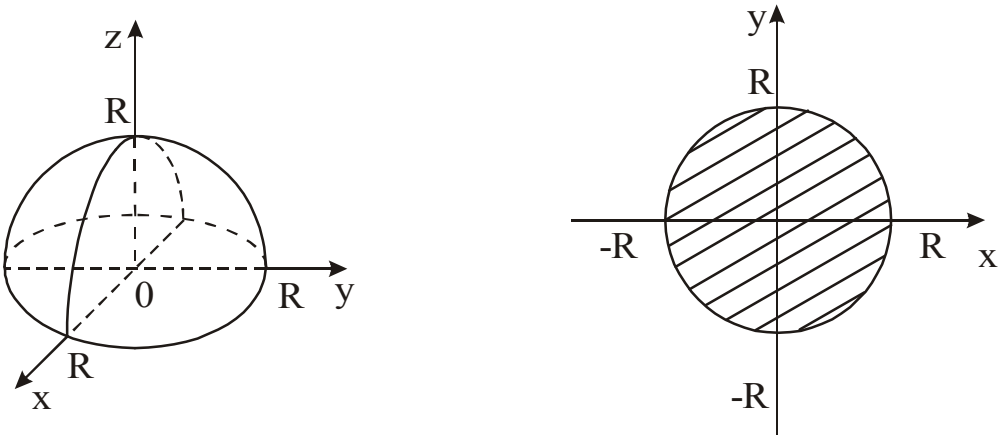
$$= \int d\theta \int d\varphi \int f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\cdot d\rho.$$

Межі інтегрування для змінних ρ і θ визначають згідно з областю ($Д$), тому це рівняння області (V) записують у сферичних координатах.

Приклад 27. Переходячи до сферичних координат, обчислити інтеграл

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right)dz.$$

Розв'язання. Відновимо область (V) (рис. 2.8, *а*) і область ($Д$) (рис. 2.8,



а б

б), враховуючи, що $-R \le x \le R$, $-\sqrt{R^2-x^2} \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$, $0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Рисунок 2.8

Переходячи до сферичних координат, нові змінні ρ, φ і θ змінюються в межах

$$0 \le \rho \le R,\ 0 \le \varphi \le 2\varphi,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},$$

тому

$$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \left(x^2+y^2\right) dz =$$

$$= \iiint_{(V)} (\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)\rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta =$$

$$= \iiint_{(V)} \rho^4 \sin^3\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\theta)\sin\theta \cdot d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^4 d\rho = \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_0^R =$$

$$= \left(1-\frac{1}{3}\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4}{15}\pi R^5.$$

Приклад 28. Обчислити

$$\iiint_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dxdydz,$$

де (V) визначається нерівностями $x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0, \quad i \quad x^2+y^2+z^2 \le 1.$

Розв'язання. Побудуємо область (V) (рис. 2.9, *а*). Спроектуємо область(V) на площину xOy в область ($Д$) (рис. 2.9, б).

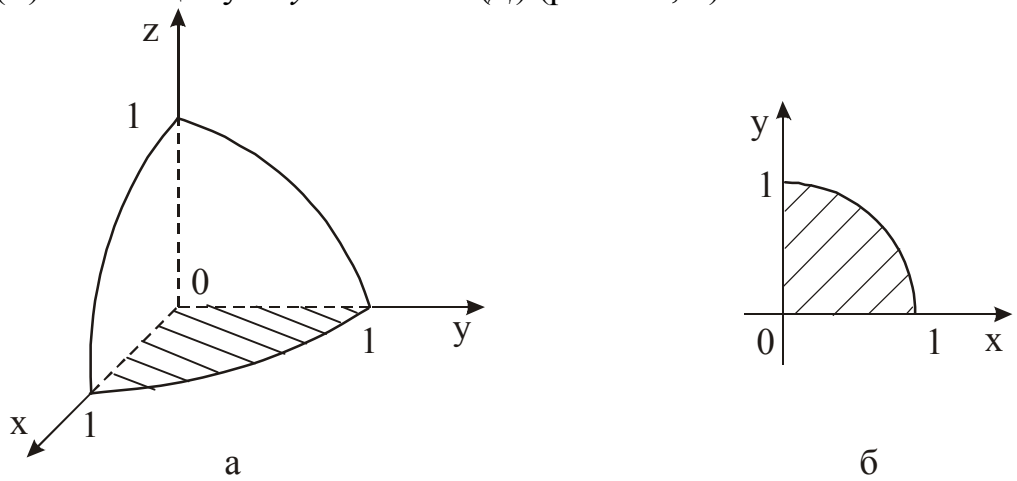


Рисунок 2.9

Переконуємося, що область (V) – частина кулі, яка розташована в першому квадранті.

Отже, переходячи до сферичних координат і враховуючи, що нові змінні змінюються в межах $0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, одержимо

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_{(V')} \rho\rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot d\theta \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^1 \rho^3 d\rho =$$

$$= -\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2} \cdot (0+1) \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

2.6 Застосування потрійного інтеграла для розв'язання задач геометрії і механіки

Запишемо вираз деяких величин через потрійний інтеграл.

1. Об'єм тіла
   - у прямокутних координатах $V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$ (12)
   - у циліндричних координатах $V = \iiint\limits_{(V)} rdrd\varphi \cdot dz$ (13)
   - у сферичних координатах $V = \iiint\limits_{(V)} \rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta$ (14)
2. Маса тіла
   - у прямокутних координатах $m = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)dxdydz$ (15)
   - у циліндричних координатах $m = \iiint\limits_{(V)} \gamma \cdot rdrd\varphi \cdot dz$ (16)
   - у сферичних координатах $m = \iiint\limits_{(V)} \gamma\rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta$ (17)
3. Статичні моменти тіла, відносно координатних площин
   - у прямокутних координатах

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \gamma \cdot zdxdydz,\ M_{xz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma \cdot ydxdydz,\ M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma \cdot xdxdydz \quad (18)$$

   - у циліндричних координатах

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \gamma zrdrd\varphi \cdot dz,\ M_{xz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma \cdot r^2 \sin\varphi \cdot dr \cdot d\varphi \cdot dz,\ M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma \cdot r^2 \cos\varphi \cdot drd\varphi \cdot dz \quad (19)$$

   - у сферичних координатах

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} \gamma\rho^3 \cos\theta \sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta,\ M_{xz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma\rho^3 \sin^2\theta \sin\varphi \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta,$$

$$M_{yz} = \iiint\limits_{(V)} \gamma\rho^3 \sin^2\theta \cos\varphi \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta \quad (20)$$

4. Моменти інерції тіла відносно осей координат і точки *O(0;0)*
   - у прямокутних координатах

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\gamma dxdydz\,,\ I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\gamma dxdydz\,,$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2)\gamma dxdydz\,, I_0 = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2)\gamma dxdydz \qquad (21)$$

- у циліндричних координатах

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \gamma r^3 drd\varphi \cdot dz\,,\ I_x = \iiint\limits_{(V)} (r^2 \sin^2\varphi + z^2)\gamma rdrd\varphi \cdot dz\,,$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (r^2 \cos^2\varphi + z^2)\gamma rdrd\varphi \cdot dz,\quad I_0 = \iiint\limits_{(V)} (r^2 + z^2)\gamma rdrd\varphi \cdot dz \qquad (22)$$

- у сферичних координатах

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \gamma\rho^4 \sin^3\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta,$$

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} \gamma\rho^4 (\sin^2\theta \sin^2\varphi + \cos^2\theta)\sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta,$$

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} \gamma\rho^4 (\sin^2\theta \cos^2\varphi + \cos^2\theta)\sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta, \qquad (23)$$

$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} \gamma\rho^4 \sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta$$

5. Координати центра ваги тіла

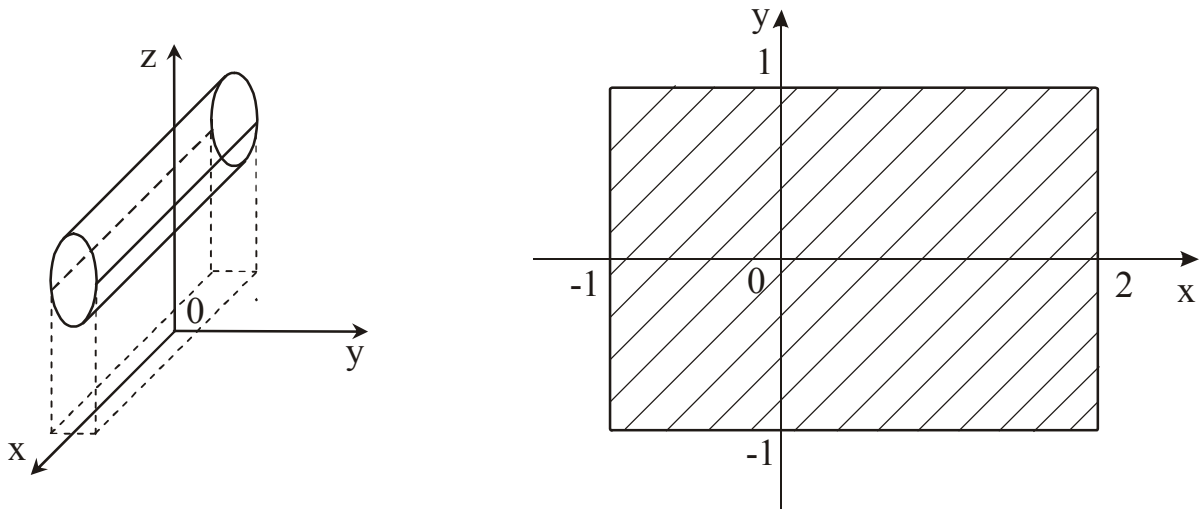
$$x_c = \frac{M_{yz}}{m},\ y_c = \frac{M_{xz}}{m},\ z_c = \frac{M_{xy}}{m} \qquad (24)$$

Зауважимо, що коли тіло однорідне, тоді $\gamma(x, y, z) = const$, яку приймають рівною одиниці. Покладаючи в формулах (21)-(23), $\gamma(x, y, z) = 1$, одержимо геометричні моменти інерції тіла.

Приклади

Приклад 29. Обчислити потрійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого циліндрами $z = 4 - y^2$ і $z = y^2 + 2$ і площинами $x = -1$ і $x = 2$.

Розв'язання. Побудуємо область (V) (рис. 2.10, *а*). Її проекцією на площину xOy є область (*Д*) (рис. 2.10,*б*).



а б

Рисунок 2.10

Тіло обмежене знизу циліндром $z = y^2 + 2$, а зверху – циліндром $z = 4 - y^2$. Область (Д) обмежена прямими *x = -1, x = 2, y = 1 і y = -1* (два останніх рівняння одержані в результаті виключення *z* із рівнянь циліндрів).

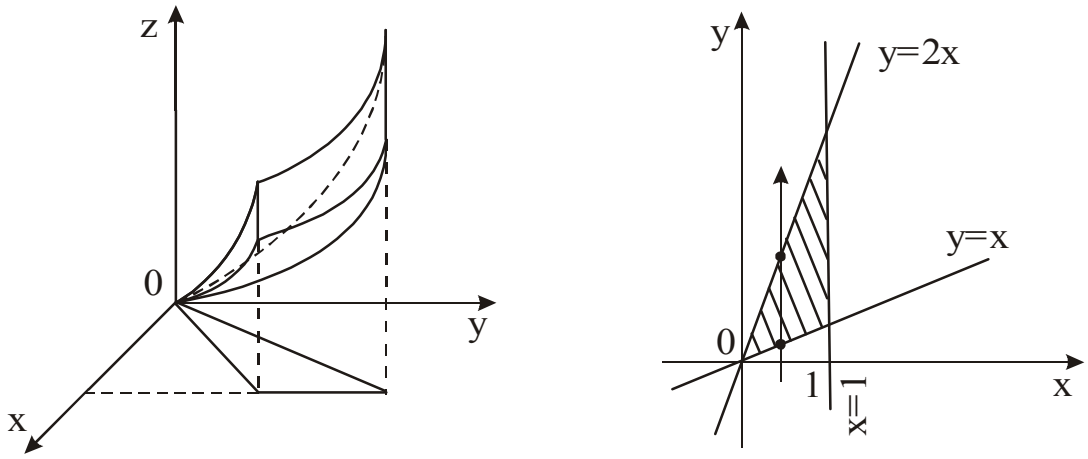
Отже, за формулою 12 з урахуванням симетрії області (*V*) відносно площини *xOz* будемо мати:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = 2\int_{-1}^{2} dx \int_{0}^{1} dy \int_{y^2+2}^{4-y^2} dz = 2\int_{-1}^{2} dx \int_{0}^{1} \left(4 - y^2 - y^2 - 2\right) dy = 2\int_{-1}^{2} dx \int_{0}^{1} \left(2 - 2y^2\right) dy =$$

$$= 4\int_{-1}^{2} dx \int_{0}^{1} \left(1 - y^2\right) dy = 4\int_{-1}^{2} \left(y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{0}^{1} dx = 4\int_{-1}^{2} \left(1 - \frac{1}{3}\right) dx = \frac{8}{3}\int_{-1}^{2} dx = \frac{8}{3} x\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{8}{3}(2+1) = 8.$$

Приклад 30. Обчислити потрійним інтегруванням об’єм тіла, обмеженого параболоїдами $z = x^2 + y^2$ і $z = x^2 + 2y^2$ і площинами $y = x$, $y = 2x$ і $x = 1$.

Розв’язання. Побудуємо область (*V*) (рис. 2.11, *а*). Її проекцією на площину *xOy* є область (Д) (рис. 2.11, *б*):



а б

Рисунок 2.11

В області (V) змінні x, y і z змінюються в межах $0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2x, \quad x^2 + y^2 \le z \le x^2 + 2y^2$.

Тоді за формулою 12 одержимо

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} dy \int_{x^2+y^2}^{x^2+2y^2} dz = \int_0^1 dx \int_x^{2x} \left(x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2\right) dy = \int_0^1 dx \int_x^{2x} y^2 dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{y^3}{3}\Bigg|_x^{2x} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \left(8x^3 - x^3\right) dx = \frac{7}{3}\int_0^1 x^3 dx = \frac{7}{3} \cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{12}.$$

Приклад 31. Обчислити потрійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ і параболоїдом $x^2 + y^2 = 3z \ \ (z \ge 0)$.

Розв'язання. Побудуємо область (V) (рис. 2.12, *а*). Її проекцією на площину xOy є область (Д) (рис. 2.12, б), яка являє собою круг, обмежений колом $x^2 + y^2 = 3$.

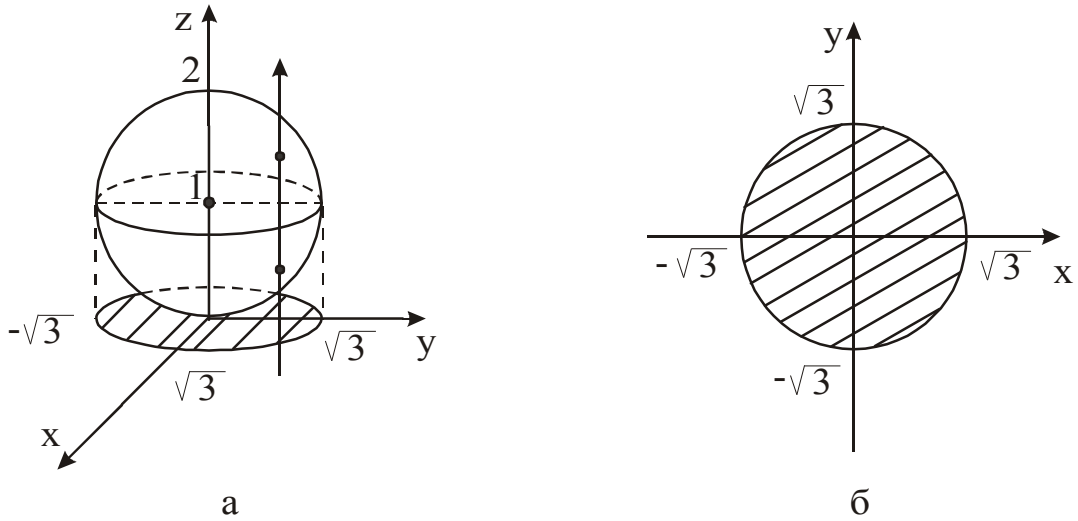


Рисунок 2.12

Рівняння кола знаходимо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 3z. \end{cases}$$

Шуканий об'єм будемо обчислювати в циліндричних координатах, тобто за формулою 13, оскільки область (*Д*) – круг.

Тоді, враховуючи, що

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le \sqrt{3}, \quad \frac{r^2}{3} \le z \le \sqrt{4 - r^2},$$

будемо мати

$$V=\iiint\limits_{(V)} dxdydz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}} rdr\int\limits_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} dz=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}} r\left(\sqrt{4-r^2}-\frac{r^2}{3}\right)dr=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(r\sqrt{4-r^2}-\frac{r^3}{3}\right)dr=$$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(-\frac{\left(\sqrt{4-r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{r^4}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=2\pi\left(-\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+\frac{8}{3}\right)=\frac{19}{6}\pi.$$

Приклад 32. Знайти масу кулі з радіусом *R*, якщо об'ємна густина пропорційна кубу відстані від центра і на одиниці відстані дорівнює δ.

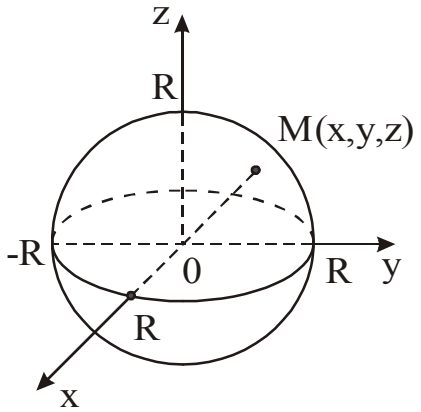


Рисунок 2.13

Розв'язання. Масу кулі (рис. 2.13) знайдемо за формулою 17, згідно з якою

$$m=\iiint\limits_{(V)}\gamma(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\theta\cdot d\rho\cdot d\varphi\cdot d\theta.$$

За умовою задачі $\gamma(\rho,\varphi,\theta)=k\rho^3$. Якщо $\rho=1$, тоді $\gamma(\rho,\varphi,\theta)=\delta$. Тому $k=\delta$ і $\gamma(\rho,\varphi,\theta)=\delta\rho^3$.

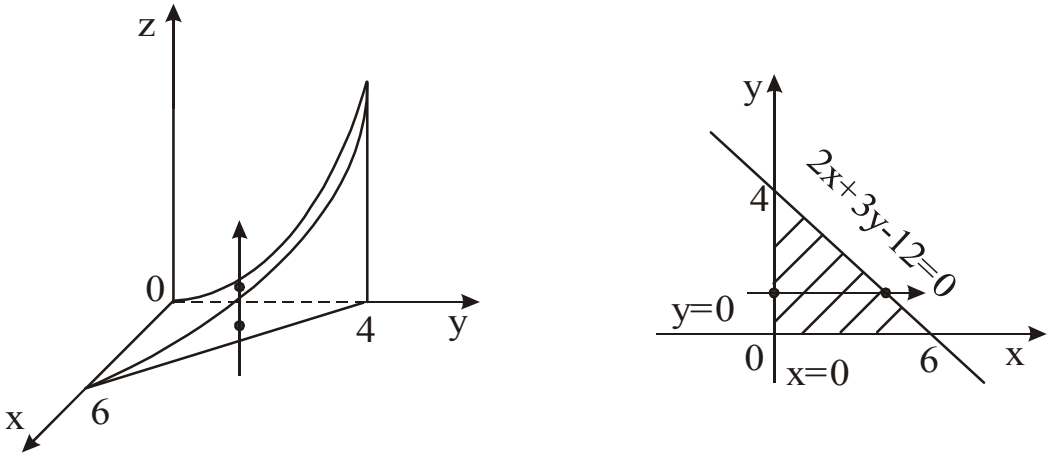
Отже,

$$m=\iiint\limits_{(V)}\delta\rho^3\cdot\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\delta\int\limits_0^{\pi}sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{R}\rho^5 d\rho=\delta\cdot(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{\rho^6}{6}\Bigg|_0^{R}=$$

$$=\delta\cdot(-\cos\pi+\cos 0)2\pi\cdot\frac{R^6}{6}=\frac{2}{3}\pi\delta\cdot R^6.$$

Приклад 33. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого циліндром $z=\frac{y^2}{2}$ і площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$ і $2x+3y-12=0$.

Розв'язання. Побудуємо область (*V*) (рис. 2.14, *а*). Її проекцією на площину *xOy* є область (*Д*) (рис. 2.14, *б*).



а б

Рисунок 2.14

Координати центра ваги тіла будемо обчислювати за формулами 24, згідно з якими

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_c = \frac{M_{xz}}{m} \qquad \text{і} \qquad z_c = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Обчислимо попередньо m, M_{xy}, M_{xz} і M_{yz} відповідно за формулами 15 і 18. Враховуючи, що в області (V) $0 \le y \le 4$, $0 \le x \le \frac{1}{2}(12-3y)$, $0 \le z \le \frac{y^2}{2}$, а $\gamma(x,y,z)=1$, будемо мати:

$$m = \iiint\limits_{(V)} dxdydz = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} dx \int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} \frac{y^2}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2 dy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 y^2 \cdot \frac{1}{2}(12-3y)dy =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^4 \left(4y^2 - y^3\right)dy = \frac{3}{4}\left(\frac{4y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{3}{4}\left(\frac{4^4}{3} - \frac{4^4}{4}\right) = 3\cdot 4^3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = 16.$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} zdxdydz = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} dx \int_0^{\frac{y^2}{2}} zdz = \int_0^4 dy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} \frac{z^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{y^2}{2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 dy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} \frac{y^4}{4} dx = \frac{1}{8}\int_0^4 y^4 dy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int_0^4 y^4(12-3y)dy = \frac{3}{16}\left(\frac{4y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{3}{16}\cdot 4^6 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = 3\cdot 4^4 \frac{1}{30} = \frac{128}{5}.$$

$$M_{xz} = \iiint\limits_{(V)} ydxdydz = \int_0^4 ydy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} dx \int_0^{\frac{y^2}{2}} dz = \int_0^4 ydy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} \frac{y^2}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^4 y^3 dy \int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} dx = \frac{1}{4}\int_0^4 y^3(12-3y)dy =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^4 \left(4y^3 - y^4\right)dy = \frac{3}{4}\left(y^4 - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{3}{4}\cdot 4^4 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) = 3\cdot 4^3 \frac{1}{5} = \frac{192}{5}.$$

$$M_{yz}=\iiint\limits_{(V)} xdxdydz=\int_0^4 dy\int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} xdx\int_0^{\frac{y^2}{2}} dz=\int_0^4 dy\int_0^{\frac{1}{2}(12-3y)} x\cdot\frac{y^2}{2}dx=\frac{1}{2}\int_0^4 y^2dy\int_0^{\frac{3}{2}(4-y)} xdx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 y^2\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{3}{2}(4-y)}dy=\frac{1}{4}\int_0^4 y^2\cdot\frac{9}{4}(4-y)^2dy=\frac{9}{16}\int_0^4\left(16y^2-8y^3+y^4\right)dy=$$

$$=\frac{9}{16}\left(16\cdot\frac{y^3}{3}-\frac{8y^4}{4}+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^4=\frac{9}{16}\cdot 4^5\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=9\cdot 64\frac{10-15+6}{30}=\frac{96}{5}.$$

Отже,

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{96}{5\cdot 16}=\frac{6}{5},\ y_c=\frac{M_{xz}}{m}=\frac{192}{5\cdot 16}=\frac{12}{5},\ z_c=\frac{M_{xy}}{m}=\frac{128}{5\cdot 16}=\frac{8}{5}.$$

Приклад 34. Знайти центр ваги однорідного тіла, обмеженого параболоїдом $z=\dfrac{x^2+y^2}{2a}$ і сферою $x^2+y^2+z^2=3a^2$ $(z\ge 0)$.

Розв'язання. Побудуємо область (*V*) (рис. 2.15, *а*). Її проекцією на площину *xOy* є область (*Д*) (рис. 2.15, *б*).

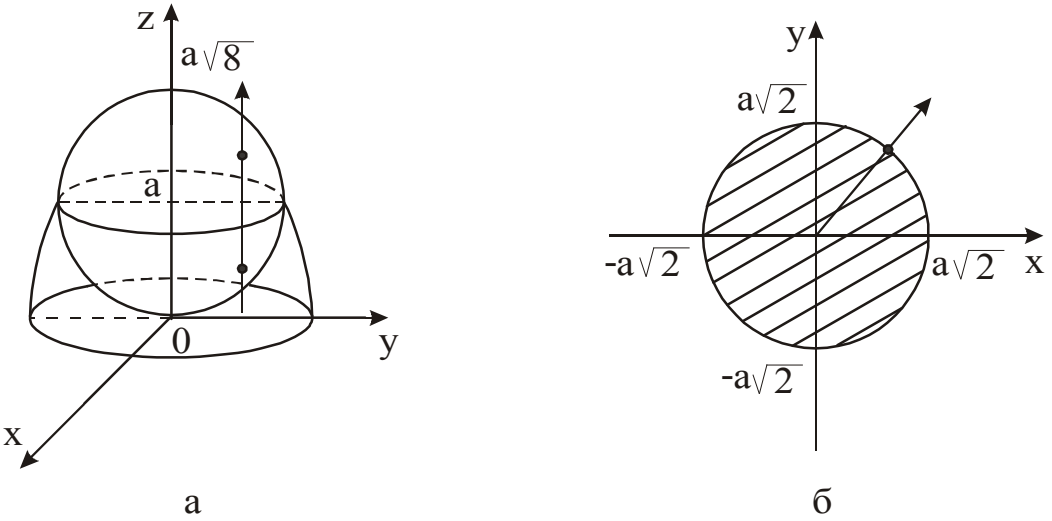


Рисунок 2.15

Рівняння лінії, яка обмежує область (*Д*), знаходимо, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{2a}, \\ x^2+y^2+z^2=3a^2. \end{cases}$$

Із першого рівняння $x^2+y^2=2az$, тоді $z^2+2az-3a^2=0$, звідки $z_{1,2}=-a\pm\sqrt{a^2+3a^2}=-a\pm 2a$ або $z_1=a,\ \ z_2=-3a$ (не задовольняє умові задачі, бо за умовою задачі $z\ge 0$).

Таким чином, область (*Д*) обмежена колом $x^2+y^2=2a^2$. Координати центра ваги тіла знаходимо за формулами 24.

Оскільки область (V) симетрична відносно осі Oz, тоді $x_c = y_c = 0, \quad a \quad z_c = \dfrac{M_{xy}}{m}$.

Переходячи до циліндричних координат і враховуючи, що змінні r, φ і z змінюються в області (V) в межах $0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le r \le a\sqrt{2}, \quad \dfrac{r^2}{2a} \le z \le \sqrt{3a^2 - r^2}$, одержимо:

$$m = \iiint\limits_{(V)} r dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} \left(r\sqrt{3a^2 - r^2} - \frac{r^3}{2a} \right) dr$$

$$= 2\pi \left(-\frac{\left(\sqrt{3a^2 - r^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{r^4}{8a} \right)\Bigg|_0^{a\sqrt{2}} = 2\pi \left(-\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} + a^3\sqrt{3} \right) = \frac{6\sqrt{3} - 5}{3} \pi a^3.$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z r dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} r dr \int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}} z dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a\sqrt{2}} r \left(3a^2 - r^2 - \frac{r^4}{4a^2} \right) dr =$$

$$= \pi \left(3a^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{24a^2} \right)\Bigg|_0^{a\sqrt{2}} = \pi \left(3a^4 - a^4 - \frac{a^4}{3} \right) = \frac{5}{3} \pi \cdot a^4.$$

$$z_c = \frac{M_{xy}}{m} = \frac{5\pi \cdot a^4 \cdot 3}{3(6\sqrt{3} - 5) \cdot \pi a^3} = \frac{5a}{6\sqrt{3} - 5} = \frac{5a}{83}(6\sqrt{3} + 5).$$

Отже, шукані координати центра ваги тіла $x_c=0$, $y_c=0$ і $z_c = \dfrac{5a}{83}(6\sqrt{3} + 5)$.

Приклад 35. Знайти момент інерції однорідної порожнистої кулі зовнішнього радіуса R, внутрішнього r з масою, рівною M, відносно діаметра.

Розв'язання. Розмістивши порожнисту кулю, як показано на рис. 2.16, будемо шукати момент інерції за формулою 21, згідно з якою:

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Оскільки $M = \gamma \cdot V$, а $V = \dfrac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$, тоді $\gamma = \dfrac{3M}{4\pi(R^3 - r^3)}$, тому $I_z = \gamma \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) dx dy dz$.

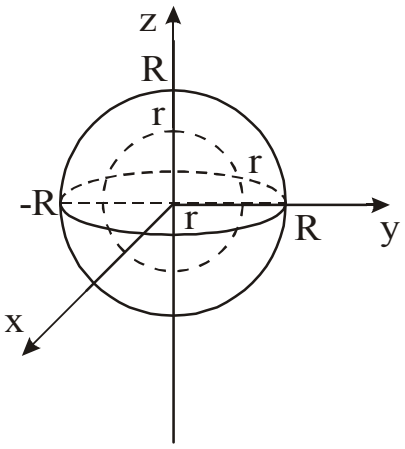


Рисунок 2.16

Переходячи до сферичних координат і враховуючи, що в області (V) $r \le \rho \le R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \theta \le \pi$, одержимо:

$$I_z = \gamma \iiint\limits_{(V)} (\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + \rho^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi)\rho^2 \sin\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta =$$

$$= \gamma \iiint\limits_{(V)} \rho^4 \sin^3\theta \cdot d\rho \cdot d\varphi \cdot d\theta = \gamma \int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \rho^4 d\rho = \gamma \int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^R \rho^4 d\rho =$$

$$= \gamma \left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3} \right)\Bigg|_0^{\pi} \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{\rho^5}{5}\Bigg|_r^R = \gamma \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right) \cdot 2\pi \cdot \frac{R^5 - r^5}{5} = \frac{8\pi}{15}\gamma(R^5 - r^5).$$

Оскільки $\gamma = \dfrac{3M}{4\pi\left(R^3 - r^3\right)}$, тоді остаточно будемо мати

$$I_z = \frac{3M}{4\pi\left(R^3 - r^3\right)} \cdot \frac{8\pi}{15}\gamma(R^5 - r^5) = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається потрійним інтегралом від даної функції відносно даної області?
2. Сформулювати властивості потрійного інтеграла.
3. Чому дорівнює елемент об’єму в прямокутних, циліндричних і сферичних координатах?
4. Як обчислюється потрійний інтеграл у прямокутних, циліндричних і сферичних координатах?
5. Які задачі приводять до поняття потрійного інтеграла?
6. Як обчислюється маса неоднорідного тіла з заданою густиною?
7. Вивести формули для обчислення статичних моментів і моментів інерції тіла.
8. Записати формули для обчислення координат центра ваги тіла.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y xyzdz$.

Відповідь: $\frac{1}{48}$.

2.Обчислити $\iiint\limits_{(V)} \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, поширений на область ($V$), обмежену площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і $x + y + z = 1$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right)$.

3.Обчислити $\iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)dxdydz$, де область ($V$) обмежена поверхнями $z = \frac{1}{2}(x^2 + z^2)$ і $z = 2$.

Відповідь: $\frac{16}{3}\pi$.

4.Обчислити $\iiint\limits_{(V)} \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdydz$, якщо область ($V$) – куля $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

Відповідь: $\frac{8\pi}{9}(2\sqrt{2} - 1)$.

5. Обчислити потрійним інтегруванням об'єм тіла, обмеженого параболоїдами $z = x^2 + y^2$ і $z = 2x^2 + 2y^2$, циліндром $y = x^2$ і площиною $y = x$.

Відповідь: $\frac{3}{35}$.

6. Обчислити за допомогою потрійного інтеграла об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ і $z = x^2 + y^2$.

Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

Вказівка. Рівняння $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ визначає конус.

7. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого циліндрами $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$ та площинами $z = 0$ і $x + z = 6$.

Відповідь: $x_c = \frac{18}{7}$, $y_c = \frac{15}{16}\sqrt{6}$, $z_c = \frac{12}{7}$.

8. Знайти масу тіла, обмеженого прямим круговим циліндром радіуса R і висоти H, якщо його густина в будь-якій точці чисельно дорівнює квадрату відстані цієї точки від центра основи циліндра.

Відповідь: $\frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2+2H^2)$.

Вказівка. Центр нижньої основи циліндра сумістіть із початком координат, тоді густина тіла $\gamma = x^2+y^2+z^2$. Обчислення доцільно виконувати в циліндричних координатах.

9. Знайти моменти інерції однорідного прямокутного паралелепіпеда з ребрами *a, b* і *c* відносно кожного з ребер і відносного центра ваги, якщо його маса дорівнює *M*.

Відповідь: $\frac{1}{3}M(b^2+c^2)$, $\frac{1}{3}M(c^2+a^2)$, $\frac{1}{3}M(a^2+b^2+c^2)$.

Вказівка. $\gamma = \frac{M}{V}$, де $V = abc$.

Центр ваги прямокутного паралелепіпеда знаходиться в точці перетину його діагоналей. Тому, помістивши цю точку в початок координат, момент інерції прямокутного паралелепіпеда відносно центра ваги обчислити за формулою (21), згідно з якою

$$I_0 = \iiint\limits_{(V)} (x^2+y^2+z^2)\gamma(x,y,z)dxdydz.$$

3. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

3.1 Криволінійний інтеграл другого роду. Теорема існування

Нехай в деякій області площини задана крива *AB* і вектор-функція $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$, яка визначена в точках кривої.

Виконаємо наступні дії:

1. Розбиваємо криву *AB* на частини в напрямку від точки *A* до точки *B* (рис. 3.1).

$$A = M_0, M_1, ...M_n = B.$$

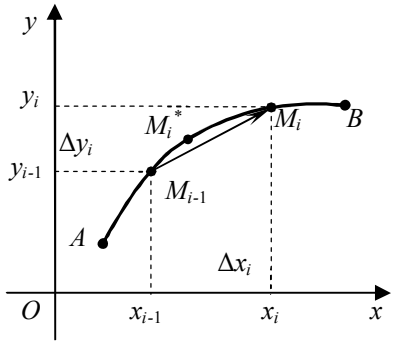


Рисунок 3.1

2. На кожній дузі $M_{i-1}M_i$, $i = \overline{1,n}$ довільно візьмемо точку $M_i^*(\xi_i, \eta_i)$.

3. Складаємо суму $\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$, де Δx_i і Δy_i – проекції $i-$тої часткової дуги $M_{i-1}M_i$ на осі координат (тобто проекції вектора $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$).

Така сума називається інтегральною.

4. Нехай λ – найбільша з довжин дуг $M_{i-1}M_i$, $i=\overrightarrow{1,n}$.

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми при $\lambda \to 0$ і вона не залежить ні від способу розбиття кривої *AB,* ні від вибору точок $M_i^*(\xi_i,\eta_i)$, тоді її називають криволінійним інтегралом другого роду від вектор функції $\vec{F}$ вздовж кривої *AB*.

Позначають криволінійний інтеграл другого роду наступним чином

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Отже, за означенням

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

Теорема (існування криволінійного інтеграла). Нехай крива *AB* задана параметрично рівняннями $x=x(t), y=y(t)$, де $x(t), y(t)$ – неперервні функції разом із похідними першого порядку на відрізку $[\alpha,\beta]$. Тоді для будь-якої вектор функції $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$, неперервної вздовж цієї кривої, криволінійний інтеграл другого роду існує.

Зазначимо, що вектор-функції $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ називається неперервною, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ є неперервними.

Криволінійний інтеграл другого роду є робота, яку здійснює змінна сила $\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ на криволінійному шляху *AB* (в цьому полягає механічне тлумачення криволінійного інтеграла).

Робота сили вздовж шляху не залежить від вибору системи координат, а, отже, криволінійний інтеграл другого роду визначається лише кривою та вектор функцією на цій кривій.

Зауваження. Аналогічно можна визначити криволінійний інтеграл другого роду

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

для вектор-функції $\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ і просторової кривої *AB*.

3.2 Властивості криволінійного інтеграла другого роду

1. Значення криволінійного інтеграла залежить від напряму руху вздовж кривої *AB*.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

2. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$.

3. Якщо крива *AB* складається з двох частин $AB = L_1 \cup L_2$, тоді

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{L_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

(властивість адитивності). При цьому припускається, що напрям руху вздовж усіх кривих співпадає.

3.3 Обчислення криволінійних інтегралів другого роду

Обчислення криволінійних інтегралів другого роду зводиться до обчислення визначених інтегралів.

1. Нехай крива *AB* задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$. Якщо напряму руху вздовж кривої *AB* від точки *A* до точки *B* відповідає зміна параметра t від t_1 до t_2, тоді

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t))dt. \qquad (25)$$

2. Якщо крива *AB* задана рівнянням $y = f(x), a \le x \le b$, тоді

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{a}^{b} (P(x,f(x)) + Q(x,f(x))f'(x))dx. \qquad (26)$$

3. Якщо крива *AB* задана рівнянням $x = \psi(y), c \le y \le d$, тоді

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{c}^{d} (P(\psi(y),y)\psi'(y) + Q(\psi(y),y))dy. \qquad (27)$$

Аналогічна формула має місце для обчислення криволінійного інтеграла за координатами по просторовій кривій *AB*. Якщо крива *AB* задана рівняннями $x=x(t)$, $y = y(t)$, $z=z(t)$, де $t_1 \le t \le t_2$, тоді

$$\int\limits_{L} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} (P(x(t),y(t),z(t))x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))z'(t))dt.$$

Правило обчислення криволінійного інтеграла за координатами

1. Задати криву *L* параметричними рівняннями $x = x(t)$ і $y = y(t)$.

2. Замінити в підінтегральному виразі змінні *x* і *y* на їх вирази через параметр *t*, а dx і dy – відповідно диференціалами функцій $x = x(t)$ і $y = y(t)$, тобто покласти $dx = x'(t)dt$, а $dy = y'(t)dt$.

3. За нижню межу в одержаному визначеному інтегралі потрібно прийняти значення параметра, що відповідає початку дуги, а за верхню межу – значення параметра, що відповідає кінцю дуги.

Зазначимо, що коли плоска крива L задана рівнянням $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, за параметр треба прийняти змінну x, тоді параметричними рівняннями кривої L будуть: $x = x,\ y = f(x)$, а x змінюється від a до b.

Якщо плоска крива L задана рівнянням $x = \psi(y)$ $(c \le y \le d)$, прийняти за параметр треба змінну y, тоді параметричними рівняннями кривої L будуть: $y=y,\ x = \psi(y)$, а y змінюється від c до d.

Приклади

Приклад 36. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx + xdy$, де L – чверть кола $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язання. Замінимо в підінтегральному виразі змінні x і y, а також диференціали dx і dy на їх вирази через параметр t, тобто покладемо $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $dx = -R\sin tdt$, $dy = R\cos tdt$. Тоді

$$\int\limits_L ydx + xdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (R\sin t \cdot (-R\sin t)dt + R\cos t \cdot R\cos t)dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (-R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t)dt = R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t)dt =$$

$$= R^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2tdt = R^2 \cdot \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2}(\sin\pi - \sin 0) = 0.$$

Приклад 37. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (2a - y)dx - (a - y)dy$, де L – перша (від початку координат) арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Розв'язання. Оскільки межі для t не вказані, тоді треба побудувати криву L (рис. 3.2).

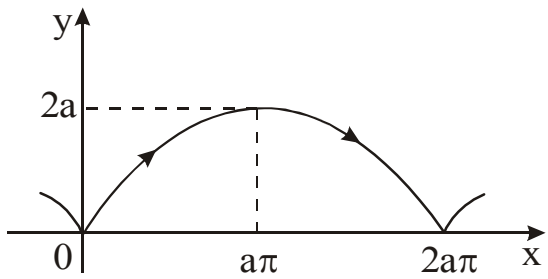


Рисунок 3.2

Для першої від початку координат арки циклоїди $0 \le t \le 2\pi$. Поклавши далі в підінтегральному виразі $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $dx = a(1 - \cos t)dt$ і $dy = a \sin t dt$, будемо мати:

$$\int_L (2a - y)dx - (a - y)dy = \int_0^{2\pi} (2a - a(1 - \cos t)) \cdot a(1 - \cos t)dt - (a - a(1 - \cos t))a \sin t dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos t)(1 - \cos t)dt - a^2 \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 t)dt - a^2 \cdot \frac{1}{2} \sin^2 t \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt - \frac{a^2}{2}(\sin^2 2\pi - \sin^2 0) = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi = \pi a^2.$$

Приклад 38. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_{(0;0)}^{(1;1)} xydx + (y - x)dy$ уздовж ліній а) $y = x^2$, б) $y^2 = x$.

Розв'язання. 1. Враховуючи, що $y = x^2, dy = 2xdx$ і $0 \le x \le 1$, за формулою (26) будемо мати:

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} xydx + (y - x)dy = \int_0^1 x \cdot x^2 \cdot dx + (x^2 - x) \cdot 2xdx = \int_0^1 (x^3 + 2x^3 - 2x^2)dx =$$

$$= \int_0^1 (3x^3 - 2x^2)dx = \left(\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}.$$

2. Крива L задана рівнянням $y^2 = x$, тому для обчислення криволінійного інтеграла раціонально скористатися формулою 27. Враховуючи, що $y^2 = x, dx = 2ydy$ і $0 \le y \le 1$, одержимо:

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} xydx + (y - x)dy = \int_0^1 y \cdot y^2 \cdot 2ydy + (y - y^2)dy = \int_0^1 (y + 2y^4 - y^2)dy =$$

$$= \left(\frac{2y^5}{5} + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{17}{30}.$$

Результати обчислень останніх двох інтегралів підтверджують одну з властивостей криволінійного інтеграла, а саме: величина криволінійного інтеграла залежить від форми кривої інтегрування.

Приклад 39. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L xdy$, де L – контур трикутника, утвореного осями координат і прямою $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, в додатному напрямку (тобто проти руху годинникової стрілки).

Розв'язання. На рис. 3.3 зображена лінія $OABO$ (замкнена). Вона складається із трьох відрізків, розміщених на різних прямих з різними

рівняннями: $y = 0$, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$, $x = 0$. Тому в силу властивості (3) криволінійного інтеграла маємо: $\int\limits_L xdy = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AB} + \int\limits_{BO}$.

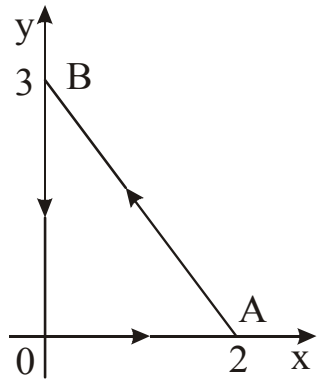


Рисунок 3.3

Оскільки на OA: $y=0$ і $dy=0$, а на $BO: x=0$, тоді $\int\limits_{OA}=0$ і $\int\limits_{BO}=0$, отже:

$$\int\limits_L xdy = \int\limits_{AB} xdy .$$

Враховуючи далі, що на AB: $x=2\left(1-\frac{y}{3}\right)$ і $0 \le y \le 3$, одержимо:

$$\int\limits_L xdy = \int\limits_{AB} xdy = \int\limits_0^3 2\left(1-\frac{y}{3}\right)dy = 2\left(y-\frac{y^2}{6}\right)\Bigg|_0^3 = 2\left(3-\frac{3}{2}\right) = 6-3=3 .$$

3.4 Формула Гріна

Якщо L – межа області $Д$ і функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні, разом зі своїми частинними похідними першого порядку $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$, в замкненій області $Д$ (включаючи межу L), тоді справедлива формула Гріна

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(Д)} \left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy ,$$

де обхід контуру L вибирається таким чином, щоб область $Д$ залишалась зліва.

Відзначимо, що коли при русі вздовж контуру L область інтегрування ($Д$) залишається зліва, то говорять, що обхід замкненого контуру L здійснюється в додатному напрямку.

Приклади

Приклад 40. Використовуючи формулу Гріна, обчислити

$\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, де L – контур трикутника з вершинами в точках $A(1;1)$, $B(2;2)$ і $C(1;3)$, що проходять у додатному напрямку. Перевірити результат безпосереднім інтегруванням.

Розв'язання. Оскільки $P(x,y)=2(x^2+y^2)$ і $Q(x,y)=(x+y)^2$ неперервні функції разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}=4y$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}=2(x+y)(1+0)=2x+2y$ в замкненій області *Д*, включаючи межу L (рис. 3.4),

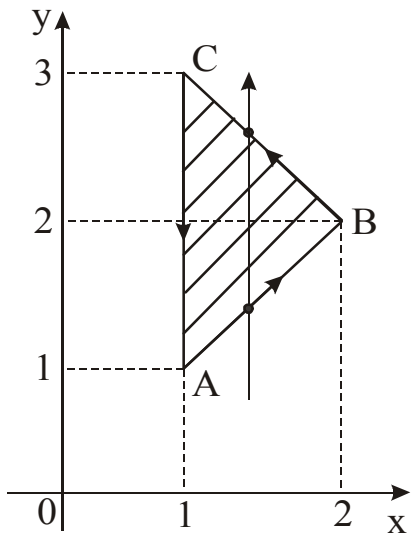


Рисунок 3.4

то за формулою Гріна

$$\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=\iint\limits_{(Д)}(2x+2y-4y)dxdy=2\iint\limits_{(Д)}(x-y)dxdy.$$

Перейдемо від подвійного інтеграла до повторного, враховуючи що внутрішнє інтегрування раціонально виконати за змінною y, а зовнішнє за змінною x. Для визначення меж інтегрування внутрішнього інтеграла знайдемо y із рівняння лінії входу (AB), звідки $y = x$ і лінії виходу (BC), звідки $y = 4 - x$.

Рівняння (BC) знайдено як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки B (2;2) і C (1;3):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1};\ \frac{y-2}{3-2}=\frac{x-2}{1-2};\ y-2=-x+2;\ y=4-x.$$

Таким чином,

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=2\iint_{(Д)}(x-y)dxdy=2\int_1^2 dx\int_x^{4-x}(x-y)dy=2\int_1^2\left(xy-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_x^{4-x}dx=$$

$$=2\int_1^2\left(4x-x^2-\frac{(4-x)^2}{2}-x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx=2\int_1^2\left(4x-\frac{3}{2}x^2-\frac{(4-x)^2}{2}\right)dx=$$

$$=2\left(2x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{(4-x)^3}{6}\right)\Bigg|_1^2=2\left(8-4+\frac{4}{3}-2+\frac{1}{2}-\frac{9}{2}\right)=-\frac{4}{3}.$$

Обчислимо тепер безпосередньо криволінійний інтеграл за контуром L, який складається з ланок AB, BC і CA. Враховуючи, що на AB: $y=x$, $dy=dx$, $1\le x\le 2$; BC: $y=4-x$, $dy=-dx$, $2\ge x\ge 1$; на CA: $x=1$, $dx=0$, $3\ge y\ge 1$, будемо мати:

$$\oint_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy=\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CA}=\int_1^2 2(x^2+x^2)dx+(x+x)^2dx+\int_2^1 2(x^2+(4-x)^2)dx+$$

$$+(x+4-x)^2(-dx)+\int_3^1(1+y)^2dy=8\int_1^2 x^2dx+\int_2^1(2x^2+32-16x+2x^2-16)dx+\int_3^1(1+y)^2dy=$$

$$=\frac{8}{3}x^3\Bigg|_1^2+4\int_2^1(x^2-4x+4)dx+\frac{(1+y)^3}{3}\Bigg|_3^1=\frac{56}{3}+4\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right)\Bigg|_2^1+\frac{8}{3}-\frac{64}{3}=$$

$$=\frac{56}{3}+4\left(\frac{1}{3}-2+4-\frac{8}{3}+8-8\right)+\frac{8}{3}-\frac{64}{3}=-\frac{4}{3}.$$

Переконуємося, що результати обчислень однакові.

Приклад 41. Використовуючи формулу Гріна, обчислити інтеграл

$$\oint_L -x^2ydx+xy^2dy,$$

де L – коло $x^2+y^2=R^2$, що пробігається проти ходу годинникової стрілки.

Розв'язання. У даному прикладі $P(x,y)=-x^2y$, $Q(x,y)=xy^2$. Тоді $\frac{\partial P}{\partial y}=-x^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2$. Функції P і Q, а також їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в замкненій області (Д), включаючи її межу L, тому згідно з формулою Гріна

$$\oint_L -x^2ydx+xy^2dy=\iint_{(Д)}(y^2+x^2)dxdy.$$

Оскільки область інтегрування (*Д*) – круг, тоді доцільно в подвійному інтегралі перейти до полярних координат:

$$\iint_{(Д)}(y^2+x^2)dxdy=\iint_{(Д)}r^2\cdot rdrd\varphi=\iint_{(Д)}r^3drd\varphi.$$

Переходячи далі до повторного інтеграла й враховуючи, що в області (*Д*) $0 \le \varphi \le 2\pi$ і $0 \le r \le R$, остаточно будемо мати:

$$\oint_L -x^2 y dx + xy^2 dy = \iint_{(Д)} (y^2 + x^2) dxdy = \iint_{(Д)} r^3 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = \varphi\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{r^4}{4}\Bigg|_0^R = 2\pi \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}.$$

3.5 Застосування криволінійного інтеграла другого роду до розв'язання задач геометрії й механіки

Площа *S* фігури, обмеженої простим замкненим контуром *L*, обчислюється за формулою

$$S = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx. \qquad (28)$$

Контур інтегрування пробігається таким чином, щоб обмежена ним область залишається зліва (додатний напрямок).

Відзначимо, що для обчислення площі можна застосувати й інші формули, а саме:

$$S = \oint_L x dy \text{ або } S = -\oint_L y dx.$$

Найбільш зручною для обчислення площі є формула (28).

Робота, що здійснюється змінною силою $\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$ на криволінійному шляху *L* обчислюється за формулою

$$A = \int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \qquad (29)$$

Зауважимо, що $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ являють собою проекції сили $\vec{F}$ на осі координат, тобто $P(x,y) = F_x$, а $Q(x,y) = F_y$.

Приклади

Приклад 42. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла площу фігури, обмежену астроїдою $x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t$.

Розв'язання. Площу фігури, зображеної на рис. 3.5, обчислимо за формулою (28).

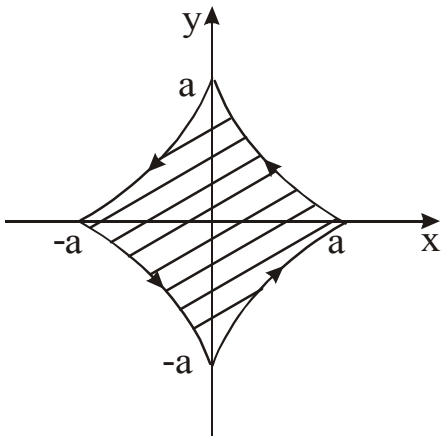


Рисунок 3.5

Враховуючи, що $0 \le t \le 2\pi$ і

$$x = a\cos^3 t, dx = -3a\cos^2 t\sin t dt, y = a\sin^3 t, dy = 3a\sin^2 t\cos t dt,$$

одержимо:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(3a^2\cos^4 t\sin^2 t + 3a^2\sin^4 t\cos^2 t\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t dt =$$

$$= \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt = \frac{3}{16}a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos 4t\right)dt = \frac{3}{16}a^2\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{3}{8}\pi a^2.$$

Приклад 43. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла площу фігури, обмежену кардіоїдою $x = 2a\cos t - a\cos 2t, y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

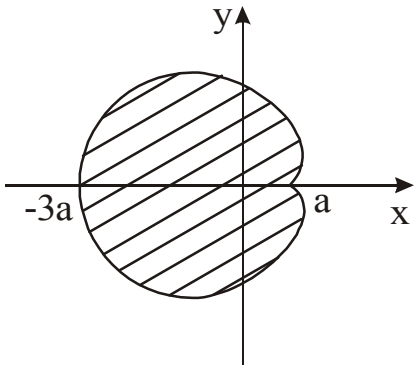


Рисунок 3.6

Розв'язання. Для побудови кривої (рис. 3.6) і визначення меж інтегрування знайдемо координати деяких точок кривої.

При $t = 0$ $\begin{cases} x = a, \\ y = 0. \end{cases}$ При $t = \frac{3\pi}{2}$ $\begin{cases} x = a, \\ y = -2a. \end{cases}$

При $t = \frac{\pi}{2}$ $\begin{cases} x = a, \\ y = 2a. \end{cases}$ При $t = 2\pi$ $\begin{cases} x = a, \\ y = 0. \end{cases}$

При $t = \pi$ $\begin{cases} x = -3a, \\ y = 0. \end{cases}$

Враховуючи далі, що $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $dx = \left(-2a\sin t + 2a\sin 2t\right)dt$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$, $dy = \left(2a\cos t - 2a\cos 2t\right)dt$ і $0 \le t \le 2\pi$, за формулою (28) одержимо:

$$S = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(2a\cos t - a\cos 2t)\cdot(2a\cos t - 2a\cos 2t) - (-2a\sin t + 2a\sin 2t)\cdot$$

$$\cdot(2a\sin t - a\sin 2t)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4a^2\cos^2 t - 4a^2\cos t\cos 2t - 2a^2\cos t\cos 2t + 2a^2\cos^2 t +$$

$$+ 4a^2\sin^2 t - 2a^2\sin t\sin 2t - 4a^2\sin t\sin 2t + 2a^2\sin^2 2t)dt =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(4a^2-4a^2\cos t-2a^2\cos t+2a^2)dt=3a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)dt=3a^2(t-\sin t)\Big|_0^{2\pi}=6a^2\pi.$$

Приклад 44. За допомогою криволінійного інтеграла знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$, $y=2$ і $x=0$.

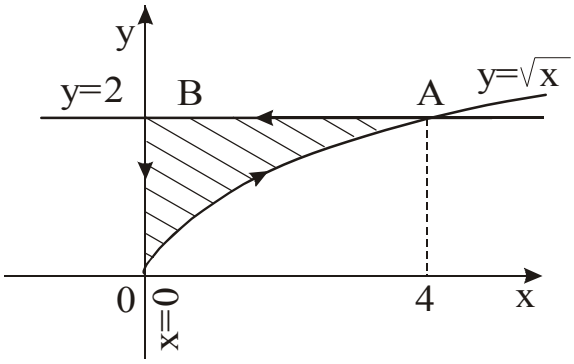


Рисунок 3.7

Розв'язання. Фігура, обмежена лініями $y=\sqrt{x}$, $y=2$ і x=0, зображена на рис. 3.7. Її площу знаходимо за формулою (28), згідно з якою:

$$S=\oint_L xdy.$$

Оскільки контур L складається з трьох різних ліній ($L = OA + AB + BO$), тоді шукана площа

$$S=\oint_L xdy=\left(\int_{OA}+\int_{AB}+\int_{BO}\right).$$

Останній інтеграл, тобто $\int_{BO} xdy=0$, бо на $BO: x=0$ і $dx=0$.

Враховуючи також, що на $OA: x=y^2, dx=2ydy$, $0\le y\le 2$, а на $AB: y=2, dy=0$, $4\ge x\ge 0$, остаточно будемо мати:

$$S=\int_{OA} xdy=\int_0^2 y^2dy=\frac{y^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8}{3}.$$

Приклад 45. У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила, яка має сталу величину і напрямок додатної осі абсцис. Знайти роботу, що буде здійснювати ця сила, при русі точки вздовж дуги кола $x^2 + y^2 = R^2$, яка лежить у першому квадранті (рис. 3.8).

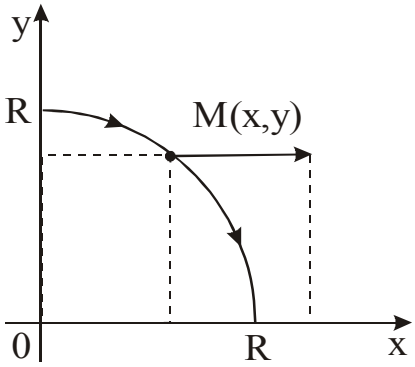


Рисунок 3.8

Розв'язання. Проекції сили $\vec{F}$ на осі координат $P(x,y)=F_x=F$ і $Q(x,y)=F_y=0$. В силу формули (29)

$$A=\int_L F_x dx+F_y dy=\int_L F dx .$$

Оскільки $F = const$, а x змінюються від 0 до R, тоді шукана робота

$$A=F\int_0^R dx=Fx\Big|_0^R=FR .$$

Приклад 46. У кожній точці M еліпса $x=a\cos t, y=b\sin t$ прикладена сила $\vec{F}$, рівна за величиною відстані від точки M до центра еліпса і напрямлена до центра еліпса (рис. 3.9).

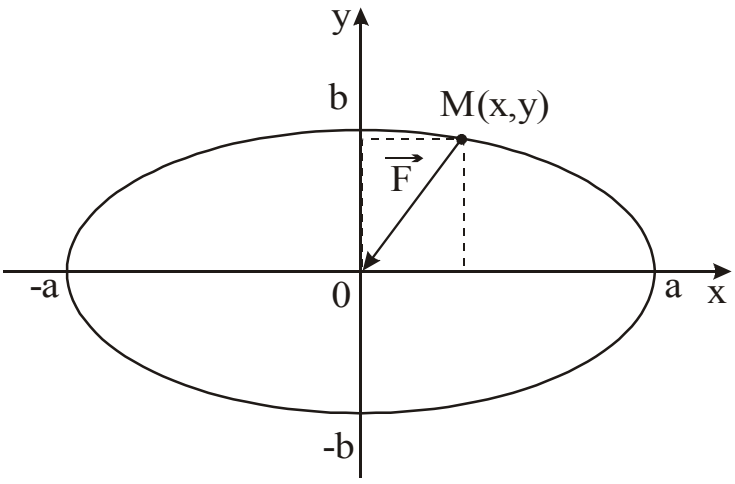


Рисунок 3.9

1. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщені точки вздовж дуги еліпса, розташованої в першому квадранті.

2. Знайти роботу, якщо точка обходить увесь еліпс.

Розв'язання. За умовою задачі $\left|\vec{F}\right|=\left|MO\right|$. Тому проекції сили $\vec{F}$ на осі координат відповідно дорівнюють $F_x=-x$ і $F_y=-y$. На підставі формули (29) одержимо:

1) 1-й спосіб

$$A=\int_L -xdx-ydy=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot a\sin tdt-b\sin t\cdot b\cos tdt=\left(a^2-b^2\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos tdt=$$

$$=\left(a^2-b^2\right)\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

2-й спосіб:

$$A=\int_L -xdx-ydy=\int_{(a;0)}^{(0;b)} -xdx-ydy=-\int_a^0 xdx-\int_0^b ydy=$$

$$=-\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^0-\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^b=\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2}=\frac{a^2-b^2}{2}.$$

2) 1-й спосіб

$$A=\int_L -xdx-ydy=\left(a^2-b^2\right)\int_0^{2\pi}\sin t\cos tdt=\left(a^2-b^2\right)\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=0.$$

2-й спосіб

$$A=\int_L -xdx-ydy=\int_{(a;0)}^{(a;0)} -xdx-ydy=-\int_a^a xdx-\int_0^0 ydy=0,$$

бо нижня і верхня межі інтегрування в кожному інтегралі рівні між собою.

Як уже відзначалося вище, якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в усіх точках області (*Д*) і $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, тоді криволінійний інтеграл за будь-яким замкненим контуром, який лежить в цій області, дорівнює нулю. Підтвердження цього факту одержано в випадку 2), бо для $\int_L -xdx-ydy$ виконується умова $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ і $P(x,y)=-x$, $\frac{\partial P}{\partial y}=0$, $Q(x,y)=-y$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=0$ неперервні.

3.6 Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Знаходження функції за її повним диференціалом

Якщо функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ неперервні разом із своїми частинними похідними першого порядку в однозв'язній області (*Д*) і контур L цілком знаходиться в цій області, тоді необхідною і достатньою умовою незалежності криволінійного інтеграла

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

від контуру (шляху) інтегрування є виконання в області (*Д*) тотожності

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Потрібно відзначити, що за виконання вказаних умов криволінійний інтеграл відносно будь-якого замкненого контуру *C*, який міститься в області (*Д*), дорівнює нулю, тобто:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Для обчислення інтеграла

$$\int_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \qquad \left(\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}\right),$$

який не залежить від контуру інтегрування, потрібно обирати в якості найвигіднішого шляху інтегрування ламану, що з'єднуємо точки $(x_0;y_0)$ і $(x_1;y_1)$, ланки якої паралельні осям Ox і Oy.

Підінтегральний вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ за вказаних умов є повним диференціалом деякої функції $U = U(x,y)$, тобто

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Функцію $U(x,y)$ (первісну) можна знайти за допомогою криволінійного інтеграла за ламаною A_0A_1B, де A_0 $(x_0;y_0)$ – довільна фіксована точка, $B(x,y)$ – змінна точка, а точка A_1 має координати x і y_0. Тоді вздовж A_0A_1 маємо $y = y_0$ і $dy = 0$, а вздовж A_1B маємо $x = const$ і $dx = 0$ (рис. 3.10).

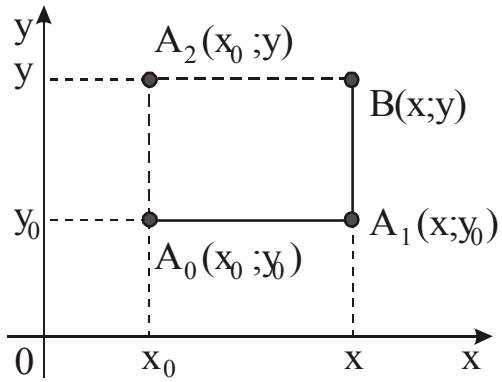


Рисунок 3.10

Таким чином, одержимо наступну формулу для відновлення функції $U(x,y)$ за її повним диференціалом:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C.$$

Аналогічно, інтегруючи вздовж ламаної A_0A_2B, де $A_2(x_0;y)$, одержимо:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C. \qquad (30)$$

У загальному випадку $U(x,y)=\int\limits_{(x_0;y_0)}^{(x_1;y_1)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C$.

Приклади

Приклад 46. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} 2xydx+x^2dy$ вздовж ліній: 1) $y=x^2$, 2) $y^2=x$.

Розв'язання. 1. Враховуючи, що $y=x^2, dy=2xdx$ і $0\le x\le 1$, будемо мати:

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} 2xydx+x^2dy=\int\limits_0^1 2x\cdot x^2dx+x^2\cdot 2xdx=\int\limits_0^1 (2x^3+2x^3)dx=x^4\Big|_0^1=1.$$

2. Скориставшись формулою (27), і враховуючи, що $y^2=x, dx=2ydy$ і $0\le y\le 1$, одержимо:

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} 2xydx+x^2dy=\int\limits_0^1 2\cdot y^2\cdot y\cdot 2ydy+(y^2)^2dy=\int\limits_0^1 (4y^4+y^4)dy=y^5\Big|_0^1=1.$$

На відміну від прикладу 38 (див. стор. 56) в даному випадку одержані однакові значення інтеграла, не дивлячись на те, що лінія інтегрування в кожному окремому випадку була різна. Вийшло це тому, що для даного інтеграла виконується умова незалежності його від шляху інтегрування, тобто $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$. Дійсно, $P(x,y)=2xy, Q(x,y)=x^2$, тоді $\frac{\partial P}{\partial y}=(2xy)'_y=2x$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}=(x^2)'_x=2x$. Отже, $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$, в той час для інтеграла $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} xydx+(y-x)dy$ (приклад 38) ця умова не виконується, бо $P(x,y)=xy, Q(x,y)=y-x$, тоді $\frac{\partial P}{\partial y}=(xy)'_y=x$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=(y-x)'_x=-1$, тобто $\frac{\partial P}{\partial y}\ne\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Приклад 47. Обчислити

$$\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} \left(x^4+4xy^3\right)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy.$$

Розв'язання. У даному прикладі не задано шлях інтегрування, тому потрібно припустити, що інтеграл не залежить від шляху інтегрування. Перевіримо це.

За умовою $P(x,y)=x^4+4xy^3$, $Q(x,y)=6x^2y^2-5y^4$.

Тоді $\frac{\partial P}{\partial y}=4x\cdot 3y^2=12xy^2$, а $\frac{\partial Q}{\partial x}=6y^2\cdot 2x=12xy^2$. Переконаємося, що $P(x,y), Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні і $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}=12xy^2$.

Як уже відзначалося вище, для обчислення криволінійного інтеграла, який не залежить від контуру інтегрування, треба обрати в якості найвигіднішого шляху інтегрування ламану, яка з`єднує початкову (x_0; y_0) і кінцеву (x_1; y_1) точки, ланки якої паралельні осям координат. У нашому прикладі початковою точкою є A (-2;-1), кінцевою C (3;0). З'єднаємо ці точки ламаною ABC (рис. 3.11).

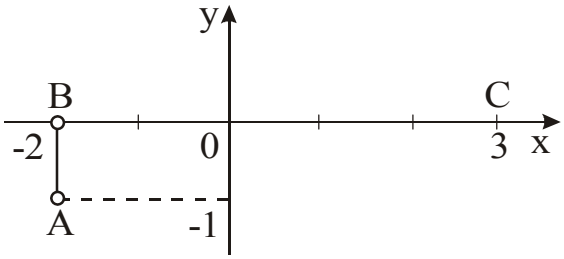


Рисунок 3.11

Тоді

$$\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4+4xy^3)dx+(6x^2y^2-5y^4)dy=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BC}=\int\limits_{-1}^{0}(24y^2-5y^4)dy+\int\limits_{-2}^{3}x^4dx=$$

$$=(8y^3-y^5)\Big|_{-1}^{0}+\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-2}^{3}=8-1+\frac{243}{5}+\frac{32}{5}=7+\frac{275}{5}=7+55=62.$$

Відзначимо, що при обчисленні інтеграла враховано, що на AB: x = -2, dx=0, $-1\le y\le 0$, а на BC: $y=0,\ dy=0,\ -2\le x\le 3$.

Приклад 48. Обчислити

$$\int\limits_{(0;-1)}^{(1;0)} \frac{xdy-ydx}{(x-y)^2}.$$

Розв'язання. Покажемо, що для даного інтеграла виконується умова незалежності його від шляху інтегрування, тобто $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$.

$$P(x,y)=-\frac{y}{(x-y)^2};\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{(x-y)^2+2(x-y)y}{(x-y)^4}=-\frac{x-y+2y}{(x-y)^3}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}.$$

$$Q(x,y)=\frac{x}{(x-y)^2};\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{(x-y)^2-2(x-y)x}{(x-y)^4}=\frac{x-y-2x}{(x-y)^3}=-\frac{x+y}{(x-y)^3}.$$

Оскільки $P(x,y)=-\frac{y}{(x-y)^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{(x-y)^2}$ і їх частинні похідні мають розриви в точках, розташованих на прямій $y = x$ (в цих точках знаменник кожного дробу перетворюється на нуль), тоді початкову й кінцеву точки потрібно з'єднати таким чином, щоб шлях інтегрування не перетинав пряму $y = x$ (рис. 3.12).

Отже, в даному прикладі не можна прямувати від A до С по ламаній AOC, оскільки точка O (0;0) належить прямій $y = x$.

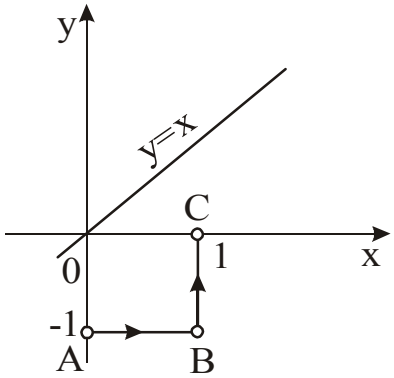


Рисунок 3.12

У якості шляху інтегрування зручно взяти пряму $y = x - 1$, [0;1]. Тоді $dy = dx$. Тому

$$\int\limits_{(0;-1)}^{(1;0)} \frac{xdy - ydx}{(x-y)^2} = \int\limits_0^1 \frac{(x-x+1)dx}{(x-x+1)^2} = \int\limits_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1.$$

Приклад 49. Знайти функцію U за її повним диференціалом

$$du = \left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right)dy.$$

Розв'язання. За умовою $P(x,y) = 3x^2 - 2xy + y^2$, а $Q(x,y) = -x^2 + 2xy - 3y^2$ і тоді $\frac{\partial P}{\partial y} = -2x + 2y$, а $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x + 2y$, тобто $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$. Оскільки $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неперервні в точці *O(0;0),* тоді в якості початкової точки візьмемо початок координат (рис. 3.13).

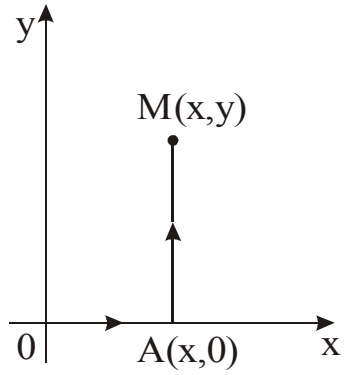


Рисунок 3.13

Скориставшись формулою (30) і враховуючи, що на *OA: y = 0, dy = 0*, $0 \le x \le x$, а на *AM: x = const, dx* = 0, $0 \le y \le y$, знаходимо шукану функцію.

$$U(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right)dy + c = \int\limits_{OA} + \int\limits_{AM} =$$

$$\int\limits_0^x 3x^2 dx - \int\limits_0^y \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right)dy + c = x^3\Big|_0^x - \left(x^2 y - xy^2 + y^3\right)\Big|_0^y + C =$$

$$= x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3 + C.$$

Правильність результату пропонуємо перевірити читачеві самостійно. Нагадаємо лише, що $du(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$.

Приклад 50. Показати, що вираз $\frac{dx+dy}{x+y}$ є повним диференціалом функції $U(x,y)$ і знайти її.

Розв'язання. Вираз $\frac{dx+dy}{x+y}=\frac{1}{x+y}dx+\frac{1}{x+y}dy$,

тому

$$P(x,y)=Q(x,y)=\frac{1}{x+y} \text{ і } \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{1}{(x+y)^2}.$$

Умова $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ виконана. Отже, вираз $\frac{dx+dy}{x+y}$ є повним диференціалом функції $U(x,y)$.

Знайдемо $U(x,y)$ за формулою (30), беручи в якості початкової точку $A(1;0)$, бо в точці $O(0;0)$ функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ і їх частинні похідні $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$ неозначені. Контур інтегрування (рис. 3.14) не повинен перетинати пряму $y=-x$.

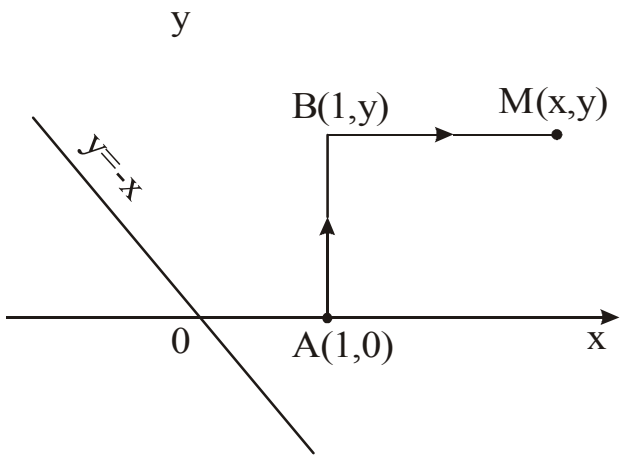


Рисунок 3.14

Маємо

$$U(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{dx+dy}{x+y}+C=\int_{AB}+\int_{BM}=\int_0^y\frac{dy}{1+y}+\int_1^x\frac{dx}{x+y}+C=\ln|1+y|\Big|_0^y+\ln|x+y|\Big|_1^x+C=$$

$$=\ln|1+y|-\ln 1+\ln|x+y|-\ln|1+y|+C=\ln|x+y|+C.$$

бо на AB: $x=1$, $dx=0$, $0\le y\le y$, а на BM: $y=const$, $dy=0$, $1\le x\le x$.

Таким чином, шукана функція:

$$U(x,y)=\ln|x+y|+C.$$

3.7 Додаткові приклади на використання криволінійного інтеграла другого роду

Приклад 51. Знайти роботу силового поля, в кожній точці *M(x,y)* якого напруга (сила, що діє на одиницю маси) $\vec{P} = (x+y)\vec{i} - x\vec{j}$, якщо точка маси *m* описує коло $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, рухаючись по ходу годинникової стрілки.

Розв'язання. Підставляючи в формулу $E = \oint\limits_{-L} Pdx + Qdy$ проекції сили $\vec{F} = m\vec{P}$, що діє на точку: $F_x = m(x+y)$ і $F_y = -mx$, і перетворюючи криволінійний інтеграл на визначений зі змінною *t*, одержимо:

$$E = \oint\limits_{-L} Pdx + Qdy = \oint\limits_{-L} m(x+y)dx - mxdy = \int\limits_{2\pi}^{0} -m(a\cos t + a\sin t)a\sin t dt - ma\cos t \cdot a\cos t dt =$$

$$= -ma^2 \int\limits_{2\pi}^{0} \left(\cos t \sin t + \sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = ma^2 \int\limits_{0}^{2\pi} \left(\sin t \cos t + 1\right)dt = ma^2 \left(\frac{\sin^2 t}{2} + t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi ma^2.$$

Приклад 52. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{\Phi} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ вздовж кола *L*, утвореного від перетину циліндра $x^2 + y^2 = 1$ площиною $z = 1$.

Розв'язання. Циркуляція векторного поля $\vec{\Phi}$ вздовж замкненого контуру *L* є криволінійний інтеграл від вектор-функції

$$\vec{\Phi} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

вздовж замкненого контуру *L*, тобто

$$\oint\limits_L \vec{\Phi} d\vec{r} = \oint\limits_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \qquad (31)$$

Запишемо параметричні рівняння кола *L: x=cost, y= sint*, $z = 1$, $0 \le t \le 2\pi$.

Оскільки *dx = -sintdt, dy = costdt, dz* = 0 і $0 \le t \le 2\pi$, тоді за формулою (31) одержимо:

$$\oint\limits_L \left(xdx + 2ydy + zdz\right) = \int\limits_0^{2\pi} (-\cos t \sin t + 2\sin t \cos t + 0)dt = \int\limits_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = \frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Отже, циркуляція вектора $\vec{\Phi} = x\vec{i} + 2y\vec{j} + z\vec{k}$ вздовж кола *L* дорівнює нулю.

Питання для самоперевірки

1.Що називається криволінійним інтегралом $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ вздовж заданого контуру?

2.Сформулювати правило обчислення криволінійного інтеграла за координатами для випадку, коли лінія (контур) інтегрування задана параметричними рівняннями.

3. Як обчислюється криволінійний інтеграл другого роду, якщо лінія інтегрування задана у вигляді *y = f(x)* або $x = \varphi(y)$?

4. Як впливає напрямок інтегрування на величину криволінійного інтеграла?

5. Як установлюється додатний напрямок у випадку замкненого контуру інтегрування?

6. Сформулювати і довести формулу Гріна.

7. Що означає незалежність криволінійного інтеграла від лінії інтегрування?

8. Показати, що незалежність інтеграла від контуру інтегрування еквівалентна рівності його нулю вздовж будь-якого замкненого контуру.

9. Указати раціональний спосіб обчислення криволінійного інтеграла від повного диференціала. Навести відповідну формулу.

10. Як визначається робота при русі точки в силовому полі?

11. Пригадати і записати формулу для обчислення площі за допомогою криволінійного інтеграла.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dy$, де L – контур чотирикутника з вершинами (указаними в порядку обходу в точках $O(0;0)$, $A(2;0)$, $B(4;4)$ і $C(0;4)$).

Відповідь: $37\frac{1}{3}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx$, де L – дуга параболи $y = x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(2;4)$.

Відповідь: $-\frac{56}{15}$.

3. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx - xdy$, де L – еліпс $x = acost$, $y = bsint$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

Відповідь: $-2\pi ab$.

4. Обчислити $\int\limits_{(1;2)}^{(2;3)} ydx + xdy$.

Відповідь: 8.

5. Обчислити $\int\limits_{(3;4)}^{(5;12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$.

Відповідь: $\ln\frac{13}{5}$.

6. Обчислити $\int\limits_{AB} \left(x^2 + y^2\right)dx + xydy$, якщо шлях від $A(1;1)$ до $B(3;4)$ – відрізок прямої.

Відповідь: $11\frac{1}{6}$.

7. Обчислити $\int\limits_{AO} xydx + yzdy + zxdz$, де OA – чверть кола $x = cost$, $y = sint$, $z = 1$, що пробігається в напрямку зростання параметра t.

Відповідь: $\frac{1}{6}$.

8. Обчислити $\int\limits_{(0;0)}^{(\pi;\pi)} (x+y)dx + (x-y)dy$ вздовж різних контурів, що з'єднують точки $O(0;0)$ і $M(\pi;\pi)$:

а) на прямій OM;

б) на кривій $y = x + sinx$;

в) на ламаній OPM, де $P(\pi;0)$;

г) на параболі $y = \frac{x^2}{\pi}$.

Відповідь: π^2 (в усіх випадках).

9. Обчислити $\int\limits_L \left(1-x^2\right)ydx + x\left(1+y^2\right)dy$, якщо контур інтегрування $x^2 + y^2 = R^2$.

Відповідь: $\frac{\pi R^2}{2}$.

10. Довести, що величина інтеграла $\int\limits_L (2xy - y)dx + x^2 dy$, де L – замкнений контур, дорівнює площі області, що обмежена цим контуром.

Вказівка. Скористайтесь формулою Гріна.

11.Обчислити за допомогою формули Гріна

$$\oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}dx + y\left(xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right)dy,$$

де C – контур прямокутника $1 \le x \le 4$, $0 \le y \le 2$.

Відповідь: 8.

12. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла площу фігури, обмеженої лінією $x = acost$, $y = bsint$.

Відповідь: πab.

13. За допомогою криволінійного інтеграла обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = x^2$, $x = y^2$ і $8xy = 1$ (мається на увазі площа, що примикає до початку координат).

Відповідь: $\frac{1+3\ln 2}{24} \approx 0{,}13$.

14. Проекції сили на осі координат задані формулами $P(x,y) = F_x = 2xy$ і $Q(x,y) = F_y = x^2$.

Показати, що робота сили при переміщенні точки залежить лише від початкового і кінцевого її прикладання і не залежить від форми шляху. Обчислити величину роботи при переміщенні з точки $M_1(1;0)$ в точку $M_2(0;3)$.

Відповідь: 0.

15. Знайти функцію *U(x,y)* за її повним диференціалом $\frac{(x+2y)dx+ydy}{(x+y)^2}$.

Відповідь: $U(x,y)=\ln|x+y|-\frac{y}{x+y}+c$.

16. Обчислити $\int\limits_{(0;0)}^{(\pi;2\pi)} -x\cos y dx + y\sin x dy$ вздовж відрізка, який з'єднує точки $O(0;0)$ і $M(\pi;2\pi)$.

Відповідь: 4π.

17. Обчислити $\int\limits_L (2a-y)dx-(a-y)dy$, де L – перша (від початку координат) арка циклоїди *x = a(t-sint), y = a(1-cost).*

Відповідь: πa^2.

18. Обчислити $\int\limits_L (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, де L – коло $x^2+y^2=ax$.

Вказівка. Інтегрування виконується в додатному напрямку. Обчислення виконати двома способами: а) безпосередньо; б) за допомогою формули Гріна.

Відповідь: $-\frac{\pi a^3}{8}$.

19. Довести, що інтеграл $\int\limits_L (yx^3+e^y)dx+(xy^3xe^y-2y)dy$ дорівнює нулю, якщо L – замкнена лінія, симетрична відносно початку координат.

20. Знайти функцію *U(x,y)* за її повним диференціалом

$$du=(2x\cos y-y^2\sin x)dx+(2y\cos x-x^2\sin y)dy.$$

Відповідь: $U(x,y)=x^2\cos y+y^2\cos x+C$.

21. Знайти функцію *U(x,y)* за її повним диференціалом

$$du=\frac{2x\left(1-e^y\right)}{\left(1+x^2\right)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy.$$

Відповідь: $U(x,y)=\frac{e^y-1}{1+x^2}+y+c$.

22. Обчислити $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+y\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x\right)dy$.

Відповідь: $1+\sqrt{2}$.

23. Обчислити $\int\limits_C (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, де C – виток гвинтової лінії

$\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=a\sin t \\ z=bt. \end{cases}$, що відповідає зміні параметра t від 0 до 2π.

Відповідь: $-2\pi\, a(a-b)$.

24. Обчислити $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$, де L – відрізок прямої від точки (1;1;1) до точки (2;3;4).

Відповідь: 13.

25. У кожній точці площини на матеріальну точку діє сила $\vec{F}$, проекції якої на осі координат дорівнюють $F_x = xy$ *і* $F_y = x + y$. Обчислити роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні точки із початку координат в точку (1;1) вздовж дволанкової ламаної, сторони якої паралельні осям координат (два випадки).

Відповідь: $\frac{3}{2}$ і 1.

3.8 Криволінійний інтеграл першого роду

Нехай функція *f(x,y)* визначена і неперервна в точках дуги *AB* гладкої кривої *L*, рівняння якої $y = \varphi(x)$ $(a \le x \le b)$.

Розіб'ємо дугу точками $A = A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n = B$. Нехай ΔS_k - довжина дуги $A_{к-1}A_к$. На кожній елементарній дузі виберемо довільну точку $M_к(\xi_k;\eta_k)$ і помножимо значення функції $f(\xi_k;\eta_k)$ в цій точці на довжину відповідної дуги ΔS_k.

Означення. Інтегральною сумою для функції *f(x,y)* вздовж довжини дуги *AB* називається сума виду:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\,\Delta S_k .$$

Означення. Якщо існує скінченна границя інтегральної суми при $\max \Delta S_k \to 0$ і вона не залежить ні від способу розбиття кривої *AB,* ні від вибору точок $M_к(\xi_k;\eta_k)$, тоді її називають криволінійним інтегралом першого роду від функції *f(x,y).*

Отже, за означенням

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \lim_{\max \Delta S_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k;\eta_k)\,\Delta S_k ,$$

де *ds* – диференціал дуги.

Криволінійний інтеграл 1-го роду обчислюється за формулою

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx . \qquad (32)$$

Якщо крива *L* задана параметричними рівняннями: *x = x(t), y = y(t)* $(t_1 \le t \le t_2)$, тоді

$$\int\limits_L f(x,y)ds = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(x(t)y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt . \qquad (33)$$

Аналогічно визначається і обчислюється криволінійний інтеграл першого роду від функції трьох змінних *f(x,y,z)* вздовж просторової кривої. Якщо просторова крива задана рівняннями *x = x(t), y = y(t), z = z(t)* $(t_1 \le t \le t_2)$, тоді

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t)y(t)z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z`(t))^2}\,dt. \qquad (34)$$

Якщо $f(x,y) > 0$, тоді криволінійний інтеграл першого роду, тобто $\int_L f(x,y)ds$, являє собою масу кривої L, що має змінну лінійну густину $\gamma = f(x,y)$ (в цьому полягає фізичне тлумачення криволінійного інтеграла першого роду).

Основні властивості криволінійного інтеграла першого роду

1. Криволінійний інтеграла першого роду не залежить від напрямку шляху інтегрування

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds.$$

2. $\int_L (f_1(x,y) \pm f_2(x,y))ds = \int_L f_1(x,y)ds \pm \int_L f_2(x,y)ds$.

3. $\int_L cf(x,y)ds = c\int_L f(x,y)ds$, де $c = const$.

4. Якщо контур інтегрування L розбити на дві частини L_1 і L_2, таким чином, що $L = L_1 \bigcup L_2$, тоді

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{L_1} f(x,y)ds + \int_{L_2} f(x,y)ds.$$

Приклади

Приклад 53. Обчислити $\int_L (x-y)ds$, де L – відрізок прямої від точки $O(0;0)$ до точки $A(4;3)$.

Розв'язання. Складемо рівняння прямої OA. Оскільки ця пряма проходить через початок координат, тоді її рівняння можна записати у вигляді $y=кx$. Оскільки точка $A(4;3)$ належить прямій OA, тоді координати точки A задовольняють рівнянню $y=кx$. Тому, підставляючи в це рівняння координати точки A, одержимо $3 = 4к$, звідки $к = \frac{3}{4}$. Отже, рівняння прямої OA: $y = \frac{3}{4}x$.

Враховуючи далі, що $y' = \frac{3}{4}$ і $0 \le x \le 4$, за формулою (32) знаходимо

$$\int_L (x-y)ds = \int_0^4 \left(x - \frac{3}{4}x\right)\sqrt{1+\frac{9}{16}}dx = \frac{5}{16}\int_0^4 xdx = \frac{5}{16}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^4 = \frac{5}{2}.$$

Приклад 54. Обчислити $\int_L (x+y)ds$, де L – контур трикутника OAB з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$ і $B(0;1)$ (рис. 3.15).

Розв'язання.

На прямій OA: $y = 0$, $y' = 0$, $0 \le x \le 1$;

на прямій AB: $y = 1 - x$, $y' = -1$, $0 \le x \le 1$;

на прямій OB: $x = 0$, $x' = 0$, $0 \le y \le 1$.

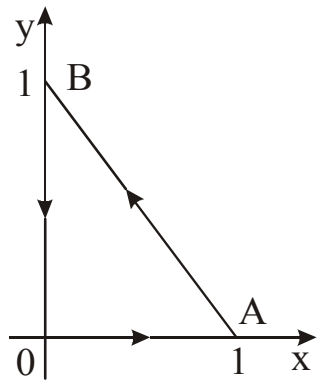


Рисунок 3.15

Тому згідно з властивостями (4) і (1) криволінійного інтеграла першого роду і формулою (32), будемо мати:

$$\int_L (x+y)ds = \int_{OA} (x+y)ds + \int_{AB} (x+y)ds + \int_{BO} (x+y)ds =$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1+0}dx + \int_0^1 (x+1-x)\sqrt{1+1}dx + \int_0^1 y\sqrt{1+0}dy = \int_0^1 xdx + \sqrt{2}\int_0^1 dx + \int_0^1 ydy =$$

$$= \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \sqrt{2}x\Big|_0^1 + \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Приклад 55. Обчислити $\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$, де L – дуга розгортки кола $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ і $0 \le t \le 2\pi$.

Розв'язання. Маємо

$$x'_t = a(-\sin t + \sin t + t\cos t) = at\cos t;$$

$$y'_t = a(\cos t - \cos t + t\sin t) = at\sin t.$$

Тоді

$$(x'_t)^2 + (y'_t)^2 = a^2t^2\cos^2 t + a^2t^2\sin^2 t = a^2t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2t^2.$$

Скориставшись далі формулою (33), одержимо:

$$\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(\cos t + t\sin t)^2 + a^2(\sin t - t\cos t)^2} \cdot \sqrt{a^2t^2dt} =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} t\sqrt{\cos^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t}dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\cdot tdt = \frac{a^2}{2}\cdot\left.\frac{2(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{a^2}{3}\left((1+4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right).$$

Приклад 56. Обчислити $\int\limits_L (x+z)ds$ де L – дуга кривої $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$ і $0 \le t \le 1$.

Розв'язання. Спочатку знаходимо $x'_t = 1$, $y'_t = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot 2t = 3\sqrt{2}t$, $z'_t = 3t^2$.

Тоді $\left(x'_t\right)^2 + \left(y'_t\right)^2 + \left(z'_t\right)^2 = 1 + 18t^2 + 9t^4$.

Далі, в силу формули (34) маємо:

$$\int\limits_L (x+z)ds = \int\limits_0^1 \left(t+t^3\right)\sqrt{1+18t^2+9t^4}\,dt = \frac{1}{36}\int\limits_0^1 \left(1+18t^2+9t^4\right)^{\frac{1}{2}} d\left(1+18t^2+9t^4\right) =$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \frac{2\left(1+18t^2+9t^4\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{54}\left(28^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{1}{54}\left(56\sqrt{7} - 1\right).$$

Приклад 57. Обчислити $\int\limits_L (x-y)ds$, де L – коло $x^2 + y^2 = ax$.

Розв'язання. Перейдемо до полярних координат. Рівняння кола $x^2 + y^2 = ax$ в полярних координатах має вигляд $r = a\cos\varphi$. Оскільки $r'_\varphi = -a\sin\varphi$ і $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, тоді

$$\int\limits_L (x-y)ds = \int\limits_\alpha^\beta \left(r\cos\varphi - r\sin\varphi\right)\sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}\,d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\left(\cos\varphi - \sin\varphi\right)\sqrt{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi\left(\cos\varphi - \sin\varphi\right) \cdot a\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi =$$

$$= a^2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2} - \sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi = a^2\left(\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi - \frac{\sin^2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi a^2}{2}.$$

Приклад 58. Обчислити $\int\limits_L y\,ds$, де L – дуга параболи $y^2 = 2x$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(4;\sqrt{8})$.

Розв'язання. У цьому прикладі зручно лінію задати у вигляді $x = \frac{y^2}{2}$. Тоді $x'_y = y$ і отримаємо:

$$\int_L yds = \int_c^d y\sqrt{1+\left(x_t^{`}\right)^2}dy = \int_0^{\sqrt{8}} y\sqrt{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{8}}\left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 2ydy =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2\left(1+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt{8}} = \frac{1}{3}\left(9^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}.$$

Пропонуємо читачеві обчислити даний інтеграл, вважаючи y функцією від x, тобто за формулою (32).

3.9 Застосування криволінійного інтеграла першого роду до розв'язання задач механіки

Нехай L є плоска крива, яка має змінну лінійну густину $\gamma(x,y)$, тоді:

а) маса m кривої L обчислюється за формулою

$$m = \int_L \gamma(x,y)ds, \tag{35}$$

б) статичні моменти дуги кривої відносно осей координат, знаходять за формулами

$$M_x = \int_L \gamma(x,y)yds, \tag{36}$$

$$M_y = \int_L \gamma(x,y)xds; \tag{37}$$

в) координати центра ваги дуги кривої обчислюються за формулами:

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \tag{38}$$

$$y_c = \frac{M_x}{m}; \tag{39}$$

г) моменти інерції дуги кривої відносно осей координат і початку координат знаходяться за формулами:

$$I_x = \int_L y^2\gamma(x,y)ds, \tag{40}$$

$$I_y = \int_L x^2\gamma(x,y)ds, \tag{41}$$

$$I_0 = \int_L \left(x^2+y^2\right)\gamma(x,y)ds. \tag{42}$$

Приклади

Приклад 59. Знайти масу дуги кривої $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $z = \frac{1}{3}t^3$ $(0 \le t \le 1)$, лінійна густина якої змінюється за законом $\gamma = \sqrt{2y}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $x_t' = 1$, $y_t' = t$, $z_t' = t^2$ і $0 \le t \le 1$ за формулою (35) маємо:

$$m=\int_L \sqrt{2y}ds=\int_0^1 \sqrt{2\cdot\frac{1}{2}t^2}\cdot\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2+\left(z_t'\right)^2}dt=\int_0^1 t\sqrt{1^2+t^2+t^4}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{\left(t^2+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}d\left(t^2+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2+\frac{1}{2}}{2}\cdot\sqrt{t^4+t^2+1}+\frac{3}{8}\ln\left(t^2+\frac{1}{2}+\sqrt{t^4+t^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{1}{8}\left(3\sqrt{3}-1+\frac{3}{2}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\right).$$

Приклад 60. Знайти координати центра ваги однорідної дуги циклоїди *x = a(t-sint), y = a(1-cost)* $(0\le t\le\pi)$.

Розв'язання. В силу формул (38), (39):

$$x_c=\frac{M_y}{m};$$

$$y_c=\frac{M_x}{m}.$$

Обчислимо спочатку *m,* M_x і M_y, враховуючи, що $\gamma(x,y)=1$, $x_t'=a(1-\cos t)$, $y_t'=a\sin t$:

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=$$

$$=a^2(2-2\cos t)=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

Маємо:

$$m=\int_L ds=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt=\int_0^{\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{\pi}=4a.$$

$$M_x=\int_L yds\int_{t_1}^{t_2}y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt=\int_0^{\pi}a(1-\cos t)\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a^2\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=2a^2\int_0^{\pi}2\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}dt=4a^2\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt=4a^2\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt-4a^2\int_0^{\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=a^2\left(-8\cos\frac{t}{2}+8\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi}=a^2\left(8-\frac{8}{3}\right)=\frac{16}{3}a^2.$$

$$M_y=\int_L xds\int_{t_1}^{t_2}x(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt=\int_0^{\pi}a(t-\sin t)\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a^2\int_0^{\pi}(t-\sin t)\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=2a^2\int_0^{\pi}t\sin\frac{t}{2}-2a^2\int_0^{\pi}\sin t\sin\frac{t}{2}dt=\left|\begin{matrix}u=t & du=dt\\ dv=\sin\frac{t}{2}dt & v=-2\cos\frac{t}{2}\end{matrix}\right|=$$

$$=2a^2\left(-2t\cos\frac{t}{2}+2\int\cos\frac{t}{2}dt\right)\Bigg|_0^{\pi}-4a^2\int_0^{\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}dt=4a^2\left(-t\cos\frac{t}{2}+2\sin\frac{t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi}-$$

$$-8a^2\frac{\sin^3\frac{t}{2}}{3}\Bigg|_0^{\pi}=8a^2-\frac{8}{3}a^2=\frac{16}{3}a^2.$$

Таким чином, $x_c=\frac{4}{3}a$ і $y_c=\frac{4}{3}a$.

Приклад 61. Знайти моменти інерції відносно осей координат відрізка однорідної прямої $z = -2y + 1$, розташованого між осями координат у площині yOz.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину прямої з осями координат. При $y = 0$ $z = 1$, при $z = 0$ $y=\frac{1}{2}$. Отже, $A(0;1)$ і $B(\frac{1}{2};0)$ – шукані точки.

У силу формул (40) і (41):

$$I_y=\int_{AB}z^2\gamma(y,z)ds;$$

$$I_z=\int_{AB}y^2\gamma(y,z)ds.$$

Оскільки $z=-2y+1$, тоді $z_y'=-2$ і $ds=\sqrt{1+\left(z_y'\right)^2}dy=\sqrt{1+4}dy=\sqrt{5}dy$.

Враховуючи також, що $\gamma(x,y)=1$, бо пряма однорідна, одержимо:

$$I_y=\int_0^{\frac{1}{2}}(-2y+1)^2\sqrt{5}dy=-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\frac{(-2y+1)^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{6}(0-1)=\frac{\sqrt{5}}{6},$$

$$I_z=\int_0^{\frac{1}{2}}y^2\sqrt{5}dy=\sqrt{5}\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{3}\left(\frac{1}{8}-0\right)=\frac{\sqrt{5}}{24}.$$

Отже, $I_y=\frac{\sqrt{5}}{6}$ і $I_z=\frac{\sqrt{5}}{24}$.

Приклад 62. Знайти масу першого витка гвинтової лінії $x= a\cos t$, $y=a\sin t$, $z = bt$, якщо густина γ в кожній її точці пропорційна квадрату довжини радіус – вектора цієї точки.

Розв'язання. Згідно з формулою (35) маса дуги просторової кривої

$$m=\int\gamma(x,y,z)ds.$$

За умовою задачі $\gamma = kr^2 = k(x^2 + y^2 + z^2)$. У точках гвинтової лінії $\gamma = k(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2) = k(a^2 + b^2t^2)$. Першому витку гвинтової лінії відповідає зміна параметра t від 0 до 2π.

Враховуючи також, що диференціал дуги

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2}\,dt = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt,$$

остаточно будемо мати:

$$m = \int_0^{2\pi} k(a^2 + b^2t^2)\cdot\sqrt{a^2 + b^2}\,dt = k\sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)dt =$$

$$= k\sqrt{a^2 + b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8\pi^3 b^2}{3}\right).$$

Приклад 63. Знайти момент інерції відносно початку координат дуги кривої $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$ між точками, для яких $t = 0$ і $t = 1$, якщо густина γ в кожній її точці дорівнює $\frac{1}{y^2}$.

Розв'язання. За формулою (42)

$$I_0 = \int_L (x^2 + y^2)\gamma(x, y)ds.$$

Оскільки $x = \frac{1}{3}t^3$, $y = \frac{1}{2}t^2$, то $x_t' = t^2$, $y_t' = t$ і

$$ds = \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \sqrt{t^4 + t^2}\,dt = t\sqrt{t^2 + 1}dt,\ \gamma = \frac{1}{y^2} = \frac{4}{t^4}.$$

Тоді

$$I_0 = \int_0^1\left(\frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{4}t^4\right)\cdot\frac{4}{t^4}\cdot t\sqrt{t^2 + 1}dt = \int_0^1\left(\frac{4}{9}t^2 + 1\right)\sqrt{t^2 + 1}\cdot tdt = \left|\begin{array}{c} t^2 + 1 = u^2 \\ 2tdt = 2udu \\ tdt = udu \\ u_н = 1;\quad u_b = \sqrt{2} \end{array}\right| =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{9}(u^2 - 1) + 1\right)\cdot u\cdot udu = \int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{9}u^4 + \frac{5}{9}u^2\right)du = \frac{1}{9}\left(\frac{4}{5}u^5 + \frac{5}{3}u^3\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{16}{5}\sqrt{2} + \frac{10}{3}\sqrt{2} - \frac{4}{5} - \frac{5}{3}\right) = \frac{98\sqrt{2} - 37}{135}.$$

Питання для самоперевірки

1. Що називається криволінійним інтегралом $\int_L f(x, y)ds$ першого роду?

2. Записати формули для обчислення криволінійного інтеграла першого роду.

3. Сформулювати властивості криволінійного інтеграла першого роду.

4. Чи залежить криволінійний інтеграл першого роду від напрямку шляху інтегрування?

5. У чому полягає фізичне тлумачення криволінійного інтеграла першого роду?

6. За якими формулами знаходяться статичні моменти дуги кривої відносно координатних осей і координати центра ваги?

7. Записати формули, за якими знаходяться моменти інерції дуги кривої відносно осей координат і початку координат.

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити $\int\limits_L \frac{ds}{x-y}$, де L – відрізок прямої $x - 2y = 4$ між точками $A(0;-2)$ і $B(4;0)$.

Відповідь: $\sqrt{5}\ln 2$.

2. Обчислити $\int\limits_L xyds$, де L – контур прямокутника з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(4;0)$, $B(4;2)$ і $C(0;2)$.

Відповідь: 24.

3. Обчислити $\int\limits_L \left(2z - \sqrt{x^2+y^2}\right)ds$, де L – перший виток конічної гвинтової лінії $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$.

Відповідь: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\left(1+2\pi^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right]$.

4. Обчислити $\int\limits_L x\sqrt{x^2-y^2}ds$, де L – лінія, задана рівнянням

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right)\ (x \ge 0).$$

Відповідь: $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

Вказівка. Перейти до полярних координат. У полярних координатах $ds = \sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}d\varphi$.

5. Обчислити $\int\limits_L \frac{x^3}{y^2}ds$, де L – дуга кривої $xy = 1$ між точками $A(1;1)$ і $B\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

Відповідь: $\frac{1}{6}\left(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2}\right)$.

6. Обчислити $\int\limits_L xyds$, де L – контур квадрата $|x|+|y|=2$.

Відповідь: 0.

7. Обчислити $\int\limits_L yds$, де L – дуга параболи $y^2=2px$, яка відтинається параболою $x^2=2py$.

Відповідь: $\frac{p^2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$.

8. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^n ds$, де L – коло $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

Відповідь: $2\pi a^{2n+1}$.

9. Обчислити $\int\limits_L \frac{x}{y}ds$, де L – дуга параболи $y^2=2x$ між точками $M_1\left(1;\sqrt{2}\right)$ і $M_2(2;2)$.

Відповідь: $\frac{1}{6}\left(5\sqrt{5}-3\sqrt{3}\right)$.

10. Обчислити $\int\limits_L \left(x^2+y^2+z^2\right)ds$, де L – дуга кривої $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$ від точки $A(a;0;0)$ до точки $B(a;0;2\pi b)$.

Відповідь: $\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}\left(3a^2+4\pi^2b^2\right)$.

11. Обчислити $\int\limits_L \left(x^5+8xy\right)ds$, де L – дуга кривої $4y=x^4$ між точками з абсцисами x_1=0 і x_2=1.

Відповідь: $\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

12. Обчислити $\int\limits_L y\sqrt{y^2+1}ds$, де L – дуга кривої $x=\ln y$ між точками, для яких y_1=1, y_2=4.

Відповідь: 24.

13. Обчислити $\int\limits_L (2x+y)ds$, де L – контур трикутника OAB з вершинами в точках O(0;0), A(1;0) і B(0;2).

Відповідь: $3+2\sqrt{5}$.

14. Обчислити $\int\limits_L \frac{y}{x+3z}ds$, якщо L – дуга лінії $x=t$, $y=\frac{t^3}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{t^3}{3}$ від точки $O(0;0;0)$ до точки $A\left(\sqrt{2};\sqrt{2};\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$.

15. Знайти масу ланцюгової лінії $y=ach\frac{x}{a}$ між точками з абсцисами $x_1=0$ і $x_2=a$, якщо густина лінії в кожній її точці обернено пропорційна ординаті точки, причому густина в точці $(0;a)$ дорівнює δ.

Відповідь: δa.

Вказівка. $ch\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

16. Знайти масу першого витка гвинтової лінії $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=1$, якщо густина в кожній її точці дорівнює радіусу – вектору цієї точки.

Відповідь: $\sqrt{2}\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right)$.

17. Знайти координати центра ваги півкола $y=\sqrt{9-x^2}$, вважаючи, що його густина дорівнює одиниці.

Відповідь: $x_c=0$, $y_c=\frac{6}{\pi}$.

18. Знайти момент інерції відносно осі абсцис першої арки циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, якщо густина її в кожній точці дорівнює одиниці.

Відповідь: $\frac{256}{15}a^3$.

19. Знайти масу дуги півкола $x=\cos t$, $y=\sin t$ $(0\le t\le\pi)$, якщо лінійна густина її в точці $M(x,y)$ дорівнює y.

Відповідь: 2.

20. Знайти масу всієї лемніскати $r^2=a^2\cos 2\varphi$, якщо її густина $\gamma=kr$.

Відповідь: $k\pi a^2$.

4 Поверхневий інтеграл першого роду

4.1 Основні означення поверхневого інтеграла першого роду

Означення. Поверхня називається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична площина, положення якої неперервно змінюється разом із точкою дотику.

Гладкими є, наприклад, площина, сфера, еліпсоїд, параболоїд. Поверхня називається кусково-гладкою, якщо вона складається зі скінченого числа гладких частин, що примикають одна до одної по кусково-гладких, або просто гладких лініях. Найпростішим прикладом кусково-гладкої поверхні є поверхня будь-якого багатогранника.

Нехай функція $F(M)=F(x,y,z)$ визначена і неперервна в кожній точці $M(x,y,z)$ гладкої поверхні σ, натягнутої на контур L. Розіб'ємо поверхню σ кусково-гладкими кривими довільним чином на частини $\sigma_i (i=1,2,\ldots,n)$, площі яких позначимо $\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\ldots,\Delta\sigma_i,\ldots,\Delta\sigma_n$ (рис. 4.1). Виберемо в кожній з частин σ_i довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, обчислимо значення функції $F(M_i)$ у кожній точці M_i і складемо інтегральну суму

$$F(M_1)\Delta\sigma_1+F(M_2)\Delta\sigma_2+\ldots+F(M_i)\Delta\sigma_i+\ldots+F(M_n)\Delta\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}F(M_i)\Delta\sigma_i. \qquad (43)$$

Означення. Поверхневим інтегралом першого роду від функції $F(x,y,z)$ по поверхні σ називається границя інтегральної суми (43) за умови, що найбільший з діаметрів $d(\sigma_i)$ прямує до нуля

$$\iint_{\sigma} F(x,y,z)d\sigma=\lim_{\max\Delta\sigma_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(x_i,y_i,z_i)\Delta\sigma_i. \qquad (44)$$

Ця границя не залежить ні від способу розбиття поверхні σ на частини σ_i, ні від вибору точок M_i в кожній з них.

Поверхневий інтеграл першого роду має властивості, які співпадають з властивостями криволінійного інтеграла першого роду.

4.2 Властивості поверхневого інтеграла першого роду

1. Сталу величину можна виносити за знак інтеграла

$$\iint_{\sigma} cF(x,y,z)d\sigma=c\iint_{\sigma} F(x,y,z)d\sigma.$$

2. Інтеграл від алгебраїчної суми або різниці скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі або різниці інтегралів від кожної функції

$$\iint_{\sigma}(F_1(x,y,z)\pm F_2(x,y,z)\pm\ldots\pm F_k(x,y,z))d\sigma=$$

$$=\iint_{\sigma}F_1(x,y,z)d\sigma\pm\iint_{\sigma}F_2(x,y,z)d\sigma\pm\ldots\pm\iint_{\sigma}F_k(x,y,z)d\sigma.$$

3. Якщо поверхня σ розбита на скінченну кількість частин $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$, що не перетинаються, то поверхневий інтеграл по поверхні σ дорівнює сумі інтегралів по кожній частині поверхні, тобто

$$\iint_{\sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint_{\sigma_1} F(x,y,z)d\sigma_1 + \iint_{\sigma_2} F(x,y,z)d\sigma_2 + \ldots + \iint_{\sigma_k} F(x,y,z)d\sigma_k .$$

4. Якщо підінтегральна функція $F(x,y,z) \geq 0$, то $\iint_{\sigma} F(x,y,z)d\sigma \geq 0$.

4.3 Обчислення поверхневого інтеграла першого роду

Обчислення поверхневого інтеграла першого роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції поверхні σ на одну з координатних площин.

Якщо будь-яка пряма, паралельна осі Oz перетинає поверхню σ не більш ніж в одній точці, це означає, що поверхня задана рівнянням $z = z(x,y)$і проектується на площину xOy в область D (рис. 4.1) Якщо функція $z = z(x,y)$ і її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ неперервні в замкнутій області D, то елемент площі поверхні визначається формулою

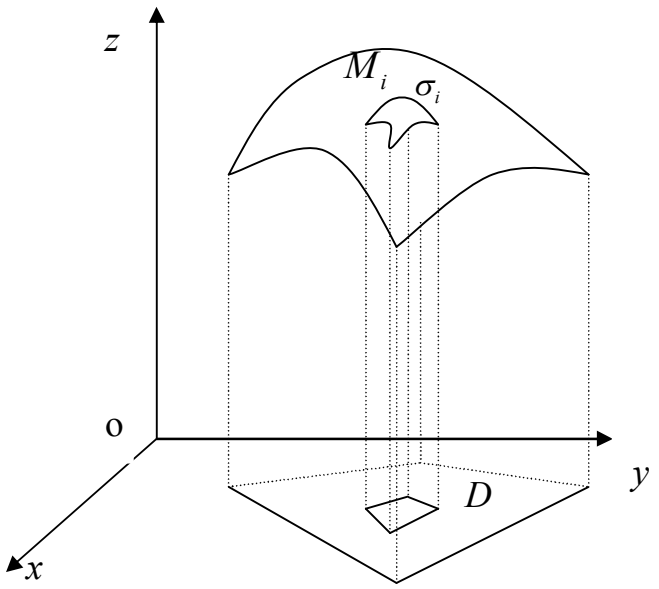


Рисунок 4.1

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy . \qquad (45)$$

Таким чином поверхневий інтеграл першого роду перетворюється на подвійний інтеграл

$$\iint_{\sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} F\left[x,y,z(x,y)\right]\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy . \qquad (46)$$

Аналогічно записуються формули, що виражають за відповідних умов інтеграл по поверхні σ через подвійні інтеграли за її проекціями на інші координатні площини.

Якщо поверхня задана рівняння $y = y(x,z)$ і проектується на площину xOz в область D_1, тоді

$$\iint_{\sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_1} F\left[x, y(x,z), z\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz. \qquad (47)$$

Якщо поверхня задана рівнянням $x = x(y,z)$, то

$$\iint_{\sigma} F(x,y,z)d\sigma = \iint_{D_1} F\left[x(y,z), y, z\right]\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz. \qquad (48)$$

При обчисленні інтеграла по поверхні складнішого вигляду потрібно попередньо розбити цю поверхню на частини вказаного вигляду.

4.4 Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду

1. Поверхневий інтеграл першого роду є масою поверхні σ, що має змінну поверхневу густину $\mu = \mu(x,y,z)$

$$m = \iint_{\sigma} \mu\left(x,y,z\right)d\sigma. \qquad (49)$$

Якщо поверхня однорідна, $\mu = const$.

2. Застосування поверхневого інтеграла першого роду.

2.1 Якщо підінтегральна функція $F(x,y,z)=1$, тоді поверхневий інтеграл дорівнює площі поверхні σ.

$$S = \iint_{\sigma} d\sigma. \qquad (50)$$

2.2 Якщо маса в кожній точці поверхні σ розподілена неперервно з густиною $\mu = \mu(x,y,z)$, тоді статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} поверхні σ відносно координатних площин xOy, xOz, yOz мають вигляд:

$$M_{xy} = \iint_{\sigma} z\mu\, d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_{\sigma} y\mu\, d\sigma, \quad M_{yz} = \iint_{\sigma} x\mu\, d\sigma. \qquad (51)$$

2.3 Координати центра ваги поверхні σ мають вигляд:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m}, y_c = \frac{M_{xz}}{m}, z_c = \frac{M_{xy}}{m}. \qquad (52)$$

2.4 Моменти інерції поверхні σ відносно початку координат і осей координат виражаються за допомогою формул:

$$\begin{aligned} I_o &= \iint_{\sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mu d\sigma, \; I_x = \iint_{\sigma}\left(y^2+z^2\right)\mu d\sigma, \\ I_y &= \iint_{\sigma}\left(x^2+z^2\right)\mu d\sigma, \; I_z = \iint_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)\mu d\sigma. \end{aligned} \qquad (53)$$

Приклади

Приклад 64. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma$, де σ – частина площини $6x+4y+3z=12$, що лежить у першому октанті.

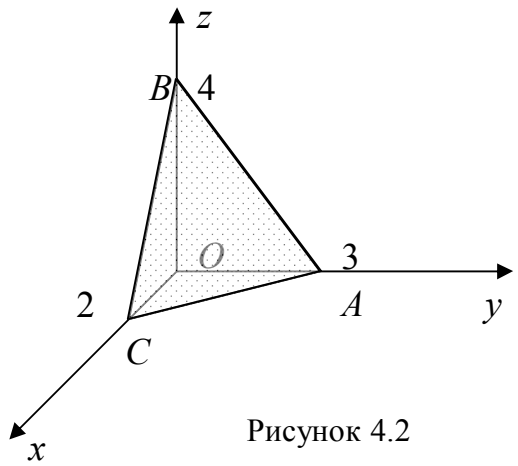


Рисунок 4.2

Розв'язання Зведемо поверхневий інтеграл першого роду до подвійного інтегралу по плоскій області D в площині xOy. Для цього спроектуємо $\sigma: 6x+4y+3z=12$ на площину xOy. Одержимо ΔAOC, який і буде областю D, він обмежений прямими $x=0, y=0$ та $y=\frac{6-3x}{2}$ (рис. 4.2). Щоб знайти елемент $d\sigma$ виразимо z як функцію від x і y з рівняння поверхні $6x+4y+3z=12$.

Отримаємо $z=4-2x-\frac{4}{3}y$. Тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=-2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{4}{3}$. Звідси

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+(-2)^2+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy.$$

Врахуємо формулу (46), де $F(x,y,z(x,y))=z+2x+\frac{4}{3}y=4-2x-\frac{4}{3}y+2x+\frac{4}{3}y=4$.

Таким чином,

$$\iint\limits_{\sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma=\iint\limits_{D}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy=\frac{4\sqrt{61}}{3}\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{\frac{6-3x}{2}}dy=$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\int\limits_0^2 dx\, y\Big|_0^{\frac{6-3x}{2}}=\frac{4\sqrt{61}}{3}\int\limits_0^2\frac{6-3x}{2}dx=\frac{2\sqrt{61}}{3}\left(6x-3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=4\sqrt{61}.$$

Отже, відповідь $\iint\limits_{\sigma}\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)d\sigma=4\sqrt{61}$.

Приклад 65. Обчислити $\iint\limits_{\sigma} z\,d\sigma$, де σ – частина конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$, $1\le z\le 2$.

Розв'язання. Задана поверхня проектується на площину xOy в область D, що є кільцем $1\le x^2+y^2\le 4$ (рис. 4.3). Із

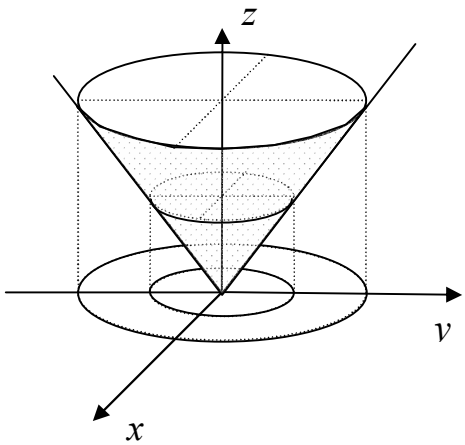


Рисунок 4.3

рівняння поверхні σ знайдемо $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отже,

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}dxdy.$$

Тоді $\iint\limits_{\sigma} zd\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}dxdy.$ Зважаючи на кругову симетрію області D, доцільно перейти до полярних координат $x=\rho\cos\varphi,\ \ y=\rho\sin\varphi, dxdy=\rho d\rho d\varphi$. Оскільки кут φ змінюється в межах від 0 до 2π, а полярний радіус ρ – від 1 до 2, то область перетворюється в область $G: 0\le\varphi\le 2\pi,\ 1\le\rho\le 2$.

$$\iint\limits_{\sigma} zd\sigma=\sqrt{2}\iint\limits_{D}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\sqrt{2}\iint\limits_{G}\rho\cdot\rho d\rho d\varphi=\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2\rho^2d\rho=\sqrt{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_1^2=\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi.$$

Таким чином, $\iint\limits_{\sigma} zd\sigma=\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi.$

Приклад 66. Знайти координати центра ваги частини однорідної площини $6x+3y+2z=12$, що лежить між координатними площинами.

Розв'язання. Оскільки площина однорідна, то густина $\mu(x,y,z)=1$.

У цьому випадку маса m поверхні ототожнюється з її площею S. Обчислимо площу заданої частини площини, тобто площу ΔABC, проекцією якого на площину xOy є ΔAOC, обмежений осями координат $x=0, y=0$ та прямою $y=4-2x$ (рис.4).

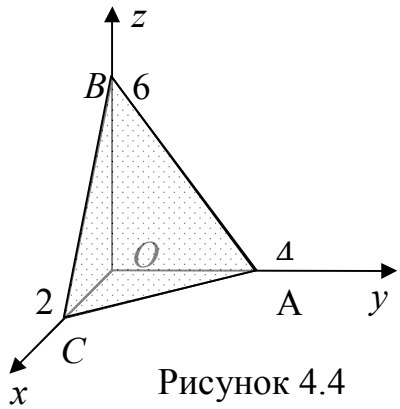


Рисунок 4.4

Попередньо розв'яжемо рівняння площини відносно z: $z=6-3x-\frac{3}{2}y$. Обчислимо $\frac{\partial z}{\partial x}=-3$ та $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{3}{2}$. Тоді

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy=\sqrt{1+(-3)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^2}dxdy.$$

Тобто $d\sigma=\frac{7}{2}dxdy,$

$$S_{\Delta ABC}=\iint\limits_{\Delta ABC}d\sigma=\frac{7}{2}\iint\limits_{\Delta AOC}dxdy=\frac{7}{2}S_{\Delta AOC}=\frac{7}{2}\cdot 4=14.$$

Щоб визначити координати центра ваги фігури, як видно з формул (52), слід знайти її статичні моменти відносно координатних площин. Послідовно обчислимо відповідні поверхневі інтеграли за умови, що $\mu(x,y,z)=const$.

$$M_{yz}=\iint\limits_{\square ABC} xd\sigma=\frac{7}{2}\iint\limits_{\square AOC} xdxdy=\frac{7}{2}\int_0^2 xdx\int_0^{4-2x} dy=\frac{7}{2}\int_0^2 xdx\, y\Big|_0^{4-2x}=$$

$$=\frac{7}{2}\int_0^2\left(4x-2x^2\right)dx=\frac{7}{2}\left(4\frac{x^2}{2}-2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{28}{3},$$

$$M_{xz}=\iint\limits_{\square ABC} yd\sigma=\frac{7}{2}\iint\limits_{\square AOC} ydxdy=\frac{7}{2}\int_0^2 dx\int_0^{4-2x} ydy=\frac{7}{2}\int_0^2 dx\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{4-2x}=\frac{7}{4}\int_0^2\left(4-2x\right)^2dx=$$

$$=\frac{7}{4}\left(16x-16\cdot\frac{x^2}{2}+4\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=\frac{56}{3},$$

$$M_{xy}=\iint\limits_{\square ABC} zd\sigma=\frac{7}{2}\iint\limits_{\square AOC}(6-3x-\frac{3}{2}y)dxdy=\frac{7}{2}\int_0^2 dx\int_0^{4-2x}(6-3x-\frac{3}{2}y)dy=$$

$$=\frac{7}{2}\int_0^2 dx\left(6y-3xy-\frac{3}{4}y^2\right)\Bigg|_0^{4-2x}=\frac{7}{2}\int_0^2\left(3x^2-12x+12\right)dx=\frac{7}{2}\left(3\frac{x^3}{3}-12\frac{x^2}{2}+12x\right)\Bigg|_0^2=28.$$

Приклад 67. Обчислити $\iint\limits_{\sigma} x\left(y+z\right)d\sigma$, де σ – частина циліндричної поверхні $x=\sqrt{1-y^2}$, що відтинається площинами $z=0$ та $z=2$ (рис. 4.5).

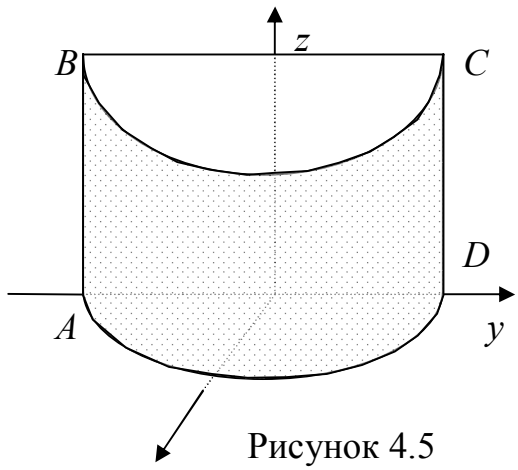


Рисунок 4.5

Розв'язання. Скористаємось формулою (6). Оскільки $\frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$, а $\frac{\partial x}{\partial z}=0$, тоді

$$d\sigma=\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}dydz=\sqrt{1+\frac{y^2}{1-y^2}}dydz=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz.$$

Розпишемо тепер поверхневий інтеграл як подвійний

$$\iint\limits_{\sigma} x\left(y+z\right)d\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{1-y^2}\left(y+z\right)\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dydz=\iint\limits_{D}\left(y+z\right)dydz.$$

Область D – проекція поверхні σ на площину yOz, в даному випадку це буде прямокутник $ABCD$. Отже, тоді можна записати

$$\iint_D (y+z)\,dydz=\int_{-1}^{1}dy\int_0^2(y+z)\,dz=\int_{-1}^{1}dy\left(yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\int_{-1}^{1}(2y+2)dy=\left(y^2+2y\right)\Big|_{-1}^{1}=4.$$

Приклад 68. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_\sigma (x+y+z)d\sigma$, де $\sigma-$ частина площини $x+2y+4z=4$, що лежить в першому октанті (рис. 4.6).

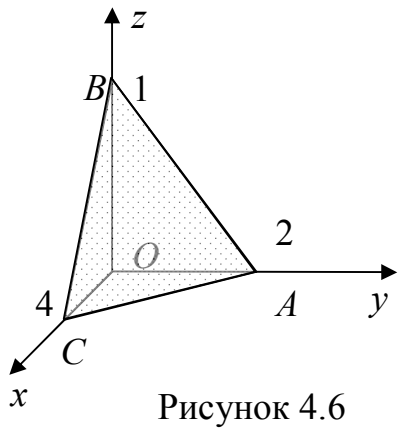


Рисунок 4.6

Розв'язання. Запишемо рівняння площини у вигляді $z=1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{4},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}$.

Застосовуючи формулу (46), поверхневий інтеграл можна обчислити через подвійний:

$$I=\iint_\sigma (x+y+z)d\sigma=\iint_{\square AOC}\left(x+y+1-\frac{x}{4}-\frac{y}{2}\right)\sqrt{1+\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2}\,dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{4}\iint_{\square AOC}\left(\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}+1\right)dxdy.$$

Область інтегрування D – це проекція площини σ на xOy, тобто ΔAOC. Обчислимо подвійний інтеграл:

$$I=\frac{\sqrt{21}}{4}\int_0^2 dx\int_0^{4-2y}\left(\frac{3x}{4}+\frac{y}{2}+1\right)dy=\frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2 dx\int_0^{4-2y}(3x+2y+4)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2 dy\left(\frac{3x^2}{2}+2yx+4x\right)\Bigg|_0^{4-2y}=\frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2\left(\frac{3}{2}(4-2y)^2+2(4-2y)y+4(4-2y)\right)dy=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{16}\int_0^2\left(2y^2-24y+40\right)dy=\frac{\sqrt{21}}{8}\int_0^2\left(y^2-12y+20\right)dy=\frac{\sqrt{21}}{8}\left(\frac{y^3}{3}-12\frac{y^2}{2}+20y\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{8}\cdot\frac{56}{3}=\frac{7\sqrt{21}}{3}.$$

Приклад 69. Обчислити інтеграл $\iint_\sigma z^2 d\sigma$, де $\sigma-$ повна поверхня конуса, що обмежений поверхнею $z=\sqrt{x^2+y^2}$ та площиною $z=2$.

Розв'язання. Позначимо через σ_1 – бічну поверхню конуса, а σ_2 – його основу (рис. 4.7). Тоді запишемо даний інтеграл у вигляді суми двох інтегралів.

$$I_1 + I_2 = \iint\limits_{\sigma_1} z^2 d\sigma_1 + \iint\limits_{\sigma_2} z^2 d\sigma_2.$$

Знайдемо спочатку перший інтеграл I_1. Застосуємо формулу (46).

Для цього обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

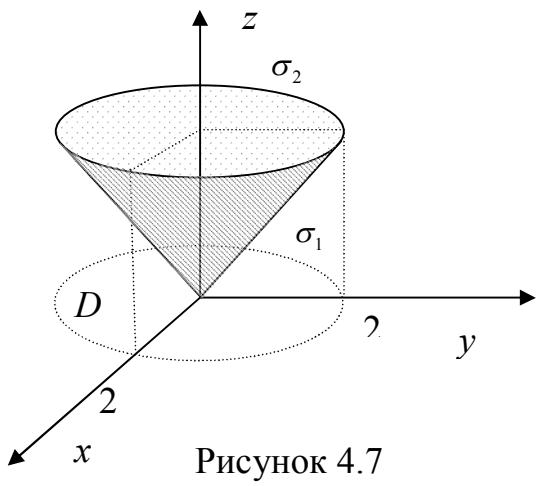


Рисунок 4.7

Тоді,

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Оскільки $z=2$ для основи конуса, таким чином область інтегрування $D(x,y)$ визначається рівнянням $x^2+y^2=4$. Тобто інтеграл I_1 можна записати у вигляді

$$I_1 = \iint\limits_{\sigma_1} z^2 d\sigma_1 = \sqrt{2}\iint\limits_{D(x,y)} \left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Такий інтеграл можна просто обчислити в полярних координатах:

$$I_1 = \sqrt{2}\iint\limits_{D(x,y)} \left(x^2+y^2\right)dxdy = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho^2 \rho d\rho = \sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^2 = 4\sqrt{2}\,\varphi\Big|_0^{2\pi} = 8\sqrt{2}\pi.$$

Розглянемо тепер другий інтеграл I_2. Рівняння основи $z=2$, тому, $I_2 = \iint\limits_{\sigma_2} 2^2 d\sigma_2 = 4\iint\limits_{\sigma_2} d\sigma_2$, де $\iint\limits_{\sigma_2} d\sigma_2$ – площа основи і вона дорівнює 4π. Отже $I_2 = 4\cdot 4\pi = 16\pi$.

Таким чином, повне значення поверхневого інтеграла дорівнює

$$I_1 + I_2 = 8\sqrt{2}\pi + 16\pi = 8\pi\left(2+\sqrt{2}\right).$$

Приклад 70. Обчислимо інтеграл $\iint\limits_{\sigma}(xy+yz+zx)d\sigma$, де σ – частина конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, що лежить всередині поверхні $x^2+y^2=2x$.

Розв'язання. Визначимо спочатку область інтегрування D, що є проекцією поверхні σ на площину xOy. Перепишемо рівняння $x^2+y^2=2x$ наступним чином:

$$x^2 - 2x + y^2 = 0,$$
$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0,$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Видно, що це коло з центром в точці $(1,0)$ та радіусом $R = 1$ (рис. 4.8).

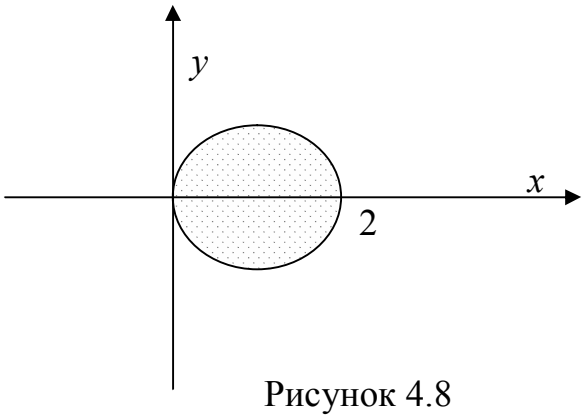


Рисунок 4.8

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Таким чином елемент площі конічної поверхні буде мати вигляд

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Тоді за формулою (46) отримаємо

$$I = \iint\limits_{\sigma} (xy + yz + zx)\, d\sigma = \sqrt{2} \iint\limits_{D(x,y)} \left(xy + (y + x)\sqrt{x^2 + y^2}\right) dxdy.$$

Для обчислення такого інтеграла зручно перейти до полярних координат, тоді рівняння кола $x^2 + y^2 = 2x$ в полярній системі координат можна записати $\rho = 2\cos\varphi$. Область інтегрування D при цьому прийме такий вигляд:

$$D = \left\{ (\rho, \varphi) \middle| 0 \le \rho \le 2\cos\varphi, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Обчислимо інтеграл

$$I = \sqrt{2} \iint\limits_{D} \left(\rho^2 \cos\varphi \sin\varphi + (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2} \right) \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi \int\limits_{0}^{2\cos\varphi} \rho^3\, d\rho =$$

$$= \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi) \frac{\rho^4}{4} \Bigg|_{0}^{2\cos\varphi} \right] d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi)\cos^4\varphi \right] d\varphi =$$

$$=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\cos^5\varphi+\cos^4\varphi\right)\sin\varphi+\cos^5\varphi\right]d\varphi=$$

$$=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^5\varphi+\cos^4\varphi\right)\sin\varphi d\varphi+4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi d\varphi.$$

Перший із доданків буде дорівнювати нулю, бо підінтегральна функція $\left(\cos^5\varphi+\cos^4\varphi\right)\sin\varphi$ є непарною, а інтегрування виконується на інтервалі, що є симетричним відносно початку координат. Звідси

$$I=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\varphi d\varphi=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi\right)^2\cos\varphi d\varphi=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2\varphi\right)^2\cos\varphi d\varphi=$$

$$=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1-2\sin^2\varphi+\sin^4\varphi\right)d\left(\sin\varphi\right)=4\sqrt{2}\left[\sin\varphi-2\frac{\sin^3\varphi}{3}+\frac{\sin^5\varphi}{5}\right]\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=8\sqrt{2}\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{64\sqrt{2}}{15}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити поверхневий інтеграл I-го роду, якщо σ – частина площини α, що лежить між координатними площинами:

1.1 $\iint\limits_{\sigma} d\sigma$, $\alpha: x+y+z=3$.

Відповідь: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

1.2 $\iint\limits_{\sigma}\left(2x-3y+z\right)d\sigma$, $\alpha: x+2y+z=2$.

Відповідь: $\sqrt{6}$.

1.3 $\iint\limits_{\sigma}\frac{d\sigma}{(1+x+z)^2}$, $\alpha: x+y+z=1$.

Відповідь: $17\sqrt{17}$.

2. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(x^2+y^2\right)zd\sigma$, де σ – верхня половина сфери радіуса R із центром у початку координат.

Відповідь: $\frac{\pi}{2}\cdot R^5$.

3. Обчислити інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(y+z+\sqrt{a^2-x^2}\right)d\sigma$, де σ – циліндрична поверхня $x^2+y^2=a^2$, поміщена між площинами $z=0$ і $z=h$.

Відповідь: $ah(4a+\pi h)$.

4. Знайти площу частини площини $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, поміщеної між координатними площинами.

Відповідь: $\frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}$.

5. Обчислити площу частини поверхні параболоїда $2y=x^2+z^2$, вирізаної циліндром $x^2+y^2=1$.

Відповідь: $\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\pi$.

6. Знайти центр ваги площини $z=x$, обмеженої площинами $x+y=1$, $x=0$, $y=0$.

Відповідь: $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

7. Обчислити момент інерції верхньої половини однорідної сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$ відносно осі Oz.

Відповідь: $4a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$.

Питання для самоперевірки

1 Яка поверхня називається гладкою, кусково-гладкою?

2 Що називається елементом поверхні та як він визначається?

3 Що називають інтегральною сумою для поверхневого інтеграла першого роду?

4 Що називається поверхневим інтегралом першого роду?

5 Якими є умови існування поверхневого інтеграла першого роду?

6 Сформулюйте властивості поверхневого інтеграла першого роду?

7 Яким чином обчислюється поверхневий інтеграл першого роду?

8 У чому полягає фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду?

9 Яку величину можна обчислити за допомогою поверхневого інтегралу першого роду, якщо підінтегральна функція тотожньо дорівнює одиниці?

10 Як обчислити площу гладкої поверхні?

11 Як визначити масу поверхні, що має змінну поверхневу густину?

12 Як визначаються статичні моменти M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} поверхні відносно координатних площин?

13 Як визначаються координати центра ваги поверхні?

14 Як знайти координати центра ваги однорідної поверхні?

15 Як визначаються моменти інерції I_x, I_y, I_z поверхні відносно осей координат?

5 Поверхневий інтеграл II-го роду

5.1 Означення та властивості поверхневого інтеграла другого роду

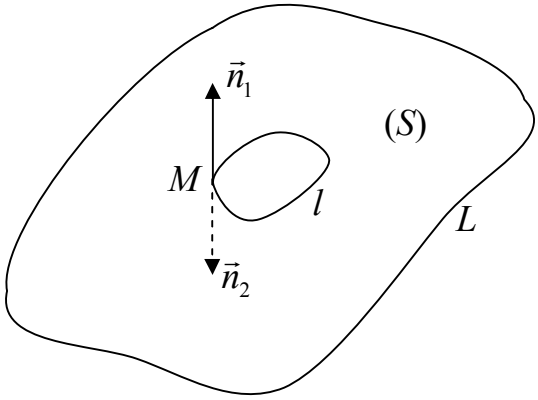


Рисунок 5.1

Нехай задана поверхня S, обмежена лінією L (рис. 5.1).

Візьмемо на поверхні S який-небудь контур l, що не має спільних точок з границею L.

У точці M контуру l можна провести дві нормалі $\vec{n}_1$ і $\vec{n}_2$ до поверхні S.

Виберемо будь-який з цих напрямків. Обводимо точку M по контуру L з вибраним напрямком нормалі.

Якщо в вихідне положення точка M повернеться з тим же напрямком нормалі (а не з протилежним), то поверхня S називають двосторонньою.

Ми будемо розглядати тільки двосторонні поверхні.

Двосторонньою поверхнею є всяка гладка поверхня з рівнянням $z=f(x,y)$. Нехай S – двостороння незамкнута поверхня, обмежена лінією L, що не має точок самоперетинання. Виберемо певну сторону поверхні. Будемо називати додатнім напрямком обходу контуру L такий напрямок, при пересуванні по якому по вибраній стороні поверхні сама поверхня залишається зліва.

Двостороння поверхня з установленим на ній таким чином додатнім напрямком обходу контуру називається орієнтованою поверхнею.

Перейдемо до побудови поверхневого інтеграла другого роду. Як при вивченні криволінійних інтегралів другого роду розглядалася направлена крива, так і при побудові поверхневого інтеграла другого роду розглядається вибрана сторона поверхні.

Візьмемо у просторі двосторонню поверхню S, яка складається із конечної кількості кусків, кожен з яких заданий рівнянням виду $z=f(x,y)$ або є циліндричною поверхнею с твірними, паралельними осі Oz.

Нехай $R(x,y,z)$ – функція, визначена та неперервна на поверхні S. Сіткою ліній розбиваємо поверхню S довільно на n "елементарних" частинок ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_i, ..., ΔS_n, що не мають спільних внутрішніх точок.

На кожній частинці ΔS_i довільно оберемо точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ (i=1,...,n). Нехай $(\Delta S_i)_{xy}$ – площа проекції частинки ΔS_i на координатну площину Oxy, взята зі знаком "+", якщо нормаль до поверхні S в точці $M_i(x_i,y_i,z_i)$ (i=1,...,n) утворює з віссю Oz гострий кут, і зі знаком "–", якщо цей кут тупий.

Складемо суму

$$\sum_{i=1}^{n} R(M_i)(\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)(\Delta S_i)_{xy}, \qquad (54)$$

яку називають інтегральною сумою для функції $R(x,y,z)$ по поверхні S по змінним x, y.

Позначимо λ – найбільший із діаметрів ΔS_i (i=1, ...,n). Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)(\Delta S_i)_{xy},$$

не залежна від способу розбивання поверхні S на "елементарні" частинки ΔS_i і від вибору точок $M_i \in \Delta S_i$ (i=1,...,n), то вона називається поверхневим інтегралом по обраній стороні поверхні S від функції $R(x,y,z)$ по координатам x, y (або поверхневим інтегралом другого роду) і позначається

$$\iint_S R(x, y, z)\,dxdy. \qquad (55)$$

Аналогічно можна побудувати поверхневі інтеграли по координатах x,z або y,z по відповідній стороні поверхні, тобто

$$\iint_S P(x, y, z)dydz, \qquad \iint_S Q(x, y, z)dzdx. \qquad (56)$$

Якщо існують інтеграли (55) и (56), тоді можна ввести "загальний" інтеграл по обраній стороні поверхні:

$$\iint_S P(x, y, z)dydz + Q(x, y, z)dzdx + R(x, y, z)dxdy. \qquad (57)$$

Поверхневий інтеграл другого роду має звичайні властивості інтеграла. Зауважимо лише, що поверхневий інтеграл другого залежить від того, по якій стороні поверхні S він береться (поверхня S двостороння). Тому завжди потрібно вказувати вибір сторони поверхні). Перехід до іншої сторони поверхні змінює напрям нормалі до поверхні, тому змінюється знак величини поверхневого інтеграла.

Обчислення інтеграла (57) зводять, як правило, до обчислення подвійного інтеграла.

Нехай S – двостороння поверхня, задана рівнянням $z=f(x,y)$, де $f(x,y)$ неперервна в області τ (τ є проекція поверхні S на координатну площину Oxy), і $R(x,y,z)$ – неперервна функція на поверхні S.

Виберемо "верхню" сторону поверхні S, тоді знак проекції $(\Delta S_i)_{xy}$ завжди "+", тому

$$\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)(\Delta S_i)_{xy} = \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, f(x_i, y_i)) \cdot \tau_i$$

є інтегральна сума для функції $R(x,y,f(x,y))$ по плоскій області τ.

Переходячи до границі (при $\lambda \to 0$), одержимо

$$\iint_S R(x, y, z)\,dxdy = \iint_\tau R(x, y, f(x, y))\,dxdy. \qquad (58)$$

Звідси стають очевидними умови існування поверхневого інтеграла другого роду.

5.2 Потік векторного поля через поверхню

Нехай S – гладка орієнтована поверхня і

$\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ – векторне поле.

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через поверхню S називається поверхневий інтеграл другого роду

$$\Pi = \iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy. \tag{59}$$

Його можна інтерпретувати як кількість рідини або газу, що протікає за одиницю часу в заданому напрямі через поверхню S, якщо $\vec{a}(x,y,z) = \rho(x,y,z)\cdot\vec{v}(x,y,z)$. Тут $\rho(x,y,z)$ – густина рідини або газу в точці, $\vec{v}(x,y,z)$ – швидкість течії.

Обчислення поверхневого інтеграла другого роду зводиться до обчислення поверхневого інтеграла першого роду наступним чином:

$$\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \\ &= \iint_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dS.\end{aligned} \tag{60}$$

де $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ – одиничний вектор нормалі до поверхні S, напрям якого співпадає з вибраним напрямком на поверхні.

Тому в векторній формі потік векторного поля $\vec{a}$ через поверхню S записується у вигляді

$$\Pi = \iint_S (\vec{a}\cdot\vec{n})dS, \tag{61}$$

де $\vec{a} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$, $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, α, β, γ – кути між нормаллю та відповідними осями координат.

Ураховуючи, що $\cos\alpha\cdot dS = \pm dydz$, $\cos\beta\cdot dS = \pm dxdz$, $\cos\gamma\cdot dS = \pm dxdy$, поверхневий інтеграл другого роду можна звести до обчислення подвійних інтегралів за формулою

$$\begin{aligned}&\iint_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy = \\ &= \pm\iint_{D_1} P(x(y,z),y,z)dydz \pm \iint_{D_2} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint_{D_3} R(x,y,z(x,y))dxdy,\end{aligned} \tag{62}$$

де D_1, D_2, D_3 – проекції поверхні S на відповідно на площини Oyz, Oxz, Oxy, а $x(y,z)$, $y(x,z)$, $z(x,y)$ – вирази, одержані із рівняння поверхні S $F(x,y,z)=0$ при розв'язанні відносно відповідних координат. Знак плюс береться якщо відповідний косинус додатній (кут між нормаллю і відповідною віссю – гострий).

Наведемо приклади обчислення поверхневих інтегралів другого роду.

Приклади

Приклад 71. $I = \iint\limits_S ydxdz$, де S – внутрішня поверхня тетраедра, обмеженого площинами $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Розв'язання. Замкнена поверхня S складається з чотирьох частин – трикутників ABC, BCO, ACO, ABO, розташованих в різних площинах (рис. 5.2). Тому даний інтеграл будемо обчислювати як суму чотирьох інтегралів.

$$I = \iint\limits_{S_1} ydxdz + \iint\limits_{S_2} ydxdz + \iint\limits_{S_3} ydxdz + \iint\limits_{S_4} ydxdz .$$

Тут S_1, S_2, S_3, S_4, – відповідно площини BCO, ACO, ABO, ABC. Проекції BCO, ACO, ABO, ABC на площину Oxz позначимо відповідно D_1, D_2, D_3, D_4 (D_2=D_4).

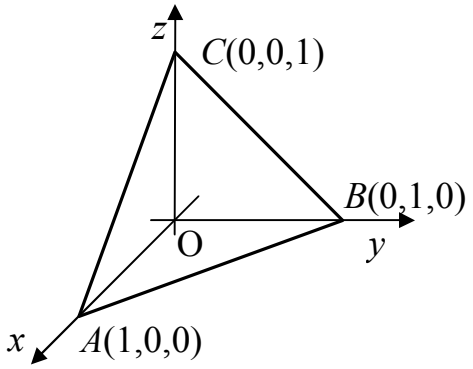


Рисунок 5.2

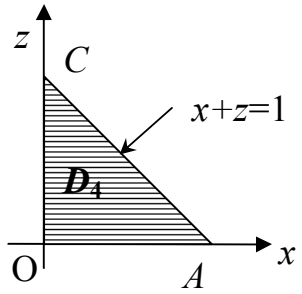


Рисунок 5.3

Площини BCO, ABO перпендикулярні до площини Oxz, на площині ACO y=0, а на ABC y=1-x-z. Таким чином (рис. 5.3):

$$\iint\limits_{S_1} ydxdz = \iint\limits_{S_2} ydxdz = 0, \quad \iint\limits_{S_3} ydxdz = \iint\limits_{S_3} 0dxdz = 0 .$$

$$\iint\limits_{S_4} ydxdz = -\iint\limits_{D_4} (1 - x - z)dxdz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (x + z - 1)dz =$$

$$\int\limits_0^1 dx \left(\frac{(x + z - 1)^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=1-x} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 (x-1)^2 dx = -\frac{(x-1)^3}{6}\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}.$$

Отже $I = 0 + 0 + 0 - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$.

Приклад 72. $I = \iint\limits_S \sqrt[4]{x^2 + y^2}\, dxdy$, де S – нижня сторона круга $x^2 + y^2 \le a^2$ (нормаль направлена проти осі Oz).

Розв'язання. Поверхня S співпадає зі своєю проекцією D на площину Oxy. Враховуючи, що інтегрування здійснюється по нижній стороні круга, одержимо

$$I = -\iint_D \sqrt[4]{x^2 + y^2}\, dxdy .$$

Тут D – круг радіуса a з центром в початку координат.

Для обчислення подвійного інтегралу зручно перейти до полярної системи координат. Тоді: $x^2 + y^2 = r^2$, $\sqrt[4]{x^2 + y^2} = \sqrt{r}$, $dxdy = rdrd\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le a$.

Таким чином,

$$I = -\iint_D \sqrt[4]{x^2 + y^2}\, dxdy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r}\, dr = -2\pi \left. \frac{2r^{5/2}}{5} \right|_0^a = -\frac{4\pi}{5}\sqrt{a^5}.$$

Приклад 73. $I = \iint_S \frac{x^2 y^2}{z^2} dxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, обмежена площиною $z=h$.

Розв'язання. Замінюючи z^2 на x^2+y^2, одержимо $I = -\iint_D \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} dxdy$, де D – круг $x^2+y^2 \le h^2$, який є проекцією поверхні S на площину Оxy (рис. 5.4). Знак мінус тому, що вектор нормалі до поверхні складає тупий кут з віссю Оz. Переходимо до полярної системи координат.

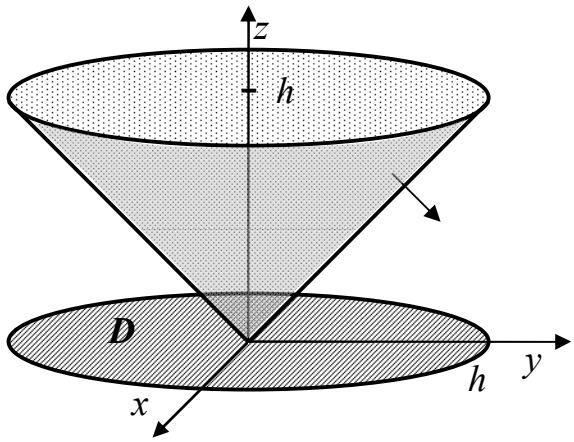


Рисунок 5.4

$$I = -\iint_D \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} dxdy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h \frac{(r\cos\varphi)^2 (r\sin\varphi)^2}{r^2} rdr = -\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot d\varphi \int_0^h r^3 dr$$

$$= -\frac{h^4}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin^2 2\varphi \cdot d\varphi = -\frac{h^4}{32}\left.\left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi\right)\right|_0^{2\pi} = -\frac{\pi h^4}{16}.$$

Приклад 74. Знайти потік вектора $\vec{a} = 2x\vec{i} - y\vec{j}$ через частину поверхні циліндра $x^2+y^2=R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $0 \le z \le h$ в напрямку зовнішньої нормалі (рис. 5.5).

Розв'язання.

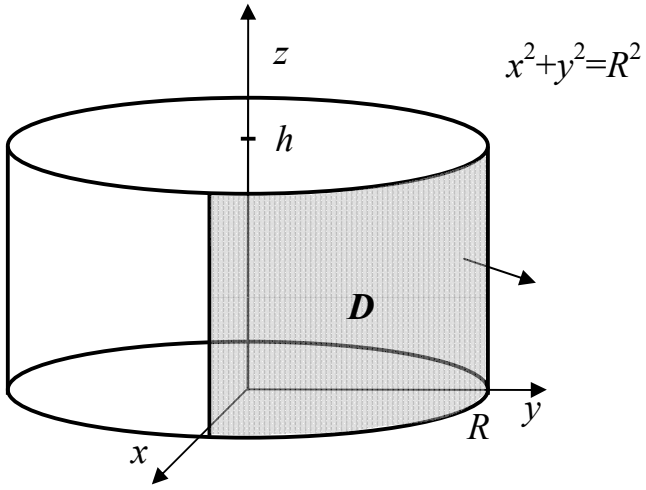


Рисунок 5.5

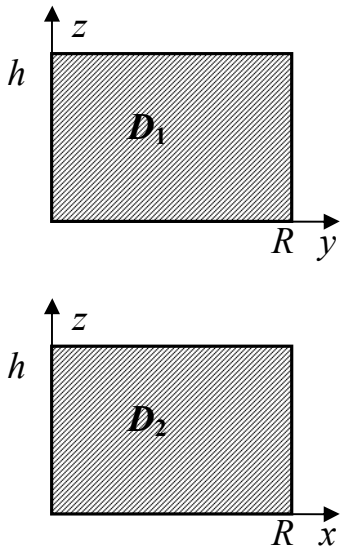


Рисунок 5.6

$$x=\sqrt{R^2-y^2}\,,\quad y=\sqrt{R^2-x^2}\,.$$

$$\Pi=\iint\limits_S 2xdydz-ydxdz=\iint\limits_{D_1}2\sqrt{R^2-y^2}\,dydz-\iint\limits_{D_2}\sqrt{R^2-x^2}\,dxdz=$$

$$=2\int\limits_0^h dz\int\limits_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,dy-\int\limits_0^h dz\int\limits_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=2h\left(\frac{y\sqrt{R^2-y^2}}{2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{y}{R}\right)\Bigg|_0^R-$$

$$-h\left(\frac{x\sqrt{R^2-x^2}}{2}+\frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}\right)\Bigg|_0^R==2h\left(0+\frac{R^2}{2}\arcsin 1\right)-h\left(0+\frac{R^2}{2}\arcsin 1\right)=$$

$$=h\frac{R^2}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi hR^2}{4}.$$

Приклад 75. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I=\iint_S\left(y^2+z^2\right)dxdy$, де S – верхня частина поверхні $z=\sqrt{a^2-x^2}$, яка обрізана площинами y=0, y=b (рис. 5.7).

Розв'язання. Нормаль $\vec{n}$, яка відповідає вказаній стороні поверхні, складає гострий кут з віссю Оz, тому в формулі (62), якою слід скористатися, потрібно взяти знак плюс. Проекцією поверхні S на площину Оxy є прямокутник D (рис. 5.8)

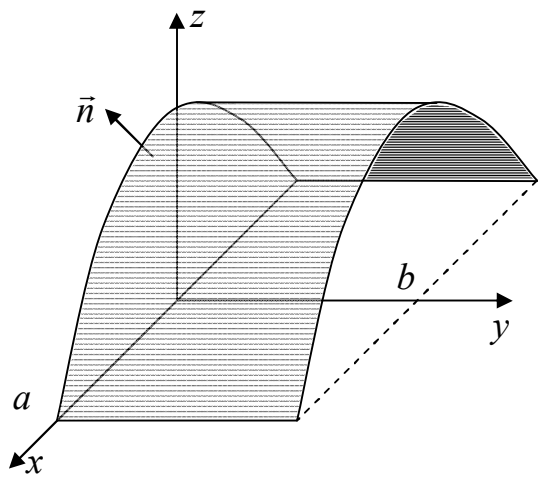


Рисунок 5.7

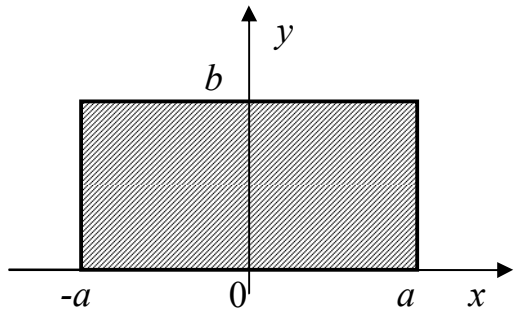


Рисунок 5.8

За формулою (62) знаходимо

$$I=\iint\limits_S\left(y^2+z^2\right)dxdy=\iint\limits_D\left(y^2+\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\right)dxdy=$$

$$=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_0^b\left(y^2+a^2-x^2\right)dy=\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{y^3}{3}+a^2y-x^2y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=b}dx=$$

$$=\int\limits_{-a}^{a}\left(\frac{b^3}{3}+a^2b-x^2b\right)dx=\left(\frac{b^3x}{3}+a^2bx-\frac{x^3}{3}b\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{2}{3}ab\left(b^2+2a^2\right).$$

Зауваження. Якби розглядалась нижня (внутрішня) сторона поверхні, нормаль утворювала б з віссю Оz тупий кут, і в формулі (62) потрібно було б взяти знак мінус.

Приклад 76. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $I=\iint\limits_S\left(x^2+z^2+ay^2\right)dxdz$, де S – зовнішня сторона поверхні $y=\sqrt{x^2+z^2}$, яка обрізана площинами y=0, y=b (рис. 5.9).

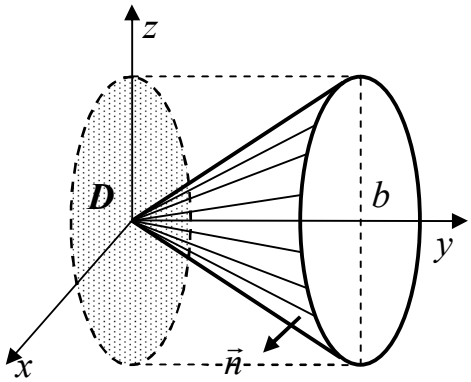


Рисунок 5.9

Розв'язання. Нормаль $\vec{n}$, яка відповідає вказаній стороні поверхні, складає тупий кут з віссю Оy, тому в формулі (62), потрібно взяти знак мінус. Проекцією поверхні S на площину Оxz є круг $x^2+z^2\le b^2$.

$$I=\iint\limits_S\left(x^2+z^2+ay^2\right)dxdz=-\iint\limits_D\left(x^2+z^2+a\left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2\right)dxdz=$$

$$=-\iint\limits_D\left(x^2+z^2\right)(a+1)dxdz=-(a+1)\iint\limits_D\left(x^2+z^2\right)dxdz.$$

Переходячи до полярної системи координат ($x=r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$), одержимо

$$\iint_D \left(x^2+z^2\right)dxdz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^b r^2rdr=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^b=\frac{\pi b^4}{2}.$$

Таким чином,

$$I=\iint_S\left(x^2+z^2+ay^2\right)dxdz=-\frac{\pi(a+1)b^4}{2}.$$

Приклад 77. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S\left(ax^2+by^2+bz^2\right)dydz$, де S – внутрішня сторона частини півсфери $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, вирізана конусом $x=\sqrt{y^2+z^2}$.

Розв'язання. Нормаль $\vec{n}$, яка відповідає вказаній стороні поверхні, складає тупий кут з віссю Оx, тому в формулі (62), потрібно взяти знак мінус. Проекцією поверхні S на площину Оyz є круг $y^2+z^2\le\frac{R^2}{2}$ (одержано із рівнянь $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$, $x=\sqrt{y^2+z^2}$). Вводимо полярні координати ($y=r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$) і одержуємо

$$\iint_D\left(a(R^2-y^2-z^2)+b(y^2+z^2)\right)dydz=\iint_D\left(aR^2+(b-a)(y^2+z^2)\right)dydz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{R/\sqrt{2}}\left(aR^2+(b-a)r^2\right)rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{R/\sqrt{2}}\left(aR^2r+(b-a)r^3\right)dr=$$

$$=\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(aR^2\frac{r^2}{2}+(b-a)\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^{R/\sqrt{2}}=2\pi\left(a\frac{R^4}{4}+(b-a)\frac{R^4}{16}\right)=\frac{\pi R^4}{8}(3a+b).$$

Отже,

$$I=\iint_S\left(ax^2+by^2+bz^2\right)dydz=-\frac{\pi R^4}{8}(3a+b).$$

Приклад 78. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy$, де S – зовнішня сторона нижньої частини еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 5.10).

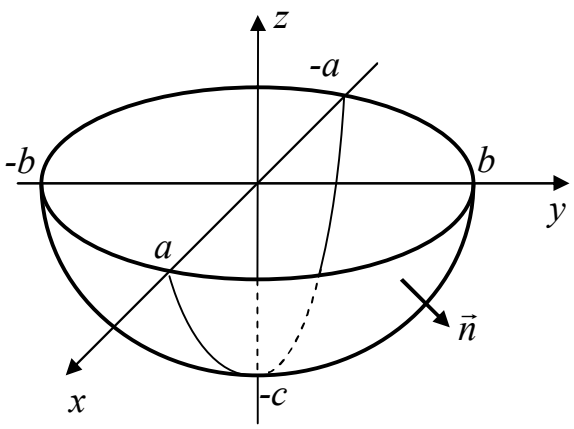


Рисунок 5.10

Розв'язання. На нижній частині еліпсоїда $z=-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$.

Проекцією поверхні S на площину Оxy є частина площини,

обмеженої еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Нормаль $\vec{n}$, яка відповідає вказаній стороні поверхні, складає тупий кут з віссю Oz, тому

$$\iint_S\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+kz\right)dxdy=-\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy.$$

Вводимо нові координати за формулами $x=ar\cos\varphi$, $z=br\sin\varphi$ і одержуємо

$$-\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-kc\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(kc\sqrt{1-r^2}-r^2\right)abrdr=$$

$$=ab\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(kcr\sqrt{1-r^2}-r^3\right)dr=2\pi ab\left(\frac{kc}{3}-\frac{1}{4}\right).$$

Приклад 79. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду $\iint_S x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона сфери (рис. 5.11) $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Розв'язання. Цей інтеграл є сумою трьох інтегралів. Обчислимо перший із них:

$$I_1=\iint_S x^2dydz.$$

Рівняння сфери запишемо у вигляді

$$x-a=\pm\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2},$$

де знак «+» відповідає одній ближній півсфері, «–» дальній.

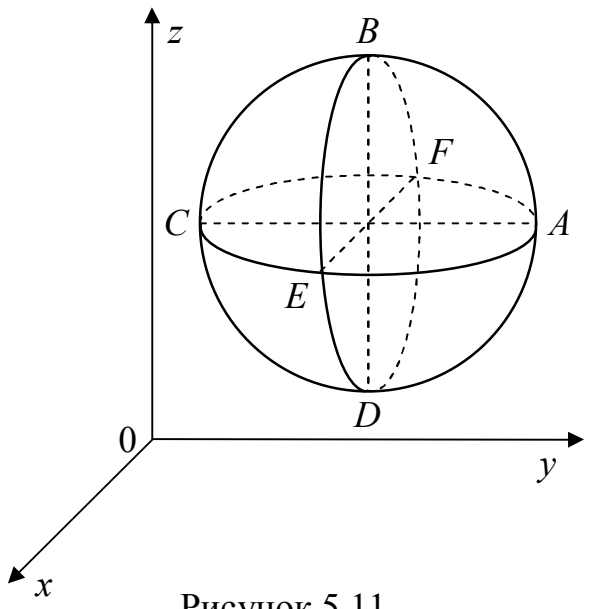


Рисунок 5.11

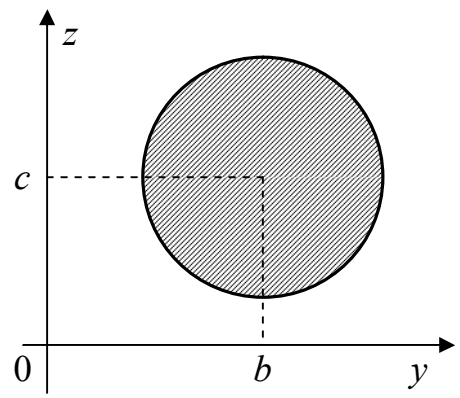


Рисунок 5.12

Позначимо через S_1 зовнішню сторону ближньої півсфери $ABCDE$, а S_2 зовнішню сторону дальньої півсфери $ABCDF$. Проекцією кожної із них на

площину Oyz є круг D, обмежений колом (рис. 5.12) $(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Вектор нормалі складає з віссю Ox гострий кут на півсфері S_1 і тупий – на півсфері S_2. Отже,

$$I_1=\iint\limits_S x^2dydz=\iint\limits_{S_1} x^2dydz+\iint\limits_{S_2} x^2dydz=\iint\limits_D\left(a+\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}\right)^2dydz-$$

$$-\iint\limits_D\left(a-\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}\right)^2dydz=$$

$$=4a\iint\limits_D\sqrt{R^2-(y-b)^2-(z-c)^2}dydz==4a\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\sqrt{R^2-r^2}rdr=\frac{8}{3}\pi aR^3.$$

Під час обчислення подвійного інтеграла проведено перехід до полярних координат за формулами $y\text{-}b=r\cos\varphi$, $z\text{-}c=r\sin\varphi$.

Аналогічно обчислюємо два інших інтеграла $I_2=\frac{8}{3}\pi bR^3$, $I_3=\frac{8}{3}\pi cR^3$.

Таким чином, $I=\frac{8}{3}\pi R^3\left(a+b+c\right)$.

Приклад 80. Обчислити поверхневий інтеграл другого роду

$$I=\iint\limits_S(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy,$$

де S – верхня сторона поверхні, вирізаної циліндром $x^2+y^2=2ax$ із сфери $x^2+y^2+z^2=2Rx$ ($R>a$, $z>0$).

Розв'язання. Скористаємося формулою (62), яка зв'язує поверхневі інтеграли обох типів:

$$I=\iint\limits_S\left((y-z)\cos\alpha+(z-x)\cos\beta+(x-y)\cos\gamma\right)dS.$$

Вирахуємо напрямні косинуси нормалі:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=\frac{2x-2R}{2\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}}=\frac{x-R}{R},$$

$$\cos\beta=\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}=\frac{2y}{2\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}}=\frac{y}{R},$$

$$\cos\gamma = \frac{\dfrac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)^2}} = \frac{2z}{2\sqrt{(x-R)^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{R}.$$

Тоді $I = \iint\limits_S (z-y)dS$. Оскільки поверхня симетрична відносно площини Oxz, тоді

$$\iint\limits_S ydS = 0, \text{ а } I = \iint\limits_S zdS.$$

Знову переходимо до поверхневого інтеграла другого роду:

$$I = \iint\limits_S zdS = \iint\limits_D \frac{z}{\cos\gamma}dxdy = \iint\limits_D \frac{z}{z/R}dxdy = R\iint\limits_D dxdy = \pi a^2 R,$$

де область $D: (x-a)^2 + y^2 \le a^2$.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити поверхневі інтеграли другого роду:

1. $\iint_S yzdydz + xzdxdz + xydxdy$, де S – зовнішня сторона поверхні тетраедра, обмеженого площинами x=0, y=0, z=0, x+y+z=2.

Відповідь: 0.

2. $\iint_S z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона півсфери $x^2+y^2+z^2=R^2$ (z>0).

Відповідь: $\dfrac{\pi R^4}{2}$.

3. $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S – внутрішня сторона поверхні куба, обмеженого площинами x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1.

Відповідь: –3.

4. $\iint_S z^2dxdy$, де S – внутрішня сторона еліпсоїда $x^2+y^2+2z^2=2$.

Відповідь: 0.

Питання для самоперевірки

1 Яка поверхня називається двосторонньою?

2 Що називають додатнім напрямом обходу контуру на поверхні?

3 Яка поверхня називається орієнтованою?

4 Чи залежить величина поверхневих інтегралів першого та другого роду від вибраної сторони поверхні? Якщо залежить, тоді яким чином?

5 Яку фізичну інтерпретацію поверхневого інтеграла другого роду ви знаєте?

6 Що називають потоком векторного поля через поверхню?

7 Запишіть формулу переходу від поверхневого інтеграла другого роду до поверхневого інтегралу першого роду.

8 Як обчислення поверхневого інтегралу другого роду зводиться до обчислення подвійних інтегралів?

6. Механічні та геометричні застосування поверхневих інтегралів

Розглянемо деякі фізичні й геометричні застосування поверхневих інтегралів та наведемо формули для обчислення величин за допомогою поверхневих інтегралів (табл. 2).

Таблиця 2

№ п/п	Найменування величини	Формула для обчислення
1	Площа поверхні G.	$S = \iint\limits_G d\sigma$
2	Маса матеріальної поверхні G.	$m = \iint\limits_G \delta(M) d\sigma,$ де $\delta(M)$ – поверхнева густина розподілу маси в точці $M(x, y, z)$ поверхні G.
3	Координати центра ваги C поверхні G.	$x_C = \dfrac{\iint\limits_G x\delta d\sigma}{\iint\limits_G \delta d\sigma},\ y_C = \dfrac{\iint\limits_G y\delta d\sigma}{\iint\limits_G \delta d\sigma},\ z_C = \dfrac{\iint\limits_G z\delta d\sigma}{\iint\limits_G \delta d\sigma}.$ Якщо поверхня однорідна ($\delta = const$), то $x_C = \dfrac{1}{S}\iint\limits_G x d\sigma,\ y_C = \dfrac{1}{S}\iint\limits_G y d\sigma,\ z_C = \dfrac{1}{S}\iint\limits_G z d\sigma,$ де S – площа поверхні G.
4	Статичні моменти поверхні G відносно координатних площин.	$M_{xy} = \iint\limits_G z\delta d\sigma,\ M_{yz} = \iint\limits_G x\delta d\sigma,\ M_{zx} = \iint\limits_G y\delta d\sigma.$
5	Моменти інерції поверхні G відносно осей координат.	$I_{ox} = \iint\limits_G (y^2 + z^2) d\sigma,$ $I_{oy} = \iint\limits_G (x^2 + z^2) d\sigma,$ $I_{oz} = \iint\limits_G (x^2 + y^2) d\sigma.$

Приклади

Приклад 81. Знайти площу частини конуса $z^2 = 2xy$, що розташована в першому октанті між площинами $x = 2, y = 4$.

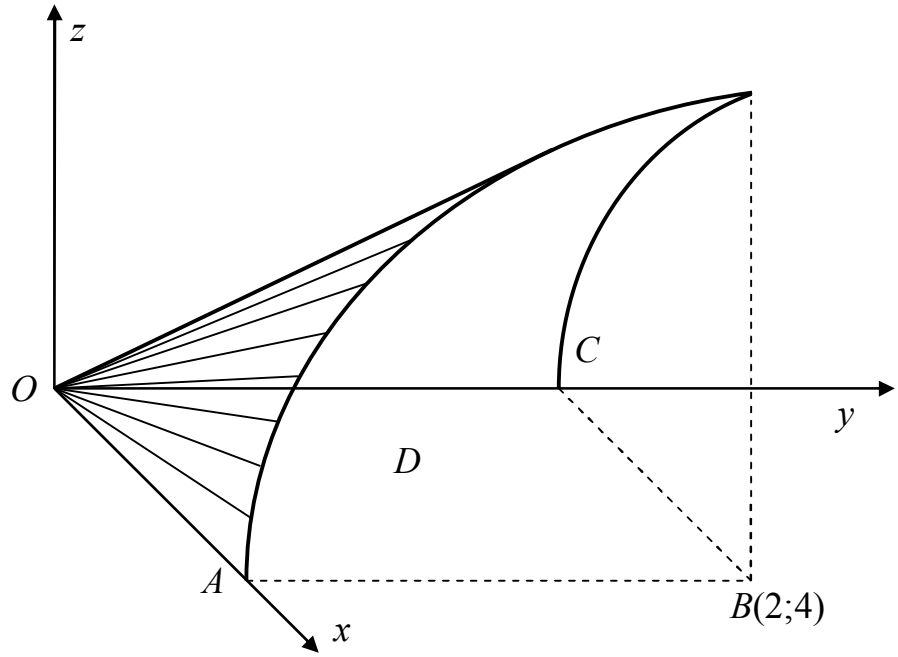


Рисунок 6.1

Розв`язання. Застосовуючи формулу для обчислення площі поверхні G, маємо:

$S = \iint\limits_G d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + (\varphi_x^{`})^2 + (\varphi_y^{`})^2}\, dxdy$, де $D -$ проекція G на площину xOy, тобто прямокутник $OABC$ (рис. 6.1), $\varphi(x, y) = \sqrt{2xy}$.

Знаходячи частинні похідні функції φ, одержуємо:

$$\varphi_x^{`} = \frac{2y}{2\sqrt{2xy}} = \sqrt{\frac{y}{2x}}, \varphi_y^{`} = \frac{2x}{2\sqrt{2xy}} = \sqrt{\frac{x}{2y}},$$

$$\sqrt{1 + (\varphi_x^{`})^2 + (\varphi_y^{`})^2} = \sqrt{1 + \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}} = \frac{\sqrt{2xy + y^2 + x^2}}{\sqrt{2xy}} = \frac{x + y}{\sqrt{2}\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right).$$

Тоді

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dxdy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 dx \int_0^4 \left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 \left(2\sqrt{xy} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{y^3}{x}}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 \left(4\sqrt{x} + \frac{16}{3\sqrt{x}}\right) dx = 2\sqrt{2}\int_0^2 \left(\sqrt{x} + \frac{4}{3\sqrt{x}}\right) dx = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{8}{3}\sqrt{x}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$=2\sqrt{2}\left(\frac{2}{3}2\sqrt{2}+\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\frac{4}{3}\sqrt{2}+\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)=16.$$

Приклад 82. Знайти масу півсфери, якщо в кожній її точці поверхова густина чисельно дорівнює проекції радіус-вектора цієї точки на площину основи півсфери.

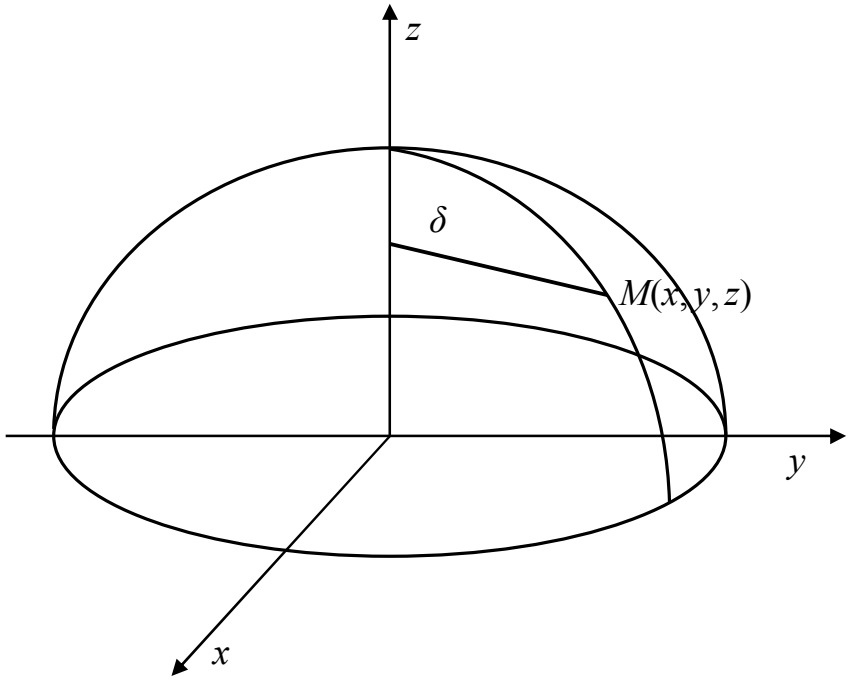


Рисунок 6.2

Розв'язання. Розташуємо початок декартової системи координат в центрі основи півсфери (рис. 6.2). Вісь Oz має перпендикулярний напрям до цієї основи. Тоді рівняння півсфери буде таким: $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, де $R-$радіус півсфери. Поверхова густина в довільній точці півсфери $M(x,y,z)$ дорівнює: $\delta(M)=\sqrt{x^2+y^2}$.

Враховуючи, що $\varphi_x^{`}=-\dfrac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, \varphi_y^{`}=-\dfrac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$,

$$d\sigma=\sqrt{1+(\varphi_x^{`})^2+(\varphi_y^{`})^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}},$$

одержуємо: $m=\iint\limits_G \delta d\sigma=R\iint\limits_D \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, де $D-$проекція півсфери G на площину xOy: круг $x^2+y^2\le R^2$ (рис. 6.3).

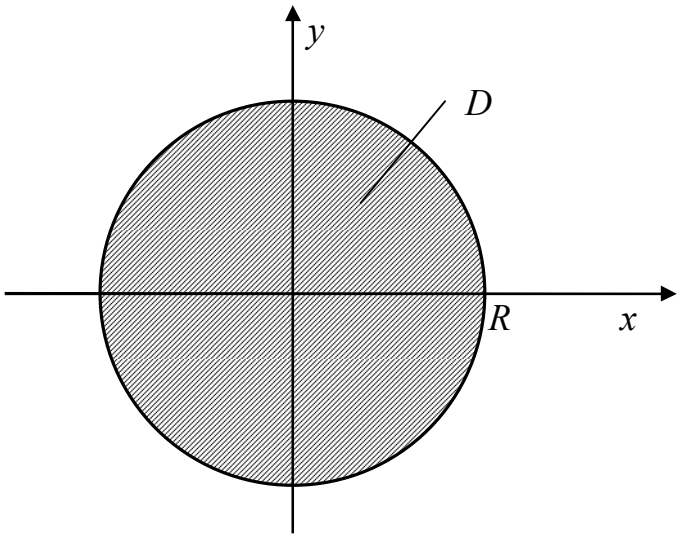


Рисунок 6.3

Обчислимо знайдений подвійний інтеграл, переходячи до полярних координат:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

$$0 \le r \le R, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad dxdy = rdrd\varphi, \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

Знаходимо:

$$m = R\iint\limits_D \frac{r^2 drd\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R\int\limits_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \left| \begin{array}{c} r = R\sin t \\ dr = R\cos t dt \\ R^2 - r^2 = R^2\cos^2 t \\ t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = 2\pi R^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \pi R^3 \left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi \right) = \frac{\pi^2 R^3}{2}.$$

Приклад 83. Знайти центр ваги півсфери, що задана в прикладі 82.

Розв'язання. При такому ж самому розташуванні системи координат в наслідок симетрії даної поверхні G і розподіленої маси відносно осі Oz маємо $x_C = y_C = 0$. Для визначення аплікати центра ваги C обчислимо статистичний момент

$$M_{xy} = \iint\limits_G z\delta d\sigma = R\iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R r^2 dr = 2\pi R\frac{R^3}{3} = \frac{2}{3}\pi R^4.$$

Маса півсфери $m = \dfrac{\pi^2 R^3}{2}$ (див. приклад 82). Тоді $z_C = \dfrac{M_{xy}}{m} = \dfrac{4R}{3\pi}$.

Приклад 84. Знайти масу параболічної оболонки, що задана рівнянням $z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 1$ і має густину $\delta(M) = z$.

Розв`язання. Застосовуючи формулу для обчислення маси, маємо:

$$m = \iint_G \delta(x, y, z) d\sigma.$$

Проекція D параболічної поверхні G на площину xOy уявляє круг радіуса 1 з центром у початку координат. Отже, можна записати

$$m = \iint_G \delta(x, y, z) d\sigma = \iint_G z d\sigma = \iint_D z\sqrt{1 + (\varphi_x^{`})^2 + (\varphi_y^{`})^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dxdy.$$

Переходячи до полярних координат, одержуємо:

$$m = \iint_D r^2\sqrt{1 + 4r^2}\, rdrd\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3\sqrt{1 + 4r^2}\, dr = 2\pi\int_0^1 r^3\sqrt{1 + 4r^2}\, dr =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u^2 = 1 + 4r^2 \\ rdr = \dfrac{udu}{4} \\ u_1 = 1, u_2 = \sqrt{5} \end{array} \right| = 2\pi\int_1^{\sqrt{5}} \frac{u^2 - 1}{4} u \frac{udu}{4} = \frac{\pi}{8}\int_1^{\sqrt{5}} (u^2 - 1)u^2 du = \frac{\pi}{8}\int_1^{\sqrt{5}} (u^4 - u^2) du =$$

$$= \frac{\pi}{8}\left[\left(\frac{25\sqrt{5}}{5} - \frac{5\sqrt{5}}{3}\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{8}\left(\frac{10\sqrt{5}}{3} + \frac{2}{15}\right) = \frac{\pi(25\sqrt{5} + 1)}{60}.$$

Приклад 85. Знайти центр мас частини сферичної оболонки $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, що розташована в першому октанті та має постійну густину δ_0.

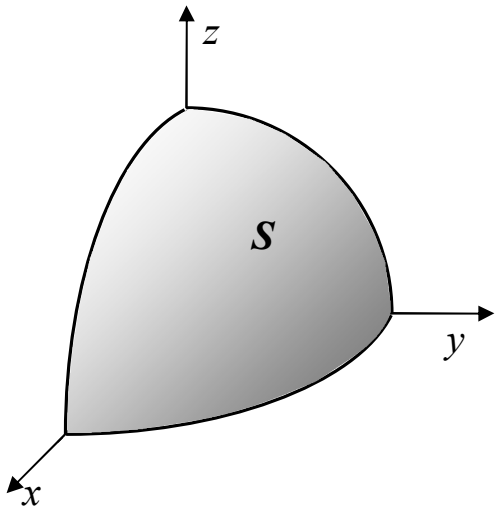


Рисунок 6.4

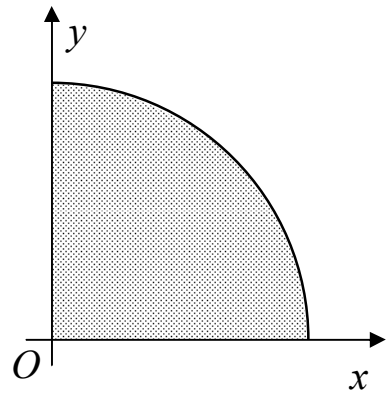


Рисунок 6.5

Розв'язання. Маса заданої частини сфери (рис. 6.4) дорівнює

$$m=\frac{1}{8}\iint\limits_G \delta_0 d\sigma=\frac{\delta_0}{8}\iint\limits_G d\sigma=\frac{\delta_0}{8}\cdot 4\pi a^2=\frac{\delta_0\pi a^2}{2}.$$

Обчислимо статичний момент M_{yz}.

$$M_{yz}=\iint\limits_G x\delta(x,y,z)d\sigma=\delta_0\iint\limits_G xd\sigma=\delta_0\iint\limits_D x\sqrt{1+(\varphi_x^{`})^2+(\varphi_y^{`})^2}dxdy,$$

де проекція D поверхні на площину xOy є частиною круга, що лежить в першому квадранті (рис. 6.5).

Оскільки

$$\varphi_x^{`}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \varphi_y^{`}=-\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

то

$$\sqrt{1+(\varphi_x^{`})^2+(\varphi_y^{`})^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Звідси знаходимо вираз для статичного моменту M_{yz}:

$$M_{yz}=\delta_0 a\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Далі зручно перетворити інтеграл у полярні координати:

$$M_{yz}=\delta_0 a\iint\limits_D \frac{r\cos\varphi\, rdrd\varphi}{\sqrt{a^2-r^2}}=\delta_0 a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^a\frac{r^2dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=\delta_0 a(\sin\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_a^0\frac{a^2-r^2-a^2dr}{\sqrt{a^2-r^2}}=$$

$$=\delta_0 a\left[\int\limits_a^0\sqrt{a^2-r^2}dr-a^2\int\limits_a^0\frac{dr}{\sqrt{a^2-r^2}}\right]=$$

$$\delta_0 a\left[\left(\frac{1}{2}r\sqrt{a^2-r^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{r}{a}\right)\Bigg|_a^0-a^2\arcsin\frac{r}{a}\Bigg|_a^0\right]=\delta_0 a\left[-\frac{\pi a^2}{4}+\frac{\pi a^2}{2}\right]=\frac{\delta_0\pi a^3}{4}.$$

Знаходимо абсцису центра мас:

$$x_c=\frac{M_{yz}}{m}=\frac{\frac{\delta_0\pi a^3}{4}}{\frac{\delta_0\pi a^2}{2}}=\frac{a}{2}.$$

Із урахуванням симетрії, інші координати центра мас мають ті ж самі значення. Отже, координати центра мас оболонки мають вигляд:

$$C=\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right).$$

Приклад 86. обчислити момент інерції відносно осі OZ однорідної сферичної оболонки $x^2+y^2+z^2=1,\ (z\ge 0)$ з густиною δ_0.

Розв'язання. Момент інерції I_z знаходять за формулою

$$I_z=\iint\limits_G (x^2+y^2)\delta(x,y,z)d\sigma=\delta_0\iint\limits_G (x^2+y^2)d\sigma,$$

де поверхня G – півсфера $x^2+y^2+z^2=1,(z\ge 0)$.

Оскільки поверхня верхньої півсфери задається функцією $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, то елемент площі поверхні дорівнює

$$d\sigma=\sqrt{1+(\varphi_x^{`})^2+(\varphi_y^{`})^2}dxdy=\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2-y^2}+\frac{y^2}{1-x^2-y^2}}dxdy=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Тоді поверхневий інтеграл виражається через подвійний інтеграл наступним чином:

$$I_z=\delta_0\iint\limits_G (x^2+y^2)d\sigma=\delta_0\iint\limits_D \frac{(x^2+y^2)dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

де областю інтегрування D є круг $x^2+y^2\le 1$. Переходячи до полярних координат, одержуємо:

$$I_z=\delta_0\iint\limits_D \frac{r^3drd\varphi}{\sqrt{1-r^2}}=\delta_0\int\limits_0^2 d\varphi\int\limits_0^1\frac{r^3dr}{\sqrt{1-r^2}}=2\pi\delta_0\int\limits_0^1\frac{r^3dr}{\sqrt{1-r^2}}=\left|\begin{matrix} t=1-r^2\\ rdr=-\dfrac{dt}{2}\\ t_1=1,t_2=0\end{matrix}\right|=$$

$$=2\pi\delta_0\int\limits_1^0\frac{(1-t)\left(-\dfrac{dt}{2}\right)}{\sqrt{t}}=\pi\delta_0\int\limits_1^0\frac{(t-1)dt}{\sqrt{t}}=\pi\delta_0\left[\int\limits_1^0\sqrt{t}dt-\int\limits_1^0\frac{dt}{\sqrt{t}}\right]=$$

$$=\pi\delta_0\left[\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_1^0\right]=\pi\delta_0\left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{t^3}-2\sqrt{t}\right)\Bigg|_1^0\right]=\frac{4}{3}\pi\delta_0.$$

Приклад 87. Знайти момент інерції півсфери $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ відносно осі Oz.

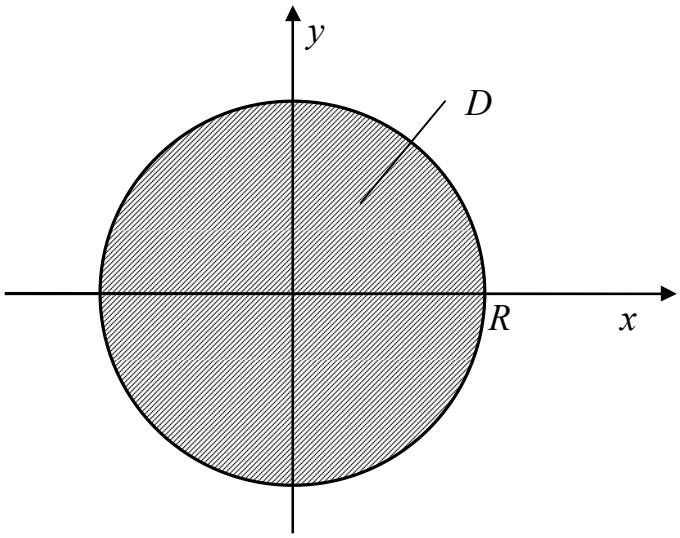


Рисунок 6.6

Розв`язання. Проекцією півсфери на площину xOy є круг радіуса R (рис. 6.6). Оскільки

$$d\sigma = \frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

то момент інерції півсфери G відносно осі Oz:

$$I_{OZ} = \iint_D (x^2 + y^2)\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

де $D -$ круг радіуса R. Переходимо до полярних координат:

$$I_{OZ} = R\iint_D \frac{r^3 drd\varphi}{\sqrt{R^2 - r^2}} = R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \frac{r^3 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 2\pi R\int_0^R \frac{r^3 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \left| \begin{array}{c} r = R\sin t, dr = R\cos tdt \\ R^2 - r^2 = R^2\cos^2 t \\ t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 tdt = 2\pi R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sin tdt = \left| \begin{array}{c} u = \cos t, du = -\sin tdt \\ \sin^2 t = 1 - u^2 \\ u_1 = 1, \quad u_2 = 0 \end{array} \right| =$$

$$= 2\pi R^4 \int_1^0 (1 - u^2)(-du) = 2\pi R^4 \int_0^1 (1 - u^2)du =$$

$$= 2\pi R^4 \left(u - \frac{u^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = 2\pi R^4 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. [5] № 233 Знайти момент інерції параболоїда $z=\dfrac{x^2+y^2}{2}$ відносно осі Oz при $0\le z\le 1$.

Відповідь: $\dfrac{4\pi(1+6\sqrt{3})}{15}$.

Вказівка: проекцією параболоїда на площину xOy буде круг $x^2+y^2\le 2$.

$$I_{oz}=\iint\limits_{x^2+y^2\le 2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

Перейти до полярних координат.

2. [5] № 231 Знайти масу поверхні сфери й статичний момент M_{xy} верхньої півсфери, якщо поверхнева густина в кожній точці дорівнює відстані цієї точки до вертикального діаметра.

Відповідь: $m=\pi^2R^3, M_{xy}=\dfrac{2}{3}\pi R^4$.

Вказівка: поверхнева густина $\delta=\sqrt{x^2+y^2}$.

Розглянемо верхню півсферу $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

Тоді $d\sigma=\dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}, m=2\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\dfrac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$,

$$M_{xy}=\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

3. Знайти центр ваги однорідної поверхні параболоїда $y^2+z^2=10x$, яка відсічена площиною $x=10$ (рис. 6.7).

Відповідь: $x_C=\dfrac{25\sqrt{5}+1}{5\sqrt{5}-1}, y_C=z_C=0$.

Вказівка: $M_{yz}=\dfrac{\delta}{50}\iint\limits_{y^2+z^2\le 100}(y^2+z^2)\cdot\sqrt{25+y^2+z^2}\,dydz.$

Переходимо до полярної системи координат:

$M_{yz}=\dfrac{\delta}{50}\iint\limits_D r^2\sqrt{25+r^2}\,rdrd\varphi.$ Внутрішній інтеграл $\int\limits_0^{10}r^2\sqrt{25+r^2}\,rdr$

обчислюється за допомогою підстановки $t=\sqrt{25+r^2}$, $m=\dfrac{50}{3}\pi\delta(5\sqrt{5}-1)$.

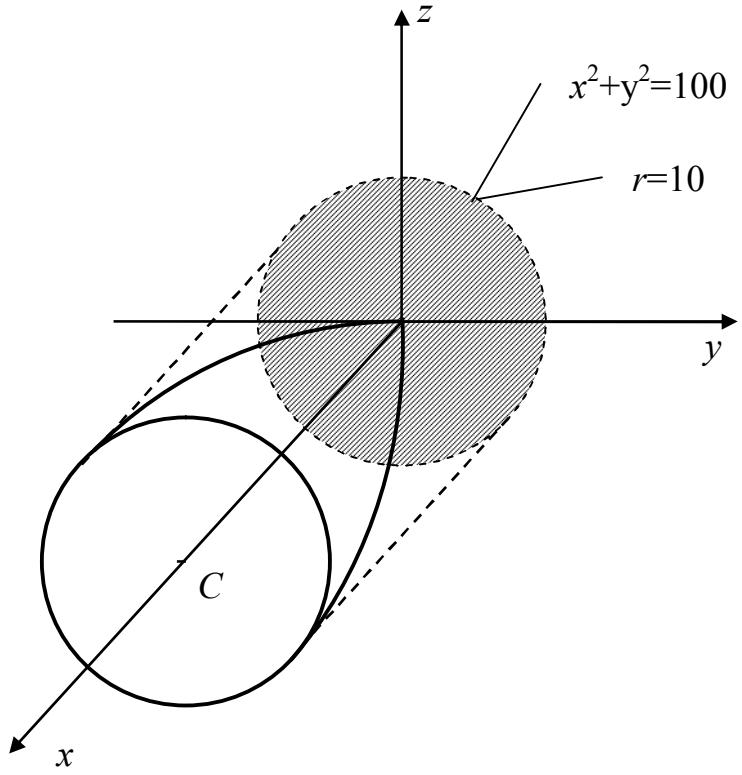


Рисунок 6.7

Питання для самоперевірки

1 У чому полягає геометричне застосування поверхневих інтегралів?

2 Наведіть формули для знаходження координат центра ваги поверхні.

3 За якими формулами знаходять статистичні моменти поверхні відносно координатних площин і моменти інерції поверхні відносно осей координат?

ДОДАТОК А

Варіанти підсумкового завдання з розділу «Кратні та криволінійні інтеграли»

Варіант 1

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_{3}^{5} dx \int\limits_{\frac{3x+1}{2}}^{\frac{3x+4}{2}} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \frac{x^2}{y} dxdy$, якщо $Д\{y=2x, y=3x, y=1, y=2\}$.
3. Обчислити $\int\limits_{L} (xy-y^2)dx + xdy$, де L – дуга параболи $y=2x^2$ від точки $\mathrm{O}(0;0)$ до точки $\mathrm{A}(1;2)$.
4. Обчислити статичний момент першого витка конічної гвинтової лінії $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$ відносно площини xOy, якщо густина її пропорційна квадрату відстані від цієї площини.

Варіант 2

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_{-3}^{-1} dy \int\limits_{0}^{3-y} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} y^2 dxdy$, якщо $Д\{xy=1, y=x, y=2, x=0\}$.
3. Знайти статичні моменти відносно координатних осей чверті круга з радіусом 3 одиниці, якщо густина матеріалу дорівнює x.
4. Перевірити, чи є вираз $\left(3x^2y - \frac{y^3}{3}\right)dx + (x^3 - xy^2)dy$ повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$ і у випадку стверджуючої відповіді знайти $U(x,y)$.
5. Обчислити $\int\limits_{L} ye^{-x} ds$, де L – дуга кривої $x=\ln(1+t^2)$, $y=arctgt-t+8$ між точками, для яких $t_1=0$ і $t_2=1$.

Варіант 3

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\frac{1}{2}x+1}^{7-x} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} (x-3xy^2)dxdy$, якщо $Д\{y=x, y=0, x=1\}$.

3. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого поверхнею $z=\sqrt{x^2+y^2}$ і площиною $z=4$.
4. Знайти функцію $U(x,y)$ за її повним диференціалом $du=\left(3x^2y+\frac{1}{y}\right)dx+\left(x^3-\frac{x}{y^2}\right)dy$.
5. Обчислити $\int\limits_L xyzds$, де L – дуга кривої $x=\frac{1}{2}t^2$, $y=t$, $z=\frac{1}{3}\sqrt{8t^3}$ між точками, для яких $t_1=0$ і $t_2=1$.

Варіант 4

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,y)dy+\int\limits_2^3 dx\int\limits_x^{6-x} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)}\left(x^2-2y\right)dxdy$, якщо $Д\{y=\ln x, y=1, y=0, x=0\}$.
3. На фігурі, обмеженій колом $x^2+y^2=4$, розподілена маса таким чином, що густина її пропорційна відстані від осі абсцис, причому при $y=1$ вона дорівнює 3. Знайти масу всієї фігури.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)}\frac{2xdx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy$, переконавшись, що він не залежить від шляху інтегрування.
5. Знайти момент інерції відносно осі Oz першого витка гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, якщо густина її в кожній точці дорівнює одиниці.

Варіант 5

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^{\sqrt{6x-x^2}} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} r\sin\varphi drd\varphi$, якщо $Д\left\{r^2=\sin 2\varphi\right\}$.
3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=y^2$, $2x+y=2$, $z=0$ і $x=0$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OABO}\left(3x^2+y\right)dx+\left(x-2y^2\right)dy$, де $OABO$ – периметр трикутника з вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$ і $B(0;1)$.
5. Знайти масу всієї астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, якщо її густина $\gamma=|xy|$.

Варіант 6

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-2\sqrt{2x}}^{2\sqrt{2x}} f(x,y)dy$.
2. Плоске кільце обмежене двома концентричними колами, радіуси яких 2 і 3. Знайти масу кільця, якщо відомо, що густина матеріалу обернено пропорційна відстані від центра кіл і на колі внутрішнього круга дорівнює одиниці.
3. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} e^x dxdy$, якщо $Д\{y = e^x, y = 2, x = 0\}$.
4. Показати, що криволінійний інтеграл $\int\limits_{(0;1)}^{(2;3)} (x+y)dx + (x-y)dy$ не залежить від шляху інтегрування, і обчислити його.
5. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{1+\frac{x}{R}}ds$, де L – дуга кривої $x = R\sin^2 t$, $y = R\sin t\cos t$, $z = R\cos t$ між точками, для яких $t_1 = 0$ і $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

Варіант 7

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x}} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \frac{y^3}{x^2+y^2}dxdy$, якщо $Д\{y = x, y = 2, y = 4, x = 0\}$.
3. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{4x - x^2}$ і $y = 0$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx + xdy$, де L – четверта частина дуги кола $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.
5. Обчислити $\int\limits_{AB} \frac{yds}{\sqrt{x}}$, якщо AB – дуга півкубічної параболи $y^2 = \frac{4}{9}x^3$ від точки $A(3;2\sqrt{3})$ до точки $B\left(8;\frac{32}{3}\sqrt{2}\right)$.

Варіант 8

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y^2} f(x,y)dx$.

2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \cos\left(x^2+y^2\right)dxdy$, якщо $Д\left\{\frac{\pi}{2} \le x^2+y^2 \le 2\pi\right\}$.
3. Обчислити момент інерції однорідної фігури, обмеженої прямими $x+y=2$, $x=2$, $y=2$, відносно осі абсцис.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \left(y^2+x\right)dx + \frac{2x}{y}dy$ уздовж лінії $y=e^x$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(1;e)$.
5. Знайти масу контуру еліпса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1}=1$, якщо лінійна густина його в кожній точці $M(x,y)$ дорівнює $|y|$.

Варіант 9

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} r^2 \sin\varphi dr d\varphi$ відносно області (Д), обмеженої полярною віссю і лінією $r=2(1+\cos\varphi)$, якщо $0 \le \varphi \le \pi$.
3. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої лініями $y^2=x$ і $x^2=y$.
4. Знайти функцію $U(x,y)$ за її повним диференціалом $du=\left(e^{2y}-5y^3e^x\right)dx+\left(2xe^{2y}-15y^2e^x\right)dy$.
5. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{1+4y+9xz}ds$, де L – дуга кривої $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ між точками, для яких $t_1=0$ і $t_2=1$.

Варіант 10

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} xy^2 dxdy$, якщо $Д\{y-2x=0, x-2=0, y=0\}$.
3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2$ і $2z=x^2+y^2+z^2$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2ydy$, де L – дуга еліпса $x=\cos t$, $y=2\sin t$ від $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{2}$.

5. Знайти координати центра ваги однорідної дуги кривої $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ між точками, абсциси яких $x_1=0$ і $x_2=\ln 2$.

Варіант 11

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-x^2}^{x^2} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} xy^2dxdy$, якщо $Д\left\{x^2+(y-1)^2\ge 1, x^2+y^2\le 4y\right\}$.
3. Знайти момент інерції однорідної фігури, обмеженої лініями $y=1+x^2$, $y=2x$, $x=0$ відносно осі ординат.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L x^2dx+\dfrac{dy}{y^2}$, де L – дуга кривої $x=\dfrac{1}{y}$ від точки $A(1;1)$ до точки $B\left(4;\dfrac{1}{4}\right)$.
5. Обчислити масу однорідної дуги кривої $y=1-\ln\cos x$ між точками, абсциси яких $x_1=0$ і $x_2=\dfrac{\pi}{4}$.

Варіант 12

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} e^{x^2+y^2}dxdy$, якщо $Д\left\{x^2+y^2\le 1\right\}$.
3. Знайти статичні моменти однорідної фігури, обмеженої лініями $y=x^2$, $y=2x$, $x+y=2$ і $y=0$, відносно осей координат.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\oint\limits_L (x^2-y)dx$ уздовж периметра прямокутника, обмеженого прямими $x=0$, $y=0$, $x=1$ і $y=2$.
5. Знайти масу всієї кардіоїди $r=a(1+\cos\varphi)$, якщо її густина $\gamma=k\sqrt{r}$.

Варіант 13

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{0,5x}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} e^{\frac{y}{x}}dxdy$, якщо $Д\left\{y=x^2, y=0, x=1, x=2\right\}$.

3. Знайти момент інерції однорідної круглої пластинки радіуса 2 одиниці відносно її центра.
4. Показати, що вираз $(3x^2y+1)dx+(x^3-1)dy$ є повним диференціалом деякої функції $U(x,y)$ і знайти цю функцію.
5. Обчислити $\int\limits_L (2x+4y-4z+7)ds$, де L – відрізок прямої між точками $M_1(8;9;3)$ і $M_2(6;10;5)$.

Варіант 14

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} xy^2 dxdy$, якщо $Д\{y=x^2, y=0, x=-2\}$.
3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4$, $x+y+z=4$ і $z\geq 0$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \frac{y}{x}dx+xdy$ уздовж лінії $y=\ln x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(e;1)$.
5. Знайти координати центра ваги однорідної дуги астроїди $x=a\cos^3 t$ і $y=a\sin^3 t$, розташованої в першому квадранті.

Варіант 15

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^4 dy \int\limits_y^{10-y} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} (x^2+2y)dxdy$, якщо $Д\{y=x, y^2=x\}$.
3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=4$, $y+z=2$ і $z\geq 0$.
4. За допомогою криволінійного інтеграла обчислити площу фігури, обмеженої лінією $x=t^2-1$, $y=t^3-t$, якщо $-1\leq t\leq 1$.
5. Обчислити $\int\limits_L \sin^2 x\cos^3 x ds$, де L – дуга кривої $y=\ln\cos x$ між точками з абсцисами $x_1=0$ і $x_2=\frac{\pi}{4}$.

Варіант 16

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{0,5(3-x)} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} e^{-x^2-y^2} dxdy$, якщо $Д\{x^2+y^2 \le 9\}$.
3. Знайти масу квадратної пластинки зі стороною $2a$, якщо густина матеріалу пластинки пропорційна квадрату відстані від точки перетину діагоналей і на кутах квадрата дорівнює одиниці.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x^3+y)dx + (x+y^3)dy$, де L – ламана ABC, причому $A(1;1)$, $B(3;1)$ і $C(3;5)$.
5. Знайти моменти інерції відносно координатних осей і початку координат четвертої частини однорідного кола $y = 2\cos t$, $z = 2\sin t$, яка розташована в першому квадранті площини yOz.

Варіант 17

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, якщо $Д\{(x-1)^2+y^2 \le 1, x^2+y^2 \ge 1\}$.
3. Знайти координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої лінією $y = 2x - 3x^2$ і віссю абсцис.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \frac{x^2+1}{y}dx - \frac{x-2y^2}{y^2}dy$ від точки $A(0;1)$ до точки $B(2;-1)$ уздовж прямої, яка проходить через ці точки.
5. Знайти масу лінії $y = \ln x$ між точками з абсцисами $x_1 = \sqrt{3}$ і $x_2 = 2\sqrt{2}$, якщо густина лінії в кожній точці дорівнює квадрату абсциси точки.

Варіант 18

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_2^3 dy \int\limits_{y-1}^{5} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} r^3 drd\varphi$, якщо $Д\left\{r^2 = \cos 2\varphi, \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}$ і полярною віссю.
3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4 + x$ і $x + 3y = 0$.

4. У кожній точці силового поля сила має напрямок від'ємної півосі ординат і дорівнює квадрату абсциси точки прикладання. Знайти роботу поля при переміщенні одиничної маси вздовж параболи $y^2 = 1 - x$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;1)$.
5. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{2y}ds$, де L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Варіант 19

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{2x-x^2}}^2 f(x, y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \frac{dxdy}{(x^2 + y)^2}$, якщо $Д\{0 \le x \le 2, 1 \le y \le 4\}$.
3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $2z = x^2 + y^2$ і $6 - z = x^2 + y^2$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L x^2 ydx + y^2 xydy$, де L – дуга кривої $x = t$, $y = t^3$ і $0 \le t \le 1$.
5. Знайти масу дуги параболи $y = \frac{x^2}{2}$, розташованої між точками $\left(1; \frac{1}{2}\right)$ і $(2;2)$, якщо її лінійна густина $\gamma(x, y) = \frac{y}{x}$.

Варіант 20

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x, y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} x\cos ydxdy$, якщо $Д\left\{y = x^2, y = 0, x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right\}$.
3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею $z + x^2 + y^2 - 4 = 0$ і площиною $z = 0$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydy - y^2 dx$, де L – дуга еліпса $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$ і $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
5. Обчислити статичні моменти відносно координатних осей прямолінійного відрізка AB, що з'єднує точки $A(1;1)$ і $B(2;2)$, якщо густина в кожній точці відрізка дорівнює добутку координат цієї точки.

Варіант 21

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\frac{2}{x}} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(D)} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, якщо $D\{x^2+y^2 \ge \pi^2, x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$.
3. Обчислити площину фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $4y = x^2$ і $x = \pm 2$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$, де L – пряма $2x + y = 2$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.
5. Знайти масу дуги конічної гвинтової лінії $x = ae^t \cos t$, $y = ae^t \sin t$, $z = ae^t$, якщо її густина $\gamma = ke^t$ від точки $O(0;0;0)$ до точки *A(a;0;a)*.

Варіант 22

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(D)} \sin(x+2y)dxdy$, якщо $D\left\{x+y=\frac{\pi}{2}, x=0, y=0\right\}$.
3. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$ і $z = 9$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OA} (xy-x)dx + \frac{1}{2}x^2 dy$ вздовж параболи $y = 2\sqrt{x}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(1;2)$.
5. Обчислити масу кривої $x = \ln(1+t^2)$, $y = 2arctgt - t$ на ділянці від $t_1 = 0$ до $t_2 = 1$, якщо лінійна густина $\gamma(x,y) = \frac{y}{e^x}$.

Варіант 23

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(D)} r\sin\gamma\, drd\gamma$, якщо $D\{r = 2+\cos\gamma, r = 1\}$.
3. Обчислити подвійним інтегруванням площу фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e^{2x}$ і $x = 1$.
4. Силове поле утворене силою $F(x,y)$, рівною відстані точки її прикладання від початку координат. Знайти роботу сили поля,

витрачену на переміщення матеріальної точки одиничної маси вздовж дуги параболи $y^2 = 8x$ від точки $M(2;4)$ до точки $N(4;4\sqrt{2})$.

5. Обчислити $\int\limits_L \frac{y}{x+3z} ds$, якщо L – дуга лінії $x = t$, $y = \frac{t^3}{\sqrt{2}}$, $z = \frac{t^3}{3}$ від точки $O(0;0;0)$ до точки $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{2\sqrt{2}}{3})$.

Варіант 24

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y^2-4}^{3y} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(D)} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, якщо $D\left\{\frac{\pi^2}{4} \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2\right\}$.
3. Обчислити подвійним інтегруванням площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 4x + 4$ і $x = 0$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} (x^2 - y)dx - (x - y^2)dy$ від точки $A(1;2)$ до точки $B(3;5)$ вздовж ламаної лінії, складеної з відрізків прямих $x = 3$ і $y = 2$.
5. Знайти координати центра ваги першого піввитка гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, якщо густина її стала.

Варіант 25

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{x} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_{\frac{x^2}{9}}^{1} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, якщо $Д\{1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$.
3. Обчислити подвійним інтегруванням площу фігури, обмеженої лініями $y = \cos 2x$, $y = \sin 2x$, $x = 0$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydx + y^2dy$, де L – дуга кривої $x = t^2$, $y = t$ і $1 \le t \le 2$.
5. Обчислити масу однорідної дуги кривої $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$, якщо $0 \le y \le e$.

Варіант 26

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x+1}^{4-x^2} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} e^{\frac{x}{y}} dxdy$, якщо $Д\{x = y^2, x = 0, y = 1, y = 2\}$.
3. Знайти статичні моменти однорідного круга радіуса 2 одиниці відносно його дотичної.
4. Показати, що криволінійний інтеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;-1)} \left(y^2 - 21yx^2\right)dx + \left(2xy - 7x^3 + 6y^2\right)dy$ не залежить від шляху інтегрування, і обчислити його.
5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x+y)ds$, де L – права пелюстка лемніскати $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Варіант 27

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \cos^2(x+y)dxdy$, якщо $Д\left\{y = \frac{x}{2}, y = \pi, x = 0\right\}$.
3. Знайти координати центра ваги однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z^2 = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 9$ і площиною $z = 0$ $(z > 0)$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 ydy$, де L – дуга параболи $4x + y^2 = 4$ від точки $A(1;0)$ до точки $B(0;2)$.
5. Знайти масу всієї лемніскати $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$, якщо її густина $\gamma = kr$.

Варіант 28

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_1^2 dy \int\limits_{\frac{1}{y}}^{y} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} r^2 drd\varphi$, якщо $Д\{r = 3\sin 2\varphi\}$.
3. Знайти масу квадратичної пластинки зі стороною $\sqrt{2}$, якщо її поверхнева густина пропорційна сумі відстаней до діагоналей.
4. Обчислити за допомогою криволінійного інтеграла площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = 1$.

5. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)^2 ds$, де L – дуга логарифмічної спіралі $r = ae^{m\varphi}$ $(m>0)$ від точки $A(0;a)$ до точки $O(-\infty;0)$.

Варіант 29

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{4}x^2}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} \left(3x^2y+y^3\right)dxdy$, якщо $Д\left\{y=\dfrac{x}{2}, y=x, x=4\right\}$.
3. Обчислити подвійним інтегруванням площу фігури, обмеженої лінією $\left(x^2+y^2\right)^2 = 2xy$.
4. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \dfrac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$ від точки $A(1;2)$ до точки $B(3;6)$ вздовж прямої, яка проходить через ці точки.
5. Знайти координати центра ваги однорідної дуги кривої $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ $(-\infty \le t \le 0)$.

Варіант 30

1. Змінити порядок інтегрування в $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{\sqrt{4-y}} f(x,y)dx$.
2. Обчислити $\iint\limits_{(Д)} (x+2y)dxdy$, якщо $Д\left\{y=-2, y^2=x, x=0\right\}$.
3. Обчислити момент інерції однорідного півкруга, з радіусом 4 одиниці, відносно його діаметра.
4. Знайти функцію $U(x,y)$ за її повним диференціалом $du = \left(12x^2y+\dfrac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3-\dfrac{2x}{y^3}\right)dy$.
5. Обчислити $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, де L – коло $x^2+y^2=ax$.

ДОДАТОК Б

Варіанти підсумкового завдання з розділу «Поверхневі інтеграли»

Задача 1. Обчислити масу частини площини σ, розташованої в 1-му октанті, поверхнева густина якої задана функцією $\rho = \rho(x, y, z)$.

1 $\rho = x + z,$ $\sigma \sim x + \frac{y}{2} + 4z = 1.$

2 $\rho = z + 2y,$ $\sigma \sim x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

3 $\rho = 4x + z,$ $\sigma \sim \frac{x}{3} + y + z = 1.$

4 $\rho = x + 2y + 3z,$ $\sigma \sim \frac{x}{3} + y + 2z = 1.$

5 $\rho = 3x + 2y,$ $\sigma \sim x + \frac{y}{3} + z = 1.$

6 $\rho = x + y + z,$ $\sigma \sim x + y + \frac{z}{3} = 1.$

7 $\rho = 8x + 2z,$ $\sigma \sim 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

8 $\rho = 2y + 3z,$ $\sigma \sim \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1.$

9 $\rho = x + y + z,$ $\sigma \sim \frac{x}{3} + y + \frac{z}{4} = 1.$

10 $\rho = x - y + 5z,$ $\sigma \sim 3x + y + \frac{z}{9} = 1.$

11 $\rho = 2y + 3z,$ $\sigma \sim x + y + \frac{z}{2} = 1.$

12 $\rho = z + y,$ $\sigma \sim 2x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

13 $\rho = 15x - 2y,$ $\sigma \sim \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{9} = 1.$

14 $\rho = 2x + z,$ $\sigma \sim x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

15 $\rho = 4x + y - z,$ $\sigma \sim x + \frac{y}{3} + 4z = 1.$

16 $\rho = x + 3y,$ $\sigma \sim \frac{x}{5} + y + z = 1.$

17 $\rho = 7x + y,$ $\sigma \sim \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + z = 1.$

18 $\rho = 4x + 7z,$ $\sigma \sim 3x + \frac{y}{9} + z = 1$

19 $\rho = 5x + 7,$ $\sigma \sim \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + z = 1$

20 $\rho = 3x + 7y,$ $\sigma \sim 2x + \frac{y}{3} + 2z = 1$

21 $\rho = 8x + 3z,$ $\sigma \sim 2x + y + \frac{z}{3} = 1.$

22 $\rho = z + 2x,$ $\sigma \sim 2x + \frac{y}{6} + z = 1.$

23 $\rho = x + y + z,$ $\sigma \sim 8x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

24 $\rho = 3x + 2y + z,$ $\sigma \sim \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{3} = 1.$

25 $\rho = 9x + 8z,$ $\sigma \sim 2x + 8y + \frac{z}{3} = 1.$

26 $\rho = x + 10y,$ $\sigma \sim \frac{x}{3} + 2y + z = 1.$

27 $\rho = x + 2y + 11z,$ $\sigma \sim 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

28 $\rho = 4x + 4z,$ $\sigma \sim \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1.$

29 $\rho = 10x + 9z,$ $\sigma \sim x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1.$

30 $\rho = 4y + 3z,$ $\sigma \sim \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + z = 1.$

Задача 2. Обчислити потік векторного поля $\vec{F}$ через частину верхньої сторони площини σ, вирізаної координатними площинами $x = 0, y = 0$ $z = 0.$

1 $\vec{F} = 2z\vec{i} + (y - x)\vec{j} + 3x\vec{k},$ $\sigma \sim -2x + y + 2z + 1 = 0.$

2 $\vec{F} = (x - z)\vec{i} + (y + x)\vec{j} + (y + z)\vec{k},$ $\sigma \sim x - y + 2z - 4 = 0.$

3 $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (y + z)\vec{k},$ $\sigma \sim 3x + y - 3z - 3 = 0.$

4 $\vec{F} = (x - y)\vec{i} - 3x\vec{j} + 2z\vec{k},$ $\sigma \sim x + 2y - 2z - 4 = 0.$

5 $\vec{F} = (2x + y)\vec{i} + (x - 2)\vec{j} + (z + 3x)\vec{k},$ $\sigma \sim -x + y + 2z - 2 = 0.$

6 $\vec{F} = (2y + z)\vec{i} + (x - y)\vec{j} + (y - 2z)\vec{k},$ $\sigma \sim x - y + 2z - 3 = 0.$

7 $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + z\vec{j} + (2 - x)\vec{k},$ $\sigma \sim 3x - y - 2z - 6 = 0.$

8 $\vec{F}=(x+y+z)\vec{i}+x\vec{j}+(x-y)\vec{k},$ $\sigma\sim 2x+y-2z-2=0.$

9 $\vec{F}=(x-y-3)\vec{i}+x\vec{j}+3\vec{k},$ $\sigma\sim 2x-3y+2z+6=0.$

10 $\vec{F}=(2y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(y-2z)\vec{k},$ $\sigma\sim x-y+z+2=0.$

11 $\vec{F}=(x-2z)\vec{i}+y\vec{j}+3\vec{k},$ $\sigma\sim x+y-2z+1=0.$

12 $\vec{F}=(-x+y)\vec{i}+(y+z)\vec{j}+(2y+2z)\vec{k},$ $\sigma\sim -x+y+2z-1=0.$

13 $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}-4z\vec{k},$ $\sigma\sim x-y-+2z-4=0.$

14 $\vec{F}=(y+z)\vec{i}+(3x+y)\vec{j}+(x+y)\vec{k},$ $\sigma\sim x-2y+z-2=0.$

15 $\vec{F}=2y\vec{i}+(y-x)\vec{j}+3z\vec{k},$ $\sigma\sim -x+y+2z+1=0.$

16 $\vec{F}=(2x-z)\vec{i}+(y-x)\vec{j}+x\vec{k},$ $\sigma\sim 3x-y+z-2=0.$

17 $\vec{F}=(x-2z)\vec{i}+(y-2z)\vec{j}+2z\vec{k},$ $\sigma\sim 2x+y+z+1=0.$

18 $\vec{F}=(y-x)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k},$ $\sigma\sim x+2y-z-4=0.$

19 $\vec{F}=2y\vec{i}+(2y-3z)\vec{j}+3y\vec{k},$ $\sigma\sim x+y+z+1=0.$

20 $\vec{F}=(2y+z)\vec{i}+y\vec{j}+x\vec{k},$ $\sigma\sim 2x+y+2z-3=0.$

21 $\vec{F}=(x+y+z)\vec{i}-(x+y)\vec{j}+(x+z)\vec{k},$ $\sigma\sim 3x-2y+z+1=0.$

22 $\vec{F}=(y+2z)\vec{i}-x\vec{j}+(x-z)\vec{k},$ $\sigma\sim x-y-z+2=0.$

23 $\vec{F}=y\vec{i}+y\vec{j}+2z\vec{k},$ $\sigma\sim -x+y+z+3=0.$

24 $\vec{F}=3x\vec{i}+(4z-2y+x)\vec{k},$ $\sigma\sim x+3y+2z+1=0.$

25 $\vec{F}=(2x+3y)\vec{i}+(4z-1)\vec{j}+2\vec{k},$ $\sigma\sim 4x-y+z-2=0.$

26 $\vec{F}=x\vec{i}+-y\vec{j}+z\vec{k},$ $\sigma\sim x+y-2z+3=0.$

27 $\vec{F}=z\vec{i}+(y+z)\vec{j}+x\vec{k},$ $\sigma\sim x+4y-2z+3=0.$

28 $\vec{F}=(2y+x)\vec{i}+z\vec{k},$ $\sigma\sim x+y+z+2=0.$

29 $\vec{F}=(z-y)\vec{i}+(x+y)\vec{j}+z\vec{k},$ $\sigma\sim x-y-z-1=0.$

30 $\vec{F}=(x+y+z)\vec{i}+y\vec{k},$ $\sigma\sim -x+y-2z+1=0.$

Задача 3. Обчислити поверхневі інтеграли.

1 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$, S – частина поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, яка вирізана циліндром $x^2+y^2=2x$.

2 $\iint\limits_S (z+2x+\frac{4}{3}y)dS$, S – частина площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, яка знаходиться в першому октанті.

3 $\iint\limits_S xdS$, S – частина сфери $x^2+y^2+z^2=a^2$, яка знаходиться в першому октанті.

4 $\iint\limits_S ydS$, S – півсфера $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

5 $\iint\limits_S x^2y^2dS$, S – півсфера $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.

6 $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, S – поверхня $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$.

7 $\iint\limits_S (x^2+y^2)dS$, S – границя тіла $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$.

8 $\iint\limits_S \frac{dS}{1+x^2+y^2}$, S – границя тетраедра $x+y+z\le 1,\ x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad z\ge 0.$

9 $\iint\limits_S |xyz|dS$, S – частина поверхні $z=x^2+y^2$, яка відсікається площиною $z=1$.

10 $\iint\limits_S zdS$, S – частина параболоїда $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $0\le z\le 1$.

11 $\iint\limits_S zdS$, S – частина поверхні $x^2+z^2=2az$, $(a>0)$, вирізана поверхнею $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

12 $\iint\limits_S \frac{z}{a}dS$, S – півсфера $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\ge 0$.

13 $\iint\limits_S (xy+yz+zx)dS$, S – частина конічної поверхні $z=\sqrt{x^2+y^2}$, яка вирізана поверхнею $x^2+y^2=2ay$.

14 $\iint\limits_S \frac{dS}{r^2}$, S – сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$, а r – відстань від точки поверхні до початку координат.

15 $\iint\limits_S \frac{dS}{r^2}$, S – поверхня циліндра $x^2+y^2=a^2$, обмежена площинами $z=0$ і $z=h$, а r – відстань від точки поверхні до початку координат.

16 $\iint\limits_S \frac{dS}{r}$, S – частина гіперболічного параболоїда $z = xy$, обмежена циліндром $x^2 + y^2 = a^2$, а r – відстань від точки поверхні до осі Oz.

17 $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dS$, S – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

18 $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}dS$, S – поверхня конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \le z \le b)$.

19 $\iint\limits_S \frac{dS}{(1 + x + y)^2}$, S – границя тетраедра $x + y + z \le 1,\ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ z \ge 0.$

20 $\iint\limits_S xdS$, S – частина поверхні циліндра $x = 2y^2 + 1$ при $y \ge 0$, яка вирізана поверхнями $x = y^2 + z^2,\ \ x = 2,\ \ x = 3$.

21 $\iint\limits_S x^2y^2dS$, S – півсфера $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

22 $\iint\limits_S zdS$, S – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, яка знаходиться між поверхнями $z = 0,\ \ z = 1$.

23 $\iint\limits_S ydS$, S – частина поверхні циліндра $y = 2x^2 + 1$ при $x \ge 0$, яка вирізана поверхнями $y = y^2 + x^2,\ \ y = 2,\ \ y = 3$.

24 $\iint\limits_S x^2y^2zdxdy$, S – внутрішня сторона поверхні півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \le 0$.

25 $\iint\limits_S dxdy$, S – верхня сторона частини конуса $x^2 + y^2 = z^2$, при $0 \le z \le 1$.

26 $\iint\limits_S xdydz$, S – верхня сторона частини параболоїда $x^2 + y^2 = z$, при $0 \le z \le 3$.

27 $\iint\limits_S (y - z)dydz + (z - x)dxdz + (x - y)dxdy$, S – нижня сторона конічної поверхні $x^2 + y^2 = z^2$, при $0 \le z \le 3$.

28 $\iint\limits_S (x^2 + y^2)dxdy$, S – частина зовнішньої сторони циліндра $z = \sqrt{a^2 - x^2},\ \ 0 \le y \le b$.

29 $\iint\limits_S (xz^2 + y^2)dydz + (yx^2 + z^2)dxdz + (zy^2 + x^2)dxdy$, S – частина зовнішньої сторони конуса $1 - z = \sqrt{x^2 + y^2},\ \ z \ge 0$.

30 $\iint\limits_S x^3dydz + y^3dxdz + zdxdy$, S – частина внутрішньої сторони гіперболоїда $x^2 + y^2 - z^2 = 1, \quad 0 \le z \le 3$.

Бібліографічний список

1. Давидов М.О. Курс математичного аналізу. – К.: Вища шк., 1990.
2. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. II – М.: Наука, 1968.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: Т.I – М.: Наука, 1985.
4. Бермант А.Ф., Арамонович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1987.
5. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Ч.2. – М.: Высшая школа, 1986.
6. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Під ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Техніка, 2003.
7. Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.
8. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1978.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.

ЗМІСТ

Вступ 3
1 Подвійний інтеграл 4
1.1 Подвійний інтеграл. Теорема існування 4
1.2 Властивості подвійного інтеграла 4
1.3 Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах . . 5
1.4 Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах 13
1.5 Застосування подвійного інтеграла для розв'язання задач геометрії й механіки 21
2 Потрійний інтеграл 32
2.1 Потрійний інтеграл. Теорема існування 32
2.2 Властивості потрійного інтеграла 33
2.3 Обчислення потрійного інтеграла в прямокутних координатах . . 33
2.4 Обчислення потрійного інтеграла в циліндричних координатах . . 38
2.5 Обчислення потрійного інтеграла в сферичних координатах 40
2.6 Застосування потрійного інтеграла для розв'язання задач геометрії і механіки 43
3 Криволінійний інтеграл 53
3.1 Криволінійний інтеграл другого роду. Теорема існування 53
3.2 Властивості криволінійного інтеграла 54
3.3 Обчислення криволінійних інтегралів другого роду 55
3.4 Формула Гріна 58
3.5 Застосування криволінійного інтеграла другого роду до розв'язання задач геометрії й механіки 61
3.6 Незалежність криволінійного інтеграла від шляху інтегрування. Знаходження функції за її повним диференціалом 65
3.7 Додаткові приклади на використання криволінійного інтеграла другого роду 71
3.8 Криволінійний інтеграл першого роду 75
3.9 Застосування криволінійного інтеграла першого роду до розв'язання задач механіки 79
4 Поверхневий інтеграл першого роду 86
4.1 Основні означення поверхневого інтеграла першого роду 86
4.2 Властивості поверхневого інтеграла першого роду 86
4.3 Обчислення поверхневого інтеграла першого роду 87
4.4 Фізичний зміст поверхневого інтеграла першого роду 88
5 Поверхневий інтеграл другого роду 97
5.1 Означення та властивості поверхневого інтеграла другого роду . 97
5.2 Потік векторного поля через поверхню 99
6 Механічні та геометричні застосування поверхневих інтегралів . 108
Додаток А 118
Додаток Б 130
Бібліографічний список 135

Навчальне видання

АРШАВА Олена Олександрівна
ХАРЧЕНКО Анатолій Петрович
ЩЕЛКУНОВА Любов Іванівна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Навчальний посібник

Редактор Пуцик В.І.

Підписано до друку 16.10.2018 р. Папір офсетний.
Формат 60х84 1/16. Друк – лазерний.
Ум.-друк. арк. 6,16
Гарнітура «Time New Roman». Вид. № 228.
Наклад 300 прим. Зам. № 237.

Видавець: ФОП Панов А. М.
Свідоцтво серії ДК № 4847 від 06.02.2015 р.
Надруковано в типографії
ТОВ «Цифрова типографія»
м. Харків, вул. Данилевського, 30.