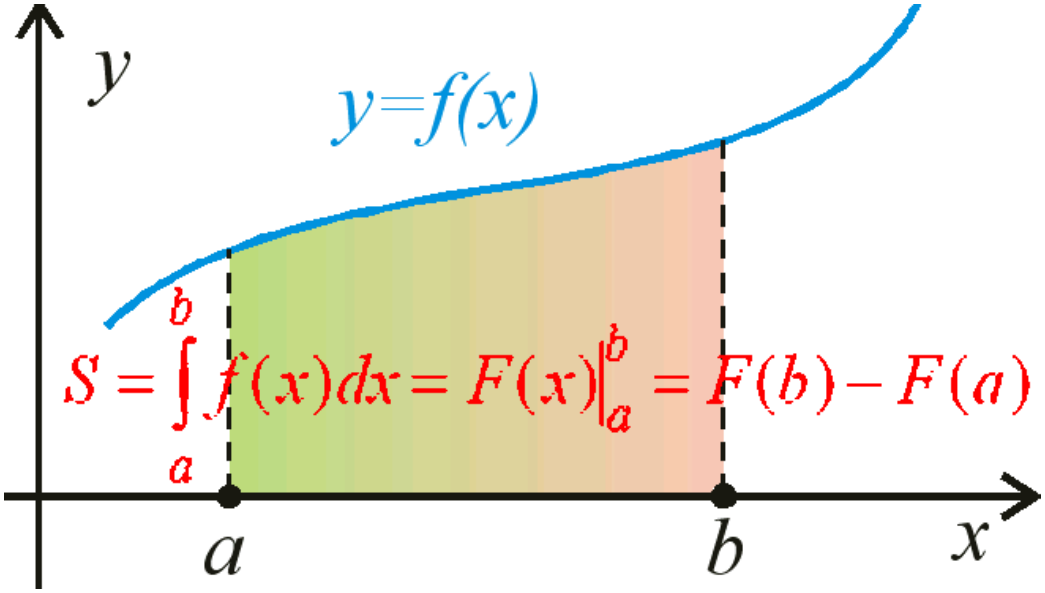
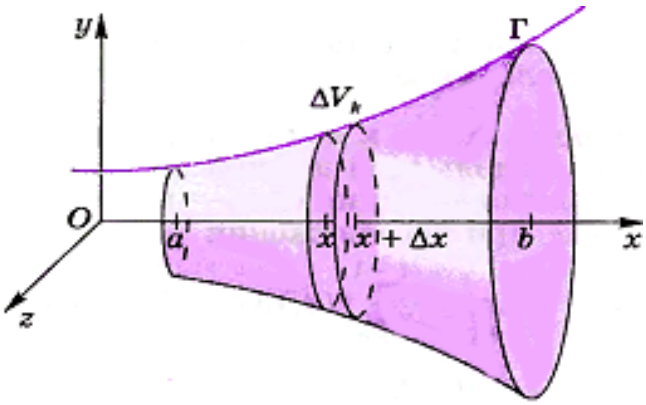


О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник



Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Рекомендовано
Вченою радою університету
як навчальний посібник для студентів
закладу вищої освіти

Харків, ТОВ «Цифрова типографія» 2018

УДК 517.21.3
А 89

Гриф надано Вченою радою
Харківського національного університету будівництва та архітектури
(протокол № 9 від 27 квітня 2018 року).

Рецензенти:

Л.Б. Коваленко, к. ф.-м. наук, доц., кафедра вищої математики Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова (ХНАМГ)

А.А. Янцевич, д. ф.-м. наук, проф., кафедра математичних методів в економіці Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна (ХНУ)

М.І. Несвіт, к. ф.-м. наук, доц., кафедра вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА)

Аршава О.О., Харченко А.П., Щелкунова Л.І.
А 89 Інтегральне числення функцій однієї змінної: Навчальний посібник. – 2-ге вид. переробл. і доповн. – Харків: ТОВ «Цифрова типографія», 2018. – 194 с.
ISBN 978-617-7541-69-0

Навчальний посібник присвячений одному з головних розділів математичного аналізу – інтегральному численню функції однієї змінної. Головна увага при цьому приділяється застосуванню основних методів інтегрування функції однієї змінної. Теоретичний матеріал супроводжується значною кількістю прикладів, які подаються з розв’язанням. Подаються завдання для самостійного виконання студентами, а також питання для самоперевірки.

Видання розроблено відповідно до діючої програми з „Вищої математики” для технічних університетів.

Іл: 51; табл.: 3; бібліогр.: 9 назв.

УДК 517.21.3

ISBN 978-617-7541-69-0

© О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова, 2018

ЗМІСТ

Вступ 5
1 Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла 5
2 Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування) . . . 6
3 Таблиця невизначених інтегралів 7
4 Безпосереднє інтегрування і метод розкладу 8
5 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки) 15
6 Метод інтегрування частинами 19
7 Інтегрування раціональних функцій 28
8 Інтегрування ірраціональних функцій 43
9 Інтегрування тригонометричних функцій 51
10 Тригонометричні підстановки 62
11 Підсумкові зауваження 65
12 Огляд методів і способів інтегрування 69
13 Визначений інтеграл 72
13.1 Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла 72
13.2 Формула Ньютона –Лейбніца 74
13.3 Властивості визначеного інтеграла 75
13.4 Заміна змінної у визначеному інтегралі 81
13.5 Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла . 86
13.6 Обчислення визначених інтегралів, що ґрунтується на властивостях підінтегральної функції 89
14 Невласні інтеграли 96
14.1 Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування . 96
14.2 Ознаки збіжності невласних інтегралів із нескінченними границями інтегрування 97
14.3 Заміна змінної у невласному інтегралі 98
14.4 Невласні інтеграли від необмежених функцій 105
14.5 Ознаки збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій 106
15 Застосування визначеного інтеграла до розв’язання задач геометрії, механіки і фізики 118
15.1 Площа плоскої фігури 120
15.2 Об’єм тіла 128
15.3 Довжина дуги плоскої кривої 134
15.4 Площа поверхні обертання 141
15.5 Центр ваги плоскої кривої 145
15.6 Центр ваги плоскої фігури 149
15.7 Обчислення шляху, пройденого тілом 155
15.8 Обчислення роботи сили 157
15.9 Обчислення роботи, здійснюваної при розтягу (стиску) пружини 157
15.10 Обчислення роботи, що здійснюється при стиску (розширен-

ні)повітря або газу 158
15.11 Обчислення роботи, здійснюваної при піднятті вантажу 160
15.12 Обчислення кількості тепла 168
15.13 Обчислення сили тиску рідини на плоску пластинку 169
15.14 Обчислення кінетичної енергії 171
15.15 Обчислення кількості електрики 173
Додаток А 181
Додаток Б 185
Бібліографічний список 193

ВСТУП

Навчальний посібник присвячений одному з головних розділів математичного аналізу – інтегральному численню функцій однієї змінної.

Весь поданий матеріал складається з трьох розділів: „Невизначений інтеграл”, „Визначений інтеграл” та „Невласні інтеграли”, що повністю відповідає програмі з навчальної дисципліни „Вища математика”.

Головна увага при цьому приділяється застосуванню основних методів інтегрування функцій однієї змінної.

Усі розділи посібника мають ідентичну структуру: основні поняття та означення, теоретичний матеріал, розв’язання типових задач, завдання для самостійної роботи, що супроводжуються відповідями та вказівками, а також питання для самоперевірки. До всіх задач подані відповіді.

Наявність великої кількості ілюстрацій до основних понять, формул та прикладів сприяє ефективному засвоєнню навчального матеріалу.

Посібник відрізняється від інших навчальних видань тим, що містить велику кількість завдань інтегрального числення, які мають прикладний характер (задач геометрії, фізики, механіки, електротехніки). Саме це, на погляд авторів, сприяє активізації діяльності студентів при опануванні професійно-орієнтованих дисциплін. Особливу увагу приділено питанням, що недостатньо висвітлені в навчальних посібниках такого типу.

Завдання, що запропоновані в посібнику, мають за мету закласти підвалини необхідних знань із вищої математики, що будуть використовуватися в прикладних задачах спеціальних курсів для студентів технічних університетів.

Посібник може бути використаний як збірка задач для проведення практичних занять.

1 Поняття первісної функції та невизначеного інтеграла

Відомо, що однією з основних задач диференціального числення є задача знаходження похідної або диференціала даної функції.

Основною задачею інтегрального числення є обернена задача – відновлення функції за заданою її похідною або диференціалом. Ця операція (дія) називається інтегруванням.

Слід відзначити, що як і будь-яка обернена задача, ця задача складніша, ніж задача диференціювання, і розв`язок її не є однозначним.

Шукану функцію називають первісною функцією по відношенню до даної функції.

За означенням первісною функцією для функції *f(x),* визначеній на проміжку *(а;в),* називають функцію *F(x),* яка визначена на тому ж проміжку і задовольняє умові $F'(x) = f(x)$ або $dF(x) = f(x)dx$.

Наприклад, первісною функцією для функції $5x^4$ буде x^5, бо $(x^5)' = 5x^4$. Однак, похідна від x^5+7 також дорівнює $5x^4$, а це означає, що і x^5+7 буде первісною для $5x^4$. І взагалі $F(x) = x^5 + C$, де C – стала, також будуть первісними для $f(x) = 5x^4$, бо $(x^5 + C)' = 5x^4$. Цей приклад доводить, що знаходження первісної для даної функції є задачею неоднозначною.

Доведено, що будь-яка функція, неперервна на проміжку, має в цьому проміжку первісну.

Якщо функція *F(x)* є якою-небудь первісною для функції *f(x)* на проміжку *(а;в),* то множина всіх первісних для цієї функції *f(x)* на цьому проміжку *(а;в)* міститься у виразі

$$F(x)+C,$$

де C – довільна стала.

Отже, щоб одержати всі первісні для даної функції, досить знайти яку-небудь одну і додати до неї довільну сталу.

Зауважимо, що коли функція *F(x)* є первісною для функції *f(x)* на проміжку *(а;в),* то вона буде первісною і на будь-якому іншому проміжку $(\alpha;\beta)$, що повністю міститься на даному проміжку *(а;в).*

Сукупність усіх первісних функції *f(x),* визначених на проміжку *(а;в),* називається невизначеним інтегралом від функції *f(x)* на цьому проміжку і позначається символом

$$\int f(x)dx,$$

де $\int$ – знак інтеграла, *f(x)*-підінтегральна функція, *f(x)dx* – підінтегральний вираз, *x*- змінна інтегрування.

Таким чином, якщо $F'(x) = f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$. Справедливе і обернене твердження.

Як уже відзначалося вище, операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається інтегруванням цієї функції. Інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання.

Із викладеного вище випливає, що результат інтегрування можна перевірити диференціюванням.

2 Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)

1 $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

2 $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

3 $\int dF(x) = F(x) + C$.

4 $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, де C- const $\neq 0$.

5 $\int\left(f_1(x) \pm f_2(x)dx\right) = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

6 $\int f(u)du = F(u) + C,$ де $u = \varphi(x)$ – диференційована функція від незалежної змінної x.

3 Таблиця невизначених інтегралів

$$\int Odu = \int Ou'_x dx = C. \quad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx == u + C. \quad (2)$$

$$\int u^{\alpha} du = \int u^{\alpha} u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. \quad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C. \quad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C. \quad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C. \quad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C. \quad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C. \quad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u \cdot u'_x dx = -\cos u + C. \quad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u \cdot u'_x dx = \sin u + C. \quad (10)$$

$$\int tgu du = \int tgu \cdot u'_x dx = -\ln|\cos u| + C. \quad (11)$$

$$\int ctgu du = \int ctgu \cdot u'_x dx = \ln|\sin u| + C. \quad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = tgu + C. \quad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C. \quad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C. \quad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \quad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C. \quad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \quad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C. \quad (19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2+A}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C. \qquad (20)$$

$$\int \sqrt{u^2+A}du = \int \sqrt{u^2+A}\cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C. \qquad (21)$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \int \sqrt{a^2-u^2}\cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C, \ (a>0). \qquad (22)$$

Зауважимо, що в формулах (1-22) a, A, і α – сталі, u – незалежна змінна або будь-яка диференційована функція від незалежної змінної.

Кожна із формул цієї таблиці справедлива в будь-якому проміжку, який міститься в області визначення відповідної підінтегральної функції.

Невизначені інтеграли (1-22) називають основними або табличними інтегралами, та їх необхідно запам`ятати.

Корисно також запам`ятати, що коли $u=ax+b$ і

$$\int F(u)du = F(u) + C,$$

то

$$\int F(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (23)$$

У правильності цієї формули можна переконатися диференціюванням. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Є три основні методи інтегрування функцій: метод розкладу, метод заміни змінної і метод інтегрування частинами. Розглянемо кожен із них.

4 Безпосереднє інтегрування і метод розкладу

Під безпосереднім інтегруванням розуміють пряме використання таблиці інтегралів.

Метод розкладу ґрунтується на застосуванні властивостей 4 і 5 невизначеного інтеграла. Тут слід також мати на увазі, що даний інтеграл може бути зведений до одного або кількох табличних інтегралів після елементарних тотожних перетворень над підінтегральною функцією.

Приклади

Приклад 1 Знайти $\int (4x^3 - 6x^2 + 5)dx$.

Розв`язання. Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати

$$\int (4x^3 - 6x^2 + 5) = \int 4x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 5dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 5\int dx.$$

Далі застосувавши до перших двох одержаних інтегралів формулу (3), а до третього – властивість 3 (формула 2), остаточно знаходимо

$$\int(4x^3-6x^2+5)dx=4\int x^3dx-6\int x^2dx+5\int dx=$$
$$=4\frac{x^4}{4}+C_1-6\frac{x^3}{3}+C_2+5x+C_3=x^4-2x^3+5x+C,$$
де $C=C_1+C_2+C_3$.

Відзначимо, що додавати довільну сталу після знаходження кожного інтеграла, як це продемонстровано в даному прикладі, не слід. Досить усі довільні сталі підсумувати, і результат, позначений однією буквою *C,* записати наприкінці, тобто після того, як усі інтеграли будуть знайдені.

Приклад 2 Знайти $\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx.$

Розв`язання. Помічаємо, що $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{x}\right)^3+1$. Тоді

$$\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx=\int\left[\left(\sqrt{x}\right)^3+1\right]dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+x+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C.$$

Приклад 3 Знайти $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx.$

Розв`язання. Маємо
$$\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx=$$
$$=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^xdx+\int\frac{dx}{x}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C=C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|.$$

Приклад 4 Знайти $\int\left(\frac{1-z}{z}\right)^2dz$.

Розв`язання. Виконуючи тотожні перетворення підінтегральної функції, будемо мати
$$f(z)=\left(\frac{1-z}{z}\right)^2=\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1.$$
Тому
$$\int\left(\frac{1-z}{z}\right)^2dz=\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1\right)dz=\int\frac{1}{z^2}dz-2\int\frac{dz}{z}+\int dz=-\frac{1}{z}-2\ln|z|+z+C.$$

Приклад 5 Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$.

Розв`язання. Маємо
$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3(1-x^2)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C.$$

Приклад 6 Знайти $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx.$

Розв`язання. Оскільки $1+cos2x=2cos^2x$, то

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}tgx + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{2}(tgx + x) + C.$$

Приклад 7 Знайти $\int tg^2 x dx.$

Розв`язання. Відомо, що $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$. Тому

$$\int tg^2 x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Приклад 8 Знайти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Розв`язання. Виконуємо тотожні перетворення над підінтегральною функцією:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Приклад 9 Знайти $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx$.

Розв`язання. Враховуючи, що $2x^2=x^2+x^2$, будемо мати

$$\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C.$$

Приклад 10 Знайти $\int tg^3 x d(tgx).$

Розв`язання. Згідно з табличним інтегралом (3) з урахуванням, що $u=tgx$, одержимо

$$\int tg^3 x d(tgx) = \frac{tg^4 x}{4} + C.$$

Приклад 11 Знайти $\int (5x+3)^{19} dx.$

Розв`язання. Тут підносити двочлен до 19-го степеня недоцільно, оскільки $u=5x+3$-лінійна функція. Виходячи з табличного інтеграла

$$\int u^{19}du = \frac{u^{20}}{20} + C$$

і формули (23), згідно з якою

$$\int F(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C,$$

одержимо

$$\int (5x+3)^{19}dx = \frac{1}{5}\frac{(5x+3)^{20}}{20} + C = \frac{(5x+3)^{20}}{100} + C.$$

Приклад 12 Знайти $\int \cos(\pi x+1)dx.$

Розв'язання. Оскільки

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

і $u = \pi x + 1$ – лінійна функція, то, враховуючи формулу (23), будемо мати

$$\int \cos(\pi x+1)dx = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x+1) + C.$$

Приклад 13 Знайти $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx.$

Розв`язання. Маємо

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx = \int \left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}} \sin 2x dx.$$

Оскільки $\left(7-\cos^2 x\right)' = -2\cos x(-\sin x) = \sin 2x,$ то в якості змінної інтегрування маємо вираз $7\text{-}\cos^2 x$. Відносно цієї змінної одержимо інтеграл від степеневої функції, тобто

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx = \int \left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}} \sin 2x dx = \frac{\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{\left(7-\cos^2 x\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(7-\cos^2\right)^2} + C.$$

Розв`язання даного прикладу можна записати ще й так:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx = \int \left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}} \sin 2x dx = \int \left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}} d\left(7-\cos^2 x\right) =$$

$$= \frac{3\left(7-\cos^2 x\right)^{\frac{2}{3}}}{2} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(7-\cos^2 x\right)^2} + C.$$

Проведені міркування можна записати й інакше, а саме:

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx = \int \left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}} \sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = 7-\cos^2 x \\ u_x{}' = -2\cos x \cdot (-\sin x) = \sin 2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \int u^{-\frac{1}{3}} \cdot u_x{}' dx = \frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{2} u^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(7-\cos^2 x\right)^2} + C.$$

Приклад 14 Знайти $\int \frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x}$.

Розв`язання. Оскільки похідна виразу *5+7tgx* дорівнює $\frac{7}{\cos^2 x}$, а множник $\frac{1}{\cos^2 x}$ відрізняється від цієї похідної лише сталим множником *7,* то змінною інтегрування тут можна вважати вираз *5+7tgx,* і, таким чином, знайти інтеграл за формулою (6):

$$\int \frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x} = \frac{1}{7}\int \frac{1}{5+7tgx} \cdot \frac{7}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{matrix} u = 5+7tgx \\ u_x{}' = \frac{7}{\cos^2 x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{u} \cdot u_x{}' dx = \frac{1}{7}\ln\left|5+7tgx\right| + C.$$

Приклад 15 Знайти $\int \frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2} dx.$

Розв`язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2}\int e^{arctg 2x} \cdot \frac{2}{1+4x^2} dx,$$

але $\frac{2}{1+4x^2} = \left(arctg 2x\right)'$, і тому, вважаючи змінною інтегрування функцію *arctg2x,* інтеграл знаходимо за формулою (8):

$$\int \frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2} dx = \frac{1}{2} e^{arctg 2x} + C$$

Приклад 16 Знайти $\int 5\sin^4 x \cos x dx$..

Розв`язання.

$$\int 5\sin^4 x \cos x dx = 5\int (\sin x)^4 d(\sin x) = 5 \cdot \frac{\sin^5 x}{5} + C = \sin^5 x + C.$$

Приклад 17 Знайти $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+9}$.

Роз`вязання.

$$\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+9} = \left| \begin{matrix} u = e^{2x}+9 \\ u_x{}' = 2e^{2x} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x} dx}{e^{2x}+9} = \frac{1}{2}\int \frac{u_x{}' dx}{u} = \frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+9\right| + C.$$

Приклад 18 Знайти $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9}$.

Розв`язання.

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+9} = \int \frac{e^x dx}{\left(e^x\right)^2+3^2} = \left| \begin{matrix} u = e^x \\ u_x' = e^x \end{matrix} \right| = \int \frac{u_x' dx}{u^2+3^2} = \frac{1}{3} arctg \frac{e^x}{3} + C.$$

Приклад 19 Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$.

Розв`язання. Звільняючись від ірраціональності в знаменнику дробу підінтегрального виразу, будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = \int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} = \int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx}{x-x+1} =$$

$$= \int \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int (x-1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. Відповідь: $C - \frac{1}{8(2x-3)^4}$.

2 $\int \sqrt[5]{x^3+2} \cdot x^2 dx$. Відповідь: $\frac{5}{18}\sqrt[5]{\left(x^3+2\right)^6} + C$.

3 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$. Відповідь: $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5} + C$.

4 $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$. Відповідь: $\frac{1}{\cos x} + C$.

5 $\int \cos^3 x \sin 2x dx$. Відповідь: $C - \frac{2}{5}\cos^5 x$.

6 $\int \sin(2x-3) dx$. Відповідь: $-\frac{1}{2}\cos(2x-3) + C$.

7 $\int \cos(1-2x) dx$. Відповідь: $-\frac{1}{2}\sin(1-2x) + C$.

8 $\int e^x \sin e^x dx$. Відповідь: $C\text{-}cose^x$.

9 $\int \frac{dx}{2x-1}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$.

10 $\int ctg(2x+1) dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)| + C$.

11 $\int e^{-3x+1}dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-3x+1}+C.$

12 $\int e^{-x^3}\cdot x^2dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C.$

13 $\int \frac{dx}{x\ln x}.$ Відповідь: $\ln|\ln x|+C.$

14 $\int \frac{dx}{1+9x^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{3}arctg3x+C.$

15 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$ Відповідь: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C.$

16 $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}.$ Відповідь: $\frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2}+C.$

17 $\int \frac{xdx}{x^4+1}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}arctgx^2+C.$

18 $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^8}}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+C.$

19 $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}.$ Відповідь: $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C.$

20 $\int \frac{dx}{2x^2+9}.$ Відповідь: $\frac{1}{3\sqrt{2}}arctg\frac{\sqrt{2}}{3}x+C.$

21 $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx.$ Відповідь: $e^x+e^{-x}+C.$

22 $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx.$ Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C.$

23 $\int \frac{x(1-x^2)dx}{1+x^4}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}arctgx^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C.$

24 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$ Відповідь: $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

25 $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx.$ Відповідь: $x^3+2x-3\ln|x|-\frac{7}{x}+C.$

26 $\int\left(2^{3x-1}+\frac{3}{\cos^2 7x}-2ctg(x+5)\right)dx..$

Відповідь: $\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}+\frac{3}{7}tg7x-2\ln|\sin(x+5)|+C.$

27 $\int \frac{2x^2-8}{16-x^4}dx.$ Відповідь: $-arctg\frac{x}{2}+C.$

28 $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}$. Відповідь: $\sin x - \cos x + C$.

29 $\int e^x \left(2^x + 3^x\right) dx$. Відповідь: $e^x \left(\frac{2^x}{1+\ln 2} + \frac{3^x}{1+\ln 3} \right) + C$.

30 $\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+4)} dx$. Відповідь: $\frac{1}{4} arctg \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + C$.

5 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Метод заміни змінної застосовують у тих випадках, коли безпосередньо (за допомогою таблиці) не вдається знайти первісну.

При розв`язанні прикладів заміна змінної здійснюється за допомогою підстановок двох видів:

1) $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – монотонна, неперервно-диференційована функція нової змінної t.

У цьому випадку формула заміни змінної набуває вигляду

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt;$$

2) $u = \psi(x)$, де u- нова змінна.

Формула заміни змінної при такій підстановці має вигляд

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx = \int f(u)du.$$

Передбачається, що після інтегрування буде здійснюватись знову перехід до початкової змінної x.

Відзначимо, що загального правила, яке вказувало б, яку підстановку треба обрати, не існує. Однак, для багатьох видів інтегралів підстановка відома і буде розглянута нами далі.

Зауважимо також, що вміння обрати підстановку так, щоб обчислення інтеграла спростилось, досягається розв'язанням великої кількості вправ.

Приклади

Приклад 20 Знайти $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}}$.

Розв'язання. Покладемо $x^6=t$. Тоді $6x^5dx=dt$ і

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{(x^6)^2-3}} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3}} = \frac{1}{6}\ln\left|t+\sqrt{t^2-3}\right| + C.$$

Як видно за допомогою вказаної підстановки даний інтеграл зведений до табличного (формула 20). Повертаючись до початкової змінної, остаточно будемо мати

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6}\ln\left|x^6 + \sqrt{x^{12}-3}\right| + C.$$

Приклад 21 Знайти $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Покладемо $x+1=t^2$. Звідси $x=t^2-1$, а $dx=2tdt$ і

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C.$$

Розв`язати даний приклад можна інакше. Нехай $1+\sqrt{x+1}=t$. Звідси $x=(t-1)^2-1$, а $dx=2(t-1)dt$ і

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2\int \frac{t-1}{t}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t} =$$

$$= 2t - 2\ln|t| + C = 2(1+\sqrt{x+1}) - 2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right| + C.$$

Одержані результати відрізняються сталим доданком 2. Однак, обидва вони правильні, в чому можна легко переконатися шляхом їх диференціювання. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Приклад 22 Знайти $\int \frac{dz}{\sqrt{e^z+1}}$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $e^z+1=t^2$. Продиференціювавши обидві частини рівності, одержимо $e^z dz=2tdt$. Звідси $dz = \frac{2tdt}{e^z} = \frac{2tdt}{t^2-1}$. Тоді

$$\int \frac{dz}{\sqrt{e^z+1}} = \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2-1} = 2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^z+1}-1}{\sqrt{e^z+1}+1}\right| + C.$$

(див. Таблицю інтегралів, формулу 18).

Приклад 23 Знайти $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання. І спосіб.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \left|\begin{array}{c} x^2-9=t^2 \\ 2xdx=2tdt \\ xdx=tdt \end{array}\right| = \int \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{tdt}{(t^2+9)t} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{3}arctg\frac{t}{3} + C = \frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + C.$$

ІІ спосіб.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} \left| \begin{array}{c} \frac{1}{x}=t \\ x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-9}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-9t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-(3t)^2}} = -\frac{1}{3}\int \frac{3dt}{\sqrt{1-(3t)^2}} = -\frac{1}{3}\arcsin 3t + C =$$

$$= -\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{x} + C = \frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x} + C.$$

III спосіб.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}} = \left| \begin{array}{c} x=\frac{3}{\cos t} \\ dx=\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt \\ \sqrt{x^2-9}=\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}=\sqrt{9\cdot\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=3\cdot\frac{\sin t}{\cos t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{3\sin t dt}{\cos^2 t}}{\frac{3}{\cos t}\cdot 3\cdot\frac{\sin t}{\cos t}} = \frac{1}{3}\int dt = \frac{1}{3}t + C = \frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x} + C.$$

Зауважимо, що всі результати правильні, бо їх похідні дорівнюють підінтегральній функції, тобто:

$$\left(\frac{1}{3}arctg\frac{\sqrt{x^2-9}}{3} + C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2-9}{9}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2-9}}\cdot 2x + 0 =$$

$$= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\frac{9+x^2-9}{9}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-9}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} = f(x);$$

$$\left(-\frac{1}{3}\arcsin\frac{3}{x} + C\right)' = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right) + 0 = \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} = f(x);$$

$$\left(\frac{1}{3}\arccos\frac{3}{x} + C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}}\right)\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right) + 0 = \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}} = f(x).$$

Приклад 24 Знайти $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$.

Розв'язання. Розділивши чисельник і знаменник підінтегрального виразу на cos^2x, одержимо

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3 + 4tg^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{3}{4} + tg^2 x}.$$

Оскільки $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx),$ то доцільно покласти $tgx=t$. Тоді

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 + 4\sin^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{3}{4} + t^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg\frac{2tgx}{\sqrt{3}} + C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли, застосувавши вказану підстановку:

1 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln^2 x}}$ (підстановка $lnx=t$).

Відповідь: $\arcsin\frac{\ln x}{2} + C$.

2 $\int \frac{x^2+3}{\sqrt{(2x-5)^3}}dx$ (підстановка $\sqrt{2x-5} = t$).

Відповідь: $\frac{1}{12}\sqrt{(2x-5)^3} + \frac{5}{2}\sqrt{2x-5} - \frac{37}{4\sqrt{2x-5}} + C$.

3 $\int \frac{(1+\sqrt{x})dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ (підстановка $x=t^6$).

Відповідь: $6\left(\frac{x}{6} + \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{4} + \frac{2x^{\frac{1}{2}}}{3} + x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{6}} + 2\ln\left|x^{\frac{1}{6}} - 1\right|\right) + C$.

4 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ (підстановка $x = \frac{1}{t}$).

Відповідь: $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$.

5 $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$ (підстановка $x=tgt$).

Відповідь: $\frac{1}{2}\left(arctgx - \frac{x}{x^2+1}\right) + C$.

Знайти інтеграли, підібравши відповідну підстановку:

6 $\int \left(e^{2x}+5\right)^3 e^{2x}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{8}\left(e^{2x}+5\right)^4+C$.

7 $\int \frac{dx}{x\sin^2 \ln x}.$ Відповідь: $-ctglnx+C.$

8 $\int \frac{\sin xdx}{\cos^5 x}.$ Відповідь: $\frac{1}{4\cos^4 x}+C$.

9 $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}.$ Відповідь: $-2\sqrt{2+\cos^2 x}+C$.

10 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{2-x}}.$ Відповідь: $-\frac{2}{15}\left(32+8x+3x^2\right)\sqrt{2-x}+C$.

11 $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx.$ Відповідь: $\frac{2}{3}\sqrt{\left(\ln|x|\right)^3}-6\sqrt{\ln|x|}+C$.

12 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}.$ Відповідь: $\ln|\ln\ln x|+C$.

13 $\int e^{e^x+x}dx.$ Відповідь: $e^{e^x}+C$.

14 $\int \frac{x^3dx}{\left(6x^4+5\right)^5}.$ Відповідь: $-\frac{1}{96\left(6x^4+5\right)^4}+C$.

15 $\int \sqrt{2\sin x-1}\cos xdx.$ Відповідь: $\frac{1}{3}\sqrt{\left(2\sin x-1\right)^3}+C$.

16 $\int 3^{x^2}xdx.$ Відповідь: $\frac{3^{x^2}}{2\ln 3}+C$.

17 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{3}tg^3x+C$.

18 $\int z^2\sqrt{1+2z^3}dz.$ Відповідь: $\frac{1}{9}\sqrt{\left(1+2z^3\right)^3}+C$.

19 $\int 2e^{-\frac{1}{2}\varphi+1}d\varphi.$ Відповідь: $-4e^{-\frac{1}{2}\varphi+1}+C$.

20 $\int \cos\left(\frac{1}{2}t+3\right)dt.$ Відповідь: $2\sin\left(\frac{1}{2}t+3\right)+C$.

6 Метод інтегрування частинами

Як уже відзначалося вище, цей метод, як і метод підстановки, який ми щойно розібрали, належить до числа основних методів інтегрування.

Якщо *u(x)* і *v(x)*- диференційовані функції від *x,* то має місце формула

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (24)$$

Формула (24) називається формулою інтегрування частинами, а метод інтегрування, що ґрунтується на застосуванні цієї формули, – методом інтегрування частинами.

Для застосування цього методу підінтегральний вираз треба подати у вигляді добутку однієї функції на диференціал другої функції. При цьому доцільно в якості u обрати функцію, яка спрощується при диференціюванні

$$(\ln x, \log_a x, \arcsin x, \arccos x, arctgx, arcctgx).$$

Іноді буває корисно обрати в якості u многочлен, а в якості v – функцію, яка мало змінюється при диференціюванні: показникову, тригонометричну і т. д.

У деяких випадках для зведення даного інтеграла до табличного формула (24) застосовується декілька разів. Іноді ж шуканий інтеграл визначається з алгебраїчного рівняння, одержаного за допомогою інтегрування частинами.

Укажемо деякі види інтегралів, для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами.

Таблиця 1

№ п/п	Вид інтеграла	Позначення підінтегрального виразу
1.	$\int P(x)e^{ax}dx$, де P(x) – многочлен	$u=P(x)$; $dv=e^{ax}dx$
2.	$\int P(x)\cos bxdx$	$u=P(x)$; $dv=cosbxdx$
3.	$\int P(x)\sin bxdx$	$u=P(x)$; $dv=sinbxdx$
4.	$\int P(x)\ln xdx$	$u=lnx$; $dv=P(x)dx$
5.	$\int P(x)\log_a xdx$	$u=\log_a x$; $dv=P(x)dx$
6.	$\int P(x)arctgbxdx$	$u=arctgbx$; $dv=P(x)dx$
7.	$\int P(x)arcctgbxdx$	$u=arcctgbx$; $dv=P(x)dx$
8.	$\int P(x)\arcsin bxdx$	$u=arcsinbx$; $dv=P(x)dx$
9.	$\int P(x)\arccos bxdx$	$u=arccosbx$; $dv=P(x)dx$
10.	$\int e^{ax}\cos bxdx$	Обидва рази за u обирають або показникову функцію, або тригонометричну
11.	$\int e^{ax}\sin bxdx$	Обидва рази за u обирають або показникову функцію, або тригонометричну

Відзначимо також, що за допомогою методу інтегрування частинами можна вивести так звані рекурентні формули, які дають змогу звести деякі інтеграли до інтегралів того ж виду, але простіших за своєю структурою.

Приклади

Приклад 25 Знайти $\int x^2 \ln x dx$.

Розв'язання. Поклавши $u(x)=lnx$, $dv(x)=x^2dx$ і застосувавши формулу (24), одержуємо

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx; & v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C.$$

Розв'язання цього прикладу можна записати ще й так:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}\int \ln x dx^3 = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^3 d\ln x \right) = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^2 dx\right) = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 \right) + C = \frac{1}{9}x^3\left(3\ln x - 1\right) + C.$$

Приклад 26 Знайти $\int x^2 \sin 3x dx$.

Розв'язання. Покладемо $u=x^2, dv=sin3xdx$. Тоді

$$du=2xdx, \quad v = \int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою (24) знаходимо

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x \cos 3x dx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x$, $dv=cos3xdx$, тоді

$$du = dx, v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x \cos 3x dx = \frac{1}{3}x \sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x dx = \frac{1}{3}x \sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right) + C.$$

$$= \frac{1}{27}\left(-9x^2 \cos 3x + 6x \sin 3x + 2\cos 3x\right) + C.$$

Приклад 27 Знайти $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{x^2+a^2}; & du=\dfrac{2xdx}{2\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}\\ dv=dx; & v=\int dx=x\end{matrix}\right|=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx+\int\frac{a^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=$$

$$=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}dx+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

Як видно, після інтегрування частинами в правій частині рівняння ми одержали вихідний інтеграл. Отже, розв`язавши це рівняння відносно інтеграла, знаходимо

$$2\int\sqrt{x^2+a^2}dx=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

Звідси остаточно будемо мати

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

Приклад 28 Знайти $\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx.$

Розв'язання. Маємо інтеграл виду 1 (див. Таблицю 1). Застосувавши до його розв'язання формулу (24), одержимо

$$\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx=\left|\begin{matrix}u=x^2-3x+4; & du=(2x-3)dx\\ dv=e^{5x}dx; & v=\int e^{5x}dx=\dfrac{1}{5}e^{5x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\int(2x-3)e^{5x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}u=2x-3; & du=2dx\\ dv=e^{5x}dx; & v=\dfrac{1}{5}e^{5x}\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{5}\int e^{5x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{25}e^{5x}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{125}e^{5x}\left(25x^2-75x+100-10x+15+2\right)+C=\frac{1}{125}\left(25x^2-85x+117\right)e^{5x}+C.$$

Приклад 29 Знайти $\int xarctgxdx.$

Розв'язання. Маємо інтеграл виду 6 (див. Таблицю 1). Із формули (24)

$$\int xarctgxdx=\frac{1}{2}\int arctgxd(x^2)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int x^2darctgx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-x+arctgx\right)+C.$$

Приклад 30 Знайти $\int(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}dx.$

Розв'язання. Даний інтеграл можна розглядати як алгебраїчну суму двох інтегралів виду 10 і 11 (див. Таблицю 1). Оскільки метод інтегрування для таких інтегралів однаковий, то можна відразу ж застосувати його і до вихідного інтеграла. Покладемо $u=sin2x-cos2x$, $dv=e^{3x}dx$. Тоді за формулою (24)

$$\int(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int(\sin 2x-\cos 2x)de^{3x}=$$

$$=\frac{1}{3}\left((\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}-\int e^{3x}d(\sin 2x-\cos 2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(\sin 2x-\cos 2x)e^{2x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}(2\cos 2x+2\sin 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{3}(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}-\frac{2}{3}\int(\cos 2x+\sin 2x)e^{3x}dx.$$

До останнього інтеграла ще раз застосуємо формулу інтегрування частинами, знову поклавши $u=cos2x+sin2x$, $dv=e^{3x}dx$. Тоді

$$\int(\cos 2x+\sin 2x)e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int(\cos 2x+\sin 2x)de^{3x}=$$

$$=\frac{1}{3}\left((\cos 2x+\sin 2x)e^{3x}-\int e^{3x}d(\cos 2x+\sin 2x)\right)=$$

$$=\frac{1}{3}(\cos 2x+\sin 2x)e^{3x}-\frac{1}{3}\int e^{3x}(-2\sin 2x+2\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{3}(\cos 2x+\sin 2x)e^{3x}+\frac{2}{3}\int(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}dx.$$

Таким чином,

$$\int(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}dx=\frac{1}{3}(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}-\frac{2}{9}(\cos 2x+\sin 2x)e^{3x}-\frac{4}{9}\int(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}dx.$$

Розв`язавши одержане рівняння відносно вихідного інтеграла, будемо мати

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}dx=\frac{1}{9}e^{3x}(3\sin 2x-3\cos 2x-2\cos 2x-2\sin 2x)$$

або

$$\frac{13}{9}\int(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}dx=\frac{1}{9}e^{3x}(\sin 2x-5\cos 2x).$$

Звідси остаточно одержимо

$$\int(\sin 2x-\cos 2x)e^{3x}dx=\frac{1}{13}e^{3x}(\sin 2x-5\cos 2x)+C.$$

Приклад 31 Знайти $\int\cos\ln xdx.$

Розв'язання. За формулою (24) маємо

$$\int \cos\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \cos\ln x; & du = -\sin\ln x \cdot \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx; & v = x \end{matrix} \right| = x\cos\ln x + \int \sin\ln x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = \sin\ln x; & du = \cos\ln x \cdot \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx; & v = x \end{matrix} \right| = x\cos\ln x + x\sin\ln x - \int \cos\ln x dx .$$

Розв'язавши одержане рівняння відносно вихідного інтеграла, знаходимо

$$\int \cos\ln x dx = \frac{x}{2}(\cos\ln x + \sin\ln x) + C .$$

Приклад 32 Знайти $\int x tg^2 x dx$.

Розв'язання. На підставі формули (24) інтегрування частинами маємо

$$\int x tg^2 x dx = \left| \begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = tg^2 x dx; & v = \int tg^2 x dx = \int \left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = tgx - x \end{matrix} \right| =$$

$$= x(tgx - x) - \int (tgx - x)dx = x(tgx - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C = xtgx + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C .$$

Приклад 33 Знайти $\int \sin\sqrt[3]{x} dx$, застосувавши спочатку метод заміни змінної, а потім метод інтегрування частинами.

Розв'язання. Покладемо спочатку $x=t^3$. Тоді $dx=3t^2dt$ і

$$\int \sin\sqrt[3]{x} dx = \int \sin t \cdot 3t^2 dt = 3\int t^2 \sin t dt.$$

Застосувавши далі формулу (24), будемо мати

$$\int t^2 \sin t dt = \left| \begin{matrix} u = t^2; & du = 2tdt \\ dv = \sin t dt; & v = -\cos t \end{matrix} \right| = -t^2 \cos t + 2\int t \cos t dt = \left| \begin{matrix} u = t; & du = dt \\ dv = \cos t dt; & v = \sin t \end{matrix} \right| =$$

$$= -t^2 \cos t + 2\left(t \sin t - \int \sin t dt\right) = -t^2 \cos t + 2t \sin t + 2\cos t + C.$$

Повертаючись до початкової змінної $x=t^3$, звідки $t = \sqrt[3]{x}$, остаточно знаходимо

$$\int \sin\sqrt[3]{x} dx = -3\sqrt[3]{x^2} \cos\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x} \sin\sqrt[3]{x} + 2\cos\sqrt[3]{x} + C .$$

Приклад 34 Вивести рекурентну формулу для знаходження інтеграла

$$I_n = \int \cos^n x dx.$$

Розв'язання. Запишемо вихідний інтеграл у вигляді

$$I_n = \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x \cdot \cos^2 x dx = \int \cos^{n-2} x(1 - \sin^2 x)dx =$$

$$= \int \cos^{n-2} x dx - \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx = I_{n-2} - \int \cos^{n-2} x \cdot \sin^2 x dx.$$

Останній інтеграл будемо інтегрувати частинами, поклавши $u=\sin x$, $dv=\cos^{n-2} x * \sin x\, dx$. Тоді $du=\cos x\, dx$, $v = \int \cos^{n-2} x \cdot \sin x dx =$

$$= -\int \cos^{n-2} x d\cos x = -\frac{1}{n-1} \cos^{n-1} x \quad \text{і}$$

$$\int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = -\frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1}\int \cos^n x dx = -\frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{1}{n-1} I_n .$$

Таким чином, вихідний інтеграл

$$I_n = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n .$$

Приводячи подібні, одержимо

$$\frac{n}{n-1} I_n = I_{n-2} + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1}.$$

Звідси

$$I_n = \int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} (n \neq 0) \qquad (25)$$

Відзначимо, що за допомогою формули (25) знаходження інтеграла I_n зводиться до знаходження інтеграла I_{n-2} із меншим на дві одиниці індексом.

Повторним застосуванням цієї формули знаходження інтеграла $\int \cos^n x dx$ зводиться до знаходження одного з двох інтегралів або $\int dx$, або $\int \cos x dx$ залежно від того, є n парним чи непарним числом.

Наприклад, поклавши $n=8$, за формулою (25) одержимо

$$\int \cos^8 x dx = \frac{\sin x \cos^7 x}{8} + \frac{7}{8}\int \cos^6 x dx,$$

але за цією ж формулою

$$\int \cos^6 x dx = \frac{\sin x \cos^5 x}{6} + \frac{5}{6}\int \cos^4 x dx,$$

а

$$\int \cos^4 x dx = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\int \cos^2 x dx$$

і, нарешті,

$$\int \cos^2 x dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{\sin x \cos x}{2} + \frac{x}{2}.$$

Таким чином, остаточно одержимо

$$\int \cos^8 x dx = \frac{1}{8}\sin x \cos^7 x + \frac{7}{8\cdot 6}\sin x \cos^5 x + \frac{7\cdot 5}{8\cdot 6\cdot 4}\sin x \cos^3 x +$$
$$+ \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}\sin x \cos x + \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} x + C .$$

Приклад 35 Вивести рекурентну формулу для знаходження інтеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} .$$

Розв'язання. Подамо інтеграл $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ у вигляді

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\int\frac{x^2+a^2-x^2}{(x^2+a^2)^n}dx=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}-\int\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^n}\right).$$

До останнього інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами, поклавши $u=x$, і $dv=\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}$. Тоді $du=dx$ і $dv=\int\frac{xdx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{2}\int\left(x^2+a^2\right)^{-n}d(x^2+a^2)=$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+a^2\right)^{1-n}}{1-n}=-\frac{1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}.$$

Тому

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left(\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}-\frac{1}{2(n-1)}\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right)=$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)I_{n-1}\right)=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right).$$

Відзначимо, що

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C.$$

Скориставшись одержаною рекурентною формулою, знайдемо, наприклад

$$\int\frac{dx}{(x^2+4)^3}.$$

Згідно з рекурентною формулою

$$I_n=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right).$$

Враховуючи, що в нашому випадку $n=3$ і $a^2=4$, будемо мати

$$I_3=\int\frac{dx}{(x^2+4)^3}=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{4(x^2+4)^2}+\frac{3}{4}I_2\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{4(x^2+4)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{x}{2(x^2+4)}+\frac{1}{2}I_1\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{x}{4(x^2+4)^2}+\frac{3x}{32(x^2+4)}+\frac{3}{32}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{16}\left(\frac{x}{(x^2+4)^2}+\frac{3x}{8(x^2+4)}+\frac{3}{16}arctg\frac{x}{2}\right)+C.$$

Завдання для самостійної роботи

1 $\int xe^{-x}dx.$ Відповідь: $C-(x+1)e^{-x}.$

2 $\int x3^x dx.$ Відповідь: $\frac{3^x}{\ln^2 3}\left(x\ln 3-1\right)+C.$

3 $\int x\cos^2 x dx.$ Відповідь: $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

4 $\int \ln(x^2+1)dx.$ Відповідь: $x\ln(x^2+1)-2x+2arctgx+C$.

5 $\int \frac{\lg x}{x^3}dx.$ Відповідь: $C-\frac{1}{2x^2}\lg\left(x\sqrt{e}\right).$

6 $\int \ln^2 x dx.$ Відповідь: $x(ln^2x-2lnx+2)+C.$

7 $\int \arccos x dx.$ Відповідь: $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

8 $\int e^x\cos\frac{x}{3}dx.$ Відповідь: $0{,}3e^x\left(\sin\frac{x}{3}+3\cos\frac{x}{3}\right)+C$.

9 $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}.$ Відповідь: $C-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}arctgx$.

10 $\int arctg\sqrt{x}dx.$ Відповідь: $xarctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}+C$.

11 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$ Відповідь: $2\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)+C$.

12 $\int \sin\ln x dx.$ Відповідь: $\frac{x}{2}\left(\sin\ln x-\cos\ln x\right)+C$.

13 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx.$ Відповідь: $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C$.

14 $\int \sin x\ln\cos x dx.$ Відповідь: $\left(1-\ln\left|\cos x\right|\right)\cos x+C$.

15 $\int \left(x^2-2x+3\right)\ln x dx.$ Відповідь: $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C.$

16 $\int (2x+3)\sin 5x dx.$ Відповідь: $-\frac{2x+3}{5}\cos 5x+\frac{2}{25}\sin 5x+C$.

Вивести рекурентні формули для інтегралів:

17 $I_n=\int \sin^n x dx;$ знайти I_4 і I_5.

Відповідь: $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; $I_4=\frac{3x}{8}-\frac{\cos x\sin^3 x}{4}-\frac{3\sin 2x}{16}+C;$

$$I_5=-\frac{\cos x\sin^4 x}{5}-\frac{4}{15}\cos x\sin^2 x-\frac{8}{15}\cos x+C.$$

18 $I_n=\int x^n e^{-x}dx;$ знайти I_{10}.

Відповідь: $I_n= -x^ne^{-x}+nI_{n-1};$

$$I_{10}=-e^{-x}\left(x^{10}+10x^9+10\cdot 9x^8+\ldots+10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2x+10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 1\right).$$

19 $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$; знайти I_3 і I_4.

Відповідь: $$I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2};$$

$$I_3 = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$$

$$I_4 = \frac{\sin x}{3\cos^3 x} + \frac{2}{3} tgx + C.$$

20 $I_n = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{x^2 + A}}$; знайти I_5 при $A=4$ і I_6 при $A=9$.

Відповідь: $$I_n = \frac{x^{n-1}}{n}\sqrt{x^2 + A} - \frac{A(n-1)}{n} I_{n-2};$$

$$I_5 = \left(\frac{x^4}{5} - \frac{16x^2}{15} + \frac{128}{15}\right)\sqrt{x^2 + 4} + C;$$

$$I_6 = \left(\frac{x^5}{6} - \frac{15x^3}{8} + \frac{405x}{16}\right)\sqrt{x^2 + 9} - \frac{3645}{16}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + 9}\right| + C.$$

7 Інтегрування раціональних функцій

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція вигляду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \tag{26}$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – алгебраїчні многочлени з дійсними коефіцієнтами, причому $Q_m(x) \neq 0$. Якщо $Q_m(x) \equiv C \neq 0$, то раціональна функція (26) буде цілою раціональною функцією (многочленом). Таку функцію інтегрують безпосередньо:

$$a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менша, за степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто коли $n < m$ і є неправильним раціональним дробом у противному випадку, тобто коли $n \geq m$.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n \geq m)$ можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де *T(x)* – ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ ($k< m$) – правильний раціональний дріб.

Як інтегрується ціла раціональна функція ми вже знаємо. Тепер розглянемо інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n < m$). Насамперед покажемо, як інтегруються елементарні раціональні дроби, тобто дроби типу:

I $\frac{A}{x-a}$;

II $\frac{A}{(x-a)^k}$, де *к* – ціле число, *к>1*;

III $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, де $D=b^2-4ac<0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

IV $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, де *к* – ціле число, *к>1* і $D=b^2-4ac<0$.

У всіх чотирьох випадках вважаємо, що *A, B, a, в, c* – дійсні числа.

Перераховані елементарні дроби називають також найпростішими дробами I, II, III і IV типів.

Розглянемо інтеграли від найпростіших дробів.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\cdot\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$, де *к≠1*.

III. $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \left|\left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b\right| = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx =$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| +$$

$$+\begin{cases} \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}arctg\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac<0 \\ \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x+\frac{b}{2a}}\right)+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac=0 \\ \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\right|+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac>0 \end{cases}$$

IV. $$\int\frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}dx=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k}=$$

$$=\frac{A}{2a}\cdot\frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1}+\frac{1}{a^k}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int\frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}.$$

Останній інтеграл, як інтеграл виду $\int\frac{du}{(u^2+p^2)^k}$, можна знайти за рекурентною формулою, згідно з якою

$$I_k=\frac{1}{p^2}\left(\frac{u}{2(k-1)(u^2+p^2)^{k-1}}+\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}\right).$$

Якщо $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильний раціональний дріб, де *P(x)* і *Q(x)* – алгебраїчні многочлени з дійсними коефіцієнтами і

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots(x^2+p_\nu x+q_\nu)^{\beta_\nu},$$

де $x_1,\ldots,x_k$ - дійсні попарно різні нулі многочлена *Q(x),* а кожен тричлен $x^2+p_ix+q_i=(x-z_i)(x-\overline{z_i})$ $(i=1,2,\ldots,\nu)$ із дійсними коефіцієнтами відповідає парі уявних спряжених нулів z_i і $\overline{z_i}$ кратності β_i многочлена *Q(x),* причому $z_i\neq z_j$ для $i\neq j$,так що

$$\alpha_1+\ldots+\alpha_k+2(\beta_1+\ldots+\beta_\nu)=n,$$

$$\frac{p_i^{\,2}}{4}-q_i<0,\quad (i=1,\ldots,\nu),$$

то існують дійсні числа $A_i^{(\alpha)}(i=1,2,\ldots,k,\alpha=1,2,\ldots,\alpha_i)$, $M_j^{(\beta)}$ і $N_j^{(\beta)}$ $(j=1,2,\ldots,\nu,\beta=1,2,\ldots,\beta j)$ такі, що

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1^{(1)}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\ldots+\frac{A_1^{(\alpha_1)}}{x-x_1}+\ldots+\frac{A_k^{(1)}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}+\ldots+\frac{A_k^{(\alpha_k)}}{x-x_K}+$$

$$+\frac{M_1^{(1)}x+N_1^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}}+\ldots+\frac{M_1^{(\beta_1)}x+N_1^{(\beta_1)}}{x^2+p_1x+q_1}+\ldots+\frac{M_\nu^{(1)}x+N_\nu^{(1)}}{(x^2+p_\nu x+q_\nu)^{\beta_\nu}}+\ldots+\frac{M_\nu^{(\beta_\nu)}x+N_\nu^{(\beta_\nu)}}{x^2+p_\nu x+q_\nu}.$$

Правило інтегрування раціонального дробу

1 Якщо раціональний дріб неправильний, то виділяємо з нього цілу частину шляхом ділення многочлена чисельника на многочлен знаменника, тобто подаємо у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{Q(x)},$$

де *T(x)* – многочлен, а $\frac{R(x)}{Q(x)}$ - правильний раціональний дріб.

2 Розкладаємо знаменник дробу на лінійні та квадратичні множники:

$$Q(x)=(x-x_1)^{\alpha_1}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\ldots,\ \text{де}\ \frac{p_i^2}{4}-q_i<0,(i=1,2,\ldots,\nu).$$

3.Розкладаємо правильний раціональний дріб на елементарні (найпростіші) дроби.

Зауважимо, що таких дробів буде стільки, скільки коренів має многочлен *Q(x),* включаючи їх кратність, причому кожній парі комплексних спряжених коренів буде відповідати один дріб III типу або ν дробів IV типу, якщо ν-кратність пари комплексних спряжених коренів.

4 Звільняємося від дробових членів, помноживши обидві частини рівності на *Q(x).*

5.Обчислюємо невизначені коефіцієнти

$$A_1^{(1)},\ldots,A_1^{(\alpha_1)},\ldots,M_\nu^{(1)},N_\nu^{(1)},\ldots,M_\nu^{(\beta_\nu)},N_\nu^{(\beta_\nu)},$$

для чого прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах одержаної тотожності і розв`язуємо систему лінійних рівнянь відносно шуканих коефіцієнтів. (Число таких рівнянь повинно дорівнювати числу невідомих).

Зауважимо, що можна визначити коефіцієнти й іншим способом, надаючи в одержаній тотожності змінній x довільні числові значення, причому якщо змінній x надати значень простих коренів функції *Q(x),* то обчислення будуть найпростішими. Часто буває корисно комбінувати обидва способи обчислення коефіцієнтів.

6 Підставляємо знайдені значення коефіцієнтів до схеми розкладу.

Таким чином, інтегрування раціонального дробу зводиться до знаходження інтегралів від многочлена й від елементарних (найпростіших) раціональних дробів.

Слід пам`ятати, що інтеграл від будь-якої раціональної функції завжди виражається в скінченному вигляді.

Приклади

Приклад 36 Знайти $\int \frac{dx}{3x+2}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу I типу. Покладемо *3x+2=t*, тоді *3dx=dt* і тому

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C.$$

Розв`язання цього ж прикладу можна записати ще й так:

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+2)}{3x+2} = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C.$$

Приклад 37 Знайти $\int \frac{dx}{(1-2x)^7}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу II типу. Оскільки $d(1-2x) = (1-2x)'dx = -2dx$ і $\frac{1}{(1-2x)^7} = (1-2x)^{-7}$, то

$$\int \frac{dx}{(1-2x)^7} = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-7}(-2)dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-7} d(1-2x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{12(1-2x)^6} + C.$$

Приклад 38 Знайти $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де *A=0*, *B=1*, $b^2 - 4ac = -64 < 0$. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена $4x^2+4x+5$, одержимо табличний інтеграл (17). Дійсно

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \begin{vmatrix} u = 2x+1 \\ du = 2dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{2} arctg\frac{2x+1}{2} + C = \frac{1}{4} arctg\frac{2x+1}{2} + C.$$

Приклад 39 Знайти $\int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де *A=-8*, *B=7*, $D=b^2-4ac=-20 < 0$. Спочатку виділимо похідну знаменника в чисельнику дробу. Для цього чисельник *7-8x* подамо у вигляді

$$7-8x=-2(4x-2)+3.$$

Тоді

$$\int\frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx=\int\frac{-2(4x-2)+3}{2x^2-2x+3}dx=-2\int\frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx+3\int\frac{dx}{2x^2-2x+3}=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

Тут $\int\frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx$ знайдений за формулою (6) таблиці інтегралів, вважаючи $u=2x^2-2x+3$ і враховуючи, що $2x^2-2x+3>0$ для будь-якого x, а $\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}$ - за формулою (17), вважаючи $u=x-\frac{1}{2}$ і враховуючи, що $a^2=\frac{5}{4}$.

Покажемо тепер інший спосіб розв'язання цього ж прикладу.

$$\int\frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx=\frac{1}{2}\int\frac{7-8x}{x^2-x+\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{7-8x}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}dx=\left|\begin{matrix}x-\frac{1}{2}=u\\ dx=du\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{7-8\left(u+\frac{1}{2}\right)}{u^2+\frac{5}{4}}du=\frac{1}{2}\int\frac{-8u+3}{u^2+\frac{5}{4}}du=-2\int\frac{2udu}{u^2+\frac{5}{4}}+\frac{3}{2}\int\frac{du}{u^2+\frac{5}{4}}=$$

$$=-2\ln\left(u^2+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{2u}{\sqrt{5}}+C_1=-2\ln\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C_1=$$

$$=-2\ln\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C_1=-2\ln\left(2x^2-2x+3\right)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C,$$

де $C=C_1+2\ln 2$, бо $-2\ln\left(x^2-x+\frac{3}{2}\right)=-2\ln\frac{2x^2-2x+3}{2}=-2\ln\left(2x^2-2x+3\right)+2\ln 2$.

Відзначимо, що інтеграл виду

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx,$$

де квадратний тричлен $ax^2+вx+c$ має дискримінант $D=b^2-4ac\geq 0$ можна знаходити аналогічно знаходженню інтеграла від елементарного дробу III типу.

Приклад 40 Знайти $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція являє собою правильний раціональний дріб, знаменник якого $x^2+6x+9=(x+3)^2$, бо $D=b^2-4ac=0$. Тому цей дріб можна подати у вигляді суми двох елементарних дробів II типу. Однак. простіше розв`язати цей приклад таким же способом, яким розв`язано попередній приклад.

Отже, маємо

$$\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx=\int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)-11}{x^2+6x+9}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+9}dx-11\int \frac{dx}{x^2+6x+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+6x+9\right|-11\int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2}=\frac{3}{2}\ln(x+3)^2+\frac{11}{x+3}+C=3\ln\left|x+3\right|+\frac{11}{x+3}+C.$$

Приклад 41 Знайти $\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx.$

Розв'язання. I спосіб. Маємо

$$\int \frac{x-1}{x^2+x-6}dx=\int \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}dx=\left|\begin{matrix} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{matrix}\right|=\int \frac{t-\frac{1}{2}-1}{t^2-\frac{25}{4}}dt=$$

$$=\int \frac{tdt}{t^2-\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2-\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{25}{4}\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-6\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)(x-3)\right|-\frac{3}{10}\ln\left|x-2\right|+\frac{3}{10}\ln\left|x+3\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x-2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|x+3\right|-\frac{3}{10}\ln\left|x-2\right|+\frac{3}{10}\ln\left|x+3\right|+C=\frac{1}{5}\ln\left|x-2\right|+\frac{4}{5}\ln\left|x+3\right|+C.$$

II спосіб. Підінтегральний дріб являє собою правильний раціональний дріб, але не є найпростішим, бо квадратний тричлен x^2+x-6 має два дійсні корені $x_1=2$ і $x_2=-3$, через те, що його дискримінант $D=b^2-4ac=1+24=25>0$. Тому цей квадратний тричлен можна розкласти на множники $(x-2)(x+3)$, а підінтегральний правильний раціональний дріб на суму двох елементарних дробів I типу, тобто подати у вигляді

$$\frac{x-1}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3},$$

або

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}.$$

Звільняємося від дробових членів, для чого помножимо обидві частини рівності на добуток *(x-2)(x+3),* одержимо

$$x-1=A(x+3)+B(x-2),$$

або

$$x-1=(A+B)x+3A-2B.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах тотожності, одержимо систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими

$$\begin{array}{c|l} x & A+B=1, \\ x^0 & 3A-2B=-1. \end{array}$$

Розв`язавши цю систему, знаходимо шукані невизначені коефіцієнти $A=\frac{1}{5}$ і $B=\frac{4}{5}$.

Таким чином,

$$\frac{x-1}{x^2+x-6}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{x+3},$$

а

$$\int\frac{x-1}{x^2+x-6}dx=\int\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{4}{5}*\frac{1}{x+3}\right)dx=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-2}+\frac{4}{5}\int\frac{dx}{x+3}=\frac{1}{5}\ln|x-2|+\frac{4}{5}\ln|x+3|+C.$$

Приклад 42 Знайти $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більша, за степінь многочлена знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{rl|l} & x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{3-3} - & x^5-4x^3 & x^2+x+4 \quad \text{(ціла частина)} \\ \cline{1-2} & x^4+4x^3-8 & \\ - & x^4-4x^2 & \\ \cline{1-2} & 4x^3+4x^2-8 & \\ - & 4x^3-16x & \\ \cline{1-2} & 4x^2+16x-8 & \text{(остача).} \end{array}$$

Тепер подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені $x=0$, $x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів I типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Звільнюючись від дробових членів, одержимо

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

або

$$x^2+4x-2=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B+C=1, \\ x & 2B-2C=4, \\ x^0 & -4A=-2. \end{array}$$

Розв`язавши цю систему, знаходимо $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}.$

Слід відзначити, що тут коефіцієнти A, B і C простіше було б знайти способом підстановки до тотожності частинних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто:

$$x^2+4x-2 = A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2),$$

$$\begin{array}{c|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

звідки $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}.$

Таким чином,

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx =$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Приклад 43 Знайти $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx.$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Враховуючи, що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x=0$ і $x=3$ – прості, а $x=1$- двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}$. Отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-3)(x-1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

Приклад 44 Знайти $\int\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Його знаменник $(x^2+3)(x^2+1)$ не має дійсних коренів, а оскільки його множники x^2+3 і x^2+1 другого степеня і не повторюються, то розкладання даного правильного дробу на найпростіші має вигляд:

$$\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$3x^2+4x+11=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)$$

або

$$3x^2+4x+11=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+(B+3D).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності, будемо мати

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=3, \\ x & A+3C=4, \\ x^0 & B+3D=11. \end{array}$$

Звідси, ров`язуючи систему, знаходимо $A=-2$, $B=-1$, $C=2$, $D=4$.

Отже,

$$\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{-2x-1}{x^2+3}+\frac{2x+4}{x^2+1}$$

і шуканий інтеграл

$$\int\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{-2x-1}{x^2+3}+\frac{2x+4}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{2xdx}{x^2+3}-\int\frac{dx}{x^2+3}+\int\frac{2xdx}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln\left(x^2+1\right)+4arctgx+C.$$

Приклад 45 Знайти $\int\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Його знаменник $x(1+x^2)^2$ має один простий корінь $x=0$, а його множник $1+x^2$ не має дійсних коренів і повторюється два рази, тому розкладання цього дробу на елементарні дроби має вигляд:

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}+\frac{Dx+F}{(1+x^2)^2}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$3x+1=A(1+x^2)^2+(Bx+C)x(1+x^2)+(Dx+F)x$$

або

$$3x+1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+F)x+A.$$

Коефіцієнти обчислимо комбінованим способом.

$$\begin{array}{c|c} x=0 & 1=A, \\ x^4 & 0=A+B, \\ x^3 & 0=C, \\ x^2 & 0=2A+B+D, \\ x & 3=C+F. \end{array}$$

Розв'язавши систему, одержимо *A=1, B= -1, C=0, D= -1, F=3.*

Отже,

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}+\frac{-x+3}{(1+x^2)^2}$$

і шуканий інтеграл

$$\int\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{1+x^2}-\int\frac{xdx}{(1+x^2)^2}+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2(1+x^2)}+3\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.$$

Останній інтеграл знаходимо за рекурентною формулою, згідно з якою

$$I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right).$$

Враховуючи, що в нашому випадку $a^2=1$ і $n=2$, будемо мати

$$I_2=\int\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}arctgx.$$

Таким чином, остаточно шуканий інтеграл

$$\int\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{3x}{2(1+x^2)}+\frac{3}{2}arctgx+C=$$

$$=\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\frac{3x+1}{2(1+x^2)}+\frac{3}{2}arctgx+C.$$

Приклад 46 Знайти $\int\frac{x^6-85x^2+4x+2}{x^2(x^4-81)}dx.$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб – неправильний. Виділяємо з нього цілу частину:

$$\begin{array}{r|l} -\ \begin{array}{r} x^6-85x^2+4x+2 \\ x^6-81x^2 \\ \hline -4x^2+4x+2 \end{array} & \begin{array}{c} x^6-81x^2 \\ \hline 1 \end{array} \end{array}$$

Отже,

$$\frac{x^6-85x^2+4x+2}{x^2(x^4-81)}=1+\frac{-4x^2+4x+2}{x^2(x^4-81)}.$$

Тепер маємо

$$\int \frac{x^6-85x^2+4x+2}{x^2(x^4-81)}dx=\int\left(1+\frac{-4x^2+4x+2}{x^2(x^4-81)}\right)dx=$$

$$=\int dx-2\int\frac{2x^2-2x-1}{x^2(x^4-81)}dx=x-2\int\frac{2x^2-2x-1}{x^2(x-3)(x+3)(x^2+9)}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб – правильний. Розкладемо його на елементарні дроби. Множнику x^2 відповідають два елементарні дроби II типу

$$\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x},$$

множникам $x-3$ і $x+3$ по одному елементарному дробу I типу $\frac{C}{x-3}$ і $\frac{D}{x+3}$, а множнику x^2+9 відповідає один елементарний дріб III типу $\frac{Mx+N}{x^2+9}$. Тому підінтегральний правильний дріб можна подати у вигляді

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^2(x-3)(x+3)(x^2+9)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+3}+\frac{Mx+N}{x^2+9}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$2x^2-2x-1=A(x-3)(x+3)(x^2+9)+Bx(x-3)(x+3)(x^2+9)+$$
$$+Cx^2(x+3)(x^2+9)+Dx^2(x-3)(x^2+9)+(Mx+N)x^2(x-3)(x+3).$$

Коефіцієнти обчислимо комбінованим способом.

$$\begin{array}{c|c}
x=0 & -1=-81A,\\
x=3 & 11=972C,\\
x=-3 & 23=-972D,\\
x^5 & 0=B+C+D+M,\\
x^4 & 0=A+3C-3D+N,\\
x^3 & 0=9C+9D-9M.
\end{array}$$

Розв’язавши систему, одержимо

$$A=\frac{1}{81},B=\frac{2}{81},C=\frac{11}{972},D=-\frac{23}{972},M=-\frac{1}{81},N=-\frac{19}{162}.$$

Отже,

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^2(x^4-81)}=\frac{\frac{1}{81}}{x^2}+\frac{\frac{2}{81}}{x}+\frac{\frac{11}{972}}{x-3}+\frac{-\frac{23}{972}}{x+3}+\frac{-\frac{1}{81}x-\frac{19}{162}}{x^2+9},$$

а

$$\int\frac{2x^2-2x-1}{x^2(x^4-81)}dx=\frac{1}{81}\int\frac{dx}{x^2}+\frac{2}{81}\int\frac{dx}{x}+\frac{11}{972}\int\frac{dx}{x-3}-$$

$$-\frac{23}{972}\int\frac{dx}{x+3}-\frac{1}{81}\int\frac{xdx}{x^2+9}-\frac{19}{162}\int\frac{dx}{x^2+9}=-\frac{1}{81x}+\frac{2}{81}\ln|x|+\frac{11}{972}\ln|x-3|-$$

$$-\frac{23}{972}\ln|x+3|-\frac{1}{162}\ln(x^2+9)-\frac{19}{486}arctg\frac{x}{3}+C.$$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int\frac{x^6-85x^2+4x+2}{x^2(x^4-81)}dx=x+\frac{2}{81x}-\frac{4}{81}\ln|x|-\frac{11}{486}\ln|x-3|+$$

$$+\frac{23}{486}\ln|x+3|+\frac{1}{81}\ln(x^2+9)+\frac{19}{243}arctg\frac{x}{3}+C.$$

Зауважимо, що іноді інтеграли від раціональних дробів удається знайти, не застосовуючи метод невизначених коефіцієнтів. Покажемо це на прикладі.

Приклад 47 Знайти $\int\frac{dx}{x^2(x^2+5)}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{x^2(x^2+5)}=\frac{1}{5}\int\frac{5+x^2-x^2}{x^2(x^2+5)}dx=\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+5}=-\frac{1}{5x}-\frac{1}{5\sqrt{5}}arctg\frac{x}{\sqrt{5}}+C.$$

Приклад 48 Знайти $\int\frac{xdx}{x^4+6x^2+5}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{xdx}{x^4+6x^2+5}=\int\frac{xdx}{(x^2+3)^2-4}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+3)}{(x^2+3)^2-4}=$$

$$=\frac{1}{2}*\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^2+3-2}{x^2+3+2}\right|+C=\frac{1}{8}\ln\frac{x^2+1}{x^2+5}+C.$$

Приклад 48 Знайти $\int\frac{x^2dx}{(x-1)^5}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)^5}=\left|\begin{matrix}x-1=t\\dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t+1)^2}{t^5}dt=\int\frac{t^2+2t+1}{t^5}dt=$$

$$=\int\frac{dt}{t^3}+2\int\frac{dt}{t^4}+\int\frac{dt}{t^5}=\frac{t^{-2}}{-2}+2\cdot\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-4}}{-4}+C=$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{2}{3(x-1)^3}-\frac{1}{4(x-1)^4}+C=-\frac{6x^2-4x+1}{12(x-1)^4}+C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1 $\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}dx.$ Відповідь: $\frac{x}{4}+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C$.

2 $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}$. Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C$.

3 $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$. Відповідь: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$.

4 $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx$. Відповідь: $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C$.

5 $\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}$. Відповідь: $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C$.

6 $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx$. Відповідь: $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C$.

7 $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$. Відповідь: $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-arctgx+C$.

8 $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C$.

9 $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx$. Відповідь: $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x\sqrt{2}}{2}+C$.

10 $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx$. Відповідь: $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

11 $\int \frac{dx}{x(1+x^2)(4+x^2)^2}$. Відповідь: $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C$.

12 $\int \frac{x^9dx}{(x^4-1)^2}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C$.

13 $\int \frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx$. Відповідь: $\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

14 $\int \frac{dx}{(x^2-2x)^2}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x(x-2)}+C$.

15 $\int \frac{dx}{x^3-8}$. Відповідь: $\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$.

16 $\int \frac{x^4}{x^4-16}dx$. Відповідь: $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-arctg\frac{x}{2}+C$.

17 $\int \frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx$. Відповідь: $3x+\ln|x|+2arctgx+C$.

18 $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x+3}dx$. Відповідь: $\frac{x^2}{2}-4x+\frac{3}{4}\ln|x|+\frac{41}{4}\ln|x+3|+C$.

19 $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2+3x+4}$. Відповідь: $2\ln(x^2+3x+4)-\frac{18}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$.

20 $\int \frac{18x^2+13x}{1+6x+9x^2}dx$. Відповідь: $2x+\frac{1}{9}\left(\frac{7}{3x+1}+\ln|3x+1|\right)+C$.

8 Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл від будь-якої раціональної функції, як було викладено вище, завжди виражається в скінченному вигляді, чого не можна сказати про інтеграл від функції ірраціональної. Однак, можна вказати на деякі підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді.

Загальний спосіб, за допомогою якого вдається знайти інтеграл від ірраціональної функції, полягає в тому, що внаслідок тієї чи іншої підстановки інтеграл від ірраціональної функції зводиться до інтеграла від функції раціональної. Тому цей спосіб називають раціоналізацією заданого інтеграла.

Розглянемо підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді.

1 Інтеграл вигляду $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx$,

де R- раціональна функція, m_i і $n_i > 1$- натуральні числа $(i=1, 2,\ldots,p)$.

Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x=t^k$, де $к$ – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i=1, 2, \ldots,p)$.

2 Інтеграл вигляду $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx$,

де R- раціональна функція, m_i і $n_i > 1$- натуральні числа $(i=1, 2,\ldots,p)$ і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d- сталі дійсні числа).

Такий інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де $к$- найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ $(i=1, 2,\ldots,p)$.

3 Інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Цей інтеграл зводиться до табличного шляхом виділення повного квадрата із квадратного тричлена.

4 Інтеграл вигляду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Для знаходження цього інтеграла спочатку виділяємо в чисельнику похідну квадратного тричлена $ax^2+вx+c,$ після чого розкладаємо інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Перший із одержаних інтегралів є табличним інтегралом (4), а другий – розглянутий у п.3.

5 Інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}.$

Підстановкою $x-\alpha=\frac{1}{t}$ зводять цей інтеграл до розглянутого в п. 3.

6 Інтеграл вигляду $\int x^m(a+bx^n)^p dx,$

де m, n і p – раціональні числа, $a \neq 0$ і $b \neq 0$ називають інтегралом від диференціального бінома. Цей інтеграл виражається в скінченному вигляді у таких трьох випадках:

а) p- ціле число;

б) $\frac{m+1}{n}-$ ціле число;

в) $\frac{m+1}{n}+p-$ ціле число,

причому в усіх трьох випадках ціле число може бути додатним, від`ємним, або дорівнювати нулю.

Розглянемо перший випадок: p – ціле число. Підстановка $x=t^k,$ де $к$ – найменший спільний знаменник дробів m і n, раціоналізує інтеграл.

У другому випадку $\frac{m+1}{n}-$ ціле число. Інтеграл раціоналізується підстановкою $a+bx^n=t^s$, де s – знаменник числа p.

У третьому випадку: $\frac{m+1}{n}+p-$ ціле число. Для раціоналізації інтеграла застосовують підстановку $ax^{-n}+b=t^s$, де s- знаменник числа p.

7 Інтеграл вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$

де R- раціональна функція.

Шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена ax^2+bx+c цей інтеграл зводиться до одного з трьох інтегралів:

а) $\int R\left(z, \sqrt{m^2 - z^2}\right)dz$;

б) $\int R\left(z, \sqrt{m^2 + z^2}\right)dz$;

в) $\int R\left(z, \sqrt{z^2 - m^2}\right)dz$.

Ці інтеграли знаходять відповідно за допомогою підстановок

а) $z=m\ sint$;

б) $z=m\ tgt$;

в) $z = \dfrac{m}{\cos t}$.

Приклади

Приклад 49 Знайти $\int \dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=4$, тому $к=12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Покладемо $x=t^{12}$. Тоді

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{array} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12t^{11}dt =$$

$$= 12\int \frac{t^{17}dt}{t^3(t^5 - 1)} = 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5 - 1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} -\ t^{14} & t^5-1 \\ \cline{2-2} \quad t^{14} - t^9 & t^9 + t^4 \\ \hline \quad -\ t^9 & \\ \quad\ t^9 - t^4 & \\ \hline \qquad t^4 & \end{array} \right| =$$

$$= 12\int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5 - 1} \right) dt = 12\left(\int t^9 dt + \int t^4 dt + \frac{1}{5}\int \frac{5t^4 dt}{t^5 - 1} \right) =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left|t^5 - 1\right| \right) + C = \frac{6}{5}\left(t^{10} + 2t^5 + 2\ln\left|t^5 - 1\right|\right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right| \right) + C.$$

Приклад 50 Знайти $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл другого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=3$, $n_2=2$, тому $к=6$. Використовуючи підстановку $2x+1=t^6$, звідки $x=\frac{1}{2}(t^6-1)\cdot dx=3t^5dt$, одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\int\frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int\frac{t^2dt}{t-1}=3\int\frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C.$$

Оскільки $t=\sqrt[6]{2x+1}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=3\left(\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2}+\sqrt[6]{2x+1}+\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|\right)+C.$$

Приклад 51 Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.

Розв'язання. Виділимо з квадратного тричлена повний квадрат:

$$9x^2-6x+2=9x^2-6x+1+1=(3x-1)^2+1.$$

Тоді, враховуючи також, що $d(3x-1)=3dx$, одержимо табличний інтеграл (20):

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}=\frac{1}{3}\int\frac{3dx}{\sqrt{(3x-1)^2+1}}=\frac{1}{3}\ln\left|3x-1+\sqrt{9x^2-6x+2}\right|+C$$

.

Приклад 52 Знайти $\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

Розв'язання. Спочатку в чисельнику виділимо похідну підкореневого виразу, після чого розкладемо інтеграл на суму двох інтегралів. Тоді

$$-4\int\frac{2-2x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}.$$

Перший із одержаних інтегралів є табличним інтегралом (4), а другий зведеться до табличного інтеграла (19) шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена $5+2x-x^2$.

Виділяючи повний квадрат, будемо мати

$$5+2x-x^2=-(x^2-2x-5)=-(x^2-2x+1-6)=6-(x-1)^2.$$

Отже,

$$\int\frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx=-4\int\frac{2-2x}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{6-(x-1)^2}}=$$

$$=-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$$

Приклад 53 Знайти $\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо

$$\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\int\frac{\frac{3}{8}(8x+4)-\frac{3}{2}-2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\frac{3}{8}\int\frac{8x+4}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\int\frac{2dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+C.$$

Зауважимо, що розв`язати аналогічні приклади можна й іншим способом. Покажемо це на прикладі 53.

$$\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=\left|\begin{matrix}2x+1=t\\2dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{3\cdot\frac{t-1}{2}-2}{\sqrt{t^2+4}}\cdot\frac{1}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{3t-7}{\sqrt{t^2+4}}dt=\frac{3}{4}\int\frac{tdt}{\sqrt{t^2+4}}-\frac{7}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\frac{3}{4}\sqrt{t^2+4}-\frac{7}{4}\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+C.$$

Приклад 54 Знайти $\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Розв'язання. Покладемо $x-1=\frac{1}{t}$, тоді $x=\frac{1}{t}+1$ і $dx=-\frac{dt}{t^2}$. Отже,

$$\int\frac{dx}{(x-1)\sqrt{3+2x-x^2}}=\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{3+2\left(\frac{1}{t}+1\right)-\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}}=-\int\frac{dt}{t\sqrt{3+\frac{2}{t}+2-\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}-1}}=$$

$$=-\int\frac{dt}{t\sqrt{4-\frac{1}{t^2}}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{4t^2-1}}=-\int\frac{dt}{\sqrt{(2t)^2-1}}=-\frac{1}{2}\int\frac{2dt}{\sqrt{(2t)^2-1}}=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left|2t+\sqrt{4t^2-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2}{x-1}+\sqrt{4\cdot\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-1}\right|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2+\sqrt{3+2x-x^2}}{x-1}\right|+C.$$

Приклад 55 Знайти $\int\frac{(5x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\frac{(5x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}=\int\frac{5(x+1)-2}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}dx=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}-2\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x+1=\frac{1}{t} \\ x=\frac{1}{t}-1 \\ dx=-\frac{1}{t^2}dt \end{array}\right|=5\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}}-2\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-4\left(\frac{1}{t}-1\right)+5}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+2\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1-\frac{4}{t}+4+5}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+2\int\frac{dt}{\sqrt{10t^2-6t+1}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{6}{10}t+\frac{1}{10}}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{100}}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|t-\frac{3}{10}+\sqrt{t^2-\frac{6}{10}t+\frac{1}{10}}\right|+C=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{3}{10}+\sqrt{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-\frac{6}{10}*\frac{1}{x+1}+\frac{1}{10}}\right|+C=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{7-3x+\sqrt{10(x^2-4x+5)}}{10(x+1)}\right|+C.$$

Приклад 56 Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$.

Розв'язання. Маємо перший випадок інтегрування диференціального бінома, оскільки підінтегральна функція

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}=x^{-\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{4}}+1\right)^{-10},$$

де $p=-10$ – ціле число. Покладемо $x=t^4$, де число 4 є найменшим спільним знаменником дробів $-\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{4}$. Тоді шуканий інтеграл набуде вигляду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \left| \begin{array}{c} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{4t^3 dt}{t^2 (t+1)^{10}} = 4\int \frac{tdt}{(t+1)^{10}}$$

$$= 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}} dt = 4\int \frac{dt}{(t+1)^9} - 4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = 4 \cdot \frac{(t+1)^{-8}}{-8} - 4 \cdot \frac{(t+1)^{-9}}{-9} + C =$$

$$= -\frac{1}{2(t+1)^8} + \frac{4}{9(t+1)^9} + C = -\frac{1}{2(1+\sqrt[4]{x})^8} + \frac{4}{9(1+\sqrt[4]{x})^9} + C.$$

Приклад 57 Знайти $\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від діференціального бінома, бо

$$\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}} dx.$$

Тут $m= -2$, $n=3$, $p = -\frac{5}{3}$. Оскільки $\frac{m+1}{n} + p = \frac{-2+1}{3} - \frac{5}{3} = -2$ - ціле число, то заданий інтеграл підстановкою $2x^{-3}+1=t^3$ зводиться до інтеграла від раціональної функції. Отже, маємо

$$\int \frac{dx}{x^2\left(2+x^3\right)^{\frac{5}{3}}} = \int x^{-2}\left(2+x^3\right)^{-\frac{5}{3}} dx = \left| \begin{array}{c} 2x^{-3}+1 = t^3 \\ x = \left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}} \\ dx = -\frac{1}{3}\left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{3t^2}{2} dt \end{array} \right| =$$

$$= \int x^{-2} * x^{-5}\left(2x^{-3}+1\right)^{-\frac{5}{3}} dx = \int x^{-7}\left(2x^{-3}+1\right)^{-\frac{5}{3}} dx =$$

$$= \int \left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{\frac{7}{3}} \cdot t^{-5} \cdot \left(\frac{t^3-1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot \frac{-t^2}{2} dt = -\frac{1}{4}\int \frac{t^3-1}{t^3} dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\int \left(1 - \frac{1}{t^3}\right) dt = -\frac{1}{4}\left(t + \frac{1}{2t^2}\right) + C = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2t^3+1}{2t^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{8} \cdot \frac{2(2x^{-3}+1) \quad +1}{(2x^{-3}+1)^{\frac{2}{3}}} + C = -\frac{1}{8} \cdot \frac{4+3x^3}{x(2+x^3)^{\frac{2}{3}}} + C.$$

Приклад 58 Знайти $\int x^5 \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\, dx$.

Розв'язання. Записавши даний інтеграл у вигляді $\int x^5(1+x^3)^{\frac{2}{3}}dx$, зазначаємо, що тут $m=5$, $n=3$ і $p=\frac{2}{3}$. Оскільки $\frac{m+1}{n}=\frac{5+1}{3}=2$ – ціле число, то підстановкою $1+x^3=t^3$ заданий інтеграл зводиться до інтеграла від раціональної функції.

Враховуючи, що $x^3=t^3-1$ і $3x^2dx=3t^2dt$, будемо мати

$$\int x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}dx=\int x^3\cdot(1+x^3)^{\frac{2}{3}}\cdot x^2dx=\int(t^3-1)\cdot t^2\cdot t^2dt=$$

$$=\int\left(t^7-t^4\right)dt=\frac{t^8}{8}-\frac{t^5}{5}+C=\frac{1}{8}\left(1+x^3\right)^{\frac{8}{3}}-\frac{1}{5}\left(1+x^3\right)^{\frac{5}{3}}+C.$$

Зауважимо, що інтеграли вигляду

$$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx,\qquad \int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx,\quad \int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$$

будуть розглянуті нижче в розділі 10.

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1 $\int\frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx.$ Відповідь: $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C.$

2 $\int\frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx.$ Відповідь: $2arctg\sqrt{x}+C.$

3 $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}.$ Відповідь: $3\sqrt[3]{x}+3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right|+C.$

4 $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$ Відповідь: $2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right|+C.$

5 $\int\frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}}dx.$ Відповідь: $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2}+\frac{13}{9}\ln\left(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right)+C.$

6 $\int\frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}.$ Відповідь: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}}+C.$

7 $\int\frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}.$ Відповідь: $\frac{(x^2-4)\sqrt{x^2+2}}{3}+C.$

8 $\int\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}.$ Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}}\right|+C.$

9 $\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$ Відповідь: $-2arctg\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x}+C.$

10 $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. Відповідь: $-\frac{1}{15}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x+15x^2}}{2x-3}\right|+C$.

11 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}$. Відповідь: $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right)+C$.

12 $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}$. Відповідь: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6arctg\sqrt[6]{x}+C$.

13 $\int \frac{x-1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$. Відповідь: $\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+\sqrt{2}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{2(x+1)}\right|+C$.

14 $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}dx$. Відповідь: $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}+C$.

15 $\int \sqrt[3]{x}\sqrt{5x\sqrt[3]{x}+3}dx$. Відповідь: $\frac{1}{10}\left(5\sqrt[3]{x^4}+3\right)^{\frac{3}{2}}+C$.

16 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{2-x^3}}$. Відповідь: $-\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(2-x^3\right)^{\frac{2}{3}}}{x^2}+C$.

17 $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. Відповідь: $\left(\frac{1}{4x^4}+\frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}+C$.

18 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$. Відповідь: $\frac{12}{7}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{7}{3}}-3\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{4}{3}}+C$.

19 $\int x^{-1}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}dx$. Відповідь: $3\ln\left|\frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right|+\frac{3}{2}\cdot\frac{2\sqrt[3]{x}+3}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}+C$.

20 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$. Відповідь: $-2\sqrt[3]{\left(x^{-\frac{3}{4}}+1\right)^2}+C$.

9 Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли від тригонометричних функцій, як і від функцій ірраціональних, не завжди можна знайти. Однак, можна вказати на підклас таких функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді. До цього підкласу тригонометричних функцій входять тригонометричні функції, що є раціональними функціями від *sinx, cosx, tgx, ctgx, secx, cosecx*. Оскільки *tgx, ctgx, secx, cosecx* самі виражаються раціонально через sinx і cosx, то цей підклас можна охарактеризувати як підклас тригонометричних функцій, які є раціональними функціями від *sinx* і *cosx*.

1 Інтеграл вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx$,

де R –раціональна функція від *sinx* і *cosx* за допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки

$$tg\frac{x}{2}=t\,,\ \left(-\pi<x<\pi\right)$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції. При цьому

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2arctgt, dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2}=t$ вигідніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2}=t(0<x<2\pi)$.

Слід також відзначити, що завдяки своїй універсальності підстановка $tg\frac{x}{2}=t$ часто призводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл.

Нижче вкажемо випадки, коли мета буде досягнута за допомогою простіших підстановок.

2 Інтеграл вигляду $\int R(\sin x,\cos x)dx$,

де R – раціональна функція від *sinx* і *cosx*.

а) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx,\ cosx)\equiv -R(sinx,\ cosx),$$

то вигідно застосувати підстановку $cosx=t$.

б) Якщо виконується рівність

$$R(sinx,\ -cosx)\equiv -R(sinx,\ cosx),$$

то доцільно застосувати підстановку $sinx=t$.

в) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx,\ -cosx)\equiv R(sinx,\ cosx),$$

то застосовують підстановку $tgx=t$ або $ctgx=t$, при цьому, якщо $tgx=t$, то

$$\sin x=\frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2x}}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Зокрема,

$\int R(\sin x)\cos xdx$ підстановкою *sinx=t* зводиться до $\int R(t)dt.$

$\int R(\cos x)\sin xdx$ підстановкою *cosx=t* зводиться до $\int R(t)dt.$

$\int R(tgx)dx$ підстановкою *tgx=t* зводиться до $\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$

3 Інтеграл вигляду $\int \sin^m x\cos^n xdx$.

а) Якщо *m* і *n* – цілі числа і принаймні одне з цих чисел – непарне додатне число, наприклад *m=2k+1*, тоді

$$\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \cos^n x\cdot\sin^{2k} x\cdot\sin xdx =$$

$$\int \cos^n x\left(\sin^2 x\right)^k dx = -\int \cos^n x\left(1-\cos^2 x\right)^k d\cos x =$$

$$= \left|\cos x = t\right| = -\int t^n(1-t^2)^k dt.$$

Якщо ж непарним буде число *n=2p+1>0*, то треба застосувати підстановку *t=sinx*. Тоді

$$\int \sin^m x\cos^n xdx = \int \sin^m x(\cos^2 x)^p \cos xdx =$$

$$= \int \sin^m x(1-\sin^2 x)^p d\sin x = \int t^m(1-t^2)^p dt.$$

б) Якщо обидва показники *m* і *n* – парні невід`ємні числа(зокрема, один із них може дорівнювати нулю), то доцільно застосувати формули

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1-\cos 2x\right),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos 2x\right).$$

в) Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них – від`ємний, то треба зробити заміну *tgx=t* або *ctgx=t*.

Зауважимо, що інтеграли вигляду $\int \sin^m x\cos^n xdx$ дуже зручно знаходити за допомогою рекурентних формул.

$$\int \sin^m x\cos^n xdx = \begin{cases} -\dfrac{\sin^{m-1} x\cos^{n+1} x}{m+n} + \dfrac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x\cos^n xdx, m \neq -n, \\ \dfrac{\sin^{m+1} x\cos^{n-1} x}{m+n} + \dfrac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2} xdx, m \neq -n. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} = \begin{cases} -\dfrac{1}{m-1}\cdot\dfrac{1}{\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x} + \dfrac{m+n-2}{m-1}\int \dfrac{dx}{\sin^{m-2} x\cos^n x}, m \neq 1, \\ \dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x} + \dfrac{m+n-2}{n-1}\int \dfrac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2} x}, n \neq 1. \end{cases}$$

4 Інтеграл вигляду $\int tg^m xdx$ або $\left(\int ctg^m xdx\right)$,

де *m* - ціле додатне число. Для знаходження такого інтеграла застосовують формулу

$$tg^2x = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \quad (\text{або} \quad ctg^2x = \operatorname{cosec}^2 x - 1 = \frac{1}{\sin^2 x} - 1),$$

за допомогою якої послідовно знижується степінь тангенса або котангенса.

5 Інтеграли вигляду

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \sin bx dx.$$

Щоб знайти ці інтеграли, треба перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right), \tag{27}$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right), \tag{28}$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right). \tag{29}$$

6 Інтеграли вигляду $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx.$

Такі інтеграли знаходять за допомогою універсальної підстановки $t = tg\frac{x}{2}$.

7 Інтеграли вигляду $\int \frac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin^2 x + b_2 \sin x \cos x + c_2 \cos^2 x} dx.$

Для знаходження цих інтегралів доцільно застосувати підстановку $t=tgx$.

Приклад

Приклад 59 Знайти $\int \cos^4 x \sin^5 x dx.$

Розв'язання. Маємо інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де $m=5$, $n=4$. Враховуючи, що $m=5>0$ і непарне, одержимо

$$\int \cos^4 x \sin^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \cos^4 x (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx =$$

$$= \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{vmatrix} = -\int t^4 (1-t^2)^2 dt = -\int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt =$$

$$= -\int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9}\right) + C = -\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9}\right) + C.$$

Приклад 60 Знайти $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx.$

Розв'язання. Маємо інтеграл такого ж вигляду, як у попередньому прикладі, де $m = -\frac{4}{5}$, $n=3>0$ і непарне, тому

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} \cos x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} \cos x dx =$$

$$=\left|\begin{array}{c}\sin x=t^5\\ \cos xdx=5t^4dt\end{array}\right|=\int\frac{1-t^{10}}{t^4}5t^4dt=5\int\left(1-t^{10}\right)dt=5\left(t-\frac{t^{11}}{11}\right)+C=$$

$$=5\sqrt[5]{\sin x}-\frac{5}{11}\sqrt[5]{\sin^{11}x}+C.$$

Приклад 61 Знайти $\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx.$

Розв'язання. Тут маємо інтеграл 3 типу (випадок в), де *m=2*, *n=-4<0* і парне, тому

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx=\left|\begin{array}{c}tgx=t\\ x=arctgt;dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\\ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2};\cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{1}{(1+t^2)^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\int t^2dt=\frac{t^3}{3}+C=\frac{tg^3x}{3}+C.$$

Зауважимо, що даний інтеграл можна знайти простіше. Зробивши деякі тотожні перетворення підінтегрального виразу, одержимо

$$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^4 xdx}=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int tg^2xd(tgx)=\frac{tg^3x}{3}+C.$$

Приклад 62 Знайти $\int\sin^2 x\cos^4 xdx.$

Розв'язання. Враховуючи, що *m=2*, *n=4*, тобто обидва показники додатні і парні, будемо мати

$$\int\sin^2 x\cos^4 xdx=\frac{1}{4}\cdot\cos^2 xdx=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=$$

$$=\frac{1}{8}\int\sin^2 2xdx+\frac{1}{8}\int\sin^2 2x\cdot\cos 2xdx=\frac{1}{16}\int(1-\cos 4x)dx+\frac{1}{16}\int\sin^2 2xd\sin 2x=$$

$$=\frac{1}{16}\int dx-\frac{1}{16}\int\cos 4xdx+\frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3}=\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+C.$$

Приклад 63 Знайти $\int tg^5xdx.$

Розв'язання. І спосіб. Враховуючи, що $tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1,$ будемо мати

$$\int tg^5xdx=\int tg^3x\cdot tg^2xdx=\int tg^3x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\int tg^3x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx-\int tg^3xdx=\frac{tg^4x}{4}-\int tgx\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$$

$$=\frac{tg^4x}{4}-\int tgx\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int tgxdx=\frac{tg^4x}{4}-\frac{tg^2x}{2}-\ln|\cos x|+C.$$

II спосіб. Маємо

$$\int tg^5 x dx = \left| \begin{array}{c} tgx = t \\ x = arctgt \\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^5 dt}{1+t^2} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \quad t^5 \qquad\qquad\qquad\qquad \Big| \, t^2+1 \\ -\underline{t^5+t^3} \qquad\qquad\qquad \Big| \, \overline{t^3-t} \\ \quad -t^3 \\ -\underline{-t^3-t} \\ \qquad t \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(t^3 - t + \frac{t}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(tg^2 x + 1) + C =$$

$$= \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2 x} + C = \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} + \frac{1}{2}\ln(\cos x)^{-2} + C =$$

$$= \frac{tg^4 x}{4} - \frac{tg^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C.$$

Приклад 64 Знайти $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos x}.$$

Якщо у виразі $\frac{1}{2\sin^2 x \cos x}$ замінити *cosx* на *-cosx*, то дріб змінить знак на протилежний, тому тут треба застосувати підстановку *sinx=t.* Тоді *x=arcsint*, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$ і

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \int \frac{dx}{2\sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2(1-t^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2t} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{1}{2\sin x} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + C.$$

Приклад 65 Знайти $\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$.

Розв'язання. Оскільки при зміні знаків у *sinx* і *cosx* підінтегральна функція не змінює знака, то застосовуємо підстановку *tgx=t.* Отже, маємо

$$\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{2tgx+3}{(tg^2 x + 2)\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{c} tgx = t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| =$$

$$=\int\frac{2t+3}{t^2+2}dt=\int\frac{2tdt}{t^2+2}+3\int\frac{dt}{t^2+2}=\ln(t^2+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=\ln(tg^2x+2)+\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}}+C.$$

Приклад 66 Знайти $\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від *sinx* і *cosx*. Тому, зробивши підстановку $tg\frac{x}{2}=t,$ одержимо

$$\int\frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\left|\begin{array}{c} tg\frac{x}{2}=t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=\int\frac{1+t^2+2t}{t(1+t^2+1-t^2)}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|t|+\frac{t^2}{2}+2t\right)+C=\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2}+tg\frac{x}{2}+C.$$

Приклад 67 Знайти $\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}.$

Розв'язання. Діючи, як у попередньому прикладі, будемо мати

$$\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\left|\begin{array}{c} tg\frac{x}{2=t} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2}=\int\frac{2dt}{2t^2-8t+8}=\int\frac{dt}{t^2-4t+4}=\int\frac{dt}{(t-2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{t-2}+C=\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C.$$

Приклад 68 Знайти $\int\frac{dx}{4-3\cos^2x+5\sin^2x}.$

Розв'язання. Враховуючи, що $4-3cos^2x+5sin^2x=4(cos^2x+sin^2x)-$

$-3cos2x+5sin^2x=cos^2x+9sin^2x$, одержимо

$$\int\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x+9\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(1+9tg^2x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} tgx=t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt \end{array}\right|=\int\frac{dt}{1+9t^2}=\int\frac{dt}{1+(3t)^2}=\frac{1}{3}\int\frac{3dt}{1+(3t)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}arctg3t+C=\frac{1}{3}arctg(3tgx)+C.$$

Приклад 69 Знайти $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x}$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-3\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x(tg^2x+2tgx-3)}=\left|\begin{array}{c} tgx=t \\ \dfrac{dx}{\cos^2 x}=dt \end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2t-3}=\int\frac{dt}{(t+1)^2-4}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t+1-2}{t+1+2}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{tgx-1}{tgx+3}\right|+C.$$

Приклад 70 Знайти $\int\cos x\sin 3xdx$.

Розв'язання. Маємо інтеграл 5 типу. Застосувавши формулу (27), згідно з якою $\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right)$, одержимо

$$\int\cos x\sin 3xdx=\frac{1}{2}\int\left(\sin 4x+\sin 2x\right)dx=\frac{1}{2}\int\sin 4xdx+\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=$$

$$=-\frac{1}{8}\cos 4x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Приклад 71 Знайти $\int\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$.

Розв'язання. Застосувавши формулу (29), згідно з якою $\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right)$, будемо мати

$$\int\cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}dx+\frac{1}{2}\int\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4}\right)dx+\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C.$$

Приклад 72 Знайти $\int\left(tg^2x+tg^4x\right)dx$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\left(tg^2x+tg^4x\right)dx=\int tg^2x\left(1+tg^2x\right)dx=\int tg^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx=\int tg^2xdtgx=\frac{tg^3x}{3}+C.$$

Приклад 73 Знайти $\int\frac{\sin^4x}{\cos^2x}dx.$

Розв'язання.

$$\int\frac{\sin^4x}{\cos^2x}dx=\int\frac{(\sin^2x)^2}{\cos^2x}dx=\int\frac{(1-\cos^2x)^2}{\cos^2x}dx=$$

$$=\int\frac{1-2\cos^2x+\cos^4x}{\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2x}-2\int dx+\int\cos^2xdx=tgx-2x+\frac{1}{2}\int(1+\cos2x)dx=$$

$$=tgx-2x+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin2x+C=tgx-\frac{3x}{2}+\frac{1}{4}\sin2x+C.$$

Приклад 74 Знайти $\int\frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^2}.$

Розв'язання.

$$\int\frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^2}=\begin{vmatrix}1-\cos x=t\\ \sin xdx=dt\end{vmatrix}=\int\frac{dt}{t^2}=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{1-\cos x}+C=\frac{1}{\cos x-1}+C.$$

Приклад 75 Знайти $\int\frac{dx}{tgx\cos2x}.$

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{tgx\cos2x}=\int\frac{dx}{tgx(\cos^2x-\sin^2x)}=\int\frac{dx}{tgx(1-tg^2x)\cos^2x}=\begin{vmatrix}tgx=t\\ \frac{dx}{\cos^2x}=dt\end{vmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{t(1-t^2)}=\int\frac{1-t^2+t^2}{t(1-t^2)}dt=\int\frac{dt}{t}+\int\frac{tdt}{1-t^2}=$$

$$=\ln|t|-\frac{1}{2}\ln\left|1-t^2\right|+C=\ln|tgx|-\frac{1}{2}\ln\left|1-tg^2x\right|+C.$$

Приклад 76 Знайти $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}.$

Розв'язання. I спосіб.

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\sin^2x\cos^2x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2x}+\int\frac{dx}{\cos^2x}=-ctgx+tgx+C=$$

$$==-\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\cos x\sin x}+C=-\frac{\cos2x}{\frac{1}{2}\sin2x}+C=-2ctg2x+C.$$

II спосіб.

$$\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=4\int\frac{dx}{4\sin^2x\cos^2x}=4\int\frac{dx}{(2\sin x\cos x)^2}=4\int\frac{dx}{\sin^22x}=-2ctg2x+C$$

Приклад 77 Знайти $\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx = \int \frac{\sin x(1+\sin^2 x)}{\cos^2 x - \sin^2 x} dx = \int \frac{2-\cos^2 x}{2\cos^2 x - 1} \sin x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{2-t^2}{2t^2-1} dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2-4}{2t^2-1} dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt}{(t\sqrt{2})^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t\sqrt{2}-1}{t\sqrt{2}+1}\right| + C = \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

Приклад 78 Знайти $\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)dt}{t^2+t^4} = \int \frac{t^4-3t^2+2}{t^2+t^4} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} -\begin{array}{r} t^4-3t^2+2 \\ t^4+t^2 \\ \hline -4t^2+2 \end{array} & \begin{array}{l} t^4+t^2 \\ \hline 1 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int \left(1 - \frac{4t^2-2}{t^4+t^2}\right) dt = \int dt - 4\int \frac{t^2 dt}{t^2(t^2+1)} + 2\int \frac{dt}{t^2(t^2+1)} =$$

$$= t - 4\int \frac{dt}{t^2+1} + 2\int \frac{1+t^2-t^2}{t^2(t^2+1)} dt == t - 4\int \frac{dt}{t^2+1} + 2\int \frac{dt}{t^2} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= t - \frac{2}{t} - 6arctgt + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6arctg \sin x + C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x} dx.$ Відповідь: $2tg\frac{x}{2} - x + C.$

2 $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$ Відповідь: $C - ctgx - \frac{2}{3}ctg^3 x - \frac{1}{5}ctg^5 x.$

3 $\int \sin 2x \sin 5x dx.$ Відповідь: $\frac{1}{6}\sin 3x - \frac{1}{14}\sin 7x + C.$

4 $\int \sin^4 x dx.$ Відповідь: $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C.$

5 $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$. Відповідь: $\ln|tgx| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$.

6 $\int ctg^4 x dx$. Відповідь: $x - \frac{1}{3} ctg^3 x + ctgx + C$.

7 $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}$. Відповідь: $\frac{1}{2} arctg(2tg\frac{x}{2}) + C$.

8 $\int \frac{dx}{1 + tgx}$. Відповідь: $\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x + \cos x| + C$.

9 $\int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx$. Відповідь: $\ln(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}} tg\frac{x}{2}\right) + C$.

10 $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$. Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}tgx) + C$.

11 $\int \frac{dx}{1 - \sin^4 x}$. Відповідь: $\frac{1}{2} tgx + \frac{1}{2\sqrt{2}} arctg(\sqrt{2}tgx) + C$.

12 $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$. Відповідь: $\ln|\sin x| - \sin x + C$.

13 $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx$. Відповідь: $\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\sin x + C$.

14 $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$. Відповідь: $-\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}} x + \frac{3}{11}\cos^{\frac{11}{3}} x + C$.

15 $\int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$. Відповідь: $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2} - 5}{tg\frac{x}{2} - 3}\right| + C$.

16 $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)\sin x}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4} tg^2 \frac{x}{2} + C$.

17 $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$. Відповідь: $arctg(tgx - 2) + C$.

18 $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$. Відповідь: $\frac{1}{4} tg^4 \frac{x}{2} + tg \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$.

19 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx$. Відповідь: $-\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + \ln\left|\frac{1 + tg\frac{x}{2}}{1 - tg\frac{x}{2}}\right| + C$.

20 $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$. Відповідь: $-arctg(\cos 2x) + C$.

10 Тригонометричні підстановки

Інтеграли вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ \ \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$$

зводяться до інтегралів від раціональної відносно *sint* і *cost* функції за допомогою відповідної тригонометричної підстановки.

1 Для знаходження інтеграла $\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$ застосовують підстановку *x=a sint* (або *x=a cost*).

2 Для знаходження інтеграла $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,$ треба покласти *x=a tgt* (або *x=a ctgt*).

3 Для знаходження інтеграла $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx$ замінюють $x=\dfrac{a}{\cos t}$ (або $x=\dfrac{a}{\sin t}$).

Приклади

Приклад 79 Знайти $\int\dfrac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx.$

Розв'язання. Маємо інтеграл першого типу. Покладемо *x=3sint*. Тоді *dx=3costdt*, $\sqrt{(9-x^2)^3}=\sqrt{(9-9\sin^2 t)^3}=\sqrt{9^3(1-\sin^2 t)}=27\sqrt{(\cos^2 t)^3}=27\cos^3 t$ і шуканий інтеграл

$$\int\frac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^3}}{x^6}dx=\int\frac{27\cos^3 t}{3^6\sin^6 t}\cdot 3\cos t dt=\frac{1}{9}\int\frac{\cos^4 t}{\sin^6 t}dt=$$

$$=\frac{1}{9}\int ctg^4 t\cdot\frac{dt}{\sin^2 t}=-\frac{1}{9}\cdot\frac{ctg^5 t}{5}+C=-\frac{1}{45}ctg^5 t+C.$$

Враховуючи, що $ctg^5 t=\dfrac{\cos^5 t}{\sin^5 t}=\dfrac{\sqrt{(1-\sin^2 t)^5}}{\sin^5 t}=\dfrac{\sqrt{\left(1-\dfrac{x^2}{9}\right)^5}}{\left(\dfrac{x}{3}\right)^5}=\dfrac{\sqrt{\left(9-x^2\right)^5}}{x^5}$,

остаточно будемо мати

$$\int\frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx=-\frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}+C.$$

Приклад 80 Знайти $\int\dfrac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$

Розв'язання. Врахоауючи, що заданий інтеграл 2 типу, робимо підстановку *x=2 tgt*. Звідси

$$dx=\frac{2dt}{\cos^2 t},\sqrt{(4+x^2)^3}=\sqrt{(4+4tg^2t)^3}=\sqrt{4^3(1+tg^2t)^3}=8\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3}=\frac{8}{\cos^3 t}.$$

Тоді шуканий інтеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}=\int\frac{\frac{2}{\cos^2 t}}{\frac{8}{\cos^3 t}}dt=\frac{1}{4}\int\cos tdt=\frac{1}{4}\sin t+C.$$

Оскільки $\sin t=tgt\cdot\cos t=\frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$, то остаточно одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}+C.$$

Приклад 81 Знайти $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x=\frac{3}{\cos t}$, бо заданий інтеграл другого типу. Тоді

$$dx=\frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt,\sqrt{x^2-9}=\sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9}=\sqrt{9\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)}=3\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}}=3\frac{\sin t}{\cos t}=3tgt$$

і

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{\frac{3\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot\frac{3\sin t}{\cos t}}dt=\frac{1}{9}\int\cos tdt=\frac{1}{9}\sin t+C.$$

Оскільки $\sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\frac{9}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$, то шуканий інтеграл

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\frac{\sqrt{x^2-9}}{9x}+C.$$

Зауважимо, що заданий інтеграл можна знайти і за допомогою підстановки $x=\frac{1}{t}$. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Приклад 82 Знайти $\int\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4x^2+1}}$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4x^2+1}}=\left|\begin{array}{c}2x=tgt\\ 2dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{dt}{2\cos^2 t}}{\left(4+\dfrac{tg^2t}{4}\right)\sqrt{tg^2t+1}}=2\int\frac{dt}{(16+tg^2t)\cos t}=$$

$$=2\int\frac{dt}{\left(16+\dfrac{\sin^2 t}{\cos^2 t}\right)\cos t}=2\int\frac{\cos tdt}{16\cos^2 t+\sin^2 t}=$$

$$=2\int\frac{\cos tdt}{16(1-\sin^2 t)+\sin^2 t}=2\int\frac{\cos tdt}{16-15\sin^2 t}=$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{15}}\int\frac{d(\sqrt{15}\sin t)}{(\sqrt{15}\sin t)^2-16}=-\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\sqrt{15}\sin t-4}{\sqrt{15}\sin t+4}\right|+C.$$

Оскільки $\sin t=\dfrac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}}=\dfrac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$, то остаточно будемо мати

$$\int\frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4x^2+1}}=-\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{\dfrac{2\sqrt{15}x}{\sqrt{1+4x^2}}-4}{\dfrac{2\sqrt{15}x}{\sqrt{1+4x^2}}+4}\right|+C=-\frac{1}{4\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x\sqrt{15}-2\sqrt{1+4x^2}}{x\sqrt{15}+2\sqrt{1+4x^2}}\right|+C.$$

Приклад 83 Знайти $\int\dfrac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$.

Розв'язання.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{2-(x+1)^2}}=\left|\begin{array}{c}x+1=\sqrt{2}\sin t\\ dx=\sqrt{2}\cos tdt\\ \sqrt{2-(x+1)^2}=\sqrt{2-2\sin^2 t}=\sqrt{2}\cos t\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{(\sqrt{2}\sin t-1)^2\cdot\sqrt{2}\cos tdt}{\sqrt{2}\cos t}=\int(\sqrt{2}\sin t-1)^2dt=\int(2\sin^2 t-2\sqrt{2}\sin t+1)dt=$$

$$=\int\left(1-\cos 2t-2\sqrt{2}\sin t+1\right)dt=\int\left(2-\cos 2t-2\sqrt{2}\sin t\right)dt=$$

$$=2t-\frac{1}{2}\sin 2t+2\sqrt{2}\cos t+C=2t-\sin t\cos t+2\sqrt{2}\cos t+C=$$

$$=2t+(2\sqrt{2}-\sin t)\cos t+C=2t+(2\sqrt{2}-\sin t)\sqrt{1-\sin^2 t}+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\left(2\sqrt{2}-\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}+C=$$

$$=2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}}+\left(2\sqrt{2}-\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2-(x+1)^2}}{\sqrt{2}}+C=$$

$$= 2\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}(3-x)\sqrt{1-2x-x^2} + C.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$. Відповідь: $8\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C$.

2 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx$. Відповідь: C-$\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

3 $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$. Відповідь: $\frac{x}{4}(x^2-2)\sqrt{4-x^2} + 2\arcsin\frac{x}{2} + C$.

4 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$. Відповідь: $C - \frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$.

5 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$. Відповідь: $C - \frac{\sqrt{x^2+9}}{9x}$.

6 $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ Відповідь: $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x^2} + C$.

7 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}}$. Відповідь: $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2} + \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}\right| + C$.

8 $\int \frac{dx}{(x^3+3x^2+3x+1)\sqrt{x^2+2x-3}}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{8(x+1)^2} + \frac{1}{16}\arccos\frac{2}{x+1} + C$.

9 $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$. Відповідь: $C - \frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|$.

10 $\int \frac{(x-1)dx}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$. Відповідь: $\frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x} + C$.

11 Підсумкові зауваження

1 Лише в деяких випадках удається надати правила для інтегрування функцій. Але і тоді, коли є теоретична схема для одержання остаточного результату інтегрування, вона зовсім не є найкращою, найбільш економною, бо інтегрування частіше може бути виконане не єдиним способом. І кожного разу лише обставини повинні підказати той штучний спосіб, який у даному випадку скоріше приведе до мети. Володіння операцією (дією) інтегрування, як і всякою математичною операцією, полягає в умінні знайти інтеграл з мінімумом

затраченого часу і праці. Наприклад, було б помилкою знаходити інтеграл $\int \frac{x^3 dx}{(x+1)^4}$, застосовуючи тут загальне правило (розкладати підінтегральний дріб на найпростіші), а доцільно зробити підстановку $x+1=t$, що значно полегшить задачу. Дійсно,

$$\int \frac{x^3 dx}{(x+1)^4} = \begin{vmatrix} x+1=t \\ dx=dt \end{vmatrix} = \int \frac{(t-1)^3}{t^4} dt = \int \frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 1}{t^4} dt =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{3}{t^2} + \frac{3}{t^3} - \frac{1}{t^4} \right) dt = \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} - \frac{3}{2(x+1)^2} + \frac{1}{3(x+1)^3} + C.$$

2 Методи інтегрування зводять даний інтеграл до інтеграла заздалегідь відомого, тобто до табличного. До цього часу ми користувалися лише самою найкоротшою – основною таблицею інтегралів. Однак, на практиці для знаходження інтегралів, які особливо часто зустрічаються, користуються різними довідниками і готовими таблицями.

3 На відміну від диференціювання, інтегрування не є дією, яка завжди дає змогу знайти елементарну функцію, що є первісною від заданої елементарної функції. Суворо доведено, що в багатьох випадках не існує такого елементарного виразу для первісної. Інакше кажучи, можна вказати елементарні функції, інтеграли від яких не виражаються ніякими скінченними комбінаціями основних елементарних функцій. Про такі функції говорять, що вони не інтегрованими в елементарних функціях (не інтегровні в скінченому вигляді). Такими, наприклад, є інтеграли:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}, \int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int e^{-x^2} dx.,$$

які не можна відобразити ніякими елементарними функціями.

Потрібно розрізняти існування функції та можливість її вираження за допомогою елементарних функцій. Указані інтеграли існують, але засобів (усіх основних елементарних функцій) виявляється недостатньо для того, щоб скласти з них скінчені вирази для цих інтегралів.

Питання для самоперевірки

1 Яка дія називається інтегруванням?

2 Яка функція називається первісною для даної функції? Наведіть приклади.

3 Чим відрізняються між собою різні первісні функції для даної функції $f(x)$?

4 Дайте означення невизначеного інтеграла.

5 Який геометричний образ відповідає невизначеному інтегралу $\int f(x)dx$?

6 Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.

7 За якою умови справедлива рівність

$$\int f(x)dx = F(x) + C\,?$$

8 Як перевіряється результат інтегрування?

9 Пригадайте і запишіть усі табличні інтеграли.

10 Укажіть, при якому значенні n формула

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

немає сенсу ($x > 0$)?

11Яка формула застосовується в тому випадку, коли $n = -1$ в $\int x^n dx$?

12.Назвіть основні методи інтегрування.

13 У чому полягає метод підстановки (заміни змінної) в невизначеному інтегралі?

14 Запишіть формулу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. В яких випадках і для яких інтегралів вона застосовується?

15 Який дріб називають раціональним?

16 Який раціональний дріб називають правильним ? Неправильним ?

17 Який вигляд мають елементарні (найпростіші) дроби?

18 Як здійснюється розклад правильного раціонального дробу на елементарні?

19 Пригадайте правило інтегрування раціонального дробу.

20 Як виконується інтегрування найпростіших ірраціональних функцій?

21 Укажіть загальний метод знаходження інтеграла від функції, раціональної відносно тригонометричних функцій.

22 Опишіть методи знаходження інтегралів вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n –цілі числа.

23 Для знаходження яких інтегралів застосовують тригонометричні підстановки і які?

24 Коли говорять, що функція не інтегрується в елементарних функціях (у скінченному вигляді)?

25 Назовіть принаймні декілька інтегралів, які не виражаються в скінченному вигляді.

Завдання для самостійної роботи

Проінтегрувати різні функції:

1 $\int \sqrt{2^x - 1}dx.$ Відповідь: $\frac{2}{\ln 2}\left(\sqrt{2^x - 1} - arctg\sqrt{2^x - 1}\right) + C.$

2 $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} arctgx dx.$ Відповідь: $xarctgx - \frac{3}{2}arctg^2 x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + C.$

3 $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{1 + x^{-4}} + 1}{\sqrt[4]{1 + x^{-4}} - 1}\right| - \frac{1}{2}arctg\sqrt[4]{1 + x^{-4}} + C.$

4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{2+5tg^2 x}}$. Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|tgx+\sqrt{tg^2 x+\frac{2}{5}}\right|+C$.

5 $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$. Відповідь: $-\frac{1}{x}-arctgx+C$.

6 $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x})\sqrt[4]{x^3}}dx$. Відповідь: $12\left(\sqrt[12]{x}+\ln\frac{(\sqrt[12]{x}-1)^2}{\sqrt[12]{x}}\right)+C$.

7 $\int\left(2x^2-1\right)\cos 2x dx$. Відповідь: $(x^2-1)\sin 2x+x\cos 2x+C$.

8 $\int \frac{dx}{\sin 2x-2\sin x}$. Відповідь: $-\frac{1}{4}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\sin^2\frac{x}{2}}+C$.

9 $\int \frac{x^4 dx}{x^{15}-1}$. Відповідь: $\frac{1}{30}\ln\frac{(x^5-1)^2}{x^{10}+x^5+1}-\frac{\sqrt{3}}{15}arctg\frac{2x^5+1}{\sqrt{3}}+C$.

10 $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$. Відповідь: $\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+C$.

11 $\int x\ln^2 x dx$. Відповідь: $\frac{1}{4}x^2\left(2\ln^2 x-2\ln x+1\right)+C$.

12 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}$. Відповідь: $\frac{x^2-2}{3}\sqrt{x^2+1}+C$.

13 $\int \frac{dx}{9\sin^2 x+\cos^2 x}$. Відповідь: $\frac{1}{3}arctg(3tgx)+C$.

14 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(4x+1)^5}}$. Відповідь: $\frac{6x^2+6x+1}{12\sqrt{(4x+1)^3}}+C$.

15 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Відповідь: $\frac{x(3-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{2}\arcsin x+C$.

16 $\int \frac{dx}{4+3tgx}$. Відповідь: $\frac{1}{25}\left(4x+3\ln\left|4\cos x+3\sin x\right|\right)+C$.

17 $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}$. Відповідь: $\frac{x^2}{2}+x+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-arctgx+C$.

18 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$. Відповідь: $\frac{1}{2}arctg\frac{e^x-3}{2}+C$.

19 $\int \frac{x^3 dx}{2+\sqrt{4-x^2}}$. Відповідь: $x^2+\frac{1}{3}\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}+C$.

20 $\int \frac{dx}{\cos^2\sqrt{tg^2 x+4tgx+1}}$. Відповідь: $\ln\left|tgx+2+\sqrt{tg^2 x+4tgx+1}\right|+C$.

21 $\int \frac{dx}{(tgx+1)\sin^2 x}$. Відповідь: $\ln|1+ctgx|-ctgx+C$.

22 $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2)-4arctg(x-1)+C$.

23 $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$. Відповідь: $5x+\frac{1}{2}\ln|x|+\frac{161}{6}\ln|x-4|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+C$.

24 $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$. Відповідь: $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

25 $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$. Відповідь: $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}+C$.

26 $\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}$. Відповідь: $\frac{x}{2(1-x^2)}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+C$.

27 $\int e^{\sqrt{x}}dx$. Відповідь: $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+C$.

28 $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$. Відповідь: $-\arcsin\frac{1}{x+1}+C$.

29 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$. Відповідь: $\frac{tg^3 x}{3}+\frac{tg^5 x}{5}+C$.

30 $\int \frac{x^4 dx}{x^4-1}$. Відповідь: $x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C$.

12 Огляд методів і способів інтегрування

Таблиця 2

№ п/п	Вигляд інтеграла	Метод або спосіб інтегрування
1	$\int f[\varphi(x)]\varphi' dx$.	Підстановка $\varphi(x)=t$.
2	$\int f(x)\varphi'(x)dx$.	Інтегрування частинами $\int udv = uv-\int vdu$, де $u=f(x), dv=\varphi'(x)dx$. Метод інтегрування частинами застосовують, наприклад, до інтегралів вигляду $\int p(x)f(x)dx$, де *p(x)* –многочлен, а *f(x)* одна із таких функцій: $e^{ax}, \cos bx, \sin bx, \ln x, arctgx, \arcsin x$ і т. ін., а також до інтегралів від добутків показникової функції на косинус або синус.
3	$\int e^{ax}P_n(x)dx$, де $P_n(x)$ –многочлен степеня *n*.	$\int e^{ax}P_n(x)dx = e^{ax}\left(\frac{P_n(x)}{a}-\frac{P_n'(x)}{a^2}+\frac{P_n''(x)}{a^3}-\ldots+(-1)^n\frac{P_n^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right)+C$.

4	$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx,\ p^2\text{-}4q<0$	Підстановка $x+\frac{p}{2}=t$.
5	$I_n=\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$	Застосовують рекурентну формулу $I_n=\frac{1}{a^2}\left(\frac{x}{(2n-2)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\right)$.
6	$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx,$ де $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильний раціональний дріб, $Q(x)=(x-x_1)^l(x-x_2)^m\ldots$ $\ldots(x^2+px+q)^k\ldots$.	Підінтегральний дріб подають у вигляді суми найпростіших дробів $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_l}{(x-x_1)^l}+$ $+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{B_m}{(x-x_2)^m}+\cdots+$ $+\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\ldots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\ldots$.
7	$\int R\left(x,x^{\frac{m}{n}},\ldots,x^{\frac{r}{s}}\right)dx,$ де R – раціональна функція своїх аргументів.	Зводиться до інтеграла від раціонального дробу підстановкою $x=t^k$, де *к* – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},\ldots,\frac{r}{s}$.
8	$\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right)dx$ де R – раціональна функція своїх аргументів.	Зводиться до інтеграла від раціонального дробу підстановкою $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де *к* – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m}{n},\ldots,\frac{r}{s}$.
9	$\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.	Підстановка $x+\frac{b}{2a}=t$.
10	$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$ де R – раціональна функція своїх аргументів.	Зводиться до інтеграла від раціонального дробу підстановками Ейлера: $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}\quad(a>0),$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}\quad(c>0),$ $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)\quad(4ac\text{-}b^2<0),$ де x_1 –корінь тричлена ax^2+bx+c. Для обчислення вказаного інтеграла застосовують також тригонометричні підстановки.
11	$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,$ $\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,$ $\int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,$	Тригонометрична підстановка: $x=a\ sint,$ $x=a\ tgt,$ $x=\frac{a}{\cos t}$.

	де R – раціональна функція своїх аргументів.	
12	$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m \sqrt{ax^2+bx+c}}$.	Підстановка $x-\alpha=\frac{1}{t}$.
13	$\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$, де m, n, p –раціональні числа (інтеграл від диференціального бінома).	А) p –ціле число. Підстановка $x=t^k$, де $к$ –найменший спільний знаменник дробів m і n. Б) $\frac{m+1}{n}$ - ціле число. Підстановка $a+bx^n=t^s$, де s – знаменник числа p. В) $\frac{m+1}{n}+p$ - ціле число. Підстановка $ax^{-n}+b=t^s$, де s – знаменник числа p.
14	$\int R(\sin x, \cos x)dx$, де R – раціональна функція своїх аргументів	Універсальна підстановка $tg\frac{x}{2}=t$. Якщо $R(-sinx,cosx)=-R(sinx,cosx)$, то підстановка $cosx=t$. Якщо $R(sinx,-cosx)=-R(sinx,cosx)$, то підстановка $sinx=t$. Якщо $R(-sinx,-cosx)=R(sinx,cosx)$, то підстановка $tgx=t$
15	$\int \sin ax \sin bx dx$, $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$.	Застосувати одну з формул: $\sin ax \sin bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right)$, $\sin ax \cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin(a-b)x+\sin(a+b)x\right)$, $\cos ax \cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x+\cos(a+b)x\right)$.
16	$\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n – цілі числа.	Якщо m – непарне додатне число, то підстановка $cosx=t$. Якщо n – непарне додатне число, то підстановка $sinx=t$. Якщо $m+n$ – парне від`ємне число, то підстановка $tgx=t$. Якщо $m$ і $n$ – парні невід`ємні числа, то застосовують формули: $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$
17	$\int R(tgx)dx$, де R – раціональна функція свого аргументу.	Підстановка $tgx=t$.

18	$\int tg^m x dx$, $\int ctg^m x dx$, де m – ціле додатне число.	Застосовують формули: $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.
19	$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx$.	Універсальна підстановка $tg\frac{x}{2} = t$.
20	$\int \frac{a_1 \sin^2 x + b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin^2 x + b_2 \sin x \cos x + c_2 \cos^2 x} dx$.	Підстановка $tgx=t$

13 Визначений інтеграл

13.1 Поняття інтегральної суми і визначеного інтеграла

Нехай на відрізку $[a;b]$ $(a < b)$ осі *Ox* задана неперервна функція *f(x)*. Відрізок $[a;b]$ розіб`ємо на *n* частин, довжини яких можуть бути довільними. Кожен такий відрізок будемо називати частковим. Абсциси точок розбиття позначимо через

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Довжину часткового відрізка, яка дорівнює різниці $x_к - x_{к-1}$ $(к=1,2,...,n)$, позначимо через Δx_k:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}.$$

На кожному частковому відрізку виберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через ξ_k $(к=1,2,...,n)$, обчислимо $f(\xi_k)$ – значення заданої функції *f(x)* у цій точці. Знайдемо добуток числа $f(\xi_k)$ на довжину Δx_k відрізка, на якому взято точку ξ_k, тобто $f(\xi_k)\Delta x_k$. Складемо суму таких добутків

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (30)$$

Ця сума називається інтегральною сумою для функції *f(x)* на відрізку $[a;b]$.

За означенням границя інтегральної суми (30), тобто

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на часткові, ні від вибору на них точок ξ_k, називається визначеним інтегралом функції *f(x)* на відрізку $[a;b]$ і позначається символом $\int_a^b f(x)dx$.

Таким чином,

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx.$$

Тут, як і у невизначеному інтегралі, *f(x)* -підінтегральна функція, *f(x)dx* - підінтегральний вираз, *x* -змінна інтегрування.

Число *a* називають нижньою межею інтегрування, число *b* – верхньою межею інтегрування.

Відзначимо, що величина визначеного інтеграла залежить лише від виду підінтегральної функції і від меж інтегрування *a* і *b*. Нічого не зміниться, якщо змінну інтегрування позначити іншою буквою, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz.$$

Гарантом існування цієї границі, тобто визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$, є неперервність функції *f(x)* на відрізку $[a;b]$. Покажемо на прикладі, як обчислюється визначений інтеграл безпосередньо (за означенням).

Приклад 84 Обчислити визначений інтеграл $\int_{-2}^{1} x^2 dx.$

Розв`язання. $f(x)=x^2$ – неперервна функція на відрізку $[-2;1]$. Отже, визначений інтеграл від функції $f(x)=x^2$ на відрізку $[-2;1]$ існує.

Розіб`ємо відрізок інтегрування $[-2;1]$ для зручності на *n* рівних частин і складемо для функції $f(x)=x^2$ інтегральну суму, беручи точки на початку кожного часткового відрізка. Тут

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-2)}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{і} \quad \xi_k = x_k = x_0 + k\Delta x_k = -2 + \frac{3}{n}k. \quad \left(k = \overline{1,n}\right).$$

Звідси

$$f(\xi_k) = \left(-2 + \frac{3}{n}k\right)^2 = 4 - \frac{12}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2.$$

Отже,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n}\left(4 - \frac{12}{n}k + \frac{9}{n^2}k^2\right)\cdot\frac{3}{n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{12}{n} - \frac{36}{n^2}k + \frac{27}{n^3}k^2\right) = \frac{12}{n}\cdot n - \frac{36}{n^2}(1+2+3+...+n) + \frac{27}{n^3}(1+2^2+3^2+...+n^2).$$

Враховуючи далі, що

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$1+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

знаходимо

$$S_n=12-\frac{36}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=12-\frac{18(n+1)}{n}+\frac{9(n+1)(2n+1)}{2n^2}=$$

$$=\frac{24n^2-36n^2-36n+18n^2+27n+9}{2n^2}=\frac{6n^2-9n+9}{2n^2}.$$

Переходячи до границі, одержимо

$$\int_{-2}^{1}x^2dx=\lim_{\substack{\max\Delta x_k\to 0\\(n\to\infty)}}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\lim_{n\to\infty}S_n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-9n+9}{2n^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{9}{2n}+\frac{9}{2n^2}\right)=3.$$

Як видно, навіть на такому простому прикладі, обчислення визначеного інтеграла за означенням є трудомістким.

Полегшити цю задачу можна за допомогою формули Ньютона –Лейбніца, яка встанавлює зв`язок між визначеним і невизначеним інтегралами.

13.2 Формула Ньютона –Лейбніца

Якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку $[a;b]$ і *F(x)* –яка-небудь первісна для *f(x)* на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (31)$$

Формула (31) має назву формули Ньютона – Лейбніца. Вона є основною формулою інтегрального числення. Для зручності користування формулу (31) записують у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).$$

Обчислимо, наприклад, за цією формулою розглянутий вище інтеграл $\int_{-2}^{1}x^2dx.$

Враховуючи формулу (31) маємо

$$\int_{-2}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{1} = \frac{1}{3}(1-(-8)) = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3.$$

Одержали той самий результат, але значно швидше, ніж у попередньому прикладі.

13.3 Властивості визначеного інтеграла

1 За означенням

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2 За означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3 Якщо $f(x) \equiv 0$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0dx = 0$.

4 Якщо $f(x) \equiv 1$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b-a$.

5 Якщо *f(x)* – інтегрована функція на відрізку $[a;b]$ і *c*– стала, то на цьому відрізку інтегрована і функція *cf(x),* причому $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$, тобто сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла.

6 Якщо $f_1(x)$ і $f_2(x)$ – інтегровані функції на відрізку $[a;b]$, то на цьому відрізку інтегровані й функції $f_1(x) \pm f_2(x)$, причому

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

7 Якщо *f(x)* – інтегрована функція на відрізку $[a;b]$ і $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

8 Якщо *f(x)* і $\varphi(x)$– інтегровані функції на відрізку $[a;b]$ і $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$

9 Якщо *f(x)* - інтегрована функція на відрізку, то на цьому відрізку інтегровна і функція $|f(x)|$, причому $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

10 Якщо функція *f(x)* інтегрована на відрізку $[a;b]$ і $a < c < b$, то ця функція інтегрована і на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що має місце й обернене твердження. Цю властивість називають адитивною властивістю визначеного інтеграла.

11 Якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку $[a;b]$, де $a<b$, і $m \le f(x) \le M$ для $x \in [a;b]$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Тут m – найменше, а M –найбільше значення функції *f(x)* на відрізку $[a;b]$. Ці нерівності надають можливість оцінити значення визначеного інтеграла.

12 Якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку $[a;b]$, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

При цьому значення функції *f(x)* у точці c називають середнім значенням цієї функції на відрізку $[a;b]$.

Приклади

Приклад 85 Оцінити інтеграл $\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx$.

Розв'язання. $f(x) = \frac{5-x}{9-x^2}$ – неперервна функція на відрізку $[0;2]$. Знайдемо її найменше і найбільше значення на цьому відрізку. Для цього знайдемо $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{5-x}{9-x^2}\right)' = \frac{-9+x^2+10x-2x^2}{(9-x^2)^2} = -\frac{x^2-10x+9}{(9-x^2)^2} = -\frac{(x-1)(x-9)}{(9-x^2)^2}.$$

Дорівнюючи $f'(x)$ до нуля, одержимо $x_1=1 \in [0;2]$ і $x_2=9 \notin [0;2]$ Похідна не існує в точках $x = \pm 3 \notin [0;2]$.

Обчислимо значення функції $f(x) = \frac{5-x}{9-x^2}$ при *x=0, x=1* і *x=2*:

$$f(0) = \frac{5}{9}; f(1) = \frac{1}{2}; f(2) = \frac{3}{5}.$$

Отже, найбільше значення функції $f(x) = \frac{5-x}{9-x^2}$ на відрізку $[0;2]$ дорівнює 0,6, а найменше – 0,5.

Таким чином, $0{,}5(2-0) < \int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx < 0{,}6(2-0)$ або $1 < \int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx < 1{,}2.$

Зауважимо, що точне значення даного інтеграла можна знайти за формулою Ньютона – Лейбніца, згідно з якою

$$\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx = \left(-\frac{5}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|9-x^2\right|\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{5}{6}\ln\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\ln 5 + \frac{5}{6}\ln 1 - \frac{1}{2}\ln 9 = \frac{4}{3}\ln 5 - \ln 3 \approx 1{,}047.$$

Приклад 86 Обчислити середнє значення функції $f(x)=2x^2+3x+3$ на відрізку $[1;4]$.

Розв'язання. За теоремою про середнє значення визначеного інтеграла

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a},$$

де $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Оскільки $b-a=4-1=3$ і

$$\int_1^4 (2x^2+3x+3)dx = \left(\frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 3x\right)\Bigg|_1^4 = \frac{128}{3} + 24 + 12 - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - 3 = 73{,}5,$$

то $f(c) = \frac{73{,}5}{3} = 24{,}5.$

Таким чином, середнє значення функції $f(x)=2x^2+3x+3$ на відрізку $[1;4]$ дорівнює 24,5.

Приклад 87 Обчислити $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Розв'язання. За формулою Ньютона – Лейбніца $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$

Отже, скориставшись цією формулою і властивістю 5 визначеного інтеграла, одержимо

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \frac{1}{5}\int_{-2}^{-1}(11+5x)^{-3}\cdot 5dx = \frac{1}{5}\cdot\frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(11-5)^2} - \frac{1}{(11-10)^2}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36} - 1\right) = \frac{7}{72}.$$

Приклад 88 Обчислити $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$.

Розв'язання. На підставі формули (31) і властивості 6 визначеного інтеграла, будемо мати

$$\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy = \int_4^9 \frac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}+1}dy = \int_4^9 (\sqrt{y}-1)dy = \int_4^9 \sqrt{y}dy - \int_4^9 dy =$$

$$= \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - y \right)\Bigg|_4^9 = \frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 - \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} + 4 = 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{23}{3}.$$

Приклад 89 Обчислити $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Згідно з формулою (31) і властивостями 5 і 6 визначеного інтеграла, будемо мати

$$\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \int_0^{16} \frac{(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+9}-\sqrt{x})(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}dx = \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{x+9-x}dx =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\int_0^{16} \sqrt{x+9}dx + \int_0^{16} \sqrt{x}dx \right) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_0^{16} =$$

$$= \frac{2}{27}\left((x+9)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right)\Bigg|_0^{16} = \frac{2}{27}\left(25^{\frac{3}{2}} + 16^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{27}(125+64-27) = 12.$$

Приклад 90 Обчислити $\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0 \right)dt.$

Розв'язання. Спираючись на формулу Ньютона – Лейбніца

$$\int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0 \right)dt = -\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0 \right)\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} = -\frac{T}{2\pi}\big(\cos(\pi-\varphi_0) - \cos(-\varphi_0)\big) =$$

$$= -\frac{T}{2\pi}(-\cos\varphi_0 - \cos\varphi_0) = \frac{T}{\pi}\cos\varphi_0.$$

Приклад 91 Обчислити $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Розв'язання.

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_1^{e^3} \frac{d(1+\ln x)}{\sqrt{1+\ln x}} = 2\sqrt{1+\ln x}\Big|_1^{e^3} = 2\left(\sqrt{1+\ln e^3} - \sqrt{1+\ln 1} \right) =$$

$$= 2(\sqrt{4}-\sqrt{1}) = 2(2-1) = 2.$$

Приклад 92 Обчислити $\int\limits_1^e \frac{1+\lg x}{x}dx$.

Розв'язання.

$$\int\limits_1^e \frac{1+\lg x}{x}dx = \ln 10\int\limits_1^e (1+\lg x)\cdot d(1+\lg x) = \ln 10\cdot \frac{(1+\lg x)^2}{2}\Bigg|_1^e =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 10\left((1+\lg e)^2 - (1+\lg 1)^2\right) = \frac{1}{2\lg e}(1+2\lg e+\lg^2 e-1) = 1+\frac{1}{2}\lg e.$$

Приклад 93 Обчислити $\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2} = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}x-1} = \frac{1}{2}\int\limits_2^3 \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}\right|\Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}.$$

Приклад 94 Обчислити $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3} = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int\limits_1^2 \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx = \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \ln x\Bigg|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Bigg|_1^2 = \ln 2-\ln 1-\frac{1}{2}(\ln 5-\ln 2) = \frac{1}{2}(\ln 4-\ln 5+\ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1 $\int\limits_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$. Відповідь: $-5(\sqrt[5]{16}-1)$.

2 $\int_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx.$ Відповідь: $\frac{1}{5}(e-1)^5$.

3 $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}$.

4 $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

5 $\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}.$ Відповідь: $e-\sqrt{e}$.

6 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}.$ Відповідь: $arctg\frac{1}{7}$.

7 $\int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

8 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx.$ Відповідь: $\frac{2}{7}$.

9 $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega x + \varphi_0) dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2\omega}$.

10 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x} dx.$ Відповідь: $\frac{4}{3}$.

11 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}.$ Відповідь: *2.*

12 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin(2t - \frac{\pi}{4}) dt.$ Відповідь: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

13 $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$. Відповідь: $\frac{1}{3}$.

14 $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}.$ Відповідь: $\frac{\pi}{8}$.

15 $\int_0^1 e^{x+e^x} dx.$ Відповідь: $e^e - e$.

16 $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x - 1}$. Відповідь: ln(e+1).

17 $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$. Відповідь: *1-cos1.*

18 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}(\ln 3 - 1)$.

19 Оцінити інтеграл $\int_0^1 x(1-x)^2 dx$. Відповідь: $0 < I \le \frac{4}{27}$.

20 Оцінити інтеграл $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$. Відповідь: $0 < I < 1$.

13.4 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Якщо функція *f(x)* неперервна на відрізку $[a;b]$ і $x = \varphi(t)$ – функція неперервна зі своєю похідною першого порядку на відрізку $[\alpha;\beta]$, причому $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(t) \le \varphi(\beta) = b$ для $\alpha \le t \le \beta$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (32)$$

Формулу (32) називають формулою заміни змінної для визначеного інтеграла.

Із викладеного вище випливає, що функція $x = \varphi(t)$ на відрізку $[\alpha;\beta]$ повинна бути монотонною або іншими словами всі значення функції $\varphi(t)$ повинні знаходитися на відрізку $[a;b]$.

Зауважимо, що заміна змінної у визначеному інтегралі вимагає обережності та обов`язкового виконання всіх перерахованих умов, накладених на функцію $x = \varphi(t)$.

Відзначимо також, що, зробивши заміну змінної у визначеному інтегралі для його обчислення, немає необхідності переходити до початкової змінної, як це ми робили при знаходженні невизначеного інтеграла, а досить лише перерахувати межі інтегрування для нової змінної.

Для цього у рівність $x = \varphi(t)$ замість x підставляємо по черзі нижню межу a і верхню межу b інтегрування і розв`язуємо рівняння $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$. Знайдені значення t і будуть відповідно нижньою α і верхньою β межами інтегрування для нової змінної інтегрування. Якщо кожне із рівнянь $a = \varphi(t)$ і $b = \varphi(t)$ задовольняє не одне, а декілька значень *t,* то за α і β можна прийняти

будь –яке з них. Однак вільність вибору обмежується вимогою, щоб значення функції $\varphi(t)$ належали відрізку $[a;b]$, на якому визначена і неперервна підінтегральна функція *f(x)*.

Ще раз застерігаємо, що невиконання всіх указаних вимог, накладених на функцію $\varphi(t)$, може призвести до грубих помилок.

У багатьох випадках доводиться замість підстановки $x=\varphi(t)$, покладати $t=\psi(x)$. У цьому випадку нові межі інтегрування $\alpha=\psi(a)$ і $\beta=\psi(b)$. Якщо із $t=\psi(x)$ випливає, що $x=\varphi(t)$, то для функції $\varphi(t)$ повинні виконуватися всі вказані вище умови.

Приклади

Приклад 95 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Розв'язання. Покладемо *x=sint*, $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Тут функція $f(x)=x^2\sqrt{1-x^2}$ неперервна на відрізку $[0;1]$, а функціях *x=sint* неперервна разом зі своєю похідною $x'=\cos t$ на відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, причому $0=\sin 0\le\sin t\le\sin\frac{\pi}{2}=1$ для $0\le t\le\frac{\pi}{2}$. Тому

$$\int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt=\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}dt-\frac{1}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 4t\,dt=\left(\frac{1}{8}t-\frac{1}{32}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi}{16}-\frac{1}{32}\sin 2\pi+\frac{1}{32}\sin 0=\frac{\pi}{16}.$$

Зауважимо, що тут можна в якості границь інтегрування було б взяти, наприклад, 2π і $\frac{5\pi}{2}$, бо $0\le\sin t\le 1$ для $2\pi\le t\le\frac{5\pi}{2}$ і не можна взяти, наприклад π і $\frac{3\pi}{2}$ бо для $\pi\le t\le\frac{3\pi}{2}$ функція *sint* змінюється від 0 до -1.

Приклад 96 Обчислити $\int\limits_1^4\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

Розв'язання. Функція $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$. неперервна на відрізку $[1;4]$. Покладемо $x=t^2$. Тоді нові межі інтегрування знаходимо з рівнянь $1=t^2$, звідки $t_н=1$ і $4=t^2$, звідки $t_в=2$. Функція $x=t^2$ неперервна разом зі своєю похідною $x'=2t$ на відрізку $[1;2]$, причому її значення належать відрізку $[1;4]$. Тому

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_1^2 \frac{t^2dt}{1+t} = 2\int_1^2 \frac{t^2-1+1}{1+t}dt = 2\int_1^2\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln(t+1)\right)\Bigg|_1^2 = 2\left(2-2+\ln 3-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right) = 1+2\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 97 Обчислити $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx.$

Розв'язання. Застосуємо підстановку $t=\sqrt{e^x-1}$. Тоді

$$t^2=e^x-1,\quad 2tdt=e^xdx,\qquad dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+1}.$$

Якщо $x=0$, то $t=\sqrt{e^0-1}=0$. Якщо $x=ln2$, то $t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=1$. Отже,

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = 2\int_0^1\frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int_0^1\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2(t-arctgt)\Big|_0^1 = 2(1-arctg1+arctg0) = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-\pi}{2}.$$

Приклад 98 Обчислити $\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

Розв'язання.

$$\int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left|\begin{array}{c} x^2-1=t^2 \\ 2xdx=2tdt \\ xdx=tdt \\ 1-1=t^2, t_н=0 \\ 4-1=t^2, t_в=\sqrt{3}\end{array}\right| = \int_1^2\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\cdot xdx = \int_0^{\sqrt{3}}\frac{t^2dt}{t^2+1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = (t-arctgt)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-arctg\sqrt{3}+arctg\,0 = \sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

Приклад 99 Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}.$

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{c} t = tg\,\frac{x}{2} \\ x = 2arctgt \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_н = tg\,0 = 0 \\ t_в = tg\,\frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\,\frac{t}{\sqrt{3}} \Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg\,0 \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Приклад 100 Обчислити $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \left| \begin{array}{c} x = tgt \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+x^2 = 1+tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ tgt = 0, t_н = arctg\,0 = 0 \\ tgt = 1, t_в = arctg\,1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2 t \cdot \frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 4t) dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi + \frac{1}{4}\sin 0 \right) = \frac{\pi}{32}.$$

Приклад 101 Обчислити $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \left| \begin{array}{c} x=\frac{1}{t}; dx=-\frac{dt}{t^2} \\ 1=\frac{1}{t}, t_н=1 \\ 3=\frac{1}{t}, t_в=\frac{1}{3} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{1}{3}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} =$$

$$= -\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = \int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}} = \ln\left|t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= \ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right) - \ln\left(\frac{17}{6}+\sqrt{\frac{25}{9}}\right) = \ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1 $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. Відповідь: $\frac{32}{3}$.

2 $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$. Відповідь: $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

3 $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. Відповідь: $\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)$.

4 $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}}dx$. Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$.

5 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}dx$. Відповідь: $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

6 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx$. Відповідь: $\frac{8}{15}$.

7 $\int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15}dx}{\left(1+x^8\right)^{\frac{2}{5}}}$. Відповідь: $\frac{5}{192}\left(5+7\sqrt[5]{125}\right)$.

8 $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}dx$. Відповідь: $4-\pi$.

9 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$. Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{1}{\sqrt{5}}$.

10 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{6dx}{6+\sin^2 x}$. Відповідь: $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$.

13.5 Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла

Якщо функції *u(x)* і *v(x)* неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a;b]$, то

$$\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu. \qquad (33)$$

Формулу (33) називають формулою інтегрування частинами для визначеного інтеграла.

Застосування формули (33) мало чим відрізняється від застосування відповідної формули для невизначеного інтеграла. Тому обмежемося роз`язанням кількох прикладів.

Приклади

Приклад 102 Обчислити $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

Розв'язання. Функції $u=x$ і $v=-e^{-x}$ неперервні разом із своїми похідними $u'=1$ і $v'=e^{-x}$ на відрізку $[0;1]$, отже за формулою (33)

$$\int\limits_0^1 xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{c} u = x; du = dx \\ dv = e^{-x}dx; v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 -e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

Приклад 103 Обчислити $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання. Покладемо $u=x$, $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$. Тоді $du=dx$, $v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx$.

Оскільки $u=x$, $v=-ctgx$, $u'=1$ і $v'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$ неперервні на відрізку $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{3}\right]$, то враховуючи формулу (33)

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\sin^2 x}=-xctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}ctgxdx=-\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4}+\ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\ln\sin\frac{\pi}{3}-\ln\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=-\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}=\frac{\left(9-4\sqrt{3}\right)\pi}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 104 Обчислити $\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx.$

Розв'язання. Враховуючи, що $u=ln(x+1)$, $dv=dx$ за формулою (33), одержимо

$$\int_0^{e-1}\ln(x+1)dx=\left|\begin{matrix}u=\ln(x+1);du=\dfrac{dx}{x+1}\\ dv=dx;v=x\end{matrix}\right|=x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1}-\int_0^{e-1}\frac{xdx}{x+1}=$$

$$=(e-1)\ln e-\int_0^{e-1}\frac{x+1-1}{x+1}dx=e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=e-1-(x-\ln(x+1))\Big|_0^{e-1}=$$

$$=e-1-(e-1-\ln e+\ln 1)=e-1-e+1+1=1.$$

Приклад 105 Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx.$

Розв'язання. Застосовуючи двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx=\left|\begin{matrix}u=e^{2x};du=2e^{2x}dx\\ dv=\cos xdx;v=\sin x\end{matrix}\right|=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cdot\sin xdx=$$

$$=e^{\pi}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin xdx=\left|\begin{matrix}u=e^{2x};du=2e^{2x}dx\\ dv=\sin xdx;v=-\cos x\end{matrix}\right|=e^{\pi}-2\left(-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx\right)=$$

$$=e^{\pi}-2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos xdx.$$

Розв`язуючи далі одержане рівняння відносно шуканого інтеграла, знаходимо

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = e^{\pi} - 2.$$

Звідси остаточно одержимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$$

Приклад 106 Обчислити $\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx.$

Розв'язання. Згідно з формулою інтегрування частинами

$$\int_0^1 (\arcsin x)^2 dx = \left| \begin{array}{c} u = (\arcsin x)^2; du = 2\arcsin x \cdot \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx; v = x \end{array} \right| =$$

$$= x(\arcsin x)^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \arcsin x \cdot \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= (\arcsin 1)^2 - \int_0^1 \arcsin x \cdot \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}} \left| \begin{array}{c} u = \arcsin x; du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = \dfrac{2xdx}{\sqrt{1-x^2}}; v = -\sqrt{1-x^2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x \Big|_0^1 - 2\int_0^1 dx = \frac{\pi^2}{4} - 2x\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2} - 1.$

2 $\int_1^2 x\log_2 x dx.$ Відповідь: $2 - \frac{3}{4\ln 2}.$

3 $\int_1^e \ln^3 x dx.$ Відповідь: *6-2e*.

4 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x}dx.$ Відповідь: $\frac{\pi-2}{4}.$

5 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xtg^2 xdx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}\ln 2.$

6 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5}dx.$ Відповідь: $\frac{15-4\ln 2}{256}.$

7 $\int_1^{\sqrt{e^\pi}} \cos\ln xdx.$ Відповідь: $\frac{\sqrt{e^\pi}-1}{2}.$

8 $\int_0^1 xarctgxdx.$ Відповідь: $\frac{\pi-2}{4}.$

9 $\int_0^1 x^3 e^{2x}dx.$ Відповідь: $\frac{e^2+3}{8}.$

10 $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}}dx.$ Відповідь: $\pi\sqrt{2}-4.$

13.6 Обчислення визначених інтегралів, що ґрунтується на властивостях підінтегральної функції

1 Якщо *f(x)* непарна функція, тобто *f(-x)=-f(x),* то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

2 Якщо *f(x)* парна функція, тобто *f(-x)=f(x),* то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

3Якщо функція *f(x)* періодична з періодом T, тобто *f(x+T)=f(x),* то $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+nT}^{b+nT} f(x)dx,$ де n – ціле число.

Приклади

Приклад 107 Обчислити $\int_{-7}^{7} \frac{x^4\sin x}{x^6+2}dx.$

Розв'язання. Оскільки $f(x)=\frac{x^4\sin x}{x^6+2}-$ функція непарна, бо

$$f(-x)=\frac{(-x)^4\sin(-x)}{(-x)^6+2}=-\frac{x^4\sin x}{x^6+2}=-f(x),$$

а відрізок інтегрування $[-7;7]$ – симетричний, то відразу робимо висновок, що заданий інтеграл дорівнює нулю.

Приклад 108 Обчислити $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{x\sin x}{\cos^2 x}$ – парна, оскільки $f(-x)=\frac{-x\sin(-x)}{\cos^2(-x)}=\frac{x\sin x}{\cos^2 x}=f(x)$. Тому $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx.$

Беручи інтеграл за формулою інтегрування частинами, одержимо

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{array}{c} u=x;du=dx \\ dv=\frac{\sin xdx}{\cos^2 x};v=\int\frac{\sin xdx}{\cos^2 x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{x}{\cos x}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\cos x}=\frac{\pi}{3\cos\frac{\pi}{3}}-\ln tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\ln tg\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\ln tg\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}-\ln tg\frac{5\pi}{12}.$$

Таким чином, шуканий інтеграл $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=2\left(\frac{2\pi}{3}-\ln tg\frac{5\pi}{12}\right).$

Приклад 109 Обчислити $\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx.$

Розв'язання. Подаючи даний інтеграл у вигляді суми двох інтегралів і враховуючи, що під знаком першого інтеграла функція непарна, а під знаком другого – парна, будемо мати

$$\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^5+7x^4+x^3-5x^2-2}{x^3+x}dx=\int\limits_{-2}^{2}\frac{7x^4-5x^2-2}{x^3+x}dx+\int\limits_{-2}^{2}\frac{x^5+x^3}{x^3+x}dx=$$

$$= 0 + 2\int_0^2 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Приклад 110 Обчислити $\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є періодичною функцією з періодом π, бо

$$f(x+\pi) = \frac{\sin 2(x+\pi)}{\cos^4(x+\pi) + \sin^4(x+\pi)} = \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} = f(x).$$

Тому можна від верхньої і нижньої меж інтегрування відняти число π. Тоді

$$\int_{\pi}^{\frac{5\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{\cos^4 x + \sin^4 x} dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgx dx}{\cos^2 x\left(1 + tg^4 x\right)} = \left| \begin{array}{l} t = tgx \\ dt = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \\ t_H = tg0 = 0 \\ t_B = tg\dfrac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{tdt}{1+t^4} = \int_0^1 \frac{d(t^2)}{1+(t^2)^2} = arctgt^2\Big|_0^1 = arctg1 - arctg0 = \frac{\pi}{4}.$$

Завдання для самостійної роботи

1 Обчислити $\int_{-5}^{5} \frac{x^5 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx.$ Відповідь: *0*.

2 Обчислити $\int_{-1}^{1} xarctgx dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2} - 1.$

3 Обчислити $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^7 2x dx.$ Відповідь: *0*

4 Обчислити $\int_{-3}^{3} x^2 \sqrt{9 - x^2} dx.$ Відповідь: $\frac{81\pi}{8}.$

5 Обчислити $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \frac{2x^7 + 3x^6 - 10x^5 - 7x^3 - 12x^2 + x + 1}{x^2 + 2} dx.$

Відповідь: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{16}{5}\sqrt{2}.$

6 Розглянемо інтеграл $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}$. Легко зробити висновок, що він дорівнює $\frac{\pi}{4}$. Дійсно, $\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Bigg|_{-2}^{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi}{4}$. З іншого боку, зробивши підстановку $x=\frac{1}{t}$, одержимо

$$\int\limits_{-2}^{2}\frac{dx}{4+x^2}=\left|\begin{array}{c} x=\frac{1}{t} \\ dx=-\frac{dt}{t^2} \\ t_н=-\frac{1}{2} \\ t_в=\frac{1}{2}\end{array}\right|=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{t^2\left(4+\frac{1}{t^2}\right)}=-\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{4t^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{2}arctg2t\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}.$$

Цей результат явно неправильний, оскільки підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{4+x^2}>0,$ а це означає, що визначений інтеграл від такої функції не може дорівнювати від'ємному числу $-\frac{\pi}{4}$ (див. властивість 7). У чому помилка?

Відповідь: підстановка $x=\frac{1}{t}$ непридатна, бо ця функція розривна при *t=0*.

7 Обчислити $\int\limits_{-1}^{1}|x|dx.$ Відповідь: *1*.

8 Чому дорівнюють інтеграли:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx;$ б) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,$

якщо: 1) *f(x)* – парна функція; 2) *f(x)* – непарна функція?

Відповідь:

1 Якщо *f(x)* – парна функція, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \text{ а } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

2 Якщо *f(x)* – непарна функція, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0, \text{ а } \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 2\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Обчислити інтеграли:

9 $\int_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{(4x+1)\sqrt{x}}$. Відповідь: $\frac{\pi}{4}$.

10 $\int_{1}^{\sqrt[3]{5}} \frac{x^2 dx}{13-6x^3+x^6}$. Відповідь: $\frac{\pi}{12}$.

11 $\int_{0}^{\sqrt{3}} x^3\sqrt{1+x^2}dx$. Відповідь: $\frac{58}{15}$.

12 $\int_{1}^{2} \frac{2x^3+1}{x^2}dx$. Відповідь: *3,5.*

13 $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}$. Відповідь: *ln1,5.*

14 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx$. Відповідь: $\frac{2}{5}$.

15 $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{dx}{2+9x^2}$. Відповідь: $\frac{\pi\sqrt{2}}{24}$.

16 $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{3-\cos x}$. Відповідь: $\ln 1{,}25 \approx 0{,}2231$.

17 $\int_{-3}^{3} \frac{x^2 \sin 2x}{x^2+1}dx$. Відповідь: *0.*

18 $\int_{1}^{16} arctg\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$. Відповідь: $\frac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$.

19 $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$. Відповідь: $\frac{1}{3}$.

20 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2}.$

21 $\int\limits_0^{2\pi} \cos 5x \cos x dx.$ Відповідь: *0.*

22 $\int\limits_{2,5}^{5} \frac{\sqrt{\left(25-x^2\right)^3}}{x^4}dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{3}.$

23 $\int\limits_0^{\sqrt[5]{2}} \frac{x^9 dx}{\left(1+x^5\right)^3}.$ Відповідь: $\frac{2}{45}.$

24 $\int\limits_1^9 \sqrt{x}\ln x dx.$ Відповідь: $\frac{4}{9}(81\ln 3-26).$

25 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tgx)dx.$ Відповідь: $\frac{\pi \ln 2}{8}.$

26 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{32.}$

27 $\int\limits_0^{\pi} e^x \sin 2x dx.$ Відповідь: *0.*

28 $\int\limits_1^2 (3x+2)\ln x dx.$ Відповідь: $10\ln 2-\frac{17}{4}.$

29 $\int\limits_1^{4,5} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x-1}}.$ Відповідь: *1,5(0,5+ln1,5).*

30 Розглянемо інтеграл $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-2\cos x}.$ Зробивши підстановку $t=tg\frac{x}{2}$, будемо мати $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-2\cos x}=\int\limits_0^{0} \frac{2dt}{\left(1+t^2\right)\left(5-2\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=0.$

Результат явно неправильний, оскільки підінтегральна функція додатна, і тому інтеграл від цієї функції не може дорівнювати нулю. В чому помилка?

Відповідь: підстановка $t=tg\frac{x}{2}$ непридатна, бо ця функція розривна при $x=\pi.$

31 Чи можна в інтегралі $\int_0^1 \sqrt{x^2+1}dx$ зробити підстановку $x=\frac{1}{\cos t}$?

Відповідь: не можна, оскільки $\frac{1}{\cos t} \geq 1,$ а відрізок інтегрування $[0;1]$.

32 Переконатися в тому, що формальна підстановка $t = x^{\frac{2}{5}}$ призведе до неправильного результату в інтегралі $\int_{-2}^{2} \sqrt[5]{x^2}\,dx,$ і пояснити, в чому помилка?

Відповідь: обернена функція $x = \pm\sqrt{t^5}$ двозначна. Для одержання правильного результату треба розбити вихідний інтеграл на два:

$$\int_{-2}^{2} \sqrt[5]{x^2}\,dx = \int_{-2}^{0} \sqrt[5]{x^2}\,dx + \int_{0}^{2} \sqrt[5]{x^2}\,dx$$

і застосувати підстановки $x = -\sqrt{t^5}$, якщо $-2 \leq x \leq 0$ і $x = +\sqrt{t^5}$, якщо $0 \leq x \leq 2$.

33 Застосуємо підстановку *x=sint* до інтеграла $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$ Чи можна в якості меж інтегрування для *t* узяти числа π і $\frac{\pi}{2}$?

Відповідь: можна, бо функція *sint* монотонна на відрізку $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ і змінна *x=sint* пробігає всі значення від 1 до 0.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення визначеного інтеграла.

2 Сформулюйте теорему існування визначеного інтеграла.

3 Сформулюйте і доведіть властивості визначеного інтеграла.

4 Що називають середнім значенням функції *f(x)* на відрізку $[a;b]$?

5 Чому дорівнює похідна від визначеного інтеграла із змінною верхньою межею інтегрування?

6 Сформулювати і вивести формулу Ньютона –Лейбніца.

7 У чому суть методів заміни змінної (підстановки) й інтегрування частинами у визначеному інтегралі?

8 Вивести спрощену формулу для визначеного інтеграла, що обчислюється на симетричному відрізку $[-a;a]$ від парної і непарної функцій.

14 Невласні інтеграли

Невласними інтегралами називають інтеграли з нескінченними проміжками інтегрування (інтеграли з нескінченними межами інтегрування) і інтеграли від необмежених функцій (інтеграли від функцій, які мають нескінченний розрив).

14.1 Невласні інтеграли з нескінченними границями інтегрування

Нехай функція *f(x)* визначена на проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на відрізку $[a;b]$ при будь-якому *b>a*. Тоді визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ існує при будь-якому $b \geq a$ і, отже, він є деякою функцією від *b,* визначеною на проміжку $[\ a;+\infty)$, тобто

$$I(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо функція *I(b)* при $b \to +\infty$ має скінчену границю *A,* то цю границю називають невласним інтегралом від функції *f(x)* на проміжку $[a;+\infty)$ і позначають

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Таким чином, за означенням

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (34)$$

При цьому вважають, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається (до числа *A*).

Якщо ж функція $I(b) = \int_a^b f(x)dx$ при $b \to +\infty$ не має скінченої границі, то у цьому разі вважають, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

Аналогічно визначається невласний інтеграл вигляду $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. Коли функція *f(x)* визначена в проміжку $(-\infty;b]$ та інтегрована на відрізку $[a;b]$ при будь-якому *a<b,* то за означенням

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx. \qquad (35)$$

Невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ називають збіжним, якщо існує скінчена границя, що стоїть у правій частині рівності (35), і розбіжним, якщо такої скінченної границі не існує.

Нарешті, якщо функція *f(x)* визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$, то за означенням,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_{a}^{b} f(x)dx. \qquad (36)$$

де c – довільне стале число, причому невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають збіжним, якщо збігаються обидва невласних інтеграли, які стоять у правій частині рівності (36). Якщо ж принаймні один із цих інтегралів розбігається, то невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ називають розбіжним.

14.2 Ознаки збіжності невласних інтегралів із нескінченними границями інтегрування

1 Якщо *f(x)* і $\varphi(x)$ – дві невід'ємні функції на проміжку $[a;+\infty)$, інтегровані на відрізку $[a;b]$ при будь-якому *b>a,* і якщо $f(x) \le \varphi(x)$ для $a \le a_1 \le x < +\infty$, то із збіжності невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$, випливає збіжність невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty} f(xdx)$ випливає розбіжність невласного інтеграла $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$.

2 Якщо при $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = c,$$

причому $c > 0$, $c \ne \infty$ і $f(x) \ne 0$ для всіх достатньо великих *x,* то невласні інтеграли $\int_{a}^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)dx$ або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

3 Якщо збігається $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, то збігається і $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$, де c – величина стала.

4 Якщо функція *f(x)* визначена на проміжку $[a;+\infty)$ та інтегрована на відрізку $[a;b]$ при будь-якому $b > a$, то із збіжності невласного інтеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ випливає збіжність і невласного інтеграла $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, причому

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)dx\right| \le \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Зауважимо, що невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

Якщо ж невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, а інтеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають умовно збіжним.

5 Нехай функція *f(x)* невід'ємна на проміжку $[a;+\infty)$ ($a > 0$) і інтегрована на відрізку $[a;b]$ при будь-якому $b>a$.

Якщо

$$f(x) \le \frac{c}{x^{\alpha}} \quad \text{для} \quad a \le a_1 \le x < +\infty,$$

де c – константа, а число $\alpha > 1$, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається.

Якщо ж

$$f(x) \ge \frac{c}{x^{\alpha}} \quad \text{для} \quad a \le a_1 \le x < +\infty,$$

де c –константа, а число $\alpha \le 1$, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ розбігається.

14.3 Заміна змінної у невласному інтегралі

Нехай функція *f(x)* визначена і неперервна при $x \ge a$. Якщо функція $x = \varphi(t)$, яка визначена на проміжку $\alpha < t < \beta$ (α і β можуть бути і

нескінченними), має неперервну похідну $\varphi'(t) \neq 0$ і $\lim\limits_{t \to \alpha + 0} \varphi(t) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta - 0} \varphi(t) = +\infty$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Приклади

Приклад 111 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Розв'язання. За означенням

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b \to +\infty} \int_{e^2}^{b} \frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 x} \Bigg|_{e^2}^{b} \right) = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{2\ln^2 b} + \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Приклад 112 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$.

Розв'язання. За означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int_a^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} =$$

$$= \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \left(\frac{1}{2} arctg \frac{x+1}{2} \Bigg|_a^b \right) = \frac{1}{2} \lim_{b \to +\infty} \lim_{b \to +\infty} arctg \frac{b+1}{2} - \frac{1}{2} \lim_{a \to -\infty} arctg \frac{a+1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається.

Приклад 113 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} x \sin x dx$.

Розв'язання. За означенням

$$\int_0^{+\infty} x \sin x dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = x; du = dx \\ dv = \sin x dx; v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-xosx + \int \cos x dx\right)\Big|_0^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-x\cos x + \sin x\right)\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b \to +\infty} \left(-b\cos b + \sin b\right).$$

Оскільки остання границя не існує, то невласний інтеграл розбігається.

Приклад 114 Обчислити інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right)^2} dx.$

Розв'язання. Покладемо $tgx = t.$ Тоді $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $t_н = tg0 = 0,$ $t_B = tg\frac{\pi}{2} = \infty$ і

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6\left(tg^3 x + 1\right)^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^2 x dx}{\cos^2 x\left(tg^3 x + 1\right)^2} = \int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2}.$$

Одержали невласний інтеграл. Обчислюючи його за означенням, будемо мати

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2} = \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2} = \frac{1}{3} \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{3t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{t^3 + 1}\Bigg|_0^b \right) = -\frac{1}{3} \lim_{b \to \infty} \left(\frac{1}{b^3 + 1} - 1 \right) = \frac{1}{3}.$$

Таким чином, заданий інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right)^2} dx = \frac{1}{3}.$

Приклад 115 Обчислити невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. За означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}=\left|\begin{array}{c} x=tgt\\ dx=\dfrac{dt}{\cos^2 t}\\ x^2+1=tg^2t+1=\dfrac{1}{\cos^2 t}\\ tgt=-\infty, t_н=-\dfrac{\pi}{2}\\ tgt=+\infty, t_в=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right|=$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{\cos^2 t\cdot\dfrac{1}{\cos^4 t}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tdt=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin\pi\right)=\frac{\pi}{2}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Тут слід зауважити, що після заміни змінної у невласному інтегралі, одержали визначений інтеграл.

Приклад 116 Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}>0$ на проміжку $[1;\infty)$ *(a=1>0)* і $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{1}{\sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}}=\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}<\frac{1}{x^2}$ при $x\to\infty$.

Враховуючи ознаку 5 збіжності невласних інтегралів, вихідний інтеграл $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ збігається, бо $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}<\frac{1}{x^2}$ і *c=1* (*c=const*), $\alpha=2>1$.

Іншими словами, із збіжності більшого невласного інтеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ випливає збіжність меншого невласного інтеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Приклад 117 Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{\infty}\frac{\cos ax}{k^2+x^2}dx$, де $k\neq 0$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{|\cos ax|}{k^2+x^2} \le \frac{1}{k^2+x^2}$ і

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{k^2+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{k^2+x^2} = \frac{1}{k} \lim_{b\to\infty} arctg \frac{x}{k}\Big|_0^b = \frac{\pi}{2k}.$$

збігається, то за ознакою 1 інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{|\cos ax|}{k^2+x^2} dx$ збігається. Тоді збігається, і до того ж абсолютно, і заданий інтеграл $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{k^2+x^2} dx.$

Приклад 118 Довести збіжність інтеграла $\int_{10}^{\infty} \frac{(1+\ln x)dx}{\sqrt{x^2-3x}\left(\ln^3 x-3\right)}.$

Розв'язання. Відкидаючи менші члени чисельника і знаменника, бачимо, що даний інтеграл збігається або розбігається одночасно з інтегралом $\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$, бо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\varphi(x)}{f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1+\ln x)x\ln^2 x}{\sqrt{x^2-3x}\left(\ln^3 x-3\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)x\ln^3 x}{x\ln^3 x\left(1-\frac{3}{\ln^3 x}\right)\sqrt{1-\frac{3}{x}}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln x}+1}{\left(1-\frac{3}{\ln^3 x}\right)\sqrt{1-\frac{3}{x}}} = 1 > 0.$$

Невласний інтеграл

$$\int_{10}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \int_{10}^{b} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\Big|_{10}^{b} \right) = -\lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{\ln b} - \frac{1}{\ln 10} \right) = \frac{1}{\ln 10} -$$

збігається, отже, збігається і заданий інтеграл.

Приклад 119 Довести, що $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ збігається.

Розв'язання. Очевидно, що $x^2-2x+1 \ge 0.$ Звідси $-2x+1 \ge -x^2$ або $-x^2 \le -2x+1$ і тому $e^{-x^2} \le e^{-2x+1}$ або $e^{-x^2} \le e\cdot e^{-2x}$. Оскільки

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-2x} dx = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_0^b \right) = -\frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{e^{2b}} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

збігається, то на підставі ознаки 3 збігається й інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot e dx$. А оскільки $e^{-x^2} \le e^{-2x} \cdot e$, то на підставі ознаки 1, збігається й інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Замінюючи в цьому інтегралі x на $-y$, робимо висновок, що збігається і $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx$ (назва змінної інтегрування не змінює величину визначеного інтеграла). Із збіжності інтегралів $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ і $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-x^2} dx$ випливає збіжність $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Відзначимо, що $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ має важливе значення в теорії ймовірностей. Як уже відзначалося раніше, $\int e^{-x^2} dx$ через елементарні функції не виражається.

Приклад 120 Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$ і обчислити його ($a > 0$).

Розв'язання. Через те, що $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ при $a > 0$ збігається (пропонуємо читачеві довести збіжність цього інтеграла самостійно), а $\left| e^{-ax} \sin bx \right| \le e^{-ax}$, то на підставі ознаки 1 збігається й інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} \left| e^{-ax} \sin bx \right| dx$. Тоді на підставі ознаки 4 збігається і заданий інтеграл.

Застосовуючи двічі формулу інтегрування частинами, легко показати (це ми також пропонуємо читачеві зробити самостійно), що для функції $e^{-ax} \sin bx$ первісна функція $F(x) = -\dfrac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}$. Тому

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(0) =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} + \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

оскільки під знаком границі чисельник дробу – величина обмежена, а $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-ax} = 0$ при $a > 0$. Отже, даний невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$ збігається до числа $\dfrac{b}{a^2 + b^2}$.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

1 $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{dx}{x^2(x+1)}$. Відповідь: *1–ln2.*

2 $\int\limits_2^{\infty} \dfrac{\ln x}{x} dx$. Відповідь: розбігається.

3 $\int\limits_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$. Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

4 $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{arctgx}{x^2} dx$. Відповідь: $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{2} \ln 2$.

5 $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^2}$. Відповідь: $\dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi}{4}$.

6 $\int\limits_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$. Відповідь: *2.*

7 $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{2x dx}{x^2 + 1}$. Відповідь: розбігається.

8 $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} \sin x dx$. Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

9 $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{x dx}{(1+x)^3}$. Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

10 $\int\limits_{\sqrt{2}}^{\infty} \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}}$. Відповідь: $\dfrac{\pi}{4}$.

Дослідити на збіжність інтеграли:

11 $\int\limits_1^{\infty} \dfrac{x^3 + 1}{x^4} dx$. Відповідь: розбігається.

12 $\int\limits_{0-}^{\infty} \frac{x^{13}dx}{\left(x^5+x^3+1\right)^3}$. Відповідь: збігається.

13 $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xarctgx}{\sqrt[3]{1+x^4}}dx$. Відповідь: розбігається.

14 $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln\left(x^{\ 2}+1\right)}{x}dx$. Відповідь: розбігається.

15 $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln\ln x}$. Відповідь: розбігається.

14.4 Невласні інтеграли від необмежених функцій

Якщо функція *f(x)* не обмежена в будь-якому околі точки c відрізка $[a;b]$ і неперервна при $a \le x < c$ і $c < x \le b$, то за означенням

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx. \tag{37}$$

де ε_1 і ε_2 змінюються незалежно одне від одного. У випадку *c=в* або *c=a*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \tag{38}$$

або

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \tag{39}$$

Якщо границі, які стоять у правих частинах рівностей (37), (38), (39), існують і скінчені, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають збіжним.

Якщо ж ці границі не існують або дорівнюють нескінченності, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають розбіжним.

Підкреслимо, що невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, виражений рівністю (37), називають збіжним лише в тому випадку, коли обидві границі правої частини існують і скінчені.

Якщо ж принаймні одна з цих границь не існує або дорівнює нескінченності, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називають розбіжним.

Зауважимо, що позначення невласного інтеграла від необмеженої функції за формою не відрізняється нічим від позначення визначеного інтеграла. Тому, щоб розрізнити, буде інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ визначеним чи невласним, треба перевірити, буде чи ні функція *f(x)* інтегрованою на відрізку $[a;b]$.

Якщо функція *f(x)* необмежена на проміжку $[a;d)$ або на проміжку $(a;b]$, або в будь-якому околі точки *c* відрізка $[a;b]$, то інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ буде невласним.

Відзначимо також, що коли функція *f(x)* необмежена в будь-якому околі точки *c* відрізка $[a;b]$ й існує неперервна на $[a;b]$ функція *F(x)* така, що $F'(x) = f(x)$ при $x \neq c$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (40)$$

14.5 Ознаки збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій

1. Якщо *f(x)* і $\varphi(x)$ – дві невід'ємні необмежені функції на інтервалі $[a;b)$, інтегровані на кожному відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0 < \varepsilon < b-a$, і якщо $f(x) \le c\varphi(x)$ для $a \le a_1 \le x < b$,

де *c* – константа, то із збіжності невласного інтеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$ випливає збіжність невласного $\int_a^b f(x)dx$, а з розбіжності невласного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ випливає розбіжність невласного інтеграла $\int_a^b \varphi(x)dx$.

2. Нехай *f(x)* невід'ємна і необмежена на інтервалі $[a;b)$ та інтегрована на кожному відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0 < \varepsilon < b-a$.

Якщо існують такі числа $a_1 \in (a;b)$, *M>0* і $0 < \alpha < 1$, що $0 \le f(x) < \dfrac{M}{(b-x)^\alpha}$ для $a_1 \le x < b$, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається.

Якщо існують такі числа $a_1 \in (a;b)$, $M>0$ і $\alpha \geq 1$, що $f(x) > \dfrac{M}{(b-x)^{\alpha}}$ для $a_1 \leq x < b$, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається.

3. Нехай *f(x)* визначена на проміжку $[a;b)$, необмежена на цьому проміжку й інтегрована на кожному відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$.

Якщо збігається невласний інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$, то збігається і невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Відзначимо, що в цьому випадку невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають абсолютно збіжним. Якщо ж невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається, а невласний інтеграл $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ розбігається, то невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ називають умовно збіжним.

Як бачимо, ознаки збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій багато в чому аналогічні до відповідних ознак збіжності невласних інтегралів із нескінченними проміжками інтегрування.

Приклади

Приклад 121 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не визначена в точках $x_1=-1$ і $x_2=1$, причому при $x \to -1$ і $x \to 1$ функція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ необмежено зростає. Таким чином, маємо невласний інтеграл від необмеженої функції. За означенням

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{-1+\varepsilon_1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int\limits_{0}^{1-\varepsilon_2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon_1}^{0} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon_2} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon_1)\right) +$$

$$+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon_2)-\arcsin 0\right)=\arcsin 1+\arcsin 1=2\arcsin 1=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

Зауважимо, що замість точки *x=0* можна було б узяти будь-яку іншу внутрішню точку відрізка $[-1;1]$.

Приклад 122 Показати, що невласний інтеграл $\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ збігається.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ не обмежена в будь-якому околі точки *x=0* і неперервна при $-1\le x<0$ і $0<x\le 8$. Отже, маємо невласний інтеграл від необмеженої функції.

Оскільки первісна функція $F(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ неперервна в точці *x=0,* то на підставі формули (40) одержимо

$$\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{-1}^{8}=\frac{3}{2}\left(8^{\frac{2}{3}}-(-1)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{3}{2}(4-1)=\frac{9}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається.

Зауважимо, що скориставшись означенням (37), одержимо такий самий результат. Дійсно,

$$\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon_2}^{8_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon_1}\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{0+\varepsilon_2}^{8}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left((-\varepsilon_1)^{\frac{2}{3}}-1\right)+\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(4-(\varepsilon_2)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{3}{2}(-1+4)=\frac{9}{2}.$$

Неважко зрозуміти, що застосування формули (40) для розв'язання цього прикладу, призвело до простіших викладок.

Приклад 123 Обчислити за означенням невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{e}\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ не обмежена в околі точки *x=1*. На будь-якому ж відрізку $[1+\varepsilon;e]$ вона інтегрована, оскільки є неперервною функцією. Тому за означенням

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x} \Bigg|_{1+\varepsilon}^{e} \right) =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{\varepsilon \to +0} \left(1 - \sqrt[3]{\ln^2 (1+\varepsilon)} \right) = \frac{3}{2}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Зауважимо, що розв'язати цей приклад можна і за формулою (40), бо функція $F(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}$ неперервна на відрізку $[1;e]$ і диференційована в кожній точці проміжку $1 < x \le e$, причому $F'(x) = f(x)$ на цьому проміжку. Тому

$$\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x} \Bigg|_1^e = \frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\ln^2 e} - \sqrt[3]{\ln^2 1} \right) = \frac{3}{2}.$$

Приклад 124 Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ необмежена в околі точки $x = \frac{\pi}{2}$ та інтегрована на будь-якому відрізку $\left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right]$ як неперервна функція.

Тому

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\ln tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \right) - \ln tg \frac{\pi}{4} \right) = \lim_{\varepsilon \to +0} \ln ctg \frac{\varepsilon}{2} = \infty.$$

Отже, даний інтеграл розбігається.

Приклад 125 Обчислити невласний інтеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ не визначена в точці $x=1$, яка співпадає з нижньою границею інтегрування, причому при $x\to 1$ функція $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ необмежено зростає. Тому за означенням

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\ln x\Big|_{1+\varepsilon}^{2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 2-\ln\ln(1+\varepsilon)\right)=\infty.$$

Таким чином, даний інтеграл розбігається.

Приклад 126 Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1 \ln x dx$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. При $x\to +0$ підінтегральна функція $f(x)=\ln x\to -\infty$. Тому

$$\int_0^1 \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to +0}\int_\varepsilon^1 \ln x dx.$$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, одержимо

$$\int \ln x dx=\left|\begin{matrix} u=\ln x; du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx; v=x \end{matrix}\right|=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

Таким чином, шуканий інтеграл

$$\int_0^1 \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to +0}\int_\varepsilon^1 \ln x dx=\lim_{\varepsilon\to +0}\left(x\ln x-x\right)\Big|_{\varepsilon}^{1}=-1-\lim_{\varepsilon\to +0}\left(\varepsilon\ln\varepsilon-\varepsilon\right)=$$

$$=-1-\lim_{\varepsilon\to +0}\varepsilon\ln\varepsilon=-1-\lim_{\varepsilon\to +0}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-1}}=-1-\lim_{\varepsilon\to +0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}}=-1+\lim_{\varepsilon\to +0}\varepsilon=-1.$$

Оскільки одержали скінчену границю, то даний інтеграл збігається.

Приклад 127 Обчислити невласний інтеграл $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx.$

Розв'язання. Виконуючи нескладні перетворення інтеграла, одержимо

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2 \frac{x-1-1}{\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx-\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}dx=\int_1^2 \sqrt{x-1}dx-\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}dx.$$

У першому з одержаних інтегралів підінтегральна функція неперервна на відрізку $[1;2]$, тому за формулою Ньютона –Лейбніца

$$\int_1^2 \sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$

Другий інтеграл невласний, бо підінтегральна фунуція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \to \infty$ при $x \to 1$.

За означенням

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon \to 0} 2\sqrt{x-1}\Bigg|_{1+\varepsilon}^2 = 2\lim_{\varepsilon \to 0}\left(1 - \sqrt{1+\varepsilon-1}\right) = 2.$$

Отже, остаточно маємо

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

Зазначимо, що даний інтеграл можна розв'язати ще й так:

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \left| \begin{array}{c} x-1 = u^2 \\ dx = 2udu \\ u_н = 0; u_в = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{u^2+1-2}{u} \cdot 2udu = 2\int_0^1 \left(u^2 - 1\right)du =$$

$$= 2\left(\frac{u^3}{3} - u\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{4}{3}.$$

Як бачимо, після заміни змінної у невласному інтегралі, одержали визначений інтеграл.

Приклад 128 Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx.$

Розв`язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ є нескінченно великою при $x \to 1$. Отже, маємо невласний інтеграл. Подамо цю функцію у вигляді

$$f(x) = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

При $x \to 1$ множник $\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}$ прямує до сталої величини, і тому порядок цієї нескінченно великої функції при $x \to 1$ порівняно з $\frac{1}{1-x}$ дорівнює $\alpha = \frac{1}{3} < 1$. Таким чином, на підставі ознаки 2 даний інтеграл збігається.

Приклад 129 Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}$ у проміжку інтегрування додатна і $f(x) \to \infty$ при $x \to 0$. Враховуючи, що при $x \to 0$ $\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right) \sim \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, а $e^{\sin x} - 1 \sim sinx \sim x$, будемо мати

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \infty,$$

тобто *f(x)* є нескінченно великою порядку $\alpha = \frac{2}{3} < 1$ порівняно з $\frac{1}{x}$. Отже, на підставі ознаки 2 даний інтеграл збігається.

Приклад 130 Довести, що інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ збігається.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл, бо при $x \to +0$ підінтегральна функція $f(x) = \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} \to \infty$. Оскільки для $0 < x \le 1$ $0 \le \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt{x}}$ та інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ збігається, то зважаючи на ознаку 3 збігається та інтеграл $\int_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| dx$, а, отже, збігається, і до того ж абсолютно, заданий інтеграл.

Приклад 131 Установити збіжність інтеграла $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$ і обчислити його.

Ров'язання. При $x \to 0$ підінтегральна функція $f(x) = \ln\sin x \to -\infty$. Застосувавши метод інтегрування частинами, одержимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln\sin x; du = \dfrac{1}{\sin x} \cdot \cos x dx \\ dv = dx; v = x \end{array} \right| = x\ln\sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tgx} dx,$$

бо $$\lim_{\varepsilon \to +0} (x\ln\sin x)\Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = -\lim_{\varepsilon \to +0} (\varepsilon \ln\sin\varepsilon) = -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\ln\sin\varepsilon}{\varepsilon^{-1}} = -\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\frac{1}{\sin\varepsilon} \cdot \cos\varepsilon}{-\varepsilon^{-2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varepsilon^2 \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \cdot \lim_{\varepsilon \to +0} \cos\varepsilon = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{tgx} = 1$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \dfrac{x}{tgx} = 0$, то інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{x}{tgx} dx$ є визначеним.

Отже, вихідний інтеграл збігається.

Для обчислення вихідного інтеграла зробимо підстановку $x=2t$. Тоді $dx=2dt$, $t_H = 0$, $t_в = \dfrac{\pi}{4}$ і

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\cos t) dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t) dt =$$

$$= 2t\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.$$

В останньому інтегралі зробимо підстановку $t = \dfrac{\pi}{2} - z$. Тоді $dt = -dz$, $z_н = \dfrac{\pi}{2}$, $z_в = \dfrac{\pi}{4}$ і $2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - z\right) dz = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin z dz$. Таким чином,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin z dz = \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.$$

Звідси

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Приклад 132 Обчислити невласний інтеграл $\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$ не існує в точках $x=1\in[0;2]$ і $x=3\notin[0;2]$. При $x\to 1$ функція $f(x)\to\infty$. Отже,

$$\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_0^1\frac{dx}{x^2-4x+3}+\int_1^2\frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

Обчислюючи перший інтеграл, одержимо

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2-4x+3}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-2-1}{x-2+1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{x-3}{x-1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\frac{-\varepsilon-2}{-\varepsilon}-\ln 3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)-\ln 3\right)=\frac{1}{2}(\infty-\ln 3)=\infty.$$

Оскільки одержана границя нескінченна, то цей інтеграл розбігається. Другий інтеграл обчислювати не потрібно, бо на підставі означення невласний інтеграл розбігається, якщо принаймні один із інтегралів розбігається. Таким чином, вихідний інтеграл розбігається.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність:

1 $\int_2^3\frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$. Відповідь: $\frac{3}{2}\sqrt[4]{125}$.

2 $\int_{-1}^1\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. Відповідь: $14\frac{4}{7}$.

3 $\int_0^2\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$. Відповідь: $2\sqrt{\ln 2}$.

4 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$. Відповідь: π.

5 $\int\limits_0^1 e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{dx}{x^3}$. Відповідь: розбігається.

6 $\int\limits_{-1}^1 \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}} dx$. Відповідь: $6-\frac{9}{2}\ln 3$.

7 $\int\limits_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-x)^2}}$. Відповідь: $3\left(1+\sqrt[3]{3}\right)$.

8 $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}$. Відповідь: розбігається.

9 $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^5 x}$. Відповідь: розбігається.

10 $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}$. Відповідь: $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

11 $\int\limits_0^1 x\ln^2 x dx$. Відповідь: $\frac{1}{4}$.

12 $\int\limits_0^2 \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$. Відповідь: $\frac{256}{15}$.

Дослідити на збіжність невласні інтеграли:

13 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$. Відповідь: збігається.

14 $\int\limits_0^1 \frac{dx}{tgx-x}$. Відповідь: розбігається.

15 $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^5}}$. Відповідь: розбігається.

16 $\int\limits_0^2 \frac{\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)}{e^{tgx}-1} dx$. Відповідь: збігається.

17 $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x dx}{(1-x)^2}$. Відповідь: розбігається.

18 $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\ln x}$. Відповідь: розбігається.

19 $\int\limits_{0}^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}$. Відповідь: збігається.

20 $\int\limits_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{16 - x^4}} dx$. Відповідь: збігається.

Дослідити на збіжність невласні інтеграли, обчислюючи їх безпосередньо (за означенням) або скориставшись ознаками збіжності:

21 $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$. Відповідь: розбігається.

22 $\int\limits_{1}^{3} \frac{2+\cos x}{(x-1)^2} dx$. Відповідь: розбігається.

23 $\int\limits_{3}^{6} \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+2x-15)^2}}$. Відповідь: збігається.

24 $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}$. Відповідь: збігається.

25 $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$. Відповідь: збігається.

26 $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{x \ln x}{(x-e)^3} dx$. Відповідь: розбігається.

27 $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$. Відповідь: розбігається.

28 $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+2}$. Відповідь: розбігається.

29 $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{3 + \arcsin\frac{1}{x}}{1 + x\sqrt{x}} dx$. Відповідь: збігається.

30 $\int\limits_{0,5}^{1} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Відповідь: збігається.

31 $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$. Відповідь: розбігається.

32 $\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. Відповідь: розбігається.

33 $\int_{2}^{\infty}x\cos x dx$. Відповідь: розбігається.

34 $\int_{e}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x\ln x+1}}$. Відповідь: розбігається.

35 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}tg^{2}x dx$. Відповідь: розбігається.

36 $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{2x^{2}+6x+5}$. Відповідь: збігається.

37 $\int_{2}^{6}\frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^{2}}}$. Відповідь: збігається.

38 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}$. Відповідь: розбігається.

39 $\int_{0}^{\infty}x^{2}e^{-\frac{x}{2}}dx$. Відповідь: збігається.

40 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^{3}-5x^{2}}$. Відповідь: розбігається.

Питання для самоперевірки

1 Що називають невласним інтегралом від заданої функції з нескінченними проміжками інтегрування? Дати геометричне тлумачення та навести приклади збіжних і розбіжних інтегралів.

2 Сформулювати і довести ознаки збіжності невласних інтегралів із нескінченними проміжками інтегрування.

3 Який невласний інтеграл називають абсолютно збіжним і який умовно збіжним?

4 Що називають невласним інтегралом від розривної функції на даному скінченому проміжку інтегрування? Надати геометричне тлумачення і навести приклади збіжних і розбіжних інтегралів.

5 Сформулювати і довести ознаки збіжності невласних інтегралів від необмежених функцій.

6 Як виконується заміна змінної у невласному інтегралі?

7 У якому випадку невласний інтеграл від необмеженої функції можна обчислити безпосередньо за формулою Ньютона –Лейбніца?

15 Застосування визначеного інтеграла до розв'язання задач геометрії, механіки і фізики

Вираз деяких геометричних, механічних і фізичних величин через визначений інтеграл

Таблиця 3

№ п.п.	Найменування величини	Формула для обчислення
1	Площа плоскої фігури	$S=\int_a^b f(x)dx$ (41а) $S=\int_a^b \left(y_в(x)-y_н(x)\right)dx$ (41б) $S=\int_c^d \left(x_п(y)-x_л(y)\right)dy$ (41в) $S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x_t' dt$ (41г) $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$ (41д)
2	Об'єм тіла	$V=\int_a^b Q(x)dx$ (42а) $V_x=\pi\int_a^b \left(y_в{}^2(x)-y_н{}^2(x)\right)dx$ (42б) $V_y=\pi\int_c^d \left(x_п{}^2(y)-x_л{}^2(y)\right)dy$ (42в) $V_y=2\pi\int_a^b x\left(y_в(x)-y_н(x)\right)dx$ (42г)
3	Довжина дуги плоскої кривої	$L=\int_a^b \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx$ (43а) $L=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}dt$ (43б) $L=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(r_\varphi'\right)^2}d\varphi$ (43в)

4	Площа поверхні обертання	$S_{п.о.} = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ (44)
5	Маса стержня	$m = \int_a^b \gamma(x)dx$ (45)
6	Маса плоскої матеріальної дуги лінії	$m = \int_a^b \gamma(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ (46)
7	Статичні моменти плоскої дуги лінії відносно осей координат	$M_x = \int_a^b \gamma(x)y(x)\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ (47а) $M_y = \int_a^b \gamma(x)x\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$ (47б)
8	Маса плоскої фігури	$m = \int_a^b \gamma(x)(y_в(x) - y_н(x))dx$ (48)
9	Статичні моменти плоскої фігури відносно осей координат	$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\left(y_в{}^2(x) - y_в{}^2(x)\right)dx$ (49а) $M_y = \int_a^b \gamma(x)x(y_в(x) - y_н(x))dx$ (49б)
10	Координати центра ваги плоскої дуги лінії або плоскої фігури	$x_c = \frac{M_y}{m}$ (50а) $y_c = \frac{M_x}{m}$ (50б)
11	Шлях, пройдений тілом за проміжок часу $[t_1;t_2]$	$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt$ (51)
12	Робота змінної сили, яка діє в напрямку осі *Ox*, на відрізку $[a;b]$	$A = \int_a^b F(x)dx$ (52)
13	Кількість тепла при змінному струмі	$Q = 0{,}24R\int_{t_1}^{t_2} I^2(t)dt$ (53)
14	Сила тиску рідини на вертикальну пластинку	$P = \int_a^b \gamma xy(x)dx$ (54)
15	Кінетична енергія	$K = \frac{1}{2}\int_a^b \upsilon^2 dm$ (55)
16	Кількість електрики	$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$ (56)

15.1 Площа плоскої фігури

Нагадаємо, що плоска фігура, обмежена прямими $y=0$, $x=a$, $x=b$ і графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a;b]$ функції $y= f(x)$ (рис.1), називається криволінійною трапецією.

Площа криволінійної трапеції обчислюється за формулою (41а):

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

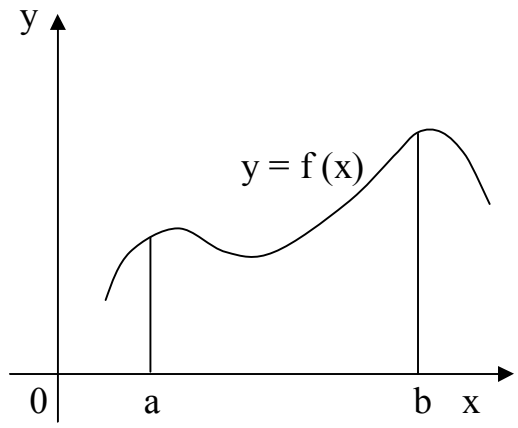


Рис. 1

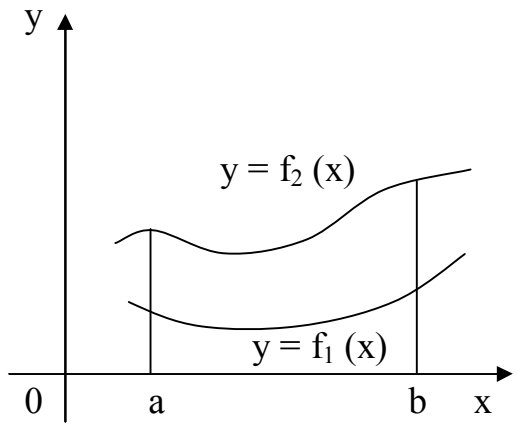


Рис. 2

Якщо плоска фігура обмежена двома кривими $y_B=f_2(x)$ і $y_H=f_1(x)$, причому на відрізку $[a;b]$ $f_2(x) >f_1(x)$, і двома прямими $x=a$ і $x=b$ (рис.2), то її площа обчислюється за формулою (41б):

$$S = \int_a^b \left(y_в(x) - y_н(x)\right)dx.$$

Зауважимо, що формула (41а) є окремим випадком формули (41б) за умови, що $y_н=0$.

Якщо плоска фігура обмежена кривими $x_п = \varphi_2(y)$, $x_л = \varphi_1(y)$ і прямими $y=c$ і $y=d$, причому $c > d$ і $\varphi_2(y) > \varphi_1(y)$ на відрізку $[c;d]$ (рис.3), то її площа обчислюється за формулою (41в):

$$S = \int_c^d \left(x_п(y) - x_л(y)\right)dy.$$

Якщо плоска крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ і $t_1 \le t \le t_2$, то площа фігури обчислюється за формулою (41г):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'_t dt.$$

І, нарешті, якщо неперервна крива задана в полярних координатах рівнянням $r = r(\varphi)$, то площа криволінійного сектора *OAB* (рис.4), обмеженого дугою кривої $r = r(\varphi)$ і двома радіусами *OA* і *OB*, які відповідають значенням $\varphi_1 = \alpha$ і $\varphi_2 = \beta$, обчислюється за формулою (41д):

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi..$$

Зауважимо, що розв'язання геометричної задачі необхідно починати з побудови рисунка.

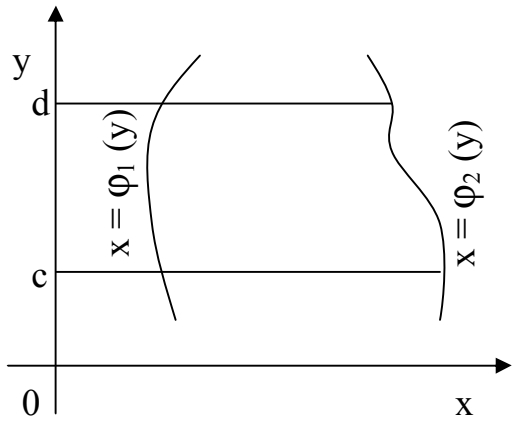


рис. 3

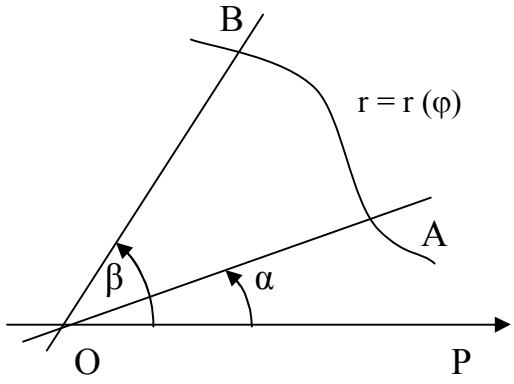


рис. 4

Розглянемо задачі на обчислення площ плоских фігур.

Приклади

Приклад 133 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y=x(x-1)^2$ і віссю *Ox*.

Розв'язання. Функція $y=x(x-1)^2$ визначена для всіх дійсних значень *x*. Точки перетину графіка функції з віссю *Ox* обчислимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x(x-1)^2, \\ y = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1=0,\ y_1=0$ і $x_2=1,\ y_2=0.$

Таким чином, графік функції $y=x(x-1)^2$ перетинає вісь *Ox* в точках (0;0) і (1;0). Не складно переконатися в тому, що функція $y=x(x-1)^2$ має екстремум у точках $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right)$ і *(1;0)*, а також точку перегину $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{27}\right)$. Читачеві пропонуємо перевірити це самостійно.

Використовуючи ці дані, будуємо графік функції (рис. 5).

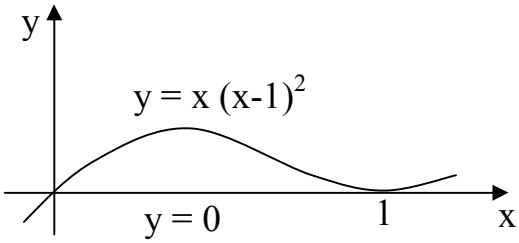


рис. 5

Із рис. 5 видно, що фігура обмежена зверху лінією $y=x(x-1)^2$, знизу $y=0$ і проекціюється на вісь Ox у відрізок $[0;1]$. Отже, $y_в=x(x-1)^2$, $y_н=0$, $a=0$, $b=1$.

Таким чином, за формулою (41б) маємо

$$S=\int_0^1 x(x-1)^2\,dx=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

Відзначимо, що площу одержаної фігури можна було б обчислити і за формулою (41а), бо ця фігура є криволінійною трапецією.

Приклад 134 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ і параболою $y=\dfrac{x^2}{2}$.

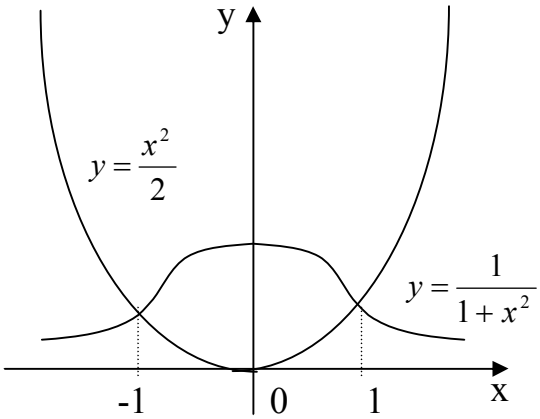


рис. 6

Розв'язання. Крива $y=\dfrac{x^2}{2}$ – парабола з вершиною в точці $O(0;0)$ і віссю симетрії Oy. Вітки параболи направлені вгору (рис.6). Крива $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ – локон Аньєзі. Із рівняння видно, що при будь-якому x функція набуває лише

додатних значень, а тому її графік розташований вище осі *Ox*, а вісь *Oy* є її віссю симетрії, бо *y(–x)=y(x).* Найбільше значення, яке дорівнює одиниці, функція набуває при *x=0,* а при $x \to \pm\infty$ $y \to 0$.

Схематично графік цієї функції зображений на рис. 6. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рис. 6. Площу заштрихованої фігури обчислимо за формулою (41б):

$$S = \int_a^b \left(y_в(x) - y_н(x)\right)dx.$$

Для визначення меж інтегрування обчислимо абсциси точок перетину ліній, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ y = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Отже, $a = -1$, $b = 1$.

Враховуючи також, що $y_в = \dfrac{1}{1+x^2}$, а $y_н = \dfrac{x^2}{2}$ будемо мати

$$S = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx,$$

а з урахуванням симетрії фігури відносно осі *Oy* одержуємо

$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\left(arctgx - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Приклад 135 Обчислити площу петлі лінії $y^2 = x(x-1)^2$.

Розв'язання. Побудуємо графік лінії (рис.7). Фігура розташована симетрично відносно осі *Ox*, а тому досить обчислити площу верхньої частини, яка розташована над віссю *Ox,* і результат подвоїти. Відрізок інтегрування $[0;1]$. Для обчислення площі фігури застосуємо формулу (41б). Підставляючи до цієї формули $y_в = -\sqrt{x}(x-1)$, $y_н = 0$, $a = 0$, $b = 1$, одержимо

$$S = -2\int_0^1 \sqrt{x}(x-1)dx = -2\int_0^1 \left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx = -2\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = -2\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

Приклад 136 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x+1$ і $x - y - 1 = 0$.

Розв'язання. Рівняння $y^2=2x+1$ визначає параболу, а рівняння $x-y-1=0$ – пряму лінію (рис.8).

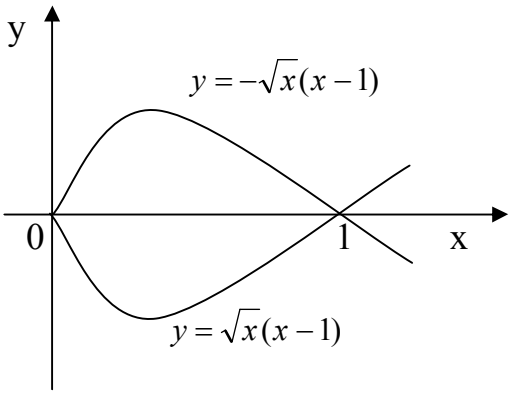


рис. 7

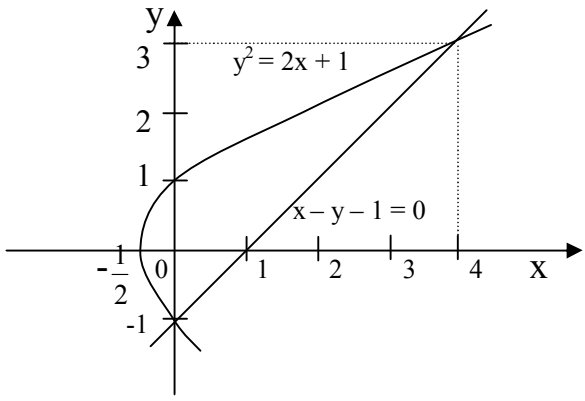


рис. 8

Розв'язуючи систему рівнянь: $\begin{cases} y^2 = 2x+1, \\ x-y-1=0, \end{cases}$

обчислимо точки перетину прямої та параболи: $A(0;\ -1)$, $B(4;3)$.

Для обчислення площі заштрихованої фігури скористаємось формулою (41в), бо в разі використання формули (41б) фігуру треба було б розбити на дві частини, оскільки $y_н$ складається із двох різних ліній $y=-\sqrt{2x+1}$ і $y=x-1$. Отже, підставляючи до формули (41в) $x_п=y+1$, $x_л=\dfrac{y^2-1}{2}$ і враховуючи, що $-1\le y\le 3$, одержимо

$$S=\int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{3}{2}y\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}=\frac{16}{3}.$$

Приклад 137 Обчислити площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ і віссю абсцис.

Розв'язання. Фігура, обмежена однією аркою циклоїди і віссю Ox, показана на рис. 9. Крива задана параметричними рівняннями. Тому площу фігури будемо обчислювати за формулою (41г):

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x_t'dt.$$

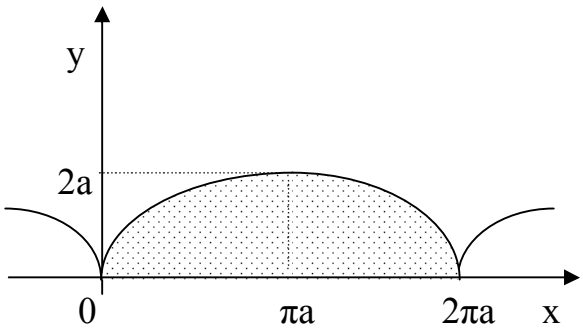


Рис.9

Підставляючи до цієї формули *y=a(1 –cost),* $x'_t = a(1-\cos t)$ і враховуючи, що $0 \le t \le 2\pi$, одержимо

$$S = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Приклад 138 Обчислити площу петлі лінії $x=t^2-1$, $y=t^3-t$.

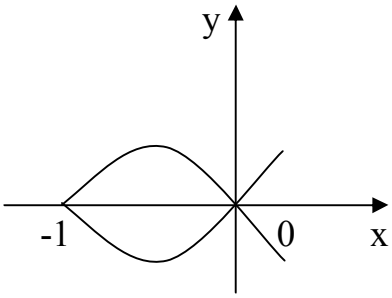


Рис.10

Розв'язання. Виключивши з параметричних рівнянь параметр t, одержимо $y^2=x^2(x+1)$. Побудуємо графік цієї функції (рис.10). На відрізку $[-1;0]$ параметр t змінюється від 1 до 0. Враховуючи симетрію фігури відносно осі Ox і використовуючи формулу (41г), будемо мати

$$S = 2\int_1^0 \left(t^3 - t\right)2t\,dt = -4\int_0^1 \left(t^4 - t^2\right)dt = -4\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

Приклад 139 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = a\sin 2\varphi$ (чотирипелюсткова троянда).

Розв'язання. Побудуємо криву в полярній системі координат (рис. 11). Полярний радіус описує площу половини пелюстка, коли полярний кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{4}$. За формулою (41д) площа всієї фігури

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin^2 2\varphi d\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = 2a^2 \left(\varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

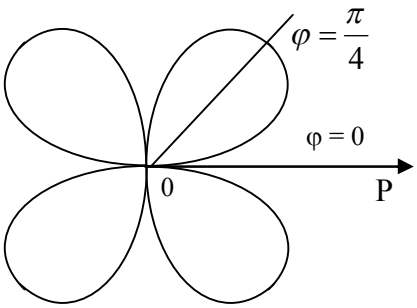


Рис.11

Приклад 140 Обчислити площу фігури, обмеженої лемніскатою Бернуллі $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

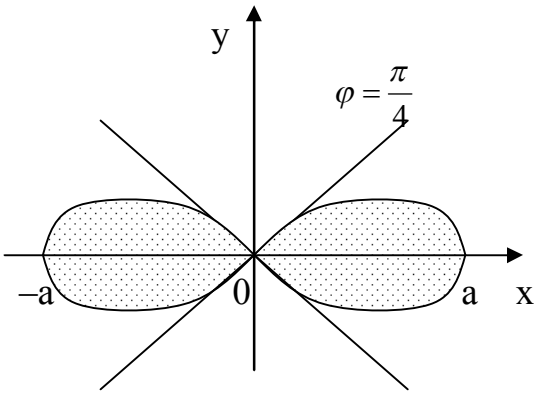


Рис. 12

Розв'язання. Враховуючи, що осі координат Ox і Oy є осями симетрії кривої (рівняння містить лише квадрати поточних координат), досить побудувати її графік у першій чверті, а потім продовжити його в інші чверті. Для побудови лінії переведемо її рівняння в полярну систему координат. Для цього покладемо $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Тоді $\left(r^2\right)^2 = a^2\left(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi\right)$ або після спрощення $r^2 = a^2\cos 2\varphi$. При зміні φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$ полярний радіус r змінюється від a до 0. Фігура, обмежена лемніскатою Бернуллі, показана на рис. 12. Площу цієї фігури обчислимо за формулою (41д):

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi.$$

З урахуванням симетрії фігури відносно осей координат, будемо мати

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi d\varphi = a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = a^{\ 2}\sin 2\varphi\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

Завдання для самостійної роботи

1 Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

2 Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю абсцис і лінією $y=x-x^2\sqrt{x}$.

Вказівка. Побудуйте лінію $y=x-x^2\sqrt{x}$, надаючи аргументу x значень від 0 до 1.

Відповідь: $\frac{3}{14}$.

3 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=e^{-x}$, $y=e^x$ і прямою $x=1$.

Відповідь: $e+\frac{1}{e}-2$.

4 Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Вказівка. Фігура симетрична відносно осей координат. При зміні аргументу x на чверті площі від 0 до a параметр t змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Відповідь: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

5 Обчислити площу петлі лінії $x=3t^2$, $y=3t-t^3$.

Вказівка. Фігура симетрична відносно осі Ox. Обчисліть половину площі за формулою (41г), змінюючи параметр t від 0 до $\sqrt{3}$, і результат подвойте.

Відповідь: $\frac{72}{5}\sqrt{3}$.

6 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r=a\cos 5\varphi$.

Вказівка. Фігура являє собою п`ятипелюсткову троянду. На площі половини пелюстка кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{10}$.

Відповідь: $\frac{a^2\pi}{4}$.

7 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = tg\varphi$ $(a > 0)$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Вказівка. Досить побудувати частину лінії $r = tg\varphi$, змінюючи φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{1}{8}a^2(4-\pi)$.

8 Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = 2(1-\cos\varphi)$ і колом $r=4$.

Відповідь: 10π.

9 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=e^{-2x}$, $y=0$, $x = -\frac{1}{2}$ і $x=1$.

Відповідь: $\frac{e^3-1}{2e^2}$.

10 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 12\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2 = 2\pi$.

Відповідь: 169π.

15.2 Об'єм тіла

Якщо $Q(x)$ – площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною осі Ox у точці з абсцисою x (рис. 13), то об'єм тіла обчислюється за формулою (42а):

$$V = \int_a^b Q(x)dx,$$

де a і b – абсциси крайніх перерізів тіла.

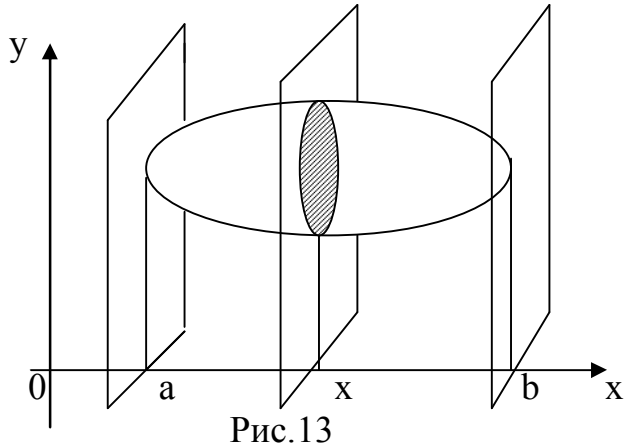
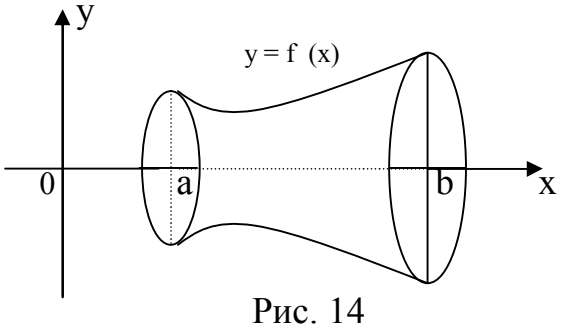


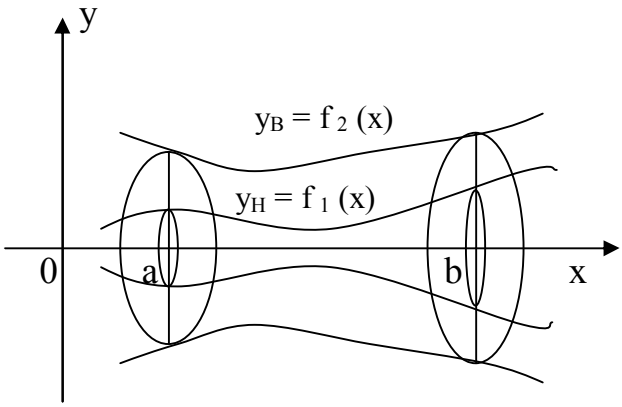
Рис.13

Для обчислення об’ємів тіл обертання відносно координатних осей слід застосувати одну з таких формул:



$$V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx$$

Рис. 14



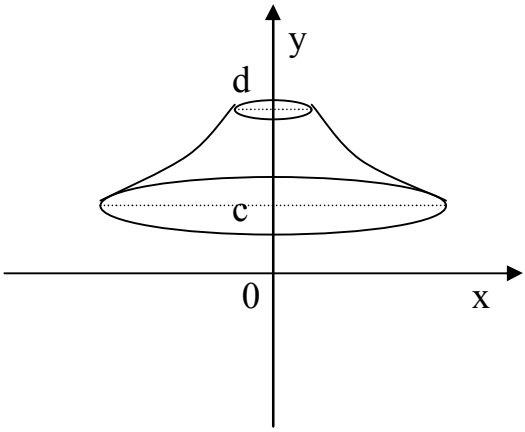
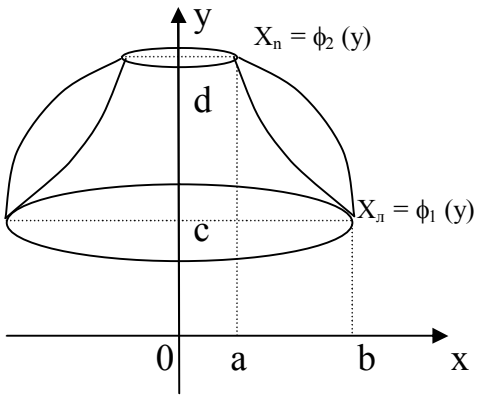


Рис. 15

$$V_x = \pi \int_a^b \left(y_в^{\,2}(x) - y_н^{\,2}(x) \right) dx \qquad (42б)$$

Рис.16

$$V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy$$



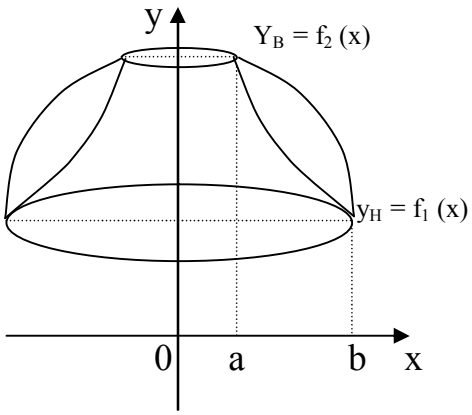


Рис.17 а

$$V_y = \pi \int_c^d \left(x_п^{\,2}(y) - x_л^{\,2}(y) \right) dy \qquad (42в)$$

Рис.17 б

$$V_y = 2\pi \int_a^b x\left(y_в(x) - y_н(x) \right) dx \qquad (42г)$$

Приклади

Приклад 141 Обчислити об'єм трьохосьового еліпсоїда (рис. 18)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Розв'язання. У перерізі еліпсоїда площиною, паралельною площині xOz і віддаленої від неї на відстані y, одержимо еліпс

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}=1$$

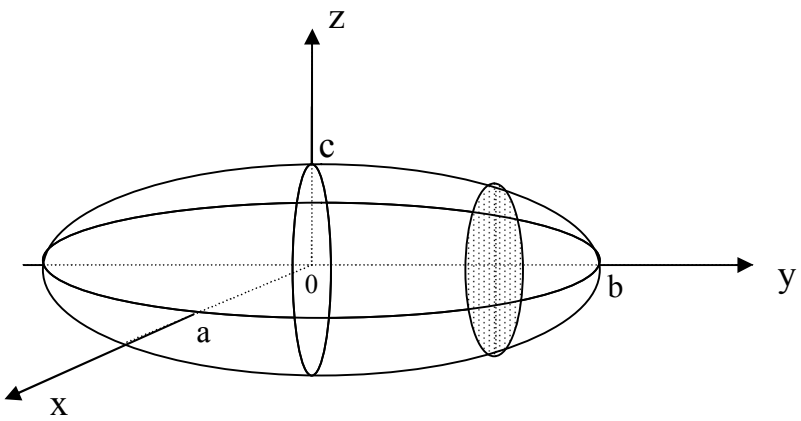


Рис. 18

з півосями

$$a_1=a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} \qquad \text{і} \qquad c_1=c\sqrt{\frac{y^2}{b^2}}.$$

Відомо, що площа еліпса дорівнює $\pi a_1 c_1$. Отже, площа перерізу

$$Q(y)=\pi ac\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right).$$

Абсциси крайніх перерізів тіла відповідно дорівнюють $-b$ і b. Тоді за формулою (42а) будемо мати

$$V=\pi ac\int_{-b}^{b}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)dy=\pi ac\left(y-\frac{y^3}{3b^2}\right)\Bigg|_{-b}^{b}=\pi ac\left(b-\frac{b}{3}+b-\frac{b}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Таким чином, об'єм еліпсоїда з півосями a, $в$ і c дорівнює $\frac{4}{3}\pi abc$.

Зокрема, якщо $a=b=c$, еліпсоїд перетворюється на кулю, і в цьому випадку ми одержимо відому в елементарній математиці формулу для обчислення об'єму кулі:

$$V=\frac{4}{3}\pi a^3,$$

де a – радіус кулі.

Приклад 142 Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням параболи $y^2=4x$ навколо своєї осі (параболоїд обертання) і площиною, перпендикулярною до його осі тавіддаленою від вершини параболи на відстань, що дорівнює одиниці.

Розв'язання. Побудуємо тіло (рис.19).

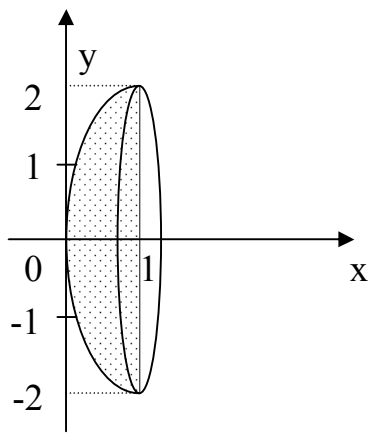


Рис.19

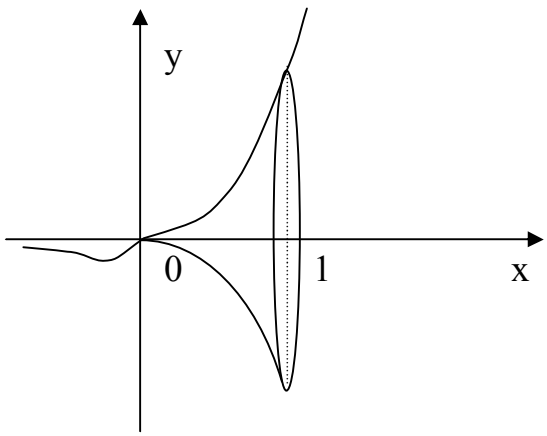


Рис. 20

Враховуючи, що $y_в=2\sqrt{x}$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$, за формулою (42б) будемо мати

$$V_x=\pi\int_0^1 4xdx=2\pi x^2\Big|_0^1=2\pi.$$

Отже, шуканий об'єм дорівнює 2π.

Приклад 143 Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y=xe^x$ і прямими $x=1$ і $y=0$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

Розв'язання. Побудуємо тіло обертання (рис.20). Об'єм одержаного тіла будемо обчислювати за формулою (42б), враховуючи, що $y_в=xe^x$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$:

$$V_x=\pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx.$$

Використовуючи далі двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати:

$$V_x = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x}dx = \left| \begin{array}{c} \int udv = uv - \int vdu \\ u = x^2; du = 2xdx \\ dv = e^{2x}dx; v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \int xe^{2x}dx\right)\Bigg|_0^1 = \left| \begin{array}{c} u = x; du = dx \\ dv = e^{2x}dx; v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \int\frac{1}{2}e^{2x}dx\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right).$$

Таким чином, шуканий об’єм дорівнює $\frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$.

Приклад 144 Одна арка циклоїди *x=a(t–sint), y=a(1–cost)* обертається навколо своєї основи. Обчислити об’єм тіла, обмеженого одержаною поверхнею.

Розв’язання. Побудуємо тіло обертання (рис.21).

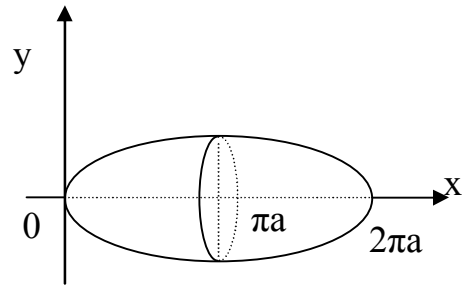


Рис. 21

Враховуючи, що $y_в=a(1–cost)$, $y_н=0$, $dx = a(t - \sin t)_t' dt = a(1 - \cos t)dt$ і $0 \le t \le 2\pi$, за формулою (42б) маємо

$$V_x = \pi\int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t)dt = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left[1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - \left(1 - \sin^2 t\right)\cos t\right]dt =$$

$$= \pi a^3\int_0^{2\pi}\left(\frac{5}{2} - 4\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin^2 t\cos t\right)dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

Приклад 145 Обчислити об'єм тіла, одержаного обертанням фігури, обмеженої параболою $y=2x-x^2$ і віссю абсцис, навколо осі ординат.

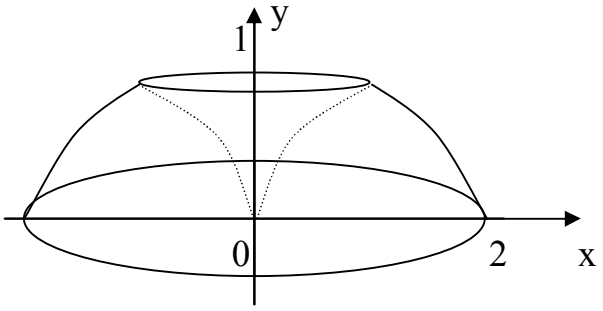


Рис. 22

Розв'язання. Побудуємо тіло обертання (рис.22). Для обчислення об'єму тіла обертання скористаємось формулою (42г):

$$V_y = 2\pi \int_a^b x(y_b - y_n)dx.$$

Враховуючи, що $y_в=2x-x^2$, $y_н=0$ і $0 \le x \le 2$, одержимо

$$V_y = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3)dx = 2\pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_0^2 = \frac{8}{3}\pi.$$

Завдання для самостійної роботи

1 Фігура, обмежена дугами парабол $y^2=x$ і $x^2=y$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

Відповідь: $0{,}3\pi$.

2 Обчислити об'єм тіла, яке одержуємо від обертання навколо осі ординат криволінійної трапеції, обмеженої дугою синусоїди $y=\sin x$, яка відповідає півперіоду, і віссю абсцис.

Відповідь: $2\pi^2$.

3 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією $x^4+y^4=a^2x^2$.

Вказівка. Із рівняння лінії $y^2 = \pm x\sqrt{a^2 - x^2}$. Враховуючи симетрію тіла відносно осі Oy, обчисліть половину об'єму для $0 \le x \le a$, де $y^2 = x\sqrt{a^2 - x^2}$, і результат подвойте.

Відповідь: $\frac{2}{3}\pi a^3$.

4 Обчислити об'єм тіла, яке утворюється в результаті обертання навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$ і $y=4$.

Відповідь: 8π.

5 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією $x=2\cos t,\ y=3\sin t$.

Відповідь: 24π.

6 Фігура, обмежена лініями $y^2=(x+4)^3$ і $x=0$, обертається навколо осі Ox. Обчислити об'єм тіла обертання.

Відповідь: 64π.

7 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $y^2+x-4=0$ і $x=0$.

Відповідь: $\frac{512}{15}\pi$.

8 Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліптичним параболоїдом $y = \frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{2}$ і площиною $y=1$.

Відповідь: $\pi\sqrt{2}$.

9 Обчислити об'єм тіла, обмеженого однополим гіперболоїдом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$ і площинами $z=-1$ і $z=2$.

Відповідь: 36π.

10 Обчислити об'єм тіла, обмеженого параболоїдом $2z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ і конусом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2$.

Відповідь: 8π.

15.3 Довжина дуги плоскої кривої

У прямокутній системі координат плоска крива може бути задана явно, неявно або параметрично.

Якщо крива задана явно, тобто рівнянням $y=f(x)$ або неявно, тобто рівнянням $F(x,y)=0$, то довжина дуги $\cup M_1M_2$ цієї кривої (рис.23) обчислюється за формулою (43а):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx.$$

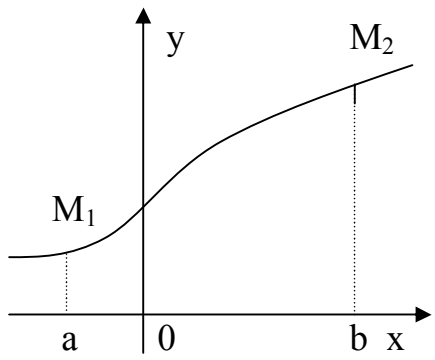


Рис. 23

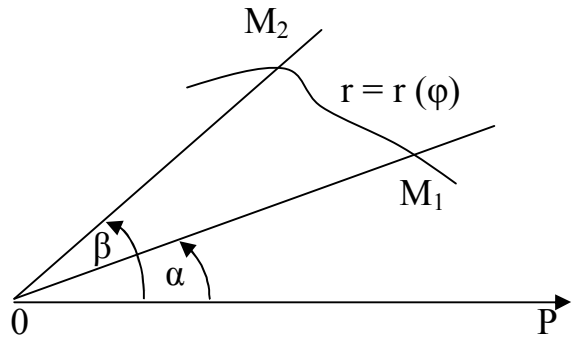


Рис.24

Якщо ж крива задана параметричними рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ причому $t_1 \le t \le t_2$, а функції *x(t)* і *y(t)*мають неперервні похідні, то довжина дуги цієї кривої (рис.23) обчислюється за формулою (43б):

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt.$$

У полярній системі координат (рис.24) крива задається рівнянням $r = r(\varphi)$, а довжина дуги $\cup M_1 M_2$ цієї кривої обчислюється за формулою (43в):

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

Приклади

Приклад 146 Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y^2=x^3$ від початку координат до точки з координатами $x=4,\ y=8.$

Розв'язання. Графік півкубічної параболи показаний на рис. 25.

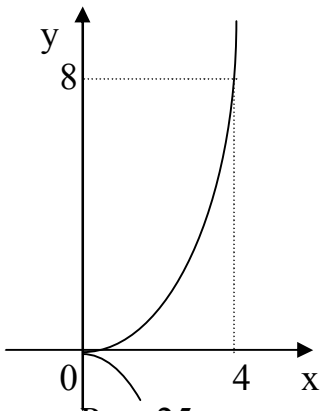


Рис. 25

Враховуючи, що на відрізку $[0;4]$ $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, за формулою (43а) маємо:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10^{\frac{3}{2}}-1\right) = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

Приклад 147 Обчислити довжину дуги лінії $y=lnx$ від $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$.

Розв'язання. Обчислимо похідну функції: $y' = \frac{1}{x}$. Тоді

$$1+\left(y'(x)\right)^2 = 1+\frac{1}{x^2} = \frac{1+x^2}{x^2}.$$

За формулою (43а) довжина дуги

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\cdot xdx = \left|\begin{array}{c} 1+x^2=z^2 \\ x^2=z^2-1 \\ 2xdx=2zdz \\ z_н=\sqrt{1+3}=2 \\ z_в=\sqrt{1+8}=3 \end{array}\right| =$$

$$= \int_2^3 \frac{z}{z^2-1}\cdot zdz = \int_2^3 \frac{z^2}{z^2-1}dz = \int_2^3 \frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz = \int_2^3\left(1+\frac{1}{z^2-1}\right)dz =$$

$$= \left(z+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right)\Bigg|_2^3 = 3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = 1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right) = 1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 148 Обчислити довжину лінії $y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$.

Розв'язання. Насамперед відзначимо, що задана функція визначена лише на відрізку $[0;1]$. Її похідна

$$y' = \left(\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}\right)' = \frac{1-2x}{2\sqrt{x-x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} =$$

$$= \frac{1-2x}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = \frac{1-2x+1}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = \frac{2(1-x)}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}.$$

На півінтервалі $(0;1]$ похідна $y'>0$, а похідна $y'' = -\frac{1}{2x^2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} < 0$, тому на області визначення функція монотонно зростає, а її графік – опуклий (рис. 26). Враховуючи, що

$$1+\left(y'(x)\right)^2=1+\frac{1-x}{x}=\frac{x+1-x}{x}=\frac{1}{x},$$

за формулою (43а) маємо

$$L=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim_{\varepsilon\to0}2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1=2\lim_{\varepsilon\to0}(1-\sqrt{\varepsilon})=2.$$

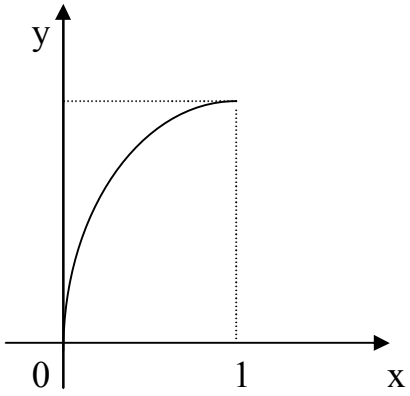


Рис. 26

Зауважимо, що при обчисленні довжини дуги довелось обчислювати невласний інтеграл, оскільки в точці $x=0$ підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ має правосторонній нескінченний розрив.

Приклад 149 Обчислити довжину дуги евольвенти кола $x=R(\cos t+t\sin t)$, $y=R(\sin t-t\cos t)$ від $t_1=0$ до $t_2=\pi$ (див. додаток).

Розв'язання. Обчислюємо похідні

$$x_t'=R(-\sin t+\sin t+t\cos t)=Rt\cos t$$

і

$$y_t'=R(\cos t-\cos t+t\sin t)=Rt\sin t.$$

Тоді

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=R^2t^2\cos^2 t+R^2t^2\sin^2 t=R^2t^2\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)=R^2t^2.$$

Довжину дуги евольвенти кола обчислюємо за формулою (43б):

$$L=\int_0^\pi\sqrt{R^2t^2}\,dt=R\int_0^\pi t\,dt=R\frac{t^2}{2}\Big|_0^\pi=\frac{\pi^2R}{2}.$$

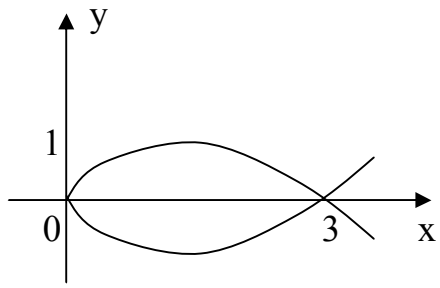


Рис. 27

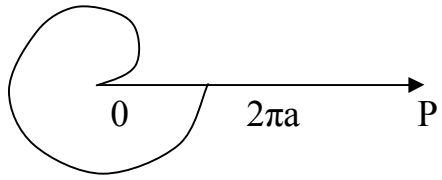


Рис. 28

Приклад 150 Обчислити довжину петлі лінії $x=t^2$, $y=t-\dfrac{t^3}{3}$.

Розв'язання. Оскільки межі інтегрування не задані, то слід побудувати лінію, для чого доцільно виключити параметр t із параметричних рівнянь: $y^2=x\left(1-\dfrac{x}{3}\right)^2$. На довжині петлі (рис.27) параметр t змінюється від $-\sqrt{3}$ до $\sqrt{3}$.

Із урахуванням симетрії лінії відносно осі Ox, обчислюємо її довжину за формулою (43б):

$$L=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2+\left(1-t^2\right)^2}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+2t^2+t^4}\,dt=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(1+t^2\right)dt=2\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}.$$

Зауважимо, що при добуванні квадратного кореня з виразу $\left(1+t^2\right)^2$ враховано, що $1+t^2>0$ для всіх дійсних значень t.

Приклад 151 Обчислити довжину дуги архімедової спіралі $r=a\varphi$ від початку до кінця першого витка.

Розв'язання. Побудуємо перший виток дуги архімедової спіралі (рис.28). При зміні полярного кута φ від 0 до 2π, полярний радіус r змінюється від 0 до $2\pi a$. Отже, за формулою (43в) довжина першого витка

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right)=\pi a\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right).$$

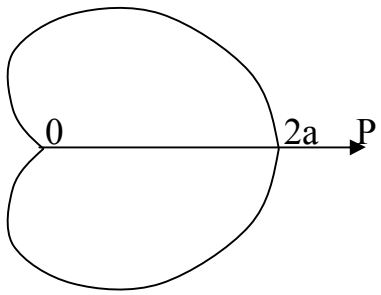


Рис.29

Зауважимо, що для обчислення інтеграла скористалися формулою

$$\int \sqrt{x+A}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C.$$

Приклад 152 Обчислити довжину кардіоїди $r = a(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання. Побудуємо кардіоїду (рис.29), надаючи φ значень від *0* до π і враховуючи, що $r(-\varphi) = r(\varphi)$. Оскільки $r_\varphi{}' = -a\sin\varphi$, а

$$r^2 + \left(r_\varphi{}'\right)^2 = a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi = a^2\left(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right) =$$

$$= a^2(2+2\cos\varphi) = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

то за формулою (43в) і з урахуванням симетрії лінії маємо

$$L = 2\int_0^\pi 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a.$$

Тут ураховано також, що на відрізку $[0;\pi]$ функція $\cos\frac{\varphi}{2}$ набуває лише невід'ємних значень, і тому $\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}$ для всіх $0 \le \varphi \le \pi$.

Завдання для самостійної роботи

1 Обчислити довжину дуги лінії $y = \ln\left(1-x^2\right)$ від $x_1=0$ до $x_2 = \frac{1}{2}$.

Відповідь: *ln3 – 0,5.*

2 Обчислити довжину дуги лінії $y = \ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ від $x_1=a$ до $x_2=в$.

Відповідь: $\ln\dfrac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}$.

3 Обчислити довжину дуги кривої $y=1-\ln\sin x$ від $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ до $x_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}\ln 3$.

4 Обчислити довжину дуги кривої $y = \dfrac{1}{4}\left(e^{2x} + e^{-2x}\right)$ від $x_1=0$ до $x_2=3$.

Відповідь: $\dfrac{1}{4}\left(e^6 - e^{-6}\right)$.

5 Обчислити довжину дуги лінії $\begin{cases} x = \left(t^2 - 2\right)\sin t + 2t\cos t, \\ y = \left(2 - t^2\right)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2 = \pi$.

Відповідь: $\dfrac{\pi^3}{3}$.

6 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=1$.

Відповідь: $\sqrt{2}(e-1)$.

7 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t) \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2 = 2\pi$.

Відповідь: *48*.

8 Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $r\varphi = 1$ від $\varphi_1 = \dfrac{3}{4}$ до $\varphi_2 = \dfrac{4}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{5}{12} + \ln\dfrac{3}{2}$.

9 Обчислити довжину дуги кривої $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

Відповідь: $\dfrac{3\pi a}{2}$.

10 Обчислити довжину дуги кардіоїди $r = 2(1-\cos\varphi)$, яка розташована всередині кола $r=1$.

Відповідь: $16 - 8\sqrt{3}$.

15.4 Площа поверхні обертання

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* дуги гладкої кривої *y=f(x)*, між точками *x=a* і *x=в* обчислюється за формулою (44):

$$S_{n.o.} = 2\pi\int_a^b y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$$

Якщо спрямлювана крива задана рівнянням *x=x(t), y=y(t),* де *x(t)* і *y(t)* – функції неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[t_1;t_2]$, то площа поверхні обертання визначається за формулою (44а):

$$S_{n.o.} = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt\,.$$

Якщо ж спрямлювана крива задана рівнянням $r = r(\varphi)$, де $r(\varphi)$ – функція неперервна разом із своєю похідною першого порядку для $\alpha \le \varphi \le \beta$, то площу поверхні, утвореної обертанням цієї кривої навколо полярної осі, обчислюємо за формулою (44б):

$$S_{n.o.} = 2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2+\left(r_\varphi'\right)^2}\,d\varphi.$$

Приклади

Приклад 153 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2=4ax$ навколо осі абсцис від вершини до точки з абсцисою $x=3a$.

Розв'язання. Поверхня обертання показана на рис.30. Із рівняння параболи $y = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$. Тоді $y'(x) = \dfrac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, а $1+\left(y'(x)\right)^2 = 1+\dfrac{a}{x} = \dfrac{x+a}{x}$.

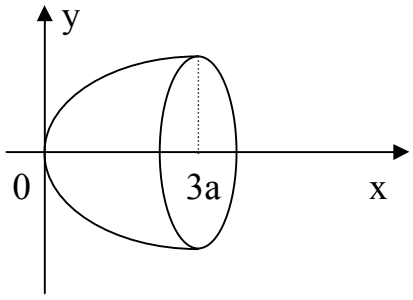


Рис. 30

Площу поверхні обертання обчислимо за формулою (44), враховуючи, що $0 \le x \le 3a$:

$$S_{n.o.} = 2\pi \int_0^{3a} 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{x} \cdot \frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}} dx = 4\pi\sqrt{a} \int_0^{3a} \sqrt{x+a} dx =$$

$$= 4\pi\sqrt{a} \cdot \frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_0^{3a} = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left(8a\sqrt{a} - a\sqrt{a}\right) = \frac{56}{3}\pi a^2.$$

Приклад 154 Обчислити площу веретенистої поверхні, утвореної обертанням однієї арки синусоїди *y=sinx* навколо осі *Ox* (рис.31).

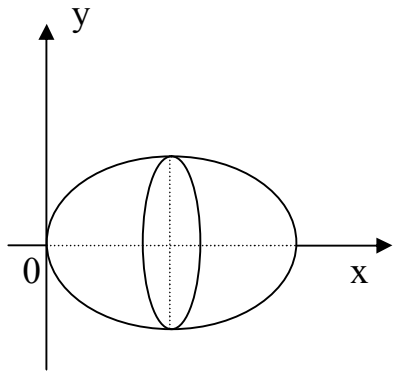


Рис.31

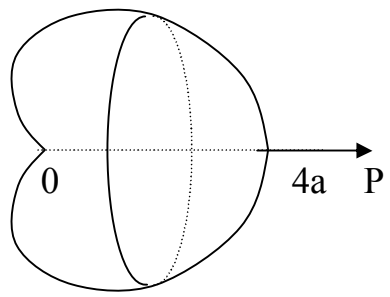


Рис.32

Розв'язання. Враховуючи, що в одній арці синусоїди x змінюється від 0 до π, за формулою (44) маємо

$$S_{n.o.} = 2\pi \int_0^{2\pi} \sin x\sqrt{1+\cos^2 x} dx = -\frac{2\pi}{2}\left(\cos x\sqrt{1+\cos^2 x} + \ln\left|\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}\right|\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi\left(\cos\pi\sqrt{1+\cos^2\pi} + \ln\left|\cos\pi + \sqrt{1+\cos^2\pi}\right| - \sqrt{2} - \ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right) =$$

$$= -\pi\left(-\sqrt{2} + \ln\left|-1+\sqrt{2}\right| - \sqrt{2} - \ln\left|1+\sqrt{2}\right|\right) = -\pi\left(-2\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right) =$$

$$= -\pi\left(-2\sqrt{2} + \ln\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right) = -\pi\left(-2\sqrt{2} + \ln\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}\right) =$$

$$= -\pi\left(-2\sqrt{2} - 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right) = 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln\left(\sqrt{2}+1\right)\right).$$

Приклад 155 Обчислити площу сфери радіуса R.

Розв'язання. Якщо сфера утворюється обертанням навколо осі *Ox* півкола, то *x=Rcost, y=Rsint*, $0 \le t \le \pi$.

Оскільки $\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 = \left(-R\sin t\right)^2 + \left(R\cos t\right)^2 = R^2$, то за формулою (44а) маємо

$$S_{п.о.} = 2\pi\int_0^{\pi} R\sin t \cdot Rdt = -2\pi r^2 \cos t\Big|_0^{\pi} = -2\pi R^2(\cos\pi - \cos 0) = 4\pi R^2.$$

Отже, площа сфери радіуса R, дорівнює $4\pi R^2$.

Приклад 156 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r = 2a(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання. Поверхня обертання показана на рис. 32. Враховуючи, що

$$r_\varphi' = -2a\sin\varphi,\ \ r^2 + (r')^2 = 4a^2(1+\cos\varphi)^2 + (-2a\sin\varphi)^2 =$$

$$= 4a^2\left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4a^2\left(2 + 2\cos\varphi\right) = 8a^2(1+\cos\varphi) = 16a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

і $0 \le \varphi \le \pi$, за формулою (44б) маємо

$$S_{п.о.} = 2\pi\int_0^{\pi} 2a(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 64\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= -128\pi a^2\cdot\frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{128}{5}\pi a^2(0-1) = \frac{128}{5}\pi a^2.$$

Тут враховано, що $\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}$, бо для $0 \le \varphi \le \pi$ $\cos\frac{\varphi}{2}$ набуває невід'ємних значень.

Таким чином, шукана площа поверхні обертання дорівнює $\frac{128}{5}\pi a^2$.

Завдання для самостійної роботи

1 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3y - x^3 = 0$ навколо осі абсцис від $x_1 = 0$ до $x_2 = a$.

Відповідь: $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{\left(1+a^4\right)^3} - 1\right)$.

2 Обчислити площу катеноїда – поверхні, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = ach\frac{x}{a}$ навколо осі абсцис від $x_1 = 0$ до $x_2 = a$.

Вказівка. $ch\frac{x}{a} = \frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}}{2}$ – гіперболічний косинус.

Відповідь: $\frac{\pi a^2}{4}\left(e^2 - e^{-2} + 4\right)$.

3 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* кривої $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}\left(t^2 - 3\right) \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2 = \sqrt{3}$.

Відповідь: 3π.

4 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Відповідь: $2\pi a^2\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

5 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* дуги кривої $y = \frac{1}{3}x^3$ від $x_1= -2$ до $x_2=2$.

Відповідь: $\frac{2}{9}\pi\left(17\sqrt{17} - 1\right)$.

6 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* кривої $y^2=4+x$ від вершини до точки з абсцисою $x=2$.

Відповідь: $\frac{62}{3}\pi$.

7 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* кардіоїди $\begin{cases} x = a\left(2\cos t - \cos 2t\right), \\ y = a\left(2\sin t - \sin 2t\right). \end{cases}$

Відповідь: $\frac{128}{5}\pi a^2$.

8 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a\left(t - \sin t\right), \\ y = a\left(1 - \cos t\right). \end{cases}$

Відповідь: $\frac{64}{3}\pi a^2$.

9 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* астроїди $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{12}{5}\pi a^2$.

10 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* еліпса $3x^2+4y^2=12$.

Вказівка. Скористайтеся формулою (44б). Параметричні рівняння еліпса $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$

Відповідь: $2\pi\left(4 + 3\ln 3\right)$.

15.5 Центр ваги плоскої кривої

Статичним моментом відносно осі l матеріальної точки з масою m і віддаленої від осі l на відстані d, називається величина $M_l=md$.

Статичним моментом відносно осі l системи n матеріальних точок із масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, які лежать в одній площині з віссю і віддалені від неї на відстанні $d_1, d_2, \ldots, d_n$, називається величина

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i ,$$

причому відстані точок, які лежать по одну сторону осі l, беруть зі знаком (+), а по другу – зі знаком (–). Аналогічно визначаються статичні моменти системи точок відносно площини.

Якщо маси неперервно заповнюють лінію або фігуру площини xOy, то статичні моменти M_x і M_y відносно координатних осей Ox і Oy виражаються відповідними інтегралами.

Відзначимо, що для однорідних геометричних фігур густину вважають рівною одиниці.

Зокрема, якщо крива задана в декартових прямокутних координатах рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – функція, неперервна разом із своєю похідною першого порядку на відрізку $[a;b]$, то статичні моменти цієї кривої відносно осей координат матимуть вигляд

$$M_x = \int_a^b \gamma(x) y(x) \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\, dx \qquad (47а)$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\, dx \qquad (47б)$$

Координати центра ваги плоскої кривої обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad (50а)$$

$$y_c = \frac{M_x}{m}, \qquad (50б)$$

де M_x і M_y – статичні моменти кривої відносно осей координат, а m– маса кривої, причому

$$m = \int_a^b \gamma(x) \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\, dx . \qquad (46)$$

Якщо крива однорідна, то її маса чисельно дорівнює довжині відповідної дуги.

Відзначимо, що центр ваги маси, розподіленої вздовж спрямлюваної кривої зі сталою лінійною густиною, за визначенням, береться за центр ваги самої спрямлюваної кривої.

Відзначимо також, що центр ваги однорідної матеріальної лінії або фігури, яка має вісь симетрії, лежить на цій осі.

Приклади

Приклад 157 Обчислити координати центра ваги півкола $y=\sqrt{R^2-x^2}$.

Розв'язання. Побудуємо півколо (рис.33). Оскільки *Oy* – вісь симетрії даної лінії, то її центр ваги лежить на осі *Oy* і тому $x_c=0$. Ординату центра ваги кривої обчислимо за формулою (50б):

$$y_c=\frac{M_x}{m}.$$

Попередньо обчислимо значення виразу $1+\left(y'(x)\right)^2$:

$$1+\left(y'(x)\right)^2=1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2=1+\frac{x^2}{R^2-x^2}=\frac{R^2}{R^2-x^2}.$$

Тоді з урахуванням симетрії лінії відносно осі *Oy*

$$M_x=2\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=2R\int_0^R dx=2R^2.$$

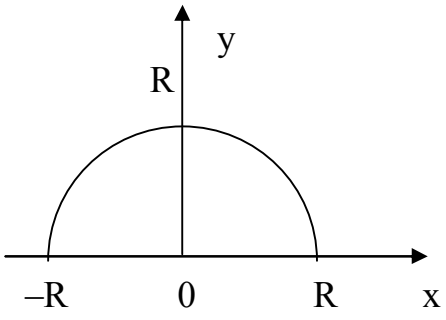


Рис. 33

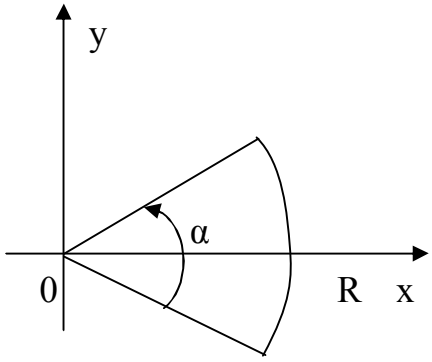


Рис. 34

Маса півкола чисельно дорівнює його довжині πR, бо за умовою задачі густину слід вважати рівною одиниці.

Таким чином, координати центра ваги півкола $y=\sqrt{R^2-x^2}$ будуть такі:

$$x_c=0,\qquad y_c=\frac{2R^2}{\pi R}=\frac{2R}{\pi}.$$

Приклад 158 Обчислити центр ваги дуги кола радіуса *R*, яка стягує центральний кут α.

Розв'язання. Розташуємо дугу кола, яка стягує центральний кут α, симетрично відносно осі *Ox* (рис.34). Тоді очевидно, що її центр ваги лежатиме на осі *Ox*. Тому $y_c=0$. Абсцису центра ваги обчислимо за формулою (50а):

$$x_c = \frac{M_y}{m}.$$

Маса дуги чисельно дорівнює її довжині, тобто $m = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R\alpha.$

Статичний момент обчислюємо за формулою (47б):

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}\, dx\,.$$

Насамперед зауважимо, що обчислення доцільно виконати в полярних координатах. У цьому випадку формула (47б) набуде вигляду

$$M_y = \int_\alpha^\beta r(\varphi)\cos\varphi \sqrt{r^2 + \left(r'_\varphi\right)^2}\, d\varphi.$$

Враховуючи, що $r=R$, $r'_\varphi = 0$ і $-\frac{\alpha}{2} \le \varphi \le \frac{\alpha}{2}$, будемо мати

$$M_y = \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} R\cos\varphi \sqrt{R^2 + 0}\, d\varphi = R^2 \int_{-\frac{\alpha}{2}}^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi\, d\varphi,$$

а з урахуванням симетрії дуги відносно осі Ox

$$M_y = 2R^2 \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \cos\varphi\, d\varphi = 2R^2 \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\alpha}{2}} = 2R^2 \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Таким чином,

$$x_c = \frac{2R^2 \sin\frac{\alpha}{2}}{R\alpha} = \frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}, \qquad y_c=0.$$

Приклад 159 Обчислити координати центра ваги першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Розв'язання. Перша арка циклоїди має вісь симетрії $x = \pi a$ (див. рис.35).

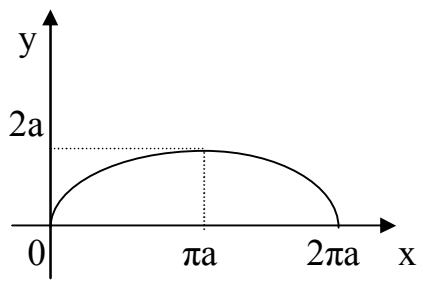


Рис. 35

Тому абсциса центра ваги $x_c = \pi a$. Ординату центра ваги обчислимо за формулою:

$$y_c = \frac{M_x}{m}.$$

Попередньо виконаємо всі перетворення, які пов'язані з обчисленням статичного моменту дуги і її маси:

$$x_t' = a(1-\cos t), \qquad y_t' = a\sin t,$$

$$\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 = a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t = a^2\left(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t\right) =$$

$$= a^2(2-2\cos t) = 2a^2(1-\cos t) = 4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

$$y = a(1-\cos t) = 2a\sin^2\frac{t}{2}.$$

Згідно з формулою (47а)

$$M_x = \int_a^b \gamma(x)y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$

а оскільки крива задана параметричними рівняннями, то

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt.$$

Враховуючи попередні перетворення, будемо мати

$$M_x = \int_0^{2\pi} 2a\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= 4a^2\left(\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt - \int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt\right) =$$

$$= 4a^2\left(-2\cos\frac{t}{2} + 2\cdot\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4a^2\left(2-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}a^2.$$

Тут враховано, що $\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}} = \sin\frac{t}{2}$, бо $\sin\frac{t}{2} \ge 0$ для $0 \le t \le 2\pi$.

Маса дуги кривої чисельно дорівнює її довжині, тобто

$$m = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt.$$

Виконуючи обчислення, одержимо

$$m = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}\,dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = -4a(-1-1) = 8a.$$

Таким чином, $x_c = \pi a, \qquad y_c = \frac{4}{3}a.$

Завдання для самостійної роботи

1 Обчислити статичний момент відносно осі абсцис дуги еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, яка розташована в першому квадранті.

Відповідь: $\frac{b^2}{2} + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$.

2 Обчислити координати центра ваги дуги астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, розташованої в першому квадранті.

Вказівка. Центр ваги даної дуги лежить на бісектрисі першого координатного кута, тому $x_c = y_c$.

Відповідь: $\frac{2}{5}a$.

3 Обчислити статичний момент кола $r = 2a\sin\varphi$ відносно полярної осі.

Відповідь: $2\pi a^2$.

4 Обчислити координати центра ваги дуги ланцюгової лінії $y = ach\frac{x}{a}$ від $x = -a$ до $x = a$.

Відповідь: $x_c = 0$, $y_c = \frac{a}{4} \cdot \frac{2 + sh2}{sh1} = a \cdot \frac{e^4 + 4e^2 - 1}{4e\left(e^2 - 1\right)}$.

5 Обчислити координати центра ваги дуги кардіоїди $r = a(1 + \cos\varphi)$ від $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \pi$.

Відповідь: $x_c = \frac{4}{5}a, \quad y_c = \frac{4}{5}a.$

15.6 Центр ваги плоскої фігури

Координати центра ваги плоскої фігури обчислюються за формулами

$$x_c = \frac{M_y}{m}, \qquad y_c = \frac{M_x}{m},$$

де m – маса фігури, M_x і M_y – статичні моменти фігури відносно координатних осей, причому

$$m = \int_a^b \gamma(x)\left(y_в(x) - y_н(x)\right)dx, \tag{48}$$

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x)\left(y_в^{\,2}(x) - y_в^{\,2}(x)\right)dx\,, \qquad (49а)$$

$$M_y = \int_a^b \gamma(x)x\left(y_в(x) - y_н(x)\right)dx\,. \qquad (49б)$$

Якщо фігура однорідна, то $\gamma(x) = const$, яку прийнято вважати рівною одиниці. Очевидно, що в цьому випадку маса фігури чисельно дорівнює її площі.

Приклади

Приклад 160 Обчислити координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої осями координат і параболою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

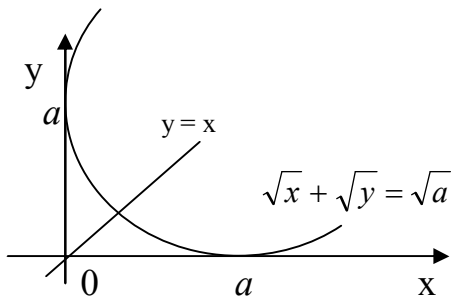


Рис. 36

Розв'язання. Фігура, яка обмежена осями координат і параболою $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, зображена на рис. 36. Оскільки точки *M(x;y)* і *N(y;x)* належать параболі, то вона симетрична відносно прямої *y=x,* отже, і фігура, обмежена цією параболою та осями координат, також симетрична відносно прямої *y=x.* Тому $x_c = y_c$.

Із рівняння параболи $y = \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2$. Згідно з формулою (48) маса фігури

$$m = \int_0^a \left(\sqrt{a} - \sqrt{x}\right)^2 dx = \int_0^a (a - 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x} + x)dx =$$

$$= \left(ax - 2\sqrt{a}\cdot\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{x^2}{2} \right)\Bigg|_0^a = a^2 - \frac{4}{3}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{6}a^2.$$

Далі обчислимо статичний момент фігури відносно осі *Oy*, бо у цьому випадку обчислення будуть простішими. За формулою (49б) маємо

$$M_y=\int_0^a x\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2dx=\int_0^a x\left(a-2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}+x\right)dx=\int_0^a\left(ax-2\sqrt{a}\cdot x^{\frac{3}{2}}+x^2\right)dx=$$

$$=\left(\frac{ax^2}{2}-\frac{4}{5}\sqrt{a}\cdot x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a=\frac{a^3}{2}-\frac{4}{5}a^3+\frac{a^3}{3}=\frac{a^3}{30}.$$

Тепер обчислюємо $x_c=\dfrac{M_y}{m}=\dfrac{a^3}{30}:\dfrac{a^2}{6}=\dfrac{a}{5}.$

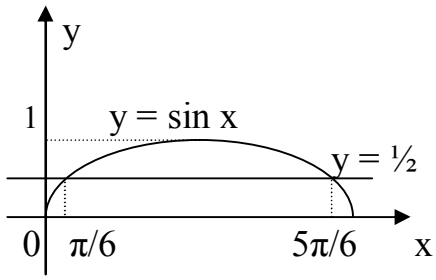


Рис. 37

Таким чином, координати центра ваги фігури, обмеженої осями координат і параболою $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, будуть $x_c=y_c=\dfrac{a}{5}.$

Приклад 161 Обчислити статичний момент однорідної фігури, обмеженої лініями *y=sinx* і $y=\dfrac{1}{2}$ (одного сегмента), відносно осі абсцис (рис.37).

Розв'язання. Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} y=\sin x, \\ y=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$ обчислюємо координати точок перетину цих ліній. Для одного сегмента синусоїди абсциси точок перетину будуть: $x_1=\dfrac{\pi}{6},\quad x_2=\dfrac{5\pi}{6}.$

Статичний момент фігури обчислимо за формулою (49а), враховуючи, що $\gamma(x)=1$:

$$M_x=\frac{1}{2}\int_a^b\gamma(x)\left(y_в{}^2(x)-y_в{}^2(x)\right)dx.$$

Оскільки $y_в=sinx,\quad y_н=\dfrac{1}{2},\ a=\dfrac{\pi}{6},\quad b=\dfrac{5\pi}{6},$ остаточно будемо мати

$$M_x=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\sin^2 x-\frac{1}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{4}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}=\frac{1}{8}\left(\frac{5\pi}{6}-\sin\frac{5\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{4\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Приклад 162 Обчислити координати центра ваги фігури, обмеженої дугою еліпса *x=acost*, *y=bsint*, розташованої в першій чверті, і осями координат.

Розв'язання. У першій чверті при зростанні x від *0* до a величина t спадає від $\frac{\pi}{2}$ до *0,* тому

$$M_y=\int_0^a xydx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}a\cos t\cdot b\sin t(-a\sin t)dt=a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos tdt=a^2b\cdot\frac{\sin^3 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{a^2b}{3}.$$

Площа еліпса $S=\pi ab$. Отже, $x_c=\frac{M_y}{m}=\frac{4M_y}{S}=\frac{4a^2b}{3\pi ab}=\frac{4a}{3\pi}$.

Аналогічно обчислимо

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^a y^2dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}b^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t)dt=\frac{ab^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)\sin tdt=$$

$$=\frac{ab^2}{2}\left(-\cos t+\frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{ab^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{ab^2}{3}.$$

$$y_c=\frac{M_x}{m}=\frac{4M_x}{S}=\frac{4ab^2}{3\pi ab}=\frac{4b}{3\pi}.$$

Таким чином, $x_c=\frac{4a}{3\pi}$, $y_c=\frac{4b}{3\pi}$.

Завдання для самостійної роботи

1 Обчислити статичний момент однорідної фігури, обмеженої лініями $y=\dfrac{2}{1+x^2}$ і $y=x^2$, відносно осі абсцис.

Відповідь: $\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{5}$.

2 Обчислити координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2$ і $y=0$.

Відповідь: $x_c=1$, $y_c=\dfrac{2}{5}$.

3 Обчислити координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої лініями $x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}$, $y=0$ і $y=\sin x$.

Відповідь: $x_c=1$, $y_c=\dfrac{\pi}{8}$.

4 Обчислити координати центра ваги однорідного параболічного сегмента, обмеженого лініями $y=4-x^2$ і $y=0$.

Відповідь: $x_c=0$, $y_c=\dfrac{8}{5}$.

5 Обчислити координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Вказівка. Фігура симетрична відносно прямої $x=\pi a$.

Відповідь: $x_c=\pi a$, $y_c=\dfrac{5}{6}a$.

6 Обчислити координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої параболами $y^2=20x$ і $x^2=20y$.

Відповідь: $x_c=y_c=9$.

7 Обчислити статичний момент однорідного трикутника з основою a і висотою h відносно його основи.

Відповідь: $M_a=\dfrac{1}{6}ah^2$.

8 Обчислити координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої осями координат і дугою астроїди $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$, розташованої в першому квадранті.

Відповідь: $x_c=y_c=\dfrac{256a}{315\pi}$.

9 Обчислити декартові координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої кардіоїдою $r=a(1+\cos\varphi)$.

Вказівка.

$$x_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \cos\varphi d\varphi}{\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi}; \qquad y_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{\int_{\alpha}^{\beta} r^3 \sin\varphi d\varphi}{\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi}.$$

Відповідь: $x_c = \frac{5}{6}a$, $y_c=0$.

10 Обчислити декартові координати центра ваги однорідної фігури, обмеженої правою петлею лемніскати Бернуллі $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

Відповідь: $x_c = \frac{\sqrt{2}}{8}\pi a$, $y_c=0$.

Визначений інтеграл широко використовується при обчисленнях різних фізичних величин. Для обчислення деякої величини u за допомогою визначеного інтеграла необхідно керуватися однією з поданих схем.

Схема I.

1 Розбиваємо величину u на велике число n малих елементів Δu_i :

$$u = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i .$$

2 Обчислимо наближене значення кожного елемента Δu_i у вигляді добутку:

$$\Delta u_i \approx f(x_i)\Delta x .$$

3 Зображаємо наближене значення u інтегральною сумою:

$$u \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i ,$$

де x – один із параметрів величини u , який за умовою задачі змінюється на відомому відрізку $a \le x \le b$;

$f(x)$ –задана або визначена з умови задачі функція від x;

$a=x_0, x_1, x_2,\ldots, x_n =b$ –точки відрізка $[a;b]$, які при розбитті u на n елементів розбивають цей відрізок на n рівних частин $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Якщо з умови задачі випливає, що похибка цієї наближеної рівності наближається до нуля при $n \to \infty$, то шукана величина u буде чисельно дорівнювати визначеному інтегралу:

$$u = \int_a^b f(x)dx.$$

Зауваження. При обчисленні наближеного значення малого елемента Δu_i використовуються різні припущення. Наприклад, тут припустимо малі криволінійні відрізки замінювати стяжними їх хордами; змінну силу (або швидкість) на малих ділянках шляху тут можна замінювати сталою силою (або швидкістю), припускаючи, що вона незмінно зберігає на всій малій ділянці шляху ту величину і той напрямок, який вона мала в початковій або кінцевій точці цієї малої ділянки; змінну температуру тіла, яке безперервно нагрівається або охолоджується за малий проміжок часу тут можна вважати сталою, припускаючи, що за цей час вона незмінно зберігає те значення, яке мала на початку або в кінці цього проміжку.

Схема II.

1 Нехай величина u одержує приріст $\Delta u \approx f(x)\Delta x$, який відповідає зміні x на малу величину Δx; $f(x)$ розглядається як задана або визначена із умови задачі функція від x, де x змінюється на відомому з умови задачі відрізку $a \le x \le b$.

2 Замінюючи приріст Δu диференціалом du (головна частина приросту Δu) і Δx диференціалом dx ($\Delta x = dx$), одержимо:

$$du=f(x)dx.$$

3 Інтегруючи цю рівність у межах від $x=a$ до $x=b$, одержимо:

$$u = \int_a^b f(x)dx.$$

Зауваження. Тут також використовуються різні припущення, які взагалі зводяться до того, що при зміні аргументу x на малу величину dx зміна функції u(x) вважається пропорціональною dx. Необхідно також переконатися, що при $dx \to 0$ нескінченно малі Δu і du будуть еквівалентні.

Зауваження. Більш зручною для практичного застосування є схема II.

15.7 Обчислення шляху, пройденого тілом

Відомо, що шлях, пройдений тілом при рівномірному русі за час t, обчислюється за формулою $S=\upsilon t$, де швидкість υ – стала величина. При нерівномірному русі швидкість υ – величина змінна, залежна від часу t, тобто $\upsilon=\upsilon(t)$. Шлях, пройдений тілом при нерівномірному русі за час $t_2 - t_1$, обчислюється за формулою (51):

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt.$$

Приклади

Приклад 163 Швидкість руху тіла задана рівнянням $\upsilon = \left(12t - 3t^2\right)$ *м/с*. Обчислити шлях, пройдений тілом від початку руху до його зупинки.

Розв'язання. Швидкість тіла дорівнює нулю в моменти початку його руху і зупинки. В початковий момент приймають час рівним нулю. Знайдемо момент зупинки тіла, для цього прирівняємо швидкість до нуля і розв'яжемо рівняння відносно t:

$$12t - 3t^2 = 0, \quad t(4 - t) = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = 4.$$

Отже, через *4с* тіло зупиниться. Таким чином, шуканий шлях

$$S = \int_0^4 \left(12t - 3t^2\right)dt = \left(6t^2 - t^3\right)\Big|_0^4 = 32 м.$$

Приклад 164 Два тіла почали рухатися одночасно з однієї точки в одному напрямі по прямій. Одне тіло рухалося із швидкістю $\upsilon = (6t^2 + 2t)$ *м/с*, друге – з швидкістю $\upsilon = (4t + 5)$ *м/с*. На якій відстані вони будуть одне від одного через *5с*?

Розв'язання. За формулою (51) обчислимо шлях, пройдений першим і другим тілом:

$$S_1 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)dt = \left(2t^3 + t^2\right)\Big|_0^5 = 275 м,$$

$$S_2 = \int_0^5 (4t + 5)dt = \left(2t^2 + 5t\right)\Big|_0^5 = 75 м.$$

Отже, через *5с* два тіла будуть одне від одного на відстані

$$S = S_1 - S_2 = 275 - 75 = 200 м.$$

Приклад 165 Два тіла рухаються по прямій із однієї і тієї ж точки. Перше тіло рухається із швидкістю $\upsilon = (3t^2 - 6t)$ *м/с*, друге – з швидкістю $\upsilon = (10t + 20)$ *м/с*. В який момент часу і на якій відстані від початкової точки відбудеться їх зустріч?

Розв'язання. За умовою задачі дано, що тіла почали рухатися з однієї і тієї ж точки, тому їх шляхи до зустрічі будуть однакові. Складаємо рівняння шляху кожного з тіл за формулою (51):

$$S_1 = \int (3t^2 - 6t)dt = t^3 - 3t_2 + C_1,$$

$$S_2 = \int (10t + 20)dt = 5t^2 + 20t + C_2.$$

Оскільки в початковий момент часу $t = 0$ і $S = 0$, то $C_1 = 0$ і $C_2 = 0$. Зустріч цих тіл відбудеться тоді, коли $S_1 = S_2$, тобто коли $t^3 - 3t^2 = 5t^2 + 20t$ або $t^3 - 8t^2 - 20t = 0$. Розв'язавши це рівняння, обчислимо: $t_1 = 0$, $t_2 = -2$, $t_3 = 10$.

Отже, зустріч цих тіл відбудеться через 10*с* після початку руху на відстані $S_1 = S_2 = 10^3 - 3 * 10^2 = 700 м$ від початкової точки.

Приклад 166 Тіло кинули з поверхні Землі вертикально вгору з швидкістю $\upsilon=(39,2-9,8t)$ *м/с*. Обчислити найбільшу висоту підняття тіла.

Розв'язання. Тіло досягає найбільшої висоти підняття в момент часу t, коли $\upsilon=0$, тобто коли $39,2-9,8t=0$, звідки $t=4c$. За формулою (51) обчислюємо:

$$S=\int_0^4(39,2-9,8t)dt=\left(39,2t-4,9t^2\right)\Big|_0^4=78,4м.$$

15.8 Обчислення роботи сили

Відомо, що коли на тіло діє стала сила F і воно переміщується в напрямку цієї сили, то робота A сили F на відрізку шляху l буде:

$$A=Fl,$$

де F виражається в ньютонах (*Н*), l – у метрах (*м*), A – у джоулях (*Дж*).

Якщо сила F –змінна величина, яка залежить від x, то робота A сили F обчислюється за формулою (52):

$$A=\int_a^b F(x)dx.$$

15.9 Обчислення роботи, здійснюваної при розтягу (стиску) пружини

Для розв'язання цієї задачі необхідно скористатись законом Гука, згідно з яким для пружини маємо: $F=kx$, тобто осад пружини прямо пропорціональний діючій на неї силі.

Якщо F виражається в ньютонах, x – у метрах, то $к$ (твердість або жорсткість пружини) виражається в *Н/м*.

Приклади

Приклад 167 Пружина розтягується на 2*см* під дією сили в 60*Н*. Яку роботу вона виконує, розтягуючи її на 0,12*м*?

Розв'язання. При $F=60Н$ $x=2см=0,02м$. За формулою $F=kx$ обчислимо *к*: 60=*к**0,02, звідки $k=\frac{60}{0,02}=3000$ *Н/м,* тоді $F(x)=3000x$. Шукану роботу обчислюємо за формулою (52), беручи межі інтегрування від 0 до 0,12:

$$A=\int_0^{0,12}3000xdx=1500x^2\Big|_0^{0,12}=1500\cdot 0,0144=21,6\,(Дж).$$

Приклад 168 Для стиску пружини на 0,04*м* витрачається робота в 20*Дж*. Яку роботу необхідно виконати, щоб стиснути пружину на 0,1*м*?

Розв'язання За довжиною стиску пружини на 0,04*м* і здійснюваній при цьому роботі в 20 Дж за формулою (52) обчислимо *к*:

$$20 = \int_0^{0,04} kxdx; \qquad 20 = k \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,04};$$

20=0,0008к, звідки $k = \dfrac{20}{0,0008} = 25000\,(Н/м)$.

Тепер за цією ж формулою (52) обчислюємо *А*:

$$A = \int_0^{0,1} 25000xdx = 25000 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,1} = 25000 \cdot \frac{0,01}{2} = 125\,(Дж).$$

Приклад 169 Для розтягу пружини на 0,04*м* необхідно виконати роботу в 20 *Дж*. На яку довжину можна розтягнути пружину, виконуючи роботу в 80 *Дж*?

Розв'язання. За довжиною стиску пружини на 0,04*м* і здійснюваній при цьому роботі в 20 *Дж* за формулою (52) обчислимо *к*:

$$20 = \int_0^{0,04} kxdx; \qquad 20 = k \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{0,04}; \qquad 20=0,0008k,$$

звідки $k = \dfrac{20}{0,0008} = 25000\,(Н/м)$.

Тепер за цією ж формулою (52) обчислюємо x_1:

$A = \int_0^{x_1} kxdx$, де x_1 – довжина, на яку розтягнута пружина при здійснюваній роботі в 80 *Дж*:

$$80 = \int_0^{x_1} 25000xdx; \qquad 80 = 25000 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{x_1};$$

$80=12500\,x_1^2$, звідки $x_1^2 = \dfrac{80}{12500} = \dfrac{16}{2500}$; $x_1 = \dfrac{4}{50}\,0,08\,(м)$.

15.10 Обчислення роботи, що здійснюється при стиску (розширенні) повітря або газу

Приклади

Приклад 170 У циліндрі міститься атмосферне повітря, об'єм якого $V_1=0,4\ м^3$. Циліндр перебуває в середовищі меншої густини, тому повітря, яке заповнює циліндр, розширюючись, виштовхує поршень. Обчислити роботу, що здійснюється повітрям при розширенні його до об'єму $V_2=0,8\ м^3$ (температура повітря підтримується сталою).

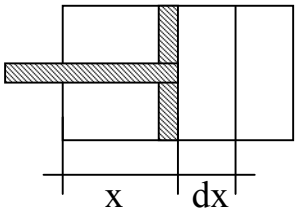


Рис. 38.

Розв'язання. Об'єм газу в закритій посудині та здійснюваний ним тиск P при сталій температурі пов'язані законом Бойля – Маріотта:

$$PV=C\ (C=const).$$

Сила тиску на поршень при його виштовхуванні буде змінюватися. Нехай шлях руху поршня дорівнює x (рис.38). Будемо вважати, що при зміні x на малу величину dx випробовуваний поршнем тиск залишається незмінним, при цьому об'єм V зміниться на величину ΔV. Робота ΔA сили тиску на відрізку dx буде наближено дорівнювати:

$$\Delta A \approx PSdx,$$

де S – площа основи поршня. Оскільки $P=\frac{C}{V}$ і $Sdx=\Delta V$, то $\Delta A \approx \frac{C}{V}\cdot\Delta V = C\cdot\frac{\Delta V}{V}$.

Замінюючи прирости ΔV і ΔA диференціалами dV і dA (тобто беручи головні частини приростів), одержимо:

$$dA = C\cdot\frac{dV}{V}.$$

Після інтегрування одержаної рівності маємо:

$$A=\int_{V_1}^{V_2} C\cdot\frac{dV}{V} = C\cdot\ln|V|\Big|_{V_1}^{V_2} = C(\ln V_2 - \ln V_1) = C\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Для обчислення C скористаємось формулою $PV=C$. Вважаючи, що в початковий момент об'єм повітря $V_1=0,4\ м^3$ і його тиск $P=101325\ Н/м^2$ нормальний, обчислимо:

$$C=101325*0,4=40530.$$

Таким чином, робота A, що здійснюється повітрям при розширенні його до об'єму V_2, буде:

$$A = 40530\ln\frac{0,8}{0,4} = 40530\ln 2 \approx 40530\cdot 0,6931 \approx 28091,3\ (Дж).$$

Приклад 171 Циліндр висотою $H=1,5м$ і радіусом $R=0,4\ м,$ наповнений газом під атмосферним тиском (10330 кг/м^2), закритий поршнем. Обчислити роботу, яку необхідно витратити на ізотермічний стиск газу при переміщенні поршня на відстань $h=1,2м$ усередину циліндра.

Розв'язання. При ізотермічній зміні стану газу, коли його температура залишається незмінною, залежність між об'ємом V і тиском P газу виражається

формулою $PV=C=const$. Тому, якщо поршень розміщений так, як показано на рис.38, то тиск газу на одиницю площі поршня

$$p(x)=\frac{C}{V}=\frac{C}{S(H-x)},$$

а тиск на всю площу S поршня буде

$$P(x)=Sp(x)=\frac{C}{H-x}.$$

Вважаючи, що робота, затрачена при русі поршня на x *м*, є деяка функція $A(x)$, і, припускаючи, що при подальшому русі поршня на малу відстань dx, випробовуваний ним тиск $P(x)$ залишається незмінним, обчислимо наближену величину приросту (диференціал) функції $A(x)$:

$$\Delta A\approx P(x)dx=\frac{C}{H-x}dx=dA.$$

Усю шукану роботу обчислюємо за формулою (52):

$$A=\int_0^h\frac{C}{H-x}dx=-C\ln|H-x|\Big|_0^h=C\ln\frac{H}{H-h}.$$

При $H=1{,}5$*м*, $R=0{,}4$*м*, $h=1{,}2$*м*, $P_0=10330$ кг/м^2 обчислимо $V_0=\pi R^2H=0{,}24\pi\,м^3$, $C=P_0V_0=2479{,}2\pi$.

Отже, $A\approx 12533{,}3$ кГм $\approx 122951{,}7$ *Дж*.

15.11 Обчислення роботи,здійснюваної при піднятті вантажу

Відомо, що робота, здійснювана при піднятті вантажу на деяку висоту, дорівнює добутку сили ваги, вираженої в ньютонах (Н), на висоту підйому, вираженому в метрах (м). Робота вимірюється в джоулях (Дж).

Приклади

Приклад 172 Обчислити роботу, яку необхідно витратити, щоб викачати воду з конічної посудини, зверненої вершиною вниз, якщо радіус її основи $R=1$*м* і висота $H=2$*м*.

Розв'язання. На глибині x виділимо горизонтальний шар висотою dx (рис.39). Робота A, що витрачена на підняття шару води вагою P, залежить від висоти його підйому x. Зміна глибини x на малу величину dx викличе зміну об'єму V на величину

$$\Delta V\approx\pi r^2dx$$

(елементарний шар приймаємо за циліндр, ураховуючи мализну dx, r – радіус шару). Виразимо r через змінну x і сталі R і H. З подібності трикутників AOC і AOB маємо: $\frac{r}{R}=\frac{H-x}{H}$, звідки $r=\frac{R}{H}(H=x)=R-\frac{R}{H}x.$

Тоді

$$\Delta V \approx \pi\left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 dx.$$

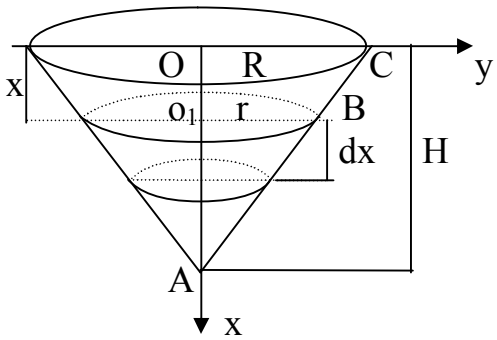


Рис. 39

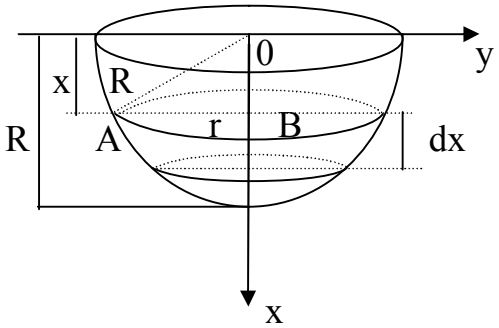


Рис. 40

Вага шару води ΔP в об'ємі ΔV (густина води *1000* кг/м^3) буде:

$$\Delta P \approx 9807\pi\left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 dx.$$

При зміні P на величину ΔP здійснювана робота A змінюється на величину

$$dA = 9807\pi\left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 xdx.$$

Інтегруючи одержану рівність у межах від 0 до *H,* одержимо:

$$A = \int_0^H 9807\pi\left(R - \frac{R}{H}x\right)^2 xdx = 9807\pi R^2 \int_0^H \left(x - \frac{2x^2}{H} + \frac{x^3}{H^2}\right)dx =$$

$$= 9807\pi R^2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3H} + \frac{x^4}{4H^2}\right)\Bigg|_0^H = \frac{9807}{12}\pi R^2 H^2.$$

Підставляючи числові значення R і H, обчислюємо:

$$A = 9807\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{2^2}{12} = 3269\pi \quad (Дж).$$

Приклад 173 Котел, що має форму півкулі радіуса *R*, наповнений водою. Яку роботу треба здійснити, щоб викачати воду із цього котла?

Розв'язання. Нехай розглянутий шар dx знаходиться на глибині x (рис.40). Обчислимо радіус елементарного шару з ΔOAB : $r^2=R^2-x^2$. Прийнявши шар за циліндр радіуса *r*, одержимо елементарний об'єм:

$$dV = \pi r^2 dx = \pi\left(R^2 - x^2\right)dx.$$

Вага шару води dP і в об'ємі dV (густина води 1000кг/м^3) буде:

$$dP = 9807\pi\left(R^2 - x^2\right)dx.$$

Елементарна робота, здійснювана при підйомі шару води dV, буде:

$$dA = x \cdot dp = 9807\pi\left(R^2 - x^2\right)xdx.$$

Тоді

$$A=\int_0^R 9807\pi\left(R^2-x^2\right)xdx=9807\pi\left(\frac{R^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^R=$$

$$=9807\pi\left(\frac{R^4}{2}-\frac{R^4}{4}\right)\approx 2452\pi R^4 \text{ (Дж)}.$$

Приклад 174 Котел має форму параболоїда обертання (рис. 41). Радіус його основи *R=3м*, глибина *H=5м*. Котел наповнено рідиною, питома вага якої *0,8* г/см^3. Обчислити роботу, яку необхідно витратити, щоб викачати рідину з котла.

Розв'язання. Розділимо параболоїд на шари площинами, паралельними до поверхні рідини. Нехай товщина шару на глибині $H-x$ дорівнює dx. Тоді, приймаючи наближено шар за циліндр, одержимо його об'єм $dV=\pi y^2dx$. Значення y обчислимо з умови, що в площині перерізу xOy AOB є парабола, рівняння якої $x=ay^2$. Оскільки точка $B(H;R)$ належить параболі, то її координати повинні задовольняти рівнянню параболи. Тому $H=aR^2$, звідки $a=\frac{H}{R^2}$, отже, $x=\frac{H}{R^2}y^2$. Таким чином, $y^2=\frac{R^2}{H}x$, а $dV=\pi\cdot\frac{R^2}{H}\cdot xdx$. Тоді вага шару рідини $\gamma dV=\gamma\pi\frac{R^2}{H}xdx$. Для того, щоб викачати рідину з глибини x, потрібно витратити елементарну роботу $dA=\pi\gamma\frac{R^2}{H}x(H-x)dx$.

Враховуючи, що $0\le x\le H$, одержимо

$$A=\int_0^H \pi\gamma\frac{R^2}{H}x(H-x)dx=\pi\gamma\frac{R^2}{H}\int_0^H\left(Hx-x^2\right)dx=$$

$$=\pi\gamma\frac{R^2}{H}\left(\frac{Hx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^H=\pi\gamma\frac{R^2}{H}\left(\frac{H^3}{2}-\frac{H^3}{3}\right)=\frac{1}{6}\pi\gamma R^2H^2.$$

$$dA=\pi\gamma\frac{R^2}{H}x(H-x)dx.$$

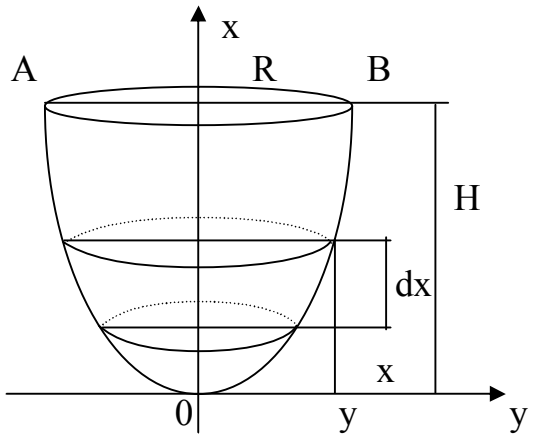


Рис. 41

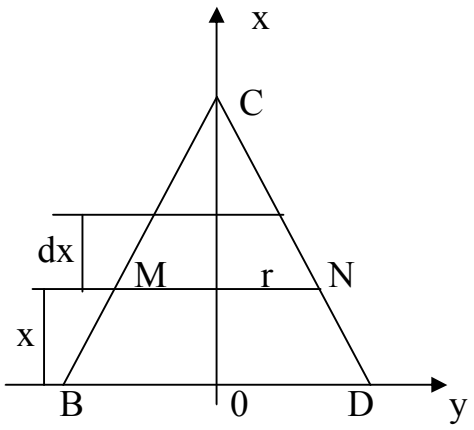


Рис. 42

Підставляючи значення R і H, виражені в метрах, і $\gamma = 800$ кг/м^3, обчислюємо шукану роботу

$$A = \frac{1}{6}\pi \cdot 3^2 \cdot 800 \cdot 5^2 = 30000\pi \text{ (кГм)} \approx 30000 \cdot 9{,}81\pi = 294300\pi \text{ (Дж)}.$$

Приклад 175 Яку роботу необхідно витратити, щоб насипати купу піску в формі конуса з радіусом $R=2м$ і висотою $H=4м$, якщо питома вага піску $\gamma = 2 \cdot 10^4$ $Н/м^3$?

Розв'язання. Розділимо конус на елементарні шари площинами, паралельними поверхні землі. Нехай товщина шару на відстані x від землі дорівнює dx (рис.42). Тоді, приймаючи елементарний шар за циліндр, одержимо його об'єм $dV = \pi r^2 dx$. Із подібності трикутників BCD і MCN маємо: $\frac{r}{R} = \frac{H-x}{H}$, звідки $r = \frac{R}{H}(H-x)$. Отже, вага елементарного шару піску $\Delta P = \gamma dV = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2}(H-x)^2 dx$. Щоб насипати елементарний шар, потрібно витратити елементарну роботу

$$dA = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2} x(H-x)^2 dx.$$

Враховуючи, що $0 \le x \le H$, одержимо

$$A = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2}\int_0^H x(H-x)^2 dx = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2}\int_0^H \left(H^2 x - 2Hx^2 + x^3\right)dx =$$

$$= \pi\gamma \frac{R^2}{H^2}\left(H^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2H \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^H = \pi\gamma \frac{R^2}{H^2}\left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4}\right) = \frac{\pi\gamma}{12}R^2H^2.$$

При $R=2м$, $H=4м$, $\gamma = 2 \cdot 10^4$ $Н/м^3$

$$A = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 10^4}{12} \cdot 4 \cdot 16 = \frac{32\pi}{3} \cdot 10^4 \text{ (Дж)}.$$

При розв'язанні прикладів 176 –177 будемо використовувати закон Архімеда, який твердить, що підіймальна (підйомна) сила, яка діє на занурене в рідину тверде тіло, дорівнює вазі витісненої ним рідини.

Приклад 176 Канат підйомного крану прикріплений до центру верхньої основи круглого циліндра. Циліндр висить на канаті й занурений у воду настільки, що його верхня основа знаходиться на поверхні води. Площа основи циліндра дорівнює *2м*^{2}, висота *–6м,* а його питома вага –3. Яку роботу витратить підйомний кран на витягання циліндра з води?

Розв'язання. При підніманні циліндра сила *P,* здійснююча роботу, буде змінюватися залежно від висоти *x* надводної частини циліндра $P(x)=P_ц - P_в$, де $P_ц$ – вага циліндра, $P_в$ – вага води, витіснена підводною частиною циліндра, чисельно дорівнює об'єму циліндра висотою $h=H-x$:

$$P_в = \pi R^2 (H - x) = S_{ос.} \cdot (H - x) = 2 \cdot (6 - x).$$

Очевидно, що і робота, що здійснюється силою *P(x)*, буде деякою функцією *A(x)* (рис.43). Припускаючи, що при підніманні циліндра ще на малу висоту *dx* сила *P(x)* залишається незмінною, обчислимоо наближену величину приросту роботи:

$$dA = P(x)dx = (P_ц - P_в)dx = [2Hy - 2(6 - x)]dx = (36 - 12 + 2x)dx = (24 + 2x)dx.$$

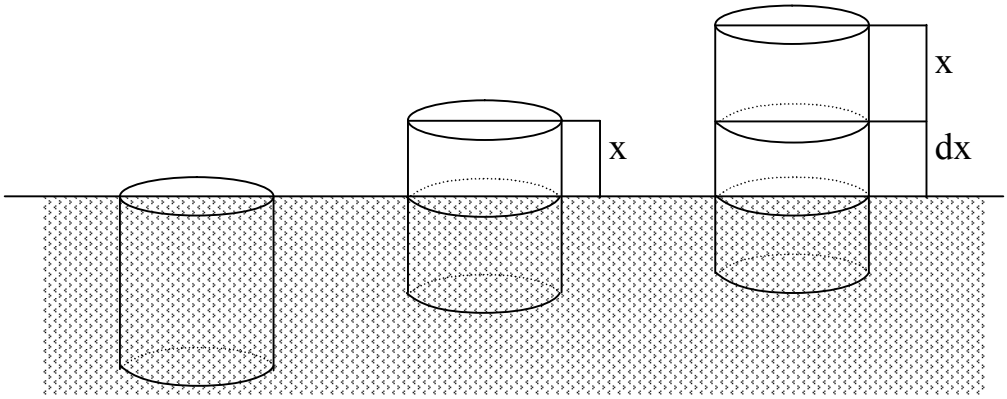


Рис.43

Враховуючи, що $0 \le x \le 6$, одержимо

$$A = \int_0^6 (24 + 2x)dx = \left(24x + x^2\right)\Big|_0^6 180 \text{ (Дж)}$$

Приклад 177 Куля лежить на дні басейну глибиною *14 дм*. Обчислити роботу, необхідну для витягання кулі із води, якщо її радіус *R=3дм*, а питома вага $\gamma = 2$.

Розв'язання. При підніманні кулі до поверхні води сила P_1, що здійснює роботу, стала й дорівнює різниці між вагою кулі й вагою витісненої нею води (рис.44):

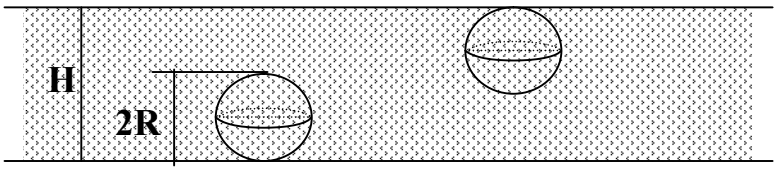


Рис. 44

$$P_1 = \frac{4}{3}\pi R^3\gamma - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3(\gamma - 1).$$

Тому робота A_1, необхідна для підняття кулі до поверхні води, визначається елементарно як добуток сили P_1 на висоту підйому $H - 2R$, тобто

$$A_1 = P_1(H - 2R) = \frac{4}{3}\pi R^3(\gamma - 1)(H - 2R).$$

При подальшому підніманні кулі сила P, що здійснює роботу, буде змінюватися залежно від висоти x надводної частини кулі (рис.45):

$$P(x) = P_к - P_в,$$

де $P_к$ – вага кулі, $P_в$ – вага води, витісненої підводною частиною кулі, чисельно дорівнює об'єму кульового сегмента з висотою $h = 2R - x$:

$$P_b = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right) = \frac{\pi}{3}(2R - x)^2(R + x) = \frac{\pi}{3}\left(x^3 - 3Rx^2 + 4R^3\right).$$

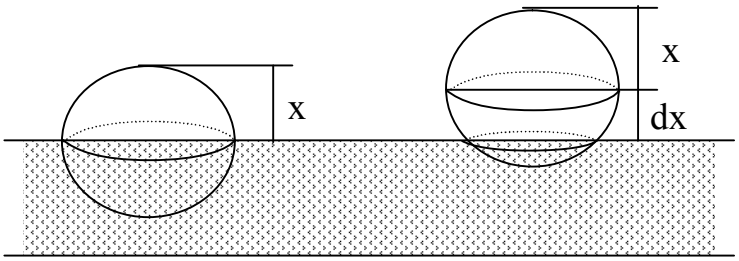


Рис. 45

Очевидно, і робота, що здійснює сила $P(x)$, буде деякою функцією $A(x)$. Припускаючи, що при підніманні кулі ще на малу висоту dx сила $P(x)$ залишається незмінною, обчислимо наближену величину приросту роботи:

$$dA = P(x)dx = (P_к - P_в)\,dx = \frac{\pi}{3}\left[4R^3(\gamma - 1) - x^3 + 3Rx^2\right]dx.$$

Інтегруючи одержану рівність у границях від $x=0$ до $x=2R$, обчислимо роботу A_2, яку треба здійснити, щоб кулю, підняту з дна басейну до поверхні води, повністю витягти з води:

$$A_2 = \frac{\pi}{3}\int_0^{2R}\left[4R^3(\gamma-1)-x^3+3Rx^2\right]dx = \frac{\pi}{3}\left[4R^3(\gamma-1)x-\frac{x^4}{4}+Rx^3\right]\Bigg|_0^{2R} =$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^4(2\gamma-1).$$

Уся шукана робота

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3}\pi R^3\left[R+(\gamma-1)H\right] \approx 61{,}2\pi \text{ (кГм)} \approx 600{,}4\pi \text{ (Дж)}.$$

Приклад 178 Обчислити роботу, необхідну для запуска ракети вагою $P=1{,}5$т із поверхні Землі на висоту $H=2000$км.

Розв'язання. Сила F притягання тіла Землею або вага тіла залежить від його відстані x до центра Землі:

$$F(x) = \frac{k}{x^2},$$

де $к$ – стала.

Якщо P є вага тіла, коли воно знаходиться на поверхні Землі, тобто на відстані земного радіуса R від центра Землі, то $P = \frac{k}{R^2}$, звідки $k=PR^2$ і сила F, яка переборюється двигуном підіймаючої ракети в момент, коли вона перебуває на відстані x від центра Землі, є відомою функцією від x:

$$F(x) = \frac{P\cdot R^2}{x^2}.$$

Вважаючи, що робота, що здійснюється двигуном ракети при підійманні її на висоту x, є деяка функція $A(x)$, і, допускаючи, що при подальшому підійманні ракети на малу висоту dx сила F залишається незмінною, обчислимо наближену величину приросту роботи:

$$dA = F(x)dx = \frac{P\cdot R^2}{x^2}dx.$$

При підійманні ракети з поверхні Землі на висоту H змінна x змінюється від R до R+H. Тому шукана робота

$$A = \int_R^{R+H} F(x)dx = \int_R^{R+H}\frac{P\cdot R^2}{x^2}dx = P\cdot R^2\int_R^{R+H}\frac{dx}{x^2} = P\cdot R^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_R^{R+H} = \frac{PRH}{R+H}.$$

При $P=1{,}5т$, $H=2000км$ і $R=6400км$ робота $A\approx 22422854340$ Дж.

Роботу, яку повинен здійснити двигун, щоб повністю звільнити ракету від земного тяжіння, можна визначити як границю роботи $A(H)$ при необмеженому зростанні H:

$$\lim_{H\to\infty} A(H) = \lim_{H\to\infty} \frac{PRH}{R+H} = \lim_{H\to\infty}\left(\frac{PR}{\frac{R}{H}+1}\right) = PR.$$

При заданих значеннях P і R ця робота становить ≈94176000000 *Дж*.

Приклад 179 Електричний заряд E, зосереджений на початку координат, відштовхує заряд e із точки *(a;0)* у точку *(b;0)*. Обчислити роботу A сили відштовхування F .

Розв'язання. Згідно з законом Кулона сила F, з якою електричний заряд e_1 відштовхує заряд e_2 (того ж знаку), що знаходиться від нього на відстані r, визначається формулою

$$F = k \cdot \frac{e_1 e_2}{r^2},$$

де $к$ –стала.

Скориставшись цією формулою для розв'язання нашої задачі, будемо мати:

$$F(x) = k \cdot \frac{eE}{x^2},$$

де F – сила відштовхування, e і E – величини зарядів, x – відстань між точковими зарядами (рис.46).

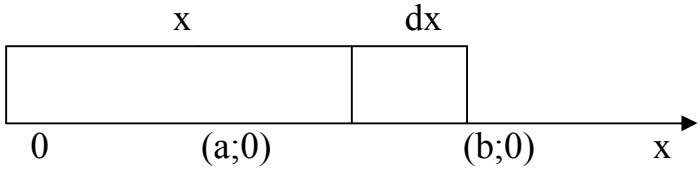


Рис. 46

Диференціал роботи сили на переміщенні dx дорівнює

$$dA = F(x)dx = k \cdot \frac{eE}{x^2}dx.$$

Інтегруючи одержану рівність у границях від $x=a$ до $x=b$, одержимо

$$A = eE\int_a^b \frac{dx}{x^2} = eE\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_a^b = eE\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

Приклад 180 Два електричних заряди $e_1=6{,}67*10^{-9}$ *Кл* і $e_2= 10*10^{-9}$ *Кл* знаходяться на відстані *10см* один від одного. Розділяючим їх середовищем є повітря. Спочатку обидва заряди закріплені нерухомо, потім заряд e_2 звільняється. Тоді під дією сили відштовхування заряд e_2 починає переміщатися, віддаляючись від заряду e_1. Яку роботу здійснює сила відштовхування, коли заряд а) віддалиться на відстань *30см*? б) віддалиться в нескінченність?

Розв'язання. За законом Кулона сила взаємодії зарядів

$$F(x)=\frac{e_1e_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon x^2}=\frac{e_1e_2}{1{,}11\cdot10^{-10}\cdot\varepsilon\cdot x^2},$$

де e_1 і e_2 – величини зарядів у кулонах;
x – відстань між зарядами в метрах;
ε_0 – діелектрична проникність вакууму ($\varepsilon_0=8{,}85*10^{-12}$ *ф/м);*
ε – діелектрична проникність середовища відносно вакууму (для повітря $\varepsilon=1$).

Використовуючи дані задачі, обчислюємо

$$F(x)=\frac{6{,}67\cdot10^{-9}\cdot10\cdot10^{-9}}{1{,}11\cdot10^{-2}\cdot1\cdot x^2}=\frac{6\cdot10^{-7}}{x^2}.$$

Тоді

а) $A=\int\limits_{0,1}^{0,3}\frac{6\cdot10^{-7}}{x^2}dx=6\cdot10^{-7}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{0,1}^{0,3}=6\cdot10^{-7}\left(10-\frac{10}{3}\right)=4\cdot10^{-6}$ *(Дж);*

б) $A=\int\limits_{0,1}^{\infty}\frac{6\cdot10^{-7}}{x^2}dx=6\cdot10^{-7}\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_{0,1}^{b}\frac{dx}{x^2}=6\cdot10^{-7}\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{0,1}^{b}=$

$=6\cdot10^{-7}\cdot\lim\limits_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+10\right)=6\cdot10^{-7}(0+10)=6\cdot10^{-6}$ *(Дж).*

15.12 Обчислення кількості тепла

Приклади

Приклад 181 Обчислити кількість тепла, яке виділяє змінний синусоїдний струм $I=I_0\sin\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)$ за період T у провіднику з опором R.

Розв'язання. Відомо, що для постійного струму кількість тепла за одиницю часу визначається за законом Джоуля-Ленца:

$$Q=0{,}24\,I^2R.$$

При змінному струмі диференціал кількості тепла $dQ=0{,}24\,I^2(t)R\,dt,$ а кількість тепла

$$Q=0{,}24R\int\limits_{t_1}^{t_2}I^2(t)dt.$$

У нашому випадку

$$Q=0{,}24RI_0{}^2\int\limits_0^T\sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t-\varphi\right)dt=0{,}12RI_0{}^2\int\limits_0^T\left[1-\cos\left(\frac{4\pi}{T}t-2\varphi\right)\right]dt=$$

$$=0{,}12RI_0{}^2\left[t-\frac{T}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi}{T}t-2\varphi\right)\right]\Bigg|_0^T=$$

$$= 0{,}12RI_0{}^2\left[T - \frac{T}{4\pi}\sin(4\pi - 2\varphi) + \frac{T}{4\pi}\sin(-2\varphi)\right] =$$

$$= 0{,}12RI_0{}^2\left(T + \frac{T}{4\pi}\sin 2\varphi - \frac{T}{4\pi}\sin 2\varphi\right) = 0{,}12RTI_0{}^2.$$

15.13 Обчислення сили тиску рідини на плоску пластинку

Величина сили P тиску рідини на горизонтальну площинку залежить від глибини занурення h цієї площинки, тобто від відстані площинки до поверхні рідини. Згідно з законом Паскаля, $P = \rho ghS = \gamma hS$,

де P – сила тиску на горизонтальну площинку, H;

ρ – густина рідини, кг/м^3;

g – прискорення сили ваги, *м/с*^{2};

$\gamma = \rho g$ – питома вага рідини;

h – глибина занурення площинки, *м*;

S – площа площинки, *м*^{2}.

Якщо площинка, яка випробує тиск рідини, не горизонтальна, то тиск на неї буде різним на різних глибинах, тому сила тиску на площинку буде функцією глибини її занурення $P(x)$.

Приклади

Приклад 182 Обчислити силу тиску рідини на вертикальну трикутну пластинку з основою a і висотою h, занурену в рідину так, що її вершина лежить на поверхні рідини.

Розв'язання. Систему координат виберемо так, як показано на рис.47. Розглянемо горизонтальну нескінченно малу смужку товщиною dx, що знаходиться на довільній глибині x від поверхні рідини. Приймаючи цю смужку за прямокутник, обчислимо її основу EF. Із подібності трикутників ABC і AEF одержимо $\frac{EF}{a} = \frac{x}{h}$, звідки $EF = \frac{ax}{h}$. Тоді площа елементарної смужки наближено дорівнює

$$dS = \frac{ax}{h}dx,$$

а сила тиску на цю площинку

$$dP = \rho gx \cdot \frac{ax}{h}dx = \rho g \cdot \frac{ax^2}{h}dx.$$

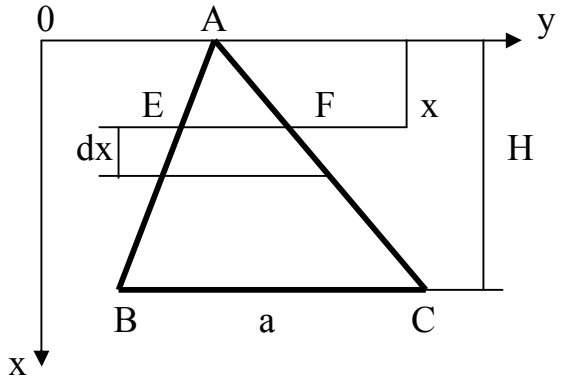


Рис. 47

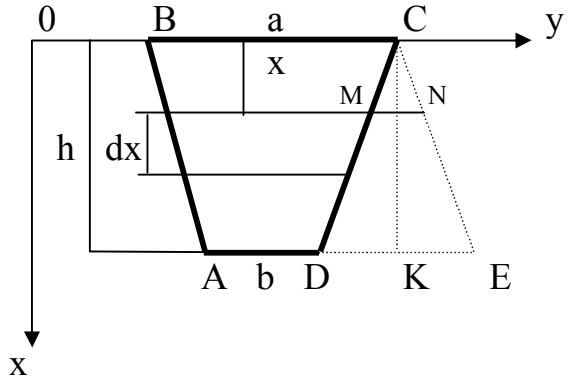


Рис. 48

Інтегруючи одержану рівність у межах від *0* до *h*, знайдемо силу тиску рідини на площинку *ABC*:

$$P=\int_0^h \rho g\cdot\frac{ax^2}{h}dx=\rho g\cdot\frac{a}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}\rho gah^2.$$

Приклад 183 Обчислити силу тиску води на вертикальну греблю, що має форму трапеції з основами *a* і *b* (*a*>*b*) і висотою *h*. Рівень води співпадає з більшою основою трапеції.

Розв'язання. Систему координат виберемо так, як показано на рис. 48. Припускаючи, що заштрихована смужка знаходиться на глибині *x* у горизонтальній площині і що вона є прямокутником із сторонами *y* і *dx*, обчислимо наближену величину тиску води на цю смужку:

$$dP=\rho gxydx.$$

Виразимо змінну *y* через змінну *x*. Для цього проведемо допоміжну пряму *CE* паралельно *AB*. Із подібності трикутників *DCE* і *MCN* маємо $\frac{a-y}{a-b}=\frac{x}{h}$, звідки $y=a-\frac{(a-b)x}{h}$.

Отже, $dP=\rho gx\left[a-\frac{(a-b)x}{h}\right]dx.$

Тоді тиск води на всю пластинку

$$P=\int_0^h \rho gx\left[a-\frac{(a-b)x}{h}\right]dx=\rho g\left(a\int_0^h xdx-\frac{a-b}{h}\int_0^h x^2dx\right)=$$

$$=\rho g\left(a\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{a-b}{h}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^h=\rho g\left(\frac{ah^2}{2}-\frac{a-b}{3}h^2\right)=$$

$$=\rho g\cdot\frac{3ah^2-2ah^2+2bh^2}{6}=\frac{1}{6}\rho g(a+2b)h^2.$$

Зауважимо, що питома вага води $\gamma=\rho g=1$ г/см^3=*1000* кг/м^3=*1* т/м^3.

Приклад 184. Обчислити силу тиску води на вертикальну стінку, що має форму півкруга радіуса R *=6см*, якщо його діаметр знаходиться на поверхні води.

Розв'язання. Виберемо систему координат так, як показано на рис.49. Півкруг розділимо на елементарні смужки прямими, паралельними поверхні води. Заштриховану смужку наближено приймемо за прямокутник з основою AB і висотою dx і припустимо, що всі точки цієї смужки знаходяться на однаковій глибині x ($0 \le x \le R$). Таке припущення можна зробити, оскільки dx мале. Елементарна площа смужки

$$dS = AB \cdot dx = 2\sqrt{OB^2 - OC^2}\,dx = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Тиск води на смужку, яка знаходиться на глибині x,

$$dP = \gamma x dS = 2\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \gamma x dx.$$

Інтегруючи одержану рівність у межах від *0* до R, обчислимо силу тиску води на всю стінку:

$$P = \gamma \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot 2xdx = -\gamma \cdot \frac{2\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^R = \frac{2}{3}\gamma R^3.$$

Оскільки питома вага води $\gamma = 1$г/см^3=1000кг/м^3, R *=6м*, то

$$P = \frac{2 \cdot 6^3 \cdot 1000}{3} \text{ кг} = 144000 \text{ кг} \approx 1412640 \text{ (Н)}.$$

15.14 Обчислення кінетичної енергії

Відомо, що кінетична енергія матеріальної точки з масою m і швидкістю υ, визначається за формулою

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Кінетична енергія системи n матеріальних точок із масами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, які мають відповідно швидкості $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_n$, визначається формулою

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}. \qquad (57)$$

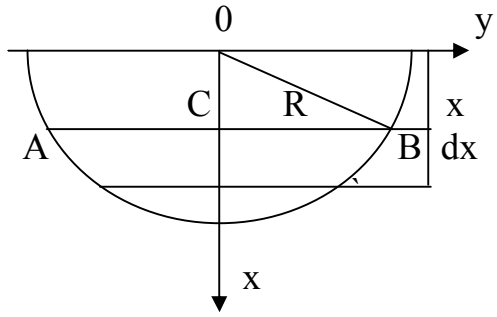


Рис. 49

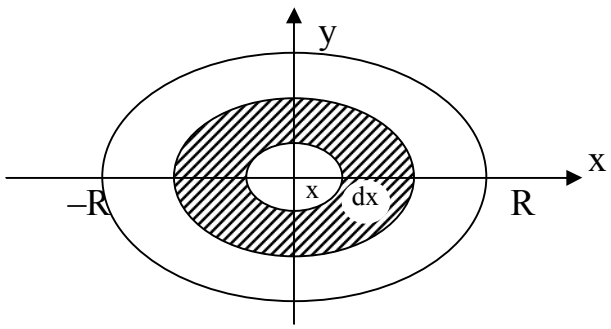


Рис. 50

Для обчислення кінетичної енергії тіла його належним чином розбивають на елементарні частинки (матеріальні точки). Потім, підсумовуючи кінетичні енергії цих частинок і переходячи до границі, одержують інтеграл:

$$K = \frac{1}{2}\int_a^b \upsilon^2 dm.$$

Приклади

Приклад 185 Обчислити кінетичну енергію диска маси M і радіуса R, обертового з кутовою швидкістю ω навколо осі, яка проходить через його центр перпендикулярно до його площини.

Розв'язання. Маса кругового кільця товщини dx (рис.50), яке знаходиться на відстані x від центра диска, дорівнює $2\pi\rho x dx$, де $\rho = \frac{M}{\pi R^2}$ – поверхнева густина. Лінійна швидкість кільця $\upsilon = \omega x$. Отже, його кінетична енергія

$$dK = \frac{\upsilon^2}{2}dm = \frac{\omega^2 x^2}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{M}{\pi R^2}\cdot x dx = \frac{M\omega^2}{R^2}\cdot x^3 dx.$$

А тому кінетична енергія диска

$$K = \frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R x^3 dx = \frac{M\omega^2}{R^2}\cdot \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{MR^2\omega^2}{4}.$$

Зауваження. Для кругового кільця товщини dx і внутрішнього радіуса x

$$\Delta m = \rho\Delta V = \pi\rho\left[(x+\Delta x)^2 - x^2\right] = \pi\rho\left(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2\right) = \pi\rho\left(2x\Delta x + (\Delta x)^2\right).$$

Тоді $dm = 2\pi\rho x dx$ (головна частина приросту маси).

Приклад 186 Обчислити роботу, яку треба витратити, щоб зупинити залізну кулю радіуса R, обертову з кутовою швидкістю ω навколо свого діаметра.

Розв'язання. Кількість необхідної роботи дорівнює кінетичній енергії кулі. Для обчислення цієї енергії розіб'ємо кулю на концентричні порожнисті циліндри товщиною dx (рис.51). Швидкість точок такого циліндра радіуса x є ωx. Диференціал об'єму такого циліндра $dV = 4\pi x\sqrt{R^2 - x^2}dx$, а диференціал маси $dM = \gamma dV$, де γ – густина заліза.

Тоді диференціал кінетичної енергії

$$dK = 2\pi\gamma\omega^2 x^3\sqrt{R^2 - x^2}dx.$$

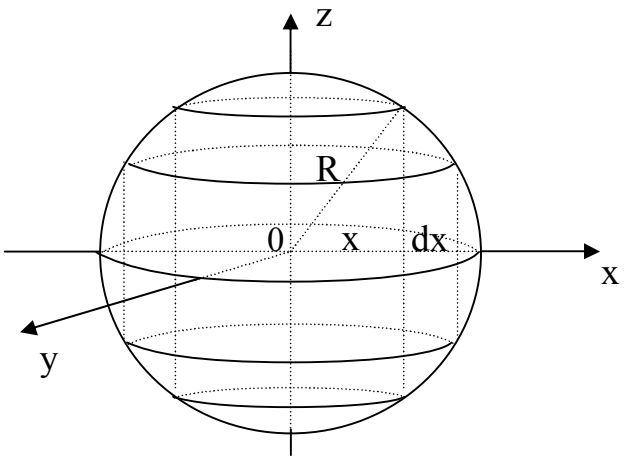


Рис. 51

Звідси

$$K = 2\pi\gamma\omega^2 \int_0^R x^3 \cdot \sqrt{R^2 - x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} R^2 - x^2 = t^2 \\ -2xdx = 2tdt \\ t_н = R; t_в = 0 \end{array} \right| = -2\pi\gamma\omega^2 \int_R^0 \left(R^2 - t^2\right) \cdot t^2 dt =$$

$$= 2\pi\gamma\omega^2 \int_0^R \left(R^2 t^2 - t^4\right) dt = 2\pi\gamma\omega^2 \left(R^2 \cdot \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \Bigg|_0^R = 2\pi\gamma\omega^2 \left(\frac{R^5}{3} - \frac{R^5}{5} \right) =$$

$$= \frac{4}{15}\pi\gamma\omega^2 R^5 = \frac{4}{15}\pi \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} \cdot \omega^2 R^5 = \frac{1}{5} M\omega^2 R^2.$$

Зауваження. Якщо маса кулі *M,* а її об'єм *V*, то $M = \gamma V$, звідки $\gamma = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}$, оскільки $V_{\text{кулі}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Для порожнистого циліндра товщини *dx* і внутрішнього радіуса *x*

$$\Delta V = 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\left[(x + \Delta x)^2 - x^2\right] = 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\left(x^2 - 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2\right) =$$

$$= 2\pi\sqrt{R^2 - x^2}\left[2x\Delta x + (\Delta x)^2\right].$$

Тоді $dV = 4x\pi\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$

15.15 Обчислення кількості електрики

Відомо, що для постійного струму кількість електрики, що протікає через поперечний переріз провідника, дорівнює добутку сили струму на час, який затрачено на проходження струмом цього провідника:

$$Q = I \cdot t.$$

Якщо по провіднику тече струм змінної сили *I=I(t)* $(I(t) \geq 0)$, то за проміжок часу $[t; t + \Delta t]$ кількість електрики, що протікає через поперечний переріз провідника буде *dQ=I(t)dt*. Отже, кількість електрики, що протече за час від t_1 до t_2, дорівнює:

$$Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

Приклади

Приклад 187 Сила струму I у провіднику змінюється з часом за законом $I(t)=2+3t^2$, де I виражено в амперах і t – в секундах. Обчислити:

1) яка кількість електрики проходить через поперечний переріз провідника за час від $t_1=2c$ до $t_2=5c$;

2) при якій силі постійного струму через поперечний переріз провідника за той же час пройде така ж кількість електрики?

Розв'язання. За формулою (56) маємо

1) $Q=\int_2^5 \left(2+3t^2\right)dt=\left(2t+t^3\right)\Big|_2^5=10+125-4-8=123$ *(Кл)*.

2) Якщо струм постійний, то $Q=I\cdot t$. Звідки $I=\dfrac{Q}{t}$. Отже, $I=\dfrac{123}{3}=41(A)$.

Приклад 188 Напруга на клемах електричного кола $U=120B$. У коло рівномірно вводиться опір із швидкістю *0,1 Ом* на секунду. Крім того, в коло включено сталий опір $R_0=10$ *Ом*. Скільки кулонів електрики пройде через коло за дві хвилини?

Розв'язання. Спочатку обчислимо I, скориставшись формулою $I=\dfrac{U}{R}$.

Оскільки за умовою задачі $\dfrac{dR}{dt}=0{,}1$ *(Ом/с)*, то $R=\int_0^t 0{,}1dt=0{,}1t+C$.

При $t=0$ і $R_0=10$ *Ом* $C=R_0$.

Отже,

$$R=0{,}1t+R_0=0{,}1t+10.$$

Враховуючи тепер, що $U=120$ і $R=0{,}1t+10$, будемо мати $I=\dfrac{120}{0{,}1t+10}$.

Інтегруючи одержаний вираз у границях від $t_1=0$ до $t_2=2хв=120c$, обчислимо

$$Q=\int_0^{120}\frac{120}{0{,}1t+10}dt=\frac{120}{0{,}1}\ln\left|0{,}1t+10\right|\Big|_0^{120}=1200\left(\ln 22-\ln 10\right)=$$

$$=1200\ln 2{,}2\approx 1200\cdot 0{,}7883\approx 946\ (Кл).$$

Приклад 189 При зміні температури опір металевих провідників змінюється (при звичайних температурах) за законом $R=R_0(1+0{,}004T)$, де R_0 – опір при 0^0 C і T – температура за Цельсієм. Провідник, опір якого при 0^0 C дорівнює $R_0=10$ *Ом*, рівномірно нагрівається від $T_0=20^0$ до $T_1=200^0$ за *10хв*. У цей час по ньому іде струм під напругою $U=120$ *В*. Скільки кулонів електрики протече за цей час через провідник?

Розв'язання. За умовою задачі температура провідника T збільшується з сталою швидкістю

$$\frac{dT}{dt}=\frac{200^0-20^0}{600c}=0{,}3\ \textit{(град/с)},$$

тобто T змінюється за законом $T=T_0+0{,}3t=20+0{,}3t$.

При цьому опір провідника

$$R=R_0(1+0{,}004T)=10(1+0{,}004(20+0{,}3t))=10{,}8+0{,}012t,$$

і сила струму (за законом Ома)

$$I=\frac{U}{R}=\frac{120}{10{,}8+0{,}012t}.$$

Інтегруючи цю функцію в межах від $t_1=0$ до $t_2=10$ *хв*$=600$ *с*, одержимо шукану кількість електрики

$$Q=\int_0^{600}\frac{120}{10{,}8+0{,}012t}dt=\frac{120}{0{,}012}\ln\left|10{,}8+0{,}012t\right|\Big|_0^{600}=$$

$$=10^4\left(\ln 18-\ln 10{,}8\right)\approx 5110\ \textit{(Кл)}.$$

Завдання для самостійної роботи

1 Швидкість руху тіла задана рівнянням $\upsilon=\left(2t+\frac{8}{t^2}\right)$ *м/с*. Обчислити його шлях за другу секунду.

Відповідь: *7м.*

2 Швидкість тіла, кинутого вертикально вгору з початковою швидкістю υ_0, з урахуванням опору повітря, подається формулою

$$\upsilon=C\cdot tg\left(-\frac{g}{C}t+arctg\frac{\upsilon_0}{C}\right),$$

де t – вичерпаний час, g – прискорення сили ваги і C – стала. Обчислити висоту підняття тіла.

Відповідь: $\frac{C^2}{2g}\ln\left(1+\frac{\upsilon_0}{C^2}\right)$.

3 Точка осі Ox здійснює гармонічні коливання навколо початку координат, причому швидкість її подається формулою $\upsilon=\upsilon_0\cos\omega t$, де t – час; υ_0, ω – сталі. Скласти закон коливання точки, якщо при $t=0$ вона мала абсцису $x=0$. Чому дорівнює середнє значення абсолютної величини швидкості точки за період коливання?

Відповідь: $x=\frac{\upsilon_0}{\omega}\sin\omega t$; $\upsilon_{ср}=\frac{2}{\pi}\upsilon_0$.

4 Швидкість руху точки $\upsilon=te^{-0{,}01t}$ *м/с*. Обчислити шлях, пройдений точкою від початку руху до повної зупинки.

Відповідь: 10^4 *м*.

5 Для розтягу пружини на *5см* витрачена робота в *3*кГм. На скільки розтягнеться пружина, якщо здійснити роботу в *1* кГм ?

Відповідь: *0, 029 м.*

6 Пружина в спокійному стані має довжину *0,1 м*. Сила в *20 Н* розтягує її на *0,01 м*. Яку роботу треба здійснити, щоб розтягнути її від довжини *0,12 м* до довжини *0,14 м* ?

Відповідь: *1,2 Дж*.

7 Силою в *40 Н* пружина розтягується на *0,01 м.* Початкова довжина пружини *0,18м*. Яку роботу треба здійснити, щоб розтягнути її до *0,24 м* ?

Відповідь: *7,2 Дж.*

8 У циліндричній посудині міститься атмосферне повітря, об'єм якого *0,02* $м^3$. Яку роботу треба здійснити, щоб стиснути це повітря до об'єму *0,05* $м^3$? Температура повітря підтримується сталою.

Відповідь: *28093,4 Дж*.

9 Циліндр із рухомим поршнем діаметром *d =20* см і довжиною *l=80см* заповнений парою при тиску *P=10* кг/см^2. Яку роботу треба здійснити, щоб при незмінній температурі об'єм пари зменшився вдвічі?

Відповідь: $A = 800\pi \ln 2$ кГм.

10 Обчислити роботу, яку необхідно здійснити, щоб викачати воду із котла, який має форму півкулі з радіусом *2м.*

Відповідь: *4000* π кГм $\approx$ *40000 Дж*.

11 Прямий круговий конус з вертикальною віссю занурений у воду так, що його вершина знаходиться на поверхні води. Обчислити роботу, необхідну для витягання конуса із води, якщо його висота *10 дм*, діаметр основи – *20 дм*, а питома вага $\delta=3$.

Відповідь: *750* кГм.

12 Обчислити роботу, яку необхідно здійснити, щоб викачати масло із вертикального циліндричного резервуара висотою *H=6м* і радіусом основи *R=2м.* Питома вага масла $\delta= 0,9*10^3$ *g* кг/м^3 = *9000* кг/м^3.

Відповідь: *635688* π *Дж.*

13 Обчислити силу тиску води на вертикальний трикутний щит із основою *a* і висотою *h*, занурений у воду так, що його основа лежить на вільній поверхні води.

Відповідь: $\frac{1}{6}\rho g a h^2$.

14 Обчислити силу тиску на площину півкруга, зануреного у рідину вертикально, якщо його радіус дорівнює *R*, а діаметр лежить на вільній поверхні рідини (питома вага рідини дорівнює γ).

Відповідь: $\frac{2}{3}\gamma R^3$.

15 Обчислити силу тиску води на пластину, що має форму рівнобічної трапеції, верхня основа якої дорівнює *30 м*, нижня – *20 м* і висота – *10 м*.

Відповідь: $\approx 115*10^5$ *Н*.

16 Обчислити роботу, яку треба здійснити, щоб розтягнути на *0,001м* мідний дріт довжиною *1м* і радіусом перерізу *2мм*.

Відповідь: $0{,}024\pi$ кГм $\approx 0{,}74$ *Дж*.

17 Обчислити роботу, необхідну для запуску ракети вагою *P* із поверхні Землі вертикально вгору на висоту *h*. Яку роботу повинен здійснити двигун, щоб повністю звільнити ракету від земного притягання (рух Землі при цьому не враховувати)?

Відповідь: $\dfrac{PRh}{R+h}$, *PR*.

18 Обчислити кінетичну енергію однорідного кругового циліндра густини δ із радіусом основи *R* і висотою *H*, обертового з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі.

Відповідь: $\dfrac{1}{4}\pi\delta\omega^2 R^4 H$.

19 Обчислити кінетичну енергію прямого круглого конуса маси *M,* обертового з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі, якщо радіус основи конуса *R*, а висота *H*.

Відповідь: $\dfrac{3}{20}MR^2\omega^2$.

20 Два електричних заряди $e_1 = \dfrac{1}{3}\cdot 10^{-7}$ *Кл* і $e_2 = \dfrac{2}{3}\cdot 10^{-7}$ *Кл* знаходяться на відстані *10 см* один від одного. Відокремлюючим їх середовищем є парафін. Спочатку обидва заряди закріплені нерухомо. Потім заряд e_2 звільнюється і під дією сили відштовхування віддаляється від заряду e_1 на відстань *1м.* Яка робота буде при цьому здійснена силою відштовхування?

Відповідь: $9*10^{-5}$ *Дж*.

21 Два електричних заряди $e_1 = 33{,}3\cdot 10^{-9}$ *Кл* і $e_2 = 40\cdot 10^{-9}$ *Кл* знаходяться на відстані *20 см* один від одного. Якою буде відстань між зарядами, якщо наблизити другий до першого, здійснивши при цьому роботу в $18*10^{-5}$ *Дж* ? Відокремлюючим середовищем є повітря.

Відповідь: *5 см*.

22 Сила звичайного змінного струму (міського), що має *50* коливань на секунду, змінюється залежно від часу за законом $I = I_0 \sin 100\pi t$, де I_0=*const* – найбільше значення сили струму. Обчислити кількість електрики, протікаючої через поперечний переріз провідника за час від $t_1 = 0$ до $t_2 = 0{,}01$ *с*.

Відповідь: $\dfrac{I_0}{50\pi}$ *Кл*.

23 Обчислити тиск води на вертикальний параболічний сегмент, основа якого *4м* і знаходиться на поверхні води, а вершина знаходиться на глибині *4м*.

Відповідь: $17\frac{1}{15}$.

24 Напруга на клемах електричного кола, яка на початку дорівнює *120В,* рівномірно падає, зменшуючись на *0,01В* за секунду. Одночасно з цим у коло вводиться опір теж із сталою швидкістю *0,1 Ом* за секунду. Крім того, в колі наявний сталий опір, рівний *12 Ом* . Скільки кулонів електрики протече через коло за *3 хв* ?

Відповідь: *1092 Кл.*

Вказівки до задач 1 – 24

1 $t_н = 1$ *с*, $t_в = 2$*с*.

2 Тіло досягає найбільшої висоти підіймання в момент часу *t*, коли $\upsilon = 0$. Для спрощення відповіді покладіть $arctg\frac{\upsilon_0}{C} = \alpha$, тоді $\frac{\upsilon_0}{C} = tg\alpha$, отже

$$\cos arctg\frac{\upsilon_0}{C} = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\upsilon_0{}^2}{C^2}}} = \left(1+\frac{\upsilon_0{}^2}{C^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

а

$$\ln\cos\alpha = \ln\cos arctg\frac{\upsilon_0}{C} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{\upsilon_0{}^2}{C^2}\right).$$

Остаточно маємо

$$-\frac{C^2}{g}\ln\cos arctg\frac{\upsilon_0}{C} = \frac{C^2}{2g}\ln\left(1+\frac{\upsilon_0{}^2}{C^2}\right).$$

4 Швидкість тіла дорівнює нулю в моменти початку його руху і зупинки. За умовою задачі $\upsilon = 0$, якщо $t\cdot e^{-0,01t} = 0$, звідки $t = 0$ і $t = \infty$.

Таким чином, $t_н = 0$, $t_в = +\infty$.

$$\int_0^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} F(x)\Big|_0^b = \lim_{b\to\infty}\left[F(b)-F(0)\right].$$

5 У системі одиниць *СІ:* 5см=*0,05м*, *1*кГм=*9,81 Дж*, *3*кГм=*3*9,81=29,43 Дж*.

6 $x_н = 0,12 - 0,1 = 0,02$ *(м)*, $x_в = 0,14 - 0,1 = 0,04$ *(м)*

7 Скориставшись формулою (52). Межі інтегрування для *x* візьміть від *0* до *0,06*, бо *0,24 –0,18=0,06 (м).*

8 Див. розв'язання прикладу 170.

9 Для ізотермічного процесу $PV=P_0V_0$. Робота при розширенні газу від об'єму V_0 до об'єму V_1 :

$$A = \int_{V_0}^{V_1} PdV = P_0V_0 \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

10 Розв'язавши задачу в загальному вигляді, одержите

$$A = 250\pi gR^4 Дж = 250\pi R^4 \text{ кГм}.$$

12 Робота, необхідна для викачування з резервуара нескінченно малого шару масла, що знаходиться на глибині x і має товщину dx, дорівнює добутку об'єму цього шару на глибину його занурення: $dA = \pi\delta R^2 xdx$, де δ – питома вага масла.

13 Див. розв'язання прикладу 182. Із подібності трикутників ABC і AEF одержимо $\frac{a}{EF} = \frac{h}{h-x}$, звідки $EF = \frac{a}{h}(h-x)$.

14 Розбийте площу півкруга на елементарні смужки, паралельні поверхні води. Площа однієї такої смужки, що знаходиться на відстані x від поверхні води, наближено дорівнює

$$dS = 2ydx = 2\sqrt{R^2 - x^2}dx,$$

де dx – ширина смужки.

16 Сила F кг натягу дроту довжиною l *м* і площею перерізу S *мм*^{2} при віддаленні її на x *м* визначається формулою $F = E \cdot \frac{Sx}{l}$, де E – модуль пружності. Для міді $E=1200$ кг/мм^2.

17 Якщо позначити через F величину сили притягання ракети Землею, m_p – масу ракети, $m_з$ – масу Землі, то згідно з законом Ньютона $F = k\frac{m_p m_3}{x^2}$, де x – відстань від ракети до центра Землі, причому $R \le x \le h + R$, R – радіус Землі. При $x=R$ сила $F(R)$ буде вагою ракети P. Тоді, вважаючи $km_p m_3 = C(C = const)$, одержимо $F(R) = P = \frac{C}{R^2}$, звідки $C=PR^2$. Таким чином, $F(x) = \frac{PR^2}{x^2}$. Роботу треба обчислити за формулою (52). Щоб одержати відповідь на друге питання задачі, обчисліть $l\,im_{h\to\infty} A(h)$.

18 За елементарну масу dm треба прийняти масу порожнистого циліндра висотою H із внутрішнім радіусом x і товщиною стінок dx :

$$dm = 2\pi xH\delta dx = 2\pi\delta Hxdx.$$

Слід також урахувати, що лінійна швидкість маси dm дорівнює $\upsilon=\omega x$.

19 За елементарну масу dm треба прийняти масу порожнистого циліндра висотою h із внутрішнім радіусом x і товщиною стінок dx:

$$dm = \delta dV = \frac{3M}{\pi R^2 H} dV = \frac{3M}{\pi R^2 H} \cdot 2\pi \cdot \frac{H}{R}\left(Rx - x^2\right)dx = \frac{6M}{R^3} \cdot \left(Rx - x^2\right)dx.$$

Висоту h обчислить із подібності трикутників. Елементарна кінетична енергія дорівнює $dK = \frac{\upsilon^2}{2} dm$, де $\upsilon = \omega x$.

20 $F(x)$ знайдіть за законом Кулона. ε – діелектрична проникність середовища відносно вакууму. Для парафіна $\varepsilon = 2$. ε_0 – діелектрична проникність вакууму $\varepsilon_0 = 8{,}85 * 10^{-12}$ *ф/м*.

21 x – шукана відстань. Тоді робота в $18 * 10^{-5}$ *Дж* буде витрачена на ділянці від x *м* до *20 см=0,2 м*.

23 Сумістіть основу параболічного сегмента з віссю Oy, а вісь Ox проведіть через центр його основи. Тоді рівняння параболи набуде вигляду $y^2 = a(x - x_0)$, де $x_0 = 4$; параметр a може бути обчислений із умови, що точка $(0;2)$ належить параболі.

24 За умовою задачі напруга рівномірно падає, тобто змінюється за законом $U = 120 - 0{,}01t$. При цьому опір також змінюється за законом $R = 12 + 0{,}1t$. Тоді за законом Ома

$$I = \frac{U}{R} = \frac{120 - 0{,}01t}{12 + 0{,}1t}.$$

ДОДАТОК А

Варіанти підсумкового завдання до розділу «Невизначений інтеграл»

Знайти невизначені інтеграли.

Варіант № 1

1 $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x dx}}{1+x^2} dx$

2 $\int x \cos \frac{x}{3} dx$

3 $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7} dx$

4 $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$

5 $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[6]{x}-1)}$

Варіант № 2

1 $\int \frac{dx}{(4x^2+1)\operatorname{arctg} 2x}$

2 $\int x e^{3x} dx$

3 $\int \frac{x^3+2x+5}{(x^2-4)(x+3)} dx$

4 $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$

5 $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$

Варіант № 3

1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$

2 $\int x \ln(x^2+1) dx$

3 $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4} dx$

4 $\int \cos x \sin 5x dx.$

5 $\int \frac{x dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$

Варіант № 4

1 $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx$

2 $\int x^2 \sin 5x dx$

3 $\int \frac{(6x+3)dx}{(x-4)(x^2-2x+1)}$

4 $\int \frac{dx}{3\cos x + \sin x + 1}$

5 $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx$

Варіант № 5

1 $\int \sqrt[6]{1-2x^3} \cdot x^2 dx$

2 $\int (2x-1) e^{2x} dx$

3 $\int \frac{(1-x)dx}{x^3+4x^2+4x}$

4 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6\sin x + 5}$

5 $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx$

Варіант № 6

1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$

2 $\int x \arccos 3x dx$

3 $\int \frac{3x^2+13x+11}{(x+1)^2(x+2)} dx$

4 $\int \cos 2x \cos^2 x dx$

5 $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$

Варіант № 7

1 $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$

2 $\int x^2 \sin \frac{x}{3} dx$

3 $\int \frac{dx}{(x^2-x-2)(x-1)}$

4 $\int \cos 2x \cos \frac{x}{3} dx$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

Варіант № 8

1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^7 x}$

2 $\int x \ln(x-5) dx$

3 $\int \frac{x^3-3x}{x^2-6x+8} dx$

4 $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$

5 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

Варіант № 9

1 $\int e^x \cos e^x dx$

2 $\int x \arcsin 2x dx$

3 $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-2x}$

4 $\int \frac{dx}{3\cos x - 2\sin x}$

5 $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$

Варіант № 10

1 $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}$

2 $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$

3 $\int \frac{x^2+5x+1}{x^2+4} dx$

4 $\int x \sin^2 7x dx$

5 $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-7x+13}} dx$

Варіант № 11

1 $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3 x}}{x} dx$

2 $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$

3 $\int \frac{x^6+1}{x^3-5x^2+4x} dx$

4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x \cos x + s}$

5 $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$

Варіант № 12

1 $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$

2 $\int \left(x^2-1\right) 10^{-2x} dx$

3 $\int \frac{4x dx}{2x^2-3x+1}$

4 $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$

5 $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+9}} dx$

Варіант № 13

1 $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$

2 $\int \ln(x^2+9) dx$

3 $\int \frac{(x+2) dx}{x^3+2x^2-3x}$

4 $\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x}$

5 $\int \frac{3x dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$

Варіант № 14

1 $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}$

2 $\int \frac{x dx}{\cos^2 3x}$

3 $\int \frac{x^4+3}{x(x^2+4x-5)} dx$

4 $\int \sin\frac{x}{2} \cos\frac{x}{4} dx$

5 $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-2)}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}} dx$

Варіант № 15

1 $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\cos^2 x}$

2 $\int x^3 \arcsin\frac{1}{x} dx$

3 $\int \frac{x^3-3x^2+x}{(x-3)(x^2-1)} dx$

4 $\int \sin^2\frac{x}{2} \cos\frac{3x}{2} dx$

5 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x}}$

Варіант № 16

1 $\int \frac{8^{3x} dx}{3+8^{6x}}$

2 $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx$

3 $\int \frac{x^2+4x+1}{2x+2} dx$

4 $\int \cos\frac{x}{2} \sin\frac{9x}{2} dx$

5 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$

Варіант № 17

1 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-3\ln x}}$

2 $\int \left(x^2-3x\right) \sin 5x dx$

3 $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)(x-1)} dx$

4 $\int \sin^2\frac{x}{3} \cos\frac{5x}{2} dx$

5 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$

Варіант № 18

1 $\int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx$

2 $\int \left(x^2-1\right) \ln x dx$

3 $\int \frac{x^5+1}{16-x^4} dx$

4 $\int \frac{dx}{3+\operatorname{tg} x}$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$

Варіант № 19

1 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$

Варіант № 20

1 $\int \frac{x dx}{(x^2+1)^3}$

Варіант № 21

1 $\int \sin^7 7x \cos 7x dx$

2 $\int xe^{2x+3}dx$

3 $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$

4 $\int \frac{\sin x dx}{6-5\cos x+\cos^2 x}$

5 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{17-2x-x^2}}$

2 $\int x\,\mathrm{arctg}(2x+3)dx$

3 $\int \frac{x^3+2}{x(x^2+2x-3)}dx$

4 $\int \frac{dx}{2+\cos x-2\sin x}$

5 $\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-7x+3}}$

2 $\int (2x-1)\cos\frac{x}{3}dx$

3 $\int \frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$

4 $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

5 $\int \frac{\sqrt{4-x}}{(\sqrt{4-x}+3)^3}dx$

Варіант № 22

1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{4x^3-6}}$

2 $\int x\cdot 5^{2x}dx$

3 $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$

4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x-5\sin^2 x+2}$

5 $\int \frac{5x-3}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx$

Варіант № 23

1 $\int \left(e^{2x}+5\right)^3 e^{2x}dx$

2 $\int \ln(2x+1)dx$

3 $\int \frac{x^5-2x}{x^3-1}dx$

4 $\int \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3}dx$

5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{7+4x-2x^2}}$

Варіант № 24

1 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$

2 $\int \mathrm{arctg}\frac{x-1}{x}dx$

3 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$

4 $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx$

5 $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}-4}dx$

Варіант № 25

1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-11x^6}}$

2 $\int \frac{\ln\mathrm{ctg}\,x}{\cos^2 x}dx$

3 $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$

4 $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\,x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$

5 $\int \frac{7x-1}{\sqrt{9+4x-x^2}}dx$

Варіант № 26

1 $\int x^2e^{5-3x^3}dx$

2 $\int x\sin 3x\cos 3xdx$

3 $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$

4 $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}\,x)^2}dx$

5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$

Варіант № 27

1 $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{6-\sin^2 x}}$

2 $\int x\ln\left(1+x^3\right)dx$

3 $\int \frac{x^2+24}{x(x^2-7x+12)}dx$

4 $\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$

5 $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$

Варіант № 28

1 $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{5-3e^{4x}}}$

2 $\int (x+1)\mathrm{arctg}\,xdx$

3 $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$

Варіант № 29

1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x(2-3\,\mathrm{ctg}\,x)}$

2 $\int x^2\sin\frac{x}{2}dx$

3 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

Варіант № 30

1 $\int \frac{\cos^2 x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

2 $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^2}dx$

3 $\int \frac{x^3dx}{x^3-4x^2+3x}$

4 $\int \frac{dx}{1+5\sin^2 x}$

5 $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$

4 $\int \sin^3 2x \cos^2 2x dx$

5 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+10x+29}}$

4 $\int \frac{dx}{5\cos x - 3\sin x + 2}$

5 $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{x(2+\sqrt[3]{x})} dx$

ДОДАТОК Б

Варіанти підсумкового завдання до розділу «Визначений інтеграл»

Варіант 1

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = a\sin 2t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $y = x^3, y = 0, x = 2.$

3 Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2(1-\cos\varphi)$, що розташована в середині круга $r \le 1$.

4 Знайти статичний момент відносно осі *Ox* однорідної фігури, яка обмежена лініями $y = 4 - x^2, y = 3$, якщо густина матеріалу $\gamma = 1$.

Варіант 2

1 Знайти площу фігури, обмеженої лінією

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases} ; \quad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}.$$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = \cos x, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = \sqrt{2}\cdot e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

4 Знайти масу стержня довжиною 100см, якщо лінійна густина ($г/см$) змінюється за законом $\gamma(x) = 20x + 0{,}15x^2$, де x – відстань від одного з кінців стержня.

Варіант 3

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x + 3$ і $y = 3x - 1$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* кривої

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}(t^2 - 3) \end{cases} ; \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

4 Знайти масу дуги кривої $y = \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$, якщо густина $\gamma(x) = x^2$.

Варіант 4

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$ і $y = 2 - x.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y = 1 - \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

4 Знайти координати центра ваги однорідної фігури, яка обмежена лініями $y = x^2, y^2 = x.$

Варіант 5

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2 + \sin\varphi.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox параболи $y^2 = 2x$ від її вершини до точки з абсцисою $x = \frac{3}{2}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$.

4 Знайти статичний момент відносно осі Ox однорідної кривої $y = (x-3)^3, 3 \le x \le 4.$

Варіант 6

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = (x+2)^2, y = 4 - x$ і $y = 0.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r = 2a(1 + \cos\varphi).$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(t^2 + 1), \\ y = \frac{a}{3}(t^3 - 3t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$

4 Знайти масу фігури, яка обмежена лініями $y = \frac{4}{x}, y = 5 - x,$ якщо густина матеріалу в кожній точці дорівнює квадрату абциси цієї точки.

Варіант 7

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2,\ y = x - 1.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r^2 = a^2\cos 2\varphi.$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = \frac{t^6}{6}, \\ y = 2 - \frac{t^4}{4}, \end{cases} \quad 0 \le t \le \sqrt[4]{8}$.

4 Швидкість тіла (м/с) задається формулою $v = t \cdot e^{-t}$. Знайти шлях, який пройшло тіло за 3с від початку руху.

Варіант 8

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = e^{-2x}, y = 0, x = -\frac{1}{2}, x = 1.$

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$ і $y = x.$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(\frac{1}{3} - t^2), \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$

4 Знайти ординату центра ваги дуги однорідної кривої $r = \frac{a}{\cos\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Варіант 9

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = \cos 3\varphi.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = x + 4$ і $x = 0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y = a\ln(a^2 - x^2)$, $0 \le x \le \frac{a}{2}.$

4 Знайти статичний момент відносно осі *Oy* однорідної дуги лінії $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(\frac{1}{3} - t^2), \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Варіант 10

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $xy = 8$, $x = 6$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = (x+4)^3$ і $x = 0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

4 Знайти абсцису центра ваги дуги однорідної кривої $r = \frac{a}{\sin\varphi}$, $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

Варіант 11

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = \frac{t^3}{3}, \\ y = 4 - \frac{t^2}{2}, \end{cases}$ і $y = 0.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $x + y - 2 = 0$ і $x^2 + y^2 = 4.$

3 Знайти довжину дуги лінії $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ між точками перетину її з віссю абсцис.

4 Знайти масу дуги кривої $r = 1 + \cos\varphi$, якщо густина матеріала $\gamma(\varphi) = \sin^2\frac{\varphi}{2}.$

Варіант 12

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = tgx,\ \ y = ctgx,\ \ x = \frac{\pi}{6}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}\ \ 0 \le t \le 3\pi$.

4 Яку роботу необхідно витратити, щоб розтягнути пружину на 6см, якщо сила в 2н розтягує її на 1см?

Варіант 13

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 6 - x$ і $y = \frac{5}{x}$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

3 Знайти довжину спіралі $r = 5\varphi$, що розташована в області, яка обмежена колом $r = 10\pi$.

4 Яку роботу необхідно витратити, щоб розтягнути пружину на 5см, якщо сила в 1н розтягує її на 1см?

Варіант 14

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x$ і $y - 3 = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ \ y = 1,\ \ y = 2,\ \ x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}\ \ 0 \le t \le 1.$

4 Знайти статичні моменти відносно осей Ox і Oy дуги однорідного ($\gamma = 1$) кола $r = 2a\cos\varphi$, яке розташовано вище полярної осі.

Варіант 15

1 Знайти площу фігури, обмеженої лінією $r = 4\cos 2\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = e^x,\ \ y = 0,\ \ x = 0, x = 1.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2},\ \ 0 \le x \le 1.$

4 Знайти статичний момент відносно осі Oy дуги однорідної кривої $\begin{cases} x = t, \\ y = \ln(1 - t^2), \end{cases}\ \ 0 \le t \le \frac{1}{2}.$

Варіант 16

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2 + \cos 2\varphi.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y=\frac{x^3}{3}$, $-2\le x\le 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x=a(\cos 2t+\ln tgt), \\ y=a\sin 2t, \end{cases}$ $\frac{\pi}{8}\le t\le\frac{\pi}{4}$.

4 Знайти масу дуги кривої $y=\arcsin x$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$, якщо густина матеріалу $\gamma(x)=\frac{x}{\sqrt{2-x^2}}$.

Варіант 17

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r=1-2\sin\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x=t^2-1, \\ y=t^3-t. \end{cases}$

3 Знайти довжину дуги кривої $y^2=(4-x)^3$, що відрізана прямою $x=0,(x\ge 0)$.

4 Швидкість руху (*м/с*) тіла задана рівнянням $v=12t-3t^2$. Знайти шлях, пройдений тілом від початку руху до зупинки.

Варіант 18

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2=9x$ і $y=x+2$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x=t^3, \\ y=t^2, \end{cases}$ $x=-1$, $x=1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r=a\sin^4\frac{\varphi}{4}$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

4 Знайти масу стержня довжиною a (см), якщо густина матеріалу $\gamma(x)=\frac{x^3}{2a-x}$ $(г/см)$.

Варіант 19

1 Знайти площу фігури, обмеженої першим витком спіралі Архімеда $r=a\varphi$ і полярною віссю.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=4x-x^2$, $y=x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}+3$, $0\le x\le 2$.

4 Знайти статичний момент відносно осі Ox однорідної фігури ($\gamma=1$), яка обмежена лініями $y=x^2$, $y=x$.

Варіант 20

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $r=2-\cos\varphi$ і $r=\cos\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = x$, $y = \frac{x}{2}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = -\ln\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$.

4 Знайти статичний момент відносно осі *Ox* однорідної фігури ($\gamma = 1$), яка обмежена лініями $x^2 + y^2 = a^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$.

Варіант 21

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x + y = 6$, $y = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* криволінійної трапеції, що обмежена лініями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases} \text{ і } y = 4$$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$.

4 Знайти абсцису центра ваги однорідної фігури ($\gamma = 1$), яка обмежена лініями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Варіант 22

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2(2 + \cos\varphi)$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = \frac{3}{2}x$, $x^2 + y^2 = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$, $0 \le x \le 3$.

4 Швидкість точки (*м/с*) $v = 0{,}1t^3$. Знайти шлях, пройдений точкою за 10с від початку руху. Чому дорівнює середня швидкість за цей проміжок часу?

Варіант 23

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sin 2\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = tgx$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, $1 \le x \le 2$.

4 Знайти статичний момент відносно осі *Ox* дуги однорідної ($\gamma = 1$) кривої $\begin{cases} x = t, \\ y = t^3, \end{cases}$ $0 \le t \le \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Варіант 24

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 3\sin 3\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $y^3 = 4x^2$ і $y = 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

4 Знайти статичний момент відносно осі *Ox* дуги однорідної ($\gamma = 1$) кривої $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$.

Варіант 25

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t^3}{3} \end{cases}$ і $x = 4$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 2^x$, $y = 4^x$, $x = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

4 Знайти масу стержня довжиною $l = 10$ см, якщо лінійна густина матеріалу задається формулою $\gamma(x) = 1 + 1{,}5x^2 + \sqrt{10x}$ (*г/см*).

Варіант 26

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 4$ і $x = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

3 Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2(1 + \cos\varphi)$, що розташована в області, яка обмежена колом $r = 2$.

4 Знайти масу дуги кривої $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$, якщо густина матеріалу $\gamma(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ (*г/см*).

Варіант 27

1 Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1 - \cos\varphi)$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* кривої $y^2 = 4x$ від її вершини до точки з абсцисою $x = 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

4 Знайти абсцису центра ваги однорідної фігури ($\gamma = 1$), яка обмежена лініями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Варіант 28

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = ae^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y=\frac{x^2}{4}-1$ і $y=0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y=\frac{2}{\pi}\ln\cos\frac{\pi x}{2}$, $0\le x\le\frac{1}{2}$.

4 Знайти статичний момент відносно осі *Oy* дуги однорідної ($\gamma=1$) кривої $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^3, \\ y=t, \end{cases}$ $0\le t\le 1$.

Варіант 29

1 Знайти площу фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x=6(t-\sin t), \\ y=6(1-\cos t) \end{cases}$ і віссю абсцис.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2+x-4=0$ і $x=0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r=e^{a\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$.

4 Знйти статичний момент відносно осі *Ox* дуги однорідної ($\gamma=1$) кривої $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $0\le x\le 1$.

Варіант 30

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x=12\cos t+5\sin t, \\ y=5\cos t-12\sin t, \end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $y^2=9x$ і $y=-x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r=6(1+\sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2}\le\varphi\le 0$.

4 Знайти масу однорідної фігури ($\gamma=1$), яка обмежена лінією $r=a(1+\cos\varphi)$.

Бібліографічний список

1 Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1: Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной. Ряды. – Висагинас: Alfa, 1988.

2 Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т. II – М.: Наука, 1968.

3 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов: Т.I – М.: Наука, 1985.

4 Бермант А.Ф., Арамонович И.Г. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1987.

5 Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. – М.: Высш. шк., 1978.

6 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика. Під ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Техніка, 2003.

7 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

8 Давидов М.О. Курс математичного аналізу. – К.: Вища шк., 1990.

9 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.

Навчальне видання

АРШАВА Олена Олександрівна
ХАРЧЕНКО Анатолій Петрович
ЩЕЛКУНОВА Любов Іванівна

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Навчальний посібник

Редактор В.І. Пуцик

Підп. до друку 24.05.18 Формат 60х86/16. Папір офсетний
Умов .друк. арк. 27,84 Обл. вид. арк. 28,68 Друк – лазерний
Гарнітура «Time New Roman».
Наклад 100 прим. Вид. № Зам. № 141

Надруковано в типографії ТОВ «Цифрова типографія»
Адреса: м. Харків, вул. Данилевського, 30.