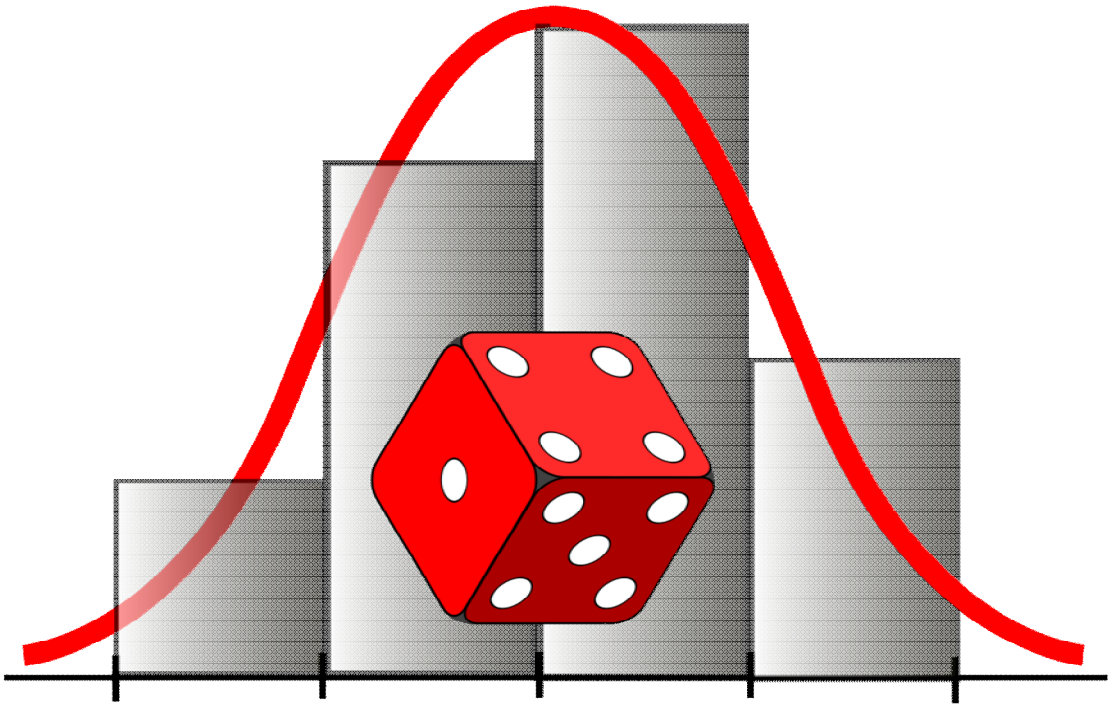
О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник



Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Рекомендовано
Вченою радою університету
як навчальний посібник для студентів
закладу вищої освіти

Харків 2019

УДК 519.2
А – 89

Гриф надано Вченою радою
Харківського національного університету будівництва та архітектури
(протокол № 9 від 31.05.2019 року).

Рецензенти:

Л.Б.Коваленко, к. ф.-м. н., доц., кафедра вищої математики Харківського національного університету міського господарства ім. О.М. Бекетова (ХНУМГ)

А.А.Янцевич, д. ф.-м. н., проф., кафедра математичних методів в економіці Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна (ХНУ)

В.О.Гаєвська, к.т.-н., доц., кафедра вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА)

Аршава О.О., Харченко А.П., Щелкунова Л.І.
А-89 Теорія ймовірностей: Навчальний посібник. – Харків: ФОП Панов А.М., 2019. – 128 с.

ISBN 978-617-7722-46-4

Навчальний посібник розроблено для вивчення одного з важливих розділів вищої математики, який має назву «Теорія ймовірностей». Головний акцент зроблено на основних фактах та закономірностях, характерних для ймовірних процесів реального світу. Систематизовано представлений теоретичний матеріал, що супроводжується значною кількістю задач та прикладами їх розв’язання. Також запропоновано завдання для самостійного виконання та питання для самоперевірки.

Дане видання може бути корисним у процесі виконання самостійної роботи, а також може використовуватися як збірник задач під час проведення практичних занять.

Видання розроблено відповідно до діючої програми дисципліни «Вищої математика» для технічних університетів.

Іл.: 13; табл.: 2; бібліогр.: 5 назв.

УДК 517.21.3

ISBN 978-617-7722-46-4

© О.О. Аршава, А.П. Харченко, Л.І. Щелкунова, 2019

ВСТУП

Розділ “Теорія ймовірностей” завершує вивчення курсу вищої математики в технічному виші. Не дивлячись на порівняно невеликий об’єм годин, виділених для вивчення даного розділу, його значення є досить великим. Справа в тому, що фактично всі явища, які відбуваються в природі й техніці, являються випадковими. Дійсно, врожайність певної ділянки землі або розміри виготовленої деталі, влучення в ціль під час стрільби або забезпечення електроенергією певного району, виграш в лотерею або число людей, які користуються в певний проміжок часу підприємством масового обслуговування, є явищами випадковими, підпорядкованими законам, які й вивчає теорія ймовірностей. Саме теорія ймовірностей надає можливість наочно сприймати одне з положень філософії, суть якого полягає в тому, що “випадковість є формою прояву необхідності” й обґрунтовує правильне поставлення будь-якого наукового експерименту. Дійсно, вимога повторного, а іноді й неодноразового проведення експерименту в однакових умовах і на його основі визначення істинного значення як середнього ґрунтується на теоремі Чебишева, яка є основною в законі великих чисел.

Мета даного видання – допомогти студентам опанувати розділ вищої математики, що має назву «Теорія ймовірностей». Оскільки нові вимоги до випускників закладів вищої освіти полягають у необхідності підняття рівня фундаментальної підготовки та застосування методів класичної математики, які ґрунтуються на вмінні формулювання умови математичної задачі, вмінні обирання необхідного математичного методу її розв’язанні, а також на вмінні на підставі проведеного математичного аналізу вироблення практичних рекомендацій, то запропоноване видання переслідує саме таку мету.

У навчальному посібнику розглядається матеріал, що стосується випадкових подій, теореми теорії ймовірностей та їх наслідки, а саме: формула повної ймовірності, формула Байєса, повторні випробування. Також розглядається матеріал щодо описання випадкових величин: дискретних та неперервних, їх законів розподілу, які найбільш часто зустрічаються під час вивчення загальноосвітніх та спеціальних дисциплін.

Матеріал посібника містить короткі теоретичні відомості, основні означення, теореми, формули, методичні рекомендації, а також приклади розв’язання типових задач із коротким поясненням до їх розв’язання та задачі для самостійного розв’язання. До кожної задачі наводяться відповіді.

Для забезпечення безперервної роботи над вивченням матеріалу наводяться варіанти підсумкових завдань, а також питання для підготовки до модульного контролю знань.

Дане видання допоможе розібратися як у законах, що проявляються в випадкових явищах, так і в широких можливостях застосовуваних методів розв’язання практичних завдань, а також може бути використане як студентами, так і викладачами під час самостійного вивчення розділу.

1 ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ (СПОЛУКИ)

На практиці часто доводиться мати справу з задачами, в яких потрібно підрахувати число всіх можливих способів розташування деяких предметів або число всіх можливих способів здійснення деякої дії. Задачі такого типу називаються комбінаторними. Зокрема, на комбінаторних міркуваннях ґрунтується розв'язання багатьох задач теорії ймовірностей – важливого розділу математики, що вивчає випадкові явища. В основі розв'язання таких задач лежить два наступних правила.

1 Правило додавання. Якщо елемент A можна обрати m способами, а елемент B – n способами, які виключають один одного, то обрання будь-якого одного з даних елементів (або A, або B) можна здійснити $m + n$ способами.

2 Правило множення. Якщо елемент A можна обрати m способами і після кожного такого обрання елемент B можна обрати n способами, то обрання пари елементів (A,B) в указаному порядку можна здійснити $m \cdot n$ способами.

Слід зазначити, що дані правила легко узагальнюються для випадку обрання довільної скінченої кількості елементів.

Далі наведемо приклади розв'язання задач комбінаторного типу.

Приклади розв'язання задач комбінаторного типу

Задача 1. У розіграшу першості країни з футболу бере участь 16 команд. Скількома способами можна розподілити між ними золоту та срібну медалі?

Розв'язання. Золоту медаль може отримати одна з 16 команд. Після виявлення власника золотої медалі срібну медаль може отримати одна з 15 команд. Отже, загальне число способів розподілення золотої та срібної медалей можна визначити таким чином: $15 \cdot 16 = 240$.

Задача 2. Скількома способами можна скласти чотиризначне число з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

а) жодна з цифр не буде повторюватися більше одного разу;

б) цифри будуть повторюватися;

в) цифри повинні бути непарними (цифри можуть повторюватися)?

Розв'язання:

а) Першою цифрою числа може бути одна з наступних п'яти цифр: 1, 2, 3, 4, 5 (цифра 0 не може бути першою в числі, оскільки в такому випадку число не буде чотиризначним); якщо першу цифру обрано, то другу можна обирати п'ятьма способами (оскільки тепер цифра 0 включається до числа), третю – чотирма способами, четверту – трьома способами. Згідно з правилом множення загальне число способів можна визначити таким чином: $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

б) Першою цифрою числа може бути одна з наступних п'яти цифр: 1, 2, 3, 4, 5 (п'ять способів), для кожної з наступних цифр існує шість способів (0, 1, 2, 3, 4, 5). Отже, число шуканих чисел складатиме $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3 = 1080$.

в) Першою цифрою числа може бути одна з наступних цифр: 1, 2, 3, 4, 5, а останньою – одна з наступних цифр: 1, 3, 5 (числа повинні бути непарними). Отже, загальна кількість чисел складатиме $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$.

Задача 3. Скільки тризначних і чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо кожна цифра під час складання числа буде використовуватися не більше одного разу?

Розв'язання. За правилом множення чотиризначне число можна скласти $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами, тризначне число – $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами. Тоді, за правилом додавання, або чотиризначне число може бути складене 24+24=48 способами. Таким чином, загальна кількість тризначних і чотиризначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, які під час складання числа можуть використовуватися не більше одного разу, складатиме 48.

Візьмемо десять різних цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Складемо з них різноманітні групи чисел, до складу кожної з яких входять, наприклад, такі числа: 231, 312, 4056, 78, 238, 708 і т.д. Деякі з чисел відрізняються одне від одного лише за порядком розташування цифр (231 і 312), інші – за складом цифр (231 і 238) і навіть за кількістю цифр (231, 78, 4056). Такі групи називаються сполуками.

Отже, різні групи, що складаються з різноманітних предметів і відрізняються одна від одної або за порядком їх розташування, або за складом самих предметів, взагалі називаються сполуками.

Предмети, з яких складаються сполуки, називаються *елементами***.**

Серед можливих сполук виділимо наступні: *розміщення, перестановки, комбінації (сполучення).*

Розміщеннями з n різних елементів по k називаються різноманітні групи, які містять k елементів, обраних із даних n елементів і відрізняються одна від одної або за складом елементів, або за їх порядком.

Число розміщень із n різних елементів по k без повторень позначається символом A_n^k і обчислюється за формулою

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad (1.1)$$

Число розміщень з n різних елементів по k з повтореннями позначається символом $\overline{A}_n^k$ і обчислюється за формулою

$$\overline{A}_n^k = n^k. \qquad (1.2)$$

Задача 4. Скільки двозначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4 (без їх повторення)?

Розв'язання. Складемо двозначні числа, які будуть відрізнятися одне від одного лише за порядком розташування цифр: 12, 13, 14, 23, 24, 34. Отримано шість чисел. Змінюючи місця розташування цифр у кожному з чисел, отримаємо нові числа: 21, 31, 41, 32, 42, 43. Таким чином, із чотирьох цифр (без повторень) складено 12 різних двозначних чисел. Інакше, з чотирьох елементів по два складено всього 12 розміщень: A_4^2. За формулою (1.1) отримаємо той самий результат: $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$.

Задача 5. Членами профкому обрано дев'ять осіб, із яких потрібно обрати голову та його замісника. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язання. Задача зводиться до визначення числа елементів по два, бо в даному випадку істотним є як те, кого буде обрано до керівництва профкому, так і те, як розподіляться обов'язки між обраними. Таким чином, за формулою (1.1) шукана кількість способів буде наступною:

$$A_9^2 = 9 \cdot 8 = 71.$$

Задача 6. Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Розв'язання. Кожне тризначне число, складене з даних цифр, можна розглядати як розташування з повтореннями, складене з трьох цифр, узятих із даних семи. Тому за формулою (1.2) шукана кількість тризначних чисел буде наступною:

$$\overline{A}_7^3 = 7^3 = 343.$$

Розміщення з n елементів по n , тобто різноманітні групи з n різних елементів, які відрізняються одна від одної лише за порядком елементів, називаються *перестановками.*

Число перестановок з n різних елементів без повторень позначається символом P_n і обчислюється за формулою

$$P_n = A_n^n = n!, \tag{1.3}$$

де

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Зауваження. За означенням прийнято вважати, що 0!=1.

Число перестановок з n різних елементів з повторенням, які можна скласти з k_1 елементів першого типу, k_2 елементів другого типу, ..., k_m елементів m-го типу, обчислюється за формулою

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}, \tag{1.4}$$

де

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

Задача 7. Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, якщо кожна цифра в зображенні числа зустрічається один раз?

Розв'язання. Чотиризначне число може бути подане у вигляді перестановки з цифр 0, 1, 2, 3, в якій перша цифра є відмінною від нуля. Оскільки число перестановок з чотирьох цифр складає $P_4 = 4!$ і з них $P_3 = 3!$ перестановок починаються з нуля, то шукана кількість чисел буде такою:

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 4 \cdot 3! - 3! = (4-1) \cdot 3! = 3 \cdot 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18.$$

Задача 8. Скількома способами можна нанизати на нитку 4 зелених, 5 синіх і 6 червоних намистин?

Розв'язання. Мова йде про відшукання числа перестановок з повторенням, які можна скласти з $k_1 = 4$ елементів першого типу (зелених

намистин), $k_2 = 5$ елементів другого типу (синіх намистин) і $k_3 = 6$ елементів третього типу (червоних намистин). За формулою (1.4) отримаємо

$$P_{15}(4;5;6) = \frac{(4+5+6)!}{4!5!6!} = 630630.$$

Комбінаціями (сполученнями) з n різних елементів по k називаються різноманітні групи, які містять k елементів, узятих із даних n елементів і відрізняються одна від одної принаймні за одним елементом (порядок при цьому не враховується).

Число комбінацій із n різних елементів по k без повторень позначається символом C_n^k і обчислюється за формулою

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (1.5)$$

Число комбінацій без повторень з n різних елементів по k дорівнює числу комбінацій із таких самих n різних елементів по k , тобто

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (1.6)$$

Число комбінацій із n різних елементів по k з повторенням позначається символом $\overline{C}_n^k$ і обчислюється за формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}. \qquad (1.7)$$

Задача 9. Визначити кількість різних правильних дробів, які можна утворити з чисел 1, 2, 3, 5, 7 ,11, 13, беручи їх попарно?

Розв'язання. Із заданих чисел можна скласти стільки різних пар чисел, перший елемент яких є меншим за другий, скільки можна скласти комбінацій із семи чисел по два. Звідси за формулою (1.5) отримаємо шукане число:

$$C_7^2 = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21.$$

Задача 10. У кондитерському магазині продається три сорти тістечок. Скількома способами можна купити 9 тістечок?

Розв'язання. Для розв'язання задачі потрібно знайти число різноманітних груп по дев'ять елементів, які можна скласти з даних трьох різних елементів, причому зазначені елементи в кожній групі можуть повторюватися, а самі групи можуть відрізнятися одна від одної принаймні за одним елементом (порядок при цьому ролі не відіграє). Розв'язання даної задачі полягає у відшуканні числа комбінацій з повторенням із трьох елементів по дев'ять. Отже, за допомогою формули (1.7) отримаємо

$$\overline{C}_3^9 = C_{11}^9 = C_{11}^2 = \frac{11\cdot 10}{1\cdot 2} = 55.$$

Задача 11. Скількома способами можна розсадити чотирьох студентів на 25 місцях?

Розв'язання. Шукане число способів дорівнює числу розміщень з 25 по чотири, тобто

$$A_{25}^4 = 25\cdot 24\cdot 23\cdot 22 = 303600.$$

Задача 12. Скількома способами можна розмістити на полиці чотири книжки?

Розв'язання. Мова йде про різноманітні групи з чотирьох різних елементів, які відрізняються одна від одної лише за порядком їх розташування. Тому шукане число способів можна знайти за формулою (1.3)

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 .$$

Задача 13. Студенти першого курсу вивчають 10 різних предметів. За розкладом на понеділок вони повинні відвідати три пари, причому всі різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

Розв'язання. Шукана кількість способів дорівнює числу розміщень з 10 елементів по три, тобто

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 ,$$

оскільки мова йде про різноманітні групи, кожна з яких складається з трьох елементів, взятих із 10, і які відрізняються одна від одної або за складом елементів, або за порядком їх розташування.

Задача 14. У турнірі бере участь 11 шахістів, причому кожні два шахісти зустрічаються один раз. Скільки партій було зіграно в турнірі?

Розв'язання. Кількість зіграних партій визначаємо за формулою (1.5), бо в даному випадку мова йде про групи елементів із 11 по 2, які відрізняються одна від одної принаймні за одним елементом. Порядок їх розташування в даному випадку не враховується в силу того, що кожні два шахісти зустрічаються один раз. Отже, число зіграних партій розраховується наступним чином:

$$C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55 .$$

Задача 15. Партія містить 30 деталей, вісім із яких є бракованими. Скількома способами можна відібрати шість деталей з даної партії так, щоб чотири з них були якісними, а дві – бракованими?

Розв'язання. Серед 30 деталей вісім є бракованими, а 30-8=22 – якісними. Чотири якісних деталі можна відібрати з 22 якісних деталей C_{22}^4 способами, а дві браковані деталі з восьми бракованих деталей – C_8^2 способами. Тому за правилом множення число способів, які надають можливість відібрати з даної партії шість деталей так, щоб чотири з них були якісними, а дві – бракованими, можна визначити таким чином:

$$C_{22}^2 \cdot C_8^2 = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 204820 .$$

Задача 16. Яку кількість прямих можна провести через вісім точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій?

Розв'язання. Число прямих дорівнює числу комбінацій із восьми елементів (восьми точок) по два (кожна пряма проходить через дві точки). Тому шукане число прямих можна отримати за формулою (1.5)

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28 .$$

Задача 17. У ящику знаходиться шість білих і вісім чорних кульок. Із даного ящика потрібно одночасно вийняти дві кульки одного кольору. Скількома способами можна це зробити?

Розв'язання. Дві білих кульки можна вийняти з ящика $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$ способами, а дві чорні кульки – $C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ способами. Оскільки з ящика одночасно виймається дві кульки одного кольору, то це може бути або дві білі, або дві чорні кульки, тому за правилом додавання шуканих способів їх кількість складатиме

$$C_6^2 + C_8^2 = 15 + 28 = 43 .$$

Питання для самоперевірки

1 Що називається сполуками? Навести приклади.

2 Які існують види сполук?

3 Які сполуки називаються розміщеннями, перестановками, комбінаціями?

4 Наведіть формули для обчислення числа розміщень, перестановок та комбінацій з повторенням і без повторення елементів.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Якою може бути кількість способів розміщення п'яти осіб у черзі до каси?

Відповідь. 120.

Завдання 2. На вершину гори веде сім доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору та спуститися з неї? Дайте відповідь на те саме питання, якщо піднімання та спускання здійснюються різними шляхами.

Відповідь. 49; 42.

Завдання 3. Скількома способами із 30 студентів можна обрати делегацію, яка б складалася з трьох студентів?

Відповідь. 4060.

Завдання 4. Студенту необхідно скласти п'ять екзаменів протягом 12 днів. Скількома способами можна скласти розклад екзаменів?

Відповідь. 95040.

Завдання 5. Енциклопедія складається з восьми томів. Скількома способами її можна поставити на полиці навмання, тобто так, щоб томи не були розташовані один за одним за порядком їх номерів?

Відповідь. 40319.

Завдання 6. Скільки різних складів хокейної команди можна утворити з восьми нападаючих, п'яти захисників і 2 воротарів, якщо до складу команди повинно ввійти три нападаючих, два захисники і один воротар?

Відповідь. 1120.

Завдання 7. У просторі задано сім точок, жодні чотири з яких не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести через сім заданих точок?

Відповідь. 35.

Завдання 8. У касі театру залишилось два квитки в партер, три – в бельетаж і один – на балкон. Скількома способами касир може видати по одному квитку шести різним особам?

Відповідь. 60.

Завдання 9. Скільки словників потрібно мати, щоб можна було безпосередньо виконати переклад з будь-якої однієї з чотирьох мов: української, англійської, німецької, французької на будь-яку іншу з них?

Відповідь. 12.

Завдання 10. Із наявних путівок для відпочинку на турбазах, у будинках відпочинку і спортивних таборах профком повинен виділити по одній путівці чотирьом особам. Скількома способами це можна виконати?

Відповідь. 81.

Завдання 11. Пасажирський поїзд складається з трьох вантажних вагонів і восьми купейних. Скількома способами можна сформувати поїзд, якщо вантажні вагони повинні знаходитися на його початку?

Відповідь. 241920.

Завдання 12. У кіоску продається морозиво шести сортів. Скількома способами можна купити 10 морозив?

Відповідь. 3003.

Завдання 13. Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складаються різноманітні числа, кожне з яких містить три або чотири цифри. Скільки таких чисел можна скласти таким чином, щоб цифри в числах не повторювалися?

Відповідь. 180.

Завдання 14. Група студентів із 30 осіб вирішила обмінятися своїми фотографіями. Яка кількість фотографій потрібна для цього?

Відповідь. 870.

Завдання 15. Скільки перестановок можна виконати з цифр 1, 2, 3, 4, 5 таким чином, щоб вони не починалися з цифри 5 і числа 12?

Відповідь. 96; 114.

Завдання 16. Скількома різними способами збори, на яких є присутніми 30 осіб, можуть обрати із свого оточення голову, його заступника та секретаря?

Відповідь. 24360.

2 ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1 Класичне, статистичне й геометричне означення ймовірності

Основними поняттями теорії ймовірностей є подія і ймовірність.

Подія – це результат випробування.

Імовірність події – це числова міра степеня об’єктивної можливості настання цієї події.

Подія називається *випадковою*, якщо за здійснення певної сукупності умов вона може або настати, або – ні. Події прийнято позначати буквами *A, B, C* і т.д., а ймовірність їх настання – буквою *P*. Наприклад, ймовірність настання події *A* можна позначити через *P(A)*.

Вірогідною називається подія, яка в результаті випробування обов'язково повинна відбутися (настати).

Неможливою називається подія, яка в результаті випробування не може відбутися.

Події називаються *несумісними*, якщо настання однієї з них виключає можливості настання інших в одному й тому самому випробуванні.

Дві несумісних події називаються *протилежними*, якщо одна з них повинна обов'язково настати.

Подія, яка є протилежною до події *A,* позначається через $\overline{A}$.

Події називаються *сумісними*, якщо настання однієї з них не виключає можливості настання інших в одному й тому самому випробуванні.

Декілька подій утворюють *повну групу*, якщо в результаті випробування настане хоча б одна з них. Інакше кажучи, настання хоча б однієї з подій повної групи є вірогідною, зокрема, якщо події, які утворюють повну групу, є попарно несумісними, то в результаті випробування настане одна і тільки одна з них.

Події називаються *рівноможливими*, якщо існує можливість вважати, що настання однієї з них не може бути більш можливим, ніж настання іншої.

Елементарні наслідки, в яких подія, яка нас цікавить, настає, називаються *сприятливими для її настання.*

Класичне означення ймовірності. *Імовірність події A* – це відношення числа сприятливих для її настання наслідків до загального числа всіх рівно можливих несумісних елементарних наслідків, які утворюють повну групу.

Імовірність настання події *A* обчислюється за формулою

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{2.1}$$

де

n – загальне число наслідків;

m – число наслідків, сприятливих для настання події *A*.

Властивості ймовірності:

1 Імовірність настання вірогідної події дорівнює одиниці.

2 Імовірність настання неможливої події дорівнює нулю.

3 Імовірність настання випадкової події є такою:

$$0 < P(A) < 1.$$

Отже, ймовірність настання будь-якої події задовольняє подвійній нерівності: $0 \le P(A) \le 1$.

Статистичне означення ймовірності. *Статистична ймовірність* (відносна частота) настання події *A* – це відношення числа випробовувань, за яких подія *A* настала, до загального числа фактично проведених випробовувань.

Відносна частота події *A* обчислюється за формулою

$$W(A) = \frac{m}{n}, \qquad (2.2)$$

де n – загальне число випробовувань;

m – число випробовувань, за яких подія A настала.

Відносна частота має такі самі властивості, як і ймовірність.

Зауваження:

1 Відносна частота може бути обчислена лише після проведення випробовувань, а ймовірність – до проведення випробовувань.

2 Значення відносної частоти, після незначного змінення (тим меншого, чим більше проведено випробовувань) може коливатися навколо деякого сталого числа (ймовірності).

3 Недоліком статистичного означення є неоднозначність статистичної ймовірності.

Геометричне означення ймовірності. Для подолання недоліку класичного означення ймовірності, який полягає в тому, що воно не може бути застосоване для випробовувань з нескінченним числом наслідків, вводяться геометричні ймовірності – ймовірності потрапляння точки до області (відрізка, частини площини і т.д.).

Якщо в область G на площині (рис. 1) навмання вкинути точку (розуміючи, що точка може потрапити в будь-яку частину області G із ймовірністю, пропорційною лише до її площі S_g і незалежною ні від її розташування, ні від її форми), то ймовірність потрапляння точки в область g, яка знаходиться всередині області G, визначається за рівністю

$$P = \frac{S_g}{S_G}. \qquad (2.3)$$

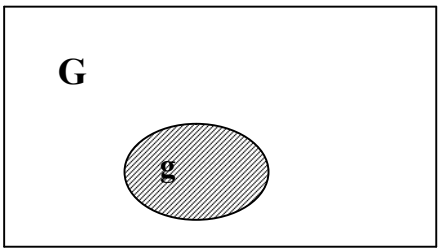


Рисунок 1

Аналогічно визначається ймовірність потрапляння точки до тривимірного об’єму і на відрізок.

Приклади розв’язання задач

Задача 1. Кинуто два гральних кубики. Обчислити ймовірність того, що сума очок на гранях, що випали, дорівнює семи.

Розв’язання. Введемо подію *A,* за настання якої сума очок на гранях, що випали, дорівнюватиме семи. Тоді за формулою (2.1)

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

На грані “першого” грального кубика, яка випала, може з’явитися одне очко, два очка, ..., шість очок. Шість аналогічних елементарних наслідків можна одержати в результаті кидання “другого” кубика. Кожний із наслідків кидання “першого” кубика може поєднуватися з кожним із наслідків кидання “другого” кубика. Тому загальна кількість можливих елементарних наслідків випробовування складатиме

$$n = 6 \cdot 6 = 36.$$

Такі наслідки є єдино можливими, а в силу симетрії кубиків вони також є рівноможливими.

Сприятливими для настання події *A*, яка нас цікавить, будуть наступні шість наслідків:

1) 1, 6; 1 + 6 = 7,
2) 2, 5; 2 + 5 = 7,
3) 3, 4; 3 + 4 = 7,
4) 6, 1; 6 + 1 = 7,
5) 5, 2; 5 + 2 = 7,
6) 4, 3; 4 + 3 = 7.

Таким чином, шукана ймовірність матиме вигляд

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Задача 2. Кинуто два гральних кубики. Обчислити ймовірність настання наступних подій, за яких:

а) сума очок, що випали, дорівнюватиме восьми, а різниця – чотирьом;

б) сума очок, що випали, дорівнюватиме восьми, якщо буде відомо, що їх різниця дорівнює чотирьом.

Розв’язання:

а) Уведемо подію *A*, за якої сума очок, що випали, дорівнює восьми, а різниця – чотирьом.

Розмірковуючи далі таким самим чином, як і в попередній задачі, знаходимо $n = \overline{A}_6^2 = 6^2 = 36$. Існує два наслідки, які можуть сприяти настанню події *A* ($m = 2$):

1) 2, 6; 2 + 6 = 8, 6 - 2 = 4,
2) 6, 2; 6 + 2 = 8, 6 – 2 = 4.

Тоді за формулою (2.1) шукана ймовірність матиме вигляд

$$P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

б) Уведемо подію *B*, за якої сума очок, що випали, дорівнює восьми, якщо відомо, що їх різниця дорівнює чотирьом.

Звертаємо увагу на те, що за умовою відомо, що різниця очок, які випали, дорівнює чотирьом. Тому загальна кількість наслідків складатиме $n = 4$:

1) 1, 5; 5 – 1 = 4,
2) 2, 6; 6 – 2 = 4,
3) 5, 1; 5 – 1 = 4,
4) 6, 2; 6 – 2 = 4.

Існує два наслідки, які можуть сприяти настанню події *B* ($m = 2$):

1) 2, 6; 2 + 6 = 8,
2) 6, 2; 6 + 2 = 8.

Отже, шукану ймовірність можна визначити таким чином:

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Задача 3. У коробці міститься шість однакових пронумерованих кубиків. Навмання по одному з коробки виймаються всі кубики. Обчислити ймовірність того, що кубики буде вийнято в порядку зростання їх номерів.

Розв'язання. Нехай з настанням події *A* номери вийнятих кубиків з'являються за зростаючим порядком. Загальну кількість наслідків обчислимо за формулою (1.3):

$$n = P_6 = 6! = 720.$$

Очевидно, що сприятливим для настання події *A* є один наслідок (номери вийнятих кубиків з'являються за зростаючим порядком: 1, 2, 3, 4, 5, 6). Тому шукану ймовірність можна визначити таким чином::

$$P(A) = \frac{1}{720}.$$

Задача 4. Серед 100 фотографій, які знаходяться в конверті, одна є шуканою. Із конверта виймається 10 фотографій. Обчислити ймовірність того, що серед них виявиться шукана.

Розв'язання. Нехай настання події *A* полягає в тому, що серед 10 навмання вийнятих фотографій виявиться потрібна, тобто шукана.

I спосіб. Загальну кількість наслідків можна обчислити за формулою (1.5)

$$n = C_{100}^{10} = \frac{100!}{10!90!}.$$

Сприятливими наслідками будуть такі, за яких серед 10 вийнятих фотографій виявиться та, яку відшукують, а отже, 10–1=9 із них є непотрібними. Оскільки з цієї кількості непотрібних (100 – 1 = 99) фотографій за їх об'єднання у групи по дев'ять штук можна утворити C_{99}^{9} груп, то за приєднання до кожної із утворених груп шуканої фотографії виявиться, що кількість наслідків, сприятливих для настання події *A,* буде такою:

$$m = C_{99}^{9} = \frac{99!}{9!90!}.$$

Отже, шукану ймовірність можна визначити таким чином:

$$P(A) = \frac{C_{99}^{9}}{C_{100}^{10}} = \frac{99!}{9!90!} : \frac{100!}{10!90!} = \frac{99!\cdot 10!}{9!\cdot 100!} = \frac{99!\cdot 9!\cdot 10}{9!\cdot 99!\cdot 100} = \frac{10}{100} = 0{,}1.$$

II спосіб. Виймаючи фотографії з конверта, будемо об'єднувати їх у групи по 10 фотографій у кожній. Очевидно, що кількість таких груп складатиме 100:10=10 (n = 10) і шукана фотографія виявиться в одній із них (m = 1). Тоді за формулою (2.1) матимемо

$$P(A) = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Задача 5. Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри, а тому, пам'ятаючи лише те, що вони є різними, набрав їх навмання. Обчислити ймовірність того, що набрані цифри є потрібними.

Розв'язання. Нехай відповідно до події *A* набрані цифри є потрібними. Враховуючи те, що три потрібні цифри повинні бути набрані з 10 різних цифр (абонент пам'ятав, що цифри є різними), загальну кількість наслідків потрібно визначати за формулою (1.1), бо в даному випадку важливим є те, які це будуть цифри і яким повинен бути порядок їх набирання. Таким чином, $n = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Сприятливим для настання події *A* є лише один наслідок (правильний номер телефону), а отже,

$$P(A) = \frac{1}{720}.$$

Задача 6. На спільній осі "кодового" замка існує чотири диски, кожний із яких поділяється на п'ять секторів, на яких написано різні цифри. Замок відкривається лише в тому випадку, якщо диски встановлено таким чином, що цифри на них складають конкретне чотиризначне число. Обчислити ймовірність того, що навіть за довільного вставлення дисків замок буде відкрито.

Розв'язання. Розглянемо подію *A*, за настання якої після довільного встановлення дисків замок буде відкрито. За формулою (1.2) із п'яти різних цифр по чотири з повторенням можна скласти $\overline{A}_5^4 = 5^4$ чотиризначних чисел. Тому кількість усіх наслідків можна визначити таким чином: $n = 5^4 = 625$. Очевидно, що сприятливим для настання події *A* буде лише один наслідок (m=1). Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{625}.$$

Задача 7. Партія із 15 деталей містить вісім стандартних. Обчислити ймовірність того, що чотири із шести, взятих навмання деталей, будуть стандартними.

Розв'язання. Очевидно, що загальна кількість елементарних наслідків буде такою: $n = C_{15}^6$. Підрахуємо кількість елементарних наслідків, які сприяють настанню події *A,* за якої чотири з шести взятих деталей будуть стандартними, а 6–4=2 – нестандартними. Кількість способів, якими можна обрати чотири стандартних деталі з восьми, складає C_8^4, а кількість способів, якими можна приєднати до них дві нестандартні деталі, складає C_7^2 (кількість нестандартних деталей у партії складає 15–8=7). Кожна комбінація з обрання стандартних деталей може поєднуватися з кожною комбінацією з обрання нестандартних деталей, тому $m = C_8^4 \cdot C_7^2$. Таким чином,

$$P(A) = \frac{C_8^4 \cdot C_7^2}{C_{15}^6} = \frac{8! \cdot 7!}{4!4!2!5!} : \frac{15!}{6!9!} = \frac{42}{143}.$$

Задача 8. Десять різних книг поставлено навмання на одну полицю. Обчислити ймовірність того, що три конкретні книги буде поставлено поряд (подія A).

Розв'язання. Уявіть собі, що три конкретні книги пов'язані між собою. Тоді число можливих способів розташування книг, пов'язаних між собою, на полиці дорівнює числу перестановок із восьми елементів (пов'язаних між собою книг, плюс сім інших), тобто $P_8 = 8!$. Три з книг, пов'язаних між собою, можна переставити $P_3 = 3!$ раз. При цьому кожна комбінація перестановок у середині пов'язаних між собою книг може поєднуватись з кожною із P_8 комбінацій. Тому число сприятливих настанню події A наслідків дорівнює $P_8 \cdot P_3$, тобто $m = P_8 \cdot P_3$. Кількість n усіх можливих наслідків очевидно складає $P_{10} = 10!$.

Таким чином, шукану ймовірність можна визначити таким чином:

$$P(A) = \frac{P_8 \cdot P_3}{P_{10}} = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{3!}{9 \cdot 10} = \frac{6}{9 \cdot 10} = \frac{1}{15}.$$

Задача 9. Першість із футболу виборює 18 команд, серед яких п'ять є лідируючими. Шляхом жеребкування команди поділено на дві групи по дев'ять команд у кожній. Якою може бути ймовірність потрапляння всіх лідируючих команд до однієї групи (настання події A)? Якою може бути ймовірність потрапляння двох лідируючих команд до однієї групи і трьох – до другої (подія B)?

Розв'язання. Очевидно, що загальна кількість наслідків буде такою: $n = C_{18}^9$.

Настанню події A сприяє стільки наслідків, скількома способами п'ять лідируючих команд може утворити дев'ятки з чотирма командами з числа інших 13 команд. Тому обидві групи можна буде утворити C_{13}^4 способами.

Отже,

$$m_A = 2C_{13}^4$$

і

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}.$$

Розмірковуючи аналогічно, визначаємо, що число наслідків, сприятливих для настання події B, можна визначити таким чином: $m_B = C_5^2 \cdot C_{13}^7 + C_5^3 \cdot C_{13}^6$.

Отже,

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{C_5^2 \cdot C_{13}^7 + C_5^3 \cdot C_{13}^6}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}.$$

Задача 10. Телефонний номер, названий навмання, складається з п'яти цифр. Якою є ймовірність того, що в ньому: а) усі цифри є різними (подія A); б) усі цифри є непарними (подія B)?

Розв'язання:

а) Оскільки на кожному з п'яти місць у п'ятизначному телефонному номері може стояти будь-яка з цифр (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9), то кількість всіх різних п'ятизначних номерів складає $\overline{A}_{10}^{5} = 10^5$ (для наочності всі їх можна перенумерувати таким чином: номер 00000 – 1-й, номер 00001 – 2-й, ..., номер 99999 – 100000-й). Номери, в яких усі цифри є різними, являють собою розміщення з десяти елементів по п'ять без повторень. Тому число сприятливих наслідків складає $m = A_{10}^{5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, а шукану ймовірність можна визначити таким чином:

$$P(A) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^5} = 0{,}3024.$$

б) Із п'яти непарних цифр (1, 3, 5, 7, 9) можна утворити $\overline{A}_{5}^{5} = 5^5$ різних п'ятизначних номерів. 5^5 – це число наслідків, сприятливих настанню події *B*. Оскільки кількість всіх рівноможливих наслідків становить 10^5, то шукана ймовірність визначається таким чином:

$$P(B) = \frac{5^5}{10^5} = \left(\frac{5}{10}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

Задача 11. Під час випробовування партії приладів відносна частота виявлення серед них непридатних становила 0,1. Визначити кількість придатних приладів, якщо відомо, що від загальної їх кількості було перевірено 200 штук.

Розв'язання. Скориставшись формулою (2.2), визначимо кількість непридатних приладів, які входять до складу випробовуваної партії:

$$m = m \cdot w(A) = 200 \cdot 0{,}1 = 20,$$

отже, кількість придатних приладів, які входять до складу випробовуваної партії, становить 200 – 20 = 180.

Задача 12. На дев'яти картках написано цифри 0,1,2,3,4,5,6,7,8. Дві з карток беруться навмання і кладуться одна за одною за порядком їх обирання. Далі називається отримане число, наприклад, 07(сім), 14 (чотирнадцять) і т. д. Обчислити ймовірність того, що число буде парним (настання події *A*).

Розв'язання. Парність числа визначається за останньою цифрою, яка повинна бути парною (нуль – число парне). Оскільки останньою може бути будь-яка з дев'яти цифр, написаних на картках, то числом усіх можливих наслідків є $n = 9$, а числом наслідків, сприятливих для настання події *A*, – m=5 (картки з номерами 0, 2, 4, 6, 8).

Таким чином, шукана ймовірність складає $P(A) = \frac{5}{9}$.

Зауважимо, що числа *n* і *m* у даній задачі можна також визначити за допомогою формул комбінаторики. (*Пропонуємо виконати це самостійно*).

Задача 13. На двох станках виготовляються однотипні деталі. Ймовірність виготовлення браку на першому станку складає 3%, а на другому – 2%. Виготовлені деталі надходять на склад, причому деталей, виготовлених на

першому станку, надходить удвічі більше, ніж на другому. Обчислити ймовірність того, що деталь, взята зі складу навмання, буде бракованою (настання події A).

Розв'язання. Припустимо, що на склад надійшло *к* штук деталей, виготовлених на другому станку. Отже, на першому станку виготовлено *2к* штук деталей. Таким чином, загальна кількість деталей, які надійшли на склад, складає $n = 3к$ штук. Визначивши, що ймовірність виготовлення браку на першому і на другому станках складає відповідно 0,03 і 0,02, за формулою (2.1) визначимо кількість бракованих деталей, виготовлених на першому станку:

$$m_1 = 2k \cdot 0{,}03 = 0{,}06k,$$

і кількість бракованих деталей, виготовлених на другому станку:

$$m_2 = k \cdot 0{,}02 = 0{,}02k.$$

Отже, на склад надходять браковані деталі в кількості $m = m_1 + m_2 = 0{,}06k + 0{,}02k = 0{,}08k$ штук, за якою визначається кількість наслідків, сприятливих для настання події A.

Таким чином, шукана ймовірність складає $P(A) = \dfrac{0{,}08k}{3k} \approx 0{,}027$.

Задача 14. Ліфт у п'ятиповерховому будинку відправляється з трьома пасажирами. Обчислити ймовірність того, що на кожному поверсі вийде не більше одного пасажира (настання події A), припускаючи, що всі можливі способи розподілу пасажирів за поверхами є рівноймовірними.

Розв'язання. Кожний пасажир має чотири можливості виходу з ліфта (на другому, третьому, четвертому і п'ятому поверхах). Отже, для двох пасажирів існує $4 \cdot 4 = 4^2$ можливості виходу з ліфта (кожна можливість виходу першого пасажира може поєднуватися з кожною можливістю виходу другого пасажира), для трьох пасажирів – 4^3 можливості. Можливостей, сприятливих для настання події *A,* існує $4 \cdot 3 \cdot 2$, оскільки за умовою задачі на кожному з поверхів повинно вийти не більше одного пасажира. Тобто, якщо перший пасажир може вийти на кожному з чотирьох поверхів, то для другого залишається можливість виходу на кожному з трьох поверхів, а для третього – на кожному з двох поверхів.

Отже, шукану ймовірність можна визначити таким чином:

$$P(A) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{4^3} = \frac{3}{8}.$$

Задача 15. Усередину круга, що має радіус *R,* навмання кинуто точку. Обчислити ймовірність того, що точка потрапить всередину вписаного в круг квадрата. Припускається, що ймовірність потрапляння точки в середину квадрата є пропорційною до площі квадрата і не залежить від його розташування відносно круга.

Розв'язання. Площа круга складає $S_{кр} = \pi R^2$, площа квадрата – $S_{кв} = 2R^2$ (рис.2). Отже, шукану ймовірність можна визначити за формулою (2.3):

$$P = \frac{S_{кв}}{S_{кр}} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi}.$$

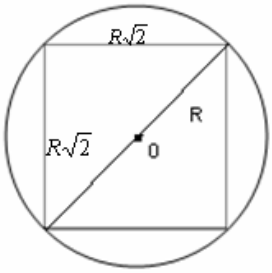


Рисунок 2

Задача 16. Відомо, що телефонний дзвінок повинен бути виконаний в період часу між 11 годиною і 11 годиною 30 хвилин. Якою є ймовірність того, що дзвінок буде виконано в останні 10 хвилин указаного проміжку часу, якщо момент дзвінка є випадковим?

Розв'язання. Скористаємося геометричною схемою. Для цього проміжок часу від 11 годин до 11 годин 30 хвилин подамо у вигляді відрізка *AB* довжиною в 30 одиниць, а проміжок часу від 11 годин 20 хвилин до 11 годин 30 хвилин – у вигляді відрізка *CB* довжиною в 10 одиниць (рис.3).

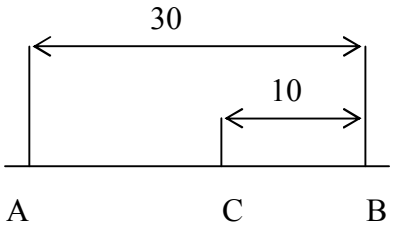


Рисунок 3

Випадковий дзвінок, виконаний в період часу між 11 годиною і 11 годиною 30 хвилин, зобразимо точкою, навмання обраною на відрізку *AB*. Тоді ймовірність того, що дзвінок відбудеться в період часу між 11 годиною 20 хвилин і 11 годиною 30 хвилин на отриманій схемі означає ймовірність того, що точка, навмання обрана на відрізку *AB*, виявиться такою, що належить до відрізка *CB*. Така ймовірність, очевидно, може складати

$$P = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Задача 17. Робітник обслуговує два агрегати. Багатоденні спостереження довели, що кожен із агрегатів потребує десятихвилинної уваги робітника протягом години їх експлуатації. Обчислити ймовірність того, що протягом години експлуатації один із агрегатів потребує уваги робітника саме в той час, коли він обслуговує другий агрегат (припускається, що зупинення кожного з агрегатів протягом години їх експлуатації може відбутися в будь-який момент часу і моменти їх зупинення є незалежними).

Розв'язання. Позначимо через X момент початку обслуговування першого агрегату, а через Y – другого. Один із агрегатів потребує уваги робітника в той час, коли він обслуговує другий за умови, якщо $|X - Y| \le 10$.

Розглянемо X і Y як координати в прямокутній системі координат. За одиницю масштабу оберемо хвилину.

Усі можливі наслідки зобразимо точками квадрата із сторонами по 60 ум. од., а сприятливі наслідки зобразимо у вигляді заштрихованої частини прямокутника (рис.4). Шукана ймовірність дорівнюватиме відношенню площі заштрихованої частини прямокутника (її простіше визначити як різницю між площею квадрата і площею двох прямокутних рівнобедрених трикутників, що утворилися, катети яких дорівнюють по 50 ум.од.) до площі всього квадрата, тобто

$$P = \frac{60^2 - 50 \cdot 50}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

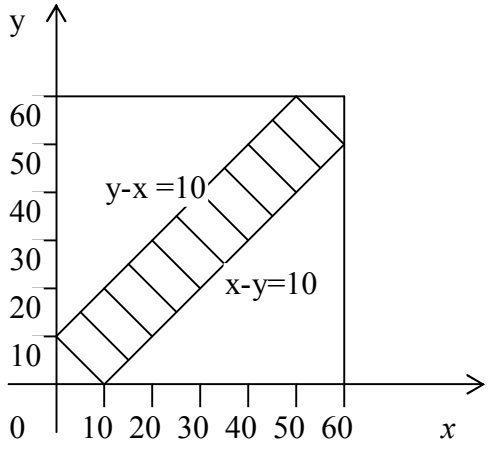


Рисунок 4

Питання для самоперевірки

1 Що вивчає теорія ймовірностей?

2 Назвіть основні поняття теорії ймовірностей.

3 Що розуміється під поняттям випробовування?

4 Що називається подією? Ймовірністю?

5 Яка з подій називається випадковою, вірогідною, неможливою? Наведіть приклади.

6 Які події називаються несумісними? Сумісними? Наведіть приклади.

7 Які події називаються рівноможливими? Наведіть приклади.

8 Що собою являє повна група подій? Наведіть приклади.

9 Наведіть означення класичної, статистичної та геометричної ймовірностей.

10 Сформулюйте властивості ймовірності та наведіть формулу для її обчислення.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. У ящику знаходиться три білих і дев'ять чорних кульок. Із ящика навмання виймається одна кулька. Якою може бути ймовірність того, що вийнята кулька буде чорною?

Відповідь. $\frac{3}{4}$.

Завдання 2. У ящику знаходиться чотири білих і сім чорних кульок. Із ящика одночасно виймається дві кульки. Якою може бути ймовірність того, що обидві кульки будуть білими?

Відповідь. $\frac{6}{55}$.

Завдання 3. У партії з восьми деталей є шість стандартних. Обчислити ймовірність того, що серед п'яти, вийнятих навмання деталей, три будуть стандартними.

Відповідь. $\frac{5}{14}$.

Завдання 4. Ольга і Микола домовилися зустріти Новий рік у компанії з десяти осіб, причому обоє хотіли сидіти за святковим столом поруч. Обчислити ймовірність здійснення їх бажання, якщо серед друзів прийнято розподіляти місця шляхом жеребкування.

Відповідь. $\frac{2}{9}$.

Завдання 5. Тридцять дві букви українського алфавіту написано на картках розрізної азбуки. Шість карток обираються навмання і кладуться одна за одною в порядку їх обрання. Обчислити ймовірність того, що в результаті буде отримано слово «градус».

Відповідь. $\frac{1}{906192}$.

Завдання 6. На полиці стоїть 25 підручників, п'ять із яких – із теорії ймовірностей. Студент навмання бере два підручники. Обчислити ймовірність того, що вони з теорії ймовірностей.

Відповідь. $\frac{1}{30}$.

Завдання 7. Із п'яти букв розрізної азбуки складено слово «книга». Дитина, яка не вміє читати, розсипала букви, а потім склала їх у довільному порядку. Обчислити ймовірність того, що в результаті вона знову складе слово «книга».

Відповідь. $\frac{1}{120}$.

Завдання 8. Із восьми букв розрізної азбуки складено слово «інститут». Далі картки з буквами перемішано і знову складено в довільному порядку. Якою може бути ймовірність того, що знову буде отримано слово «інститут»?

Відповідь. $\frac{1}{6720}$.

Завдання 9. Тризначне число утворено з навмання обраних трьох цифр, які не повторюються, із переліку цифр 1,2,3,4,5. Якою є ймовірність того, що це число буде парним?

Відповідь. 0,4.

Завдання 10. Задумано двозначне число, цифри якого є різними. Обчислити ймовірність того, що задуманим числом являтиметься:

а) випадково назване двозначне число;

б) випадково назване двозначне число, цифри якого є різними.

Відповідь. а) $\frac{1}{90}$; б) $\frac{1}{81}$.

Завдання 11. Монету кинуто двічі. Обчислити ймовірність того, що хоча б один раз монета впаде "гербом" догори.

Відповідь. $\frac{3}{4}$.

Завдання 12. У пачці міститься 20 лотерейних квитків, які мають номери 101, 102, ..., 120 і розташовані довільно. Два квитки вийнято з пачки навмання. Обчислити ймовірність того, що навмання вийняті квитки матимуть номери 101 і 120.

Відповідь. $\frac{1}{190}$.

Завдання 13. На складі є 15 телевізорів, причому 10 із них виготовлено Львівським заводом. Обчислити ймовірність того, що три з п'яти обраних телевізорів будуть такими, що виготовлені Львівським заводом.

Відповідь. $\frac{400}{1001}$.

Завдання 14. Пристрій складається з п'яти елементів, два з яких є зношеними. В разі вмикання пристрою вмикаються випадково два елементи. Обчислити ймовірність того, що вимкненими виявляться незношені елементи.

Відповідь. 0,3.

Завдання 15. Збори, на яких було 25 присутніх осіб, серед яких – п'ять жінок, обирають делегацію в кількості трьох осіб. Припускаючи, що кожна з присутніх осіб з однаковою ймовірністю може бути обраною, обчислити ймовірність того, що до складу делегації увійде дві жінки й один чоловік.

Відповідь. 0,087.

Завдання 16. Із партії деталей, серед яких 31 деталь не має дефектів, а шість мають, беруть навмання три деталі. Якою буде ймовірність того, що всі три деталі виявляться такими, що не мають дефектів?

Відповідь. 0,579.

Завдання 17. Під час стрільби з гвинтівки відносна частота влучення в ціль виявилася рівною 0,85. Визначити кількість влучень в ціль, якщо всього було виконано 120 пострілів.

Відповідь. 102 влучень.

Завдання 18. Барабан револьвера має сім гнізд, у п'ять із яких закладено патрони, а два залишено порожніми. Після того, як барабан приводиться в обертання, навпроти ствола випадково виявиться одне з гнізд. Внаслідок

натискання спускового курка постріл може не відбутися, якщо комірка є порожньою. Обчислити ймовірність того, що, повторюючи такий експеримент двічі підряд, жодного разу постріл не відбудеться.

Відповідь. $\frac{4}{49}$.

Завдання 19. За умовою попередньої задачі знайти ймовірність того, що постріли відбудуться як за проведення першого, так і за проведення другого експериментів.

Відповідь. $\frac{20}{49}$.

Завдання 20. До складу студентської групи входить 10 дружинників, три з яких у віці від 18 до 20 років, п'ять – у віці від 20 до 22, два – у віці від 22 до 24 років. Шляхом жеребкування серед дружинників потрібно обрати одну особу для здійснення чергування. Якою може бути ймовірність того, що обраним виявиться дружинник у віці від 18 до 22 років?

Відповідь. 0,8.

Завдання 21. У середині еліпса, який має півосі a = 50 см і $в$ = 20 см, проведено чотири кола, які не перетинаються ні з еліпсом, ні одне з одним. Радіус кожного з кіл дорівнює 2,1 см. Обчислити ймовірність того, що розміщення випадкової точки, яке є рівноможливим усередині еліпса, виявиться всередині одного з кругів.

Відповідь. 0,01764.

Завдання 22. Взвод рівномірно обстрілює площу шириною 90 м і глибиною 100 м, на якій розташовується гарматна обслуга противника. Обчислити ймовірність прямого влучення в ціль однією міною, якщо гарматна обслуга розташується на площі 20 квадратних метрів.

Відповідь. $\frac{1}{450}$.

Завдання 23. На склад надходить 3000 деталей, виготовлених першим автоматом і 2000 – другим. Перший автомат виготовляє 0,2% браку, а другий – 0,3%. Обчислити ймовірність потрапляння на склад бракованої деталі.

Відповідь. 0,0024.

Завдання 24. У середину круга, що має радіус R, навмання кинуто точку. Обчислити ймовірність того, що точка потрапить у середину правильного трикутника, вписаного в круг. Припускається, що ймовірність потрапляння точки в частину круга є пропорційною до площі цієї частини і не залежить від її розташування відносно круга.

Відповідь. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

Завдання 25. Двоє студентів умовилися зустрітися в певному місці в період між 12 і 13 годинами дня. Той із них, хто прийде першим, повинен чекати на другого протягом $\frac{1}{4}$ години, після чого – піти. Обчислити ймовірність того, що зустріч відбудеться за умови, якщо кожний студент навмання обере момент свого приходу (у період від 12 до 13 години).

Вказівка. Розглянемо прямокутну систему координат xOy і для спрощення зазначимо, що зустріч повинна відбутися в період між 0 і 1 годиною. Можливими є такі значення координат: $0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1$, а сприятливими для настання зустрічі –такі значення координат: $|y - x| \le \frac{1}{4}$.

Відповідь. $\frac{7}{16}$.

3 ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

До основних теорем теорії ймовірностей відносяться теореми додавання і множення ймовірностей.

3.1 Теореми додавання

Сумою $A+B$ двох сумісних подій A і B, називається подія, яка полягає в настанні або події A, або події B, або обох даних подій.

Сумою декількох сумісних подій називається подія, яка полягає в настанні хоча б однієї з даних подій.

Зокрема, якщо дві події: A і B, є несумісними, то сума $A+B$ є подією, яка полягає в настанні однієї з даних подій, неважливо якої.

1 Ймовірність настання однієї з двох несумісних подій, неважливо якої, дорівнює сумі ймовірностей настання даних подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \tag{3.1}$$

Дана теорема справджується для будь-якого скінченого числа попарно несумісних подій, тобто

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n). \tag{3.2}$$

2 Сума ймовірностей настання подій $A_1, A_2, ..., A_n$, які утворюють повну групу, дорівнює одиниці:

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1. \tag{3.3}$$

3 Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{3.4}$$

Прийнято $P(A)$ і $P(\overline{A})$ позначати відповідно через p і q. Таким чином, якщо $P(A) = p$, а $P(A) = q$, то згідно з формулою (3.4)

$$p + q = 1. \tag{3.5}$$

4 Імовірність настання хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей настання таких подій без імовірності їх сумісного настання:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{3.6}$$

Використовуючи формулу (3.6), треба мати на увазі, що події A і B можуть бути як незалежними, так і залежними. Якщо події A і B є несумісними, то їх суміщення є подією неможливою, а отже, $P(AB) = 0$. Формула (3.6) для несумісних подій набуває вигляду

$$P(A+B) = P(A) + P(B),$$

тобто вигляду вже відомої формули (3.1).

Таким чином, формула (3.6) є вірною як для сумісних, так і для несумісних подій.

3.2 Теореми множення

Добутком двох подій A і B називається подія AB, яка полягає в сумісному настанні (суміщенні) цих подій.

Добутком декількох подій називається подія, яка полягає в сумісному настанні всіх цих подій.

Умовною ймовірністю $P_A(B)$ називається ймовірність настання події B, обчислена відповідно до припущення про те, що подія A уже настала.

1 Імовірність сумісного настання двох подій дорівнює добутку ймовірності настання однієї з них на умовну ймовірність настання другої, обчислену відповідно до припущення про те, що перша подія вже відбулася:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \qquad (3.7)$$

Наслідок. $P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) ... P_{A_1 A_2 ... A_{n-1}}(A_n)$.

Зауважимо, що порядок, у якому розташовані події, може бути обрано будь-яким. Зокрема, для трьох подій порядок їх розташування може бути таким:

$$P(ABC) = P(A) P_A(B) P_{AB}(C). \qquad (3.8)$$

Подія B називається незалежною від події A, якщо настання події A не змінює ймовірності настання події B, тобто якщо умовна ймовірність настання події B дорівнює безумовній імовірності її настання:

$$P_A(B) = P(B).$$

Деяка кількість подій називається попарно незалежною, якщо кожні дві з них є незалежними.

Деяка кількість подій називається незалежною в сукупності (або просто незалежною), якщо незалежними є кожні дві з них, а також кожна з інших подій та можливі добутки решти подій.

2 Якщо події A і B є незалежними, то

$$P(AB) = P(A) P(B). \qquad (3.9)$$

3 Імовірність сумісного настання декількох подій, незалежних у сукупності, дорівнює добутку ймовірностей їх настання:

$$P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P(A_2) ... P(A_n). \qquad (3.10)$$

Зауважимо, що на практиці про незалежність подій, як правило, можна зробити висновок за змістом задачі.

4 Імовірність настання хоча б однієї з подій $A_1, A_2, ..., A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей настання протилежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n. \qquad (3.11)$$

Якщо події $A_1, A_2, ..., A_n$ мають однакову ймовірність настання хоча б однієї з них, то

$$P(A) = 1 - q^n. \qquad (3.12)$$

Формула повної ймовірності. Імовірність настання події A, яка може настати лише за умови настання однієї з несумісних подій (гіпотез) $B_1, B_2, ..., B_n$, що утворюють повну групу, дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на відповідну умовну ймовірність настання події A:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A), \qquad (3.13)$$

де $P(B_1) + P(B_2) + ... + P(B_n) = 1$ є рівністю, яка називається формулою повної ймовірності.

Формула Байєса. Нехай подія A може настати лише за умови настання однієї з несумісних подій (гіпотез) $B_1, B_2, ..., B_n$, які утворюють повну групу подій. Якщо подія A вже відбулася, то ймовірності гіпотез можуть бути переоцінені за формулами Байєса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}, \qquad i = 1,2,...n, \qquad (3.14)$$

де

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A).$$

Приклади розв'язання задач

Задача 1. Імовірність того, що стрілець під час стрільби по мішені заробить 10 очок, становить 0,4; 9 очок – 0,2; 8 очок – 0,18; 7 очок – 0,1; 6 очок або менше – 0,12. Обчислити ймовірність того, що стрілець в результаті здійснення одного пострілу заробить не менше 7 очок (настання події *A*).

Розв'язання:

1 спосіб. Подія *A* настане, якщо стрілець заробить 7 очок (подія A_1), 8 очок (подія A_2), 9 очок (подія A_3), 10 очок (подія A_4). Оскільки події A_1, A_2, A_3, A_4 є несумісними, то за формулою (3.2)

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4).$$

За умовою задачі, $P(A_1) = 0{,}1$, $P(A_2) = 0{,}18$, $P(A_3) = 0{,}2$ і $P(A_4) = 0{,}4$, тому шукану ймовірність можна визначити таким чином:

$$P(A) = 0{,}1 + 0{,}18 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}88.$$

2 спосіб. Очевидно, що подія *A* є протилежною до події $\overline{A}$ (стрілець заробить 6 або менше очок). Оскільки за умовою задачі $P(\overline{A}) = 0{,}12$, то за формулою (3.4) будемо мати:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}12 = 0{,}88.$$

Як бачимо, одержано такий самий результат.

Задача 2. Обчислити ймовірність того, що навмання взяте двозначне число, виявиться кратним або 2, або 5, або і 2, і 5 одночасно (подія *A*).

Розв'язання. Введемо такі події: A_1 – навмання взяте двозначне число, кратне 2; A_2 – навмання взяте двозначне число, кратне 5. Тоді подію *A* можна розглядати як суму подій A_1 і A_2, тобто $A = A_1 + A_2$. Оскільки події A_1 і A_2 є сумісними, то за формулою (3.6)

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2).$$

Двозначними є числа 10, 11, ..., 98, 99. Взагалі їх 90. Очевидно, що 45 із них є кратними 2 (сприятливими для настання події A_1), 18 – кратними 5 (сприятливими для настання події A_2) і нарешті 9 – кратними і 2, і 5 одночасно (сприятливими для настання події $A_1 A_2$). Отже, за формулою (2.1)

$$P(A_1) = \frac{45}{90} = 0{,}5;\ \ P(A_2) = \frac{18}{90} = 0{,}2;\ \ P(A_1 A_2) = \frac{9}{90} = 0{,}1,$$

а отже, шукану ймовірність можна визначити таким чином:

$$P(A) = 0{,}5 + 0{,}2 - 0{,}1 = 0{,}6.$$

Задача 3. У разі збільшення напруги може відбутися розрив електричного кола внаслідок виходу з ладу одного з трьох послідовно з'єднаних елементів. Ймовірності настання відмови елементів відповідно дорівнюють 0,2, 0,3 і 0,4. Обчислити ймовірність того, що розрив кола не настане.

Розв'язання. Нехай настання подій $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$ означає вихід із ладу відповідно першого, другого і третього елементів. Імовірність їх настання (за умовою) відповідно є такою:

$$P(\overline{A_1}) = q_1 = 0{,}2; P(\overline{A_2}) = q_2 = 0{,}3; P(\overline{A_3}) = q_3 = 0{,}4,$$

тоді ймовірність настання протилежних подій A_1, A_2, A_3 (відповідно перший, другий і третій елементи не виходять із ладу, тобто працюють), визначається за формулою (3.5)

$$p_1 = 1 - q_1 = 0{,}8; p_2 = 1 - q_2 = 0{,}7; p_3 = 1 - q_3 = 0{,}6.$$

Подія *A*, яка полягає в тому, що розрив кола не настане, є суміщенням незалежних подій A_1, A_2, A_3, тобто $A = A_1 A_2 A_3$. Отже, шукану ймовірність можна визначити за формулою (3.10)

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}336.$$

Задача 4. Електричне коло, яке існує між точками *M* і *N,* утворено за схемою, зображеною на рисунку 5. Різні елементи кола працюють незалежно одне від одного. Ймовірності настання безвідмовної роботи елементів А1, А2, А3 і А4 за час *T* відповідно дорівнюють 0,6, 0,8, 0,7 і 0,9. Обчислити ймовірність настання безвідмовної роботи системи за час *T*.

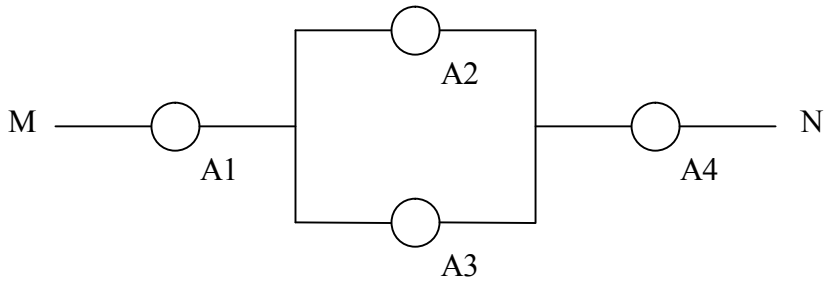


Рисунок 5

Розв'язання. Ділянка MN електричного кола пропускає струм (подія A) у випадку суміщення трьох подій: події A_1 – працює елемент А1, події А4 – працює елемент А4 і події B – працює хоча б один із двох елементів: А2 або А3, тобто $A = A_1 \cdot A_4 \cdot B$. Оскільки події A_1, A_4 і B є незалежними, то

$$P(A) = P(A_1)P(A_4)P(B).$$

Для визначення $P(B)$ обчислимо ймовірність настання події $\overline{B}$, яка полягає в тому, що елементи A_2 і A_3 вийшли з ладу. Оскільки $\overline{B} = \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$ і події $\overline{A_2}$ і $\overline{A_3}$ є незалежними, то

$$P(\overline{B}) = P(\overline{A_2})P(\overline{A_3}) = (1 - P(A_2))(1 - P(A_3)) = (1 - 0{,}8)(1 - 0{,}7) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

Тоді за формулою (3.4) матимемо

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - 0{,}06 = 0{,}94.$$

Таким чином, шукану ймовірність можна визначити таким чином:

$$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}94 = 0{,}5076.$$

Задача 5. Якою може бути ймовірність того, що виріб, взятий навмання, виявиться першосортним, якщо відомо, що 3% від усієї кількості виробів складають нестандартні вироби, а 75% стандартних виробів задовольняють вимогам першого сорту?

Розв'язання. Позначимо через A_1 подію, яка полягає в тому, що виріб виявиться стандартним, а через A_2 – подію, яка полягає в тому, що стандартний виріб задовольняє вимогам щодо першосортних виробів. Тоді подія A полягає в тому, що взятий навмання виріб виявиться першосортним складається з суміщення подій A_1 і A_2, тобто $A = A_1 \cdot A_2$. Оскільки події A_1 і A_2 є залежними (виріб буде першосортним за умови, що він є стандартним), то за формулою (3.7)

$$P(A) = P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2).$$

За умовою задачі відомо, що 75% стандартних виробів задовольняють вимогам щодо виробів першого сорту, а отже, $P_{A_1}(A_2) = 75\% = 0{,}75$. Крім того, відомо, що 3% від усієї кількості виробів – це нестандартні вироби. Тому стандартні вироби складають 100%–3%=97% від усієї кількості виробів. Отже, ймовірність того, що взятий виріб виявиться стандартним, буде такою:

$$P(A_1) = 97\% = 0{,}97.$$

Таким чином, шукану ймовірність можна визначити так:

$$P(A) = 0{,}97 \cdot 0{,}75 = 0{,}7275 .$$

Задача 6. У коробці знаходиться 7 деталей першого сорту, 5 – другого і 3 – третього сорту. Із коробки послідовно виймається три деталі, причому назад у коробку деталі не повертаються. Обчислити ймовірність того, що перша вийнята деталь належить до першого сорту (подія A_1), друга – до другого (подія A_2) і третя – до третього (подія A_3).

Розв'язання. Позначимо через *A* подію, яка полягає в тому, що деталі вийняті з коробки в такій послідовності: деталь першого сорту, деталь другого сорту, деталь третього сорту.

Очевидно, що $A = A_1 A_2 A_3$. Події A_1, A_2, A_3 являються залежними в силу того, що вийняті деталі в коробку не повертаються. Отже, за формулою (3.8) маємо таку рівність

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) .$$

Обчислимо ймовірності, які належать до правої частини даної рівності. Ймовірність того, що першою буде вийнято деталь першого сорту, має вигляд $P(A_1) = \frac{7}{15}$, тобто загальна кількість деталей складає *n*=7+5+3=15, сприятливих для настання події A_1 – сім (*m* = 7). Ймовірність того, що другою буде вийнято деталь другого сорту за умови, що першою буде вийнято деталь першого сорту має вигляд $P_{A_1}(A_2) = \frac{5}{14}$, бо в коробці залишилось 14 деталей, 5 із яких належать до другого сорту. Ймовірність того, що третьою буде вийнято деталь третього сорту після того, як було вийнято деталь першого і деталь другого сорту, має вигляд $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{3}{13}$ (після того, як було вийнято одну деталь першого сорту і одну деталь другого сорту, в коробці залишилось 13 деталей, 3 з яких належать до третього сорту).

Таким чином, шукана ймовірність матиме вигляд

$$P(A) = \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{26} .$$

Слід зауважити, що таку саму ймовірність можна було б визначити безпосередньо за формулою $P(A) = \frac{m}{n}$, де $n = A_{15}^3$ (число розміщень із 15 елементів по 3) і $m = 7 \cdot 5 \cdot 3$, оскільки існує 7 способів виймання деталі першого сорту першою, 5 способів виймання деталі другого сорту другою і 3 способи виймання деталі третього сорту третьою.

Як бачимо з виконаних розрахунків, для визначення кожної з шуканих ймовірностей застосовувалася лише одна з двох теорем: або теорема додавання, або теорема множення. Однак на практиці часто зустрічаються задачі, для розв'язання яких доводиться застосовувати одночасно обидві теореми та їх наслідки. Доведемо це на прикладах.

Задача 7. Відомо, що три станки працюють незалежно один від одного. Ймовірність того, що перший станок може безперебійно працювати протягом

деякого часу *T,* становить $p_1 = 0{,}9$, другого – $p_2 = 0{,}8$, третього – $p_3 = 0{,}7$. Якою може бути ймовірність того, що протягом зазначеного проміжку часу:

а) усі три станки будуть працювати безперебійно (подія *A*);

б) лише два станки будуть працювати безперебійно (подія *B*);

в) лише один станок буде працювати безперебійно (подія *C*);

г) хоча б один із станків буде працювати безперебійно (подія *D*);

д) жоден із станків не буде працювати (подія *E*)?

Розв'язання. Запишемо наступні події:

A_1 – працює перший станок,

A_2 – працює другий станок;

A_3 – працює третій станок.

Тоді події, протилежні до них, можна записати у вигляді:

$\overline{A_1}$ – не працює перший станок;

$\overline{A_2}$ – не працює другий станок;

$\overline{A_3}$ – не працює третій станок.

За умовою задачі $P(A_1) = p_1 = 0{,}9; P(A_2) = p_2 = 0{,}8; P(A_3) = p_3 = 0{,}7$. Отже, $P(\overline{A_1}) = q_1 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1; P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2; P(\overline{A_3}) = q_3 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

а) Очевидно, що подія $A = A_1 A_2 A_3$. Оскільки за умовою задачі події A_1, A_2, A_3 є незалежними (станки працюють незалежно один від одного), то за формулою (3.10) матимемо

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p_1 p_2 p_3.$$

Виконаємо таке обчислення:

$$P(A) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

б) Подія *B* полягає в тому, що серед трьох станків працює лише два. Це можливо за умови настання однієї з наступних подій: $A_1 A_2 \overline{A_3}$, $A_1 \overline{A_2} A_3$, $\overline{A_1} A_2 A_3$. Отже,

$$B = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$$

Оскільки події A_1, A_2, A_3, $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, і $\overline{A_3}$ є незалежними в сукупності, а події $A_1 A_2 \overline{A_3}$, $A_1 \overline{A_2} A_3$ і $\overline{A_1} A_2 A_3$ є несумісними, то, використовуючи послідовно формули (3.2) і (3.10), обчислимо ймовірність можливості безперебійної роботи двох станків:

$$P(B) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) =$$

$$= P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3.$$

Підставляючи до отриманої формули відповідні значення ймовірностей, остаточно будемо мати:

$$P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}216 + 0{,}126 + 0{,}056 = 0{,}398.$$

в) Аналогічні міркування приводять до того, що

$$P(C) = P(A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3.$$

Після підстановки до даної формули відповідних значень ймовірностей обчислимо ймовірність можливості безперебійної роботи одного станка.

$$P(C) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}054 + 0{,}024 + 0{,}014 = 0{,}092.$$

г) Імовірність настання події D обчислимо за формулою (3.11):

$$P(D) = 1 - q_1 q_2 q_3.$$

Після виконаних обчислень отримаємо:

$$P(D) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994.$$

Таку ймовірність можна обчислити іншим способом. Очевидно, що *D=A+B+C*. Тоді

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = 0{,}504 + 0{,}398 + 0{,}092 = 0{,}994.$$

Зазначимо, що такий спосіб розв'язання задачі є нераціональним. Дійсно, якщо б імовірності *P(A), P(B)* і *P(C)* не було обчислено раніше, то обчислення *P(D)* значно б ускладнилося.

д) Настання події *E* полягає в суміщенні незалежних подій $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ і $\overline{A_3}$, тому

$$P(E) = P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = q_1 q_2 q_3.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо:

$$P(E) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006.$$

З іншого боку, враховуючи, що події *D* і *E* являються незалежними, а отже, *P(E) + P(D)* = 1, а ймовірність настання події *P(D)* уже відома і дорівнює 0,994, обчислимо ймовірність того, що жоден станок не спрацює:

$$P(E) = 1 - 0{,}994 = 0{,}006.$$

Як бачимо, отримано такий самий результат. Зауважимо, що в даному випадку було б помилковим вважати, що протилежними являються події *A* і *E*. Дійсно,

$$P(A) + P(E) = 0{,}504 + 0{,}006 = 0{,}510 \neq 1.$$

Задача 8. У першій коробці міститься 20 радіоламп, 18 з яких є стандартними; в другій – 10 радіоламп, 9 з яких є стандартними. Із другої коробки навмання вийнято одну радіолампу й перекладено в першу. Обчислити ймовірність того, що радіолампа, вийнята навмання з першої коробки, буде стандартною (настання події *A*).

Розв'язання. Можливо, з другої коробки було вийнято і перекладено в першу коробку або стандартну радіолампу (подія A_1), або нестандартну (подія A_2). Ймовірність настання таких подій є такою: $P(A_1) = \frac{9}{10}$ і $P(A_2) = \frac{1}{10}$. Подія *A* може настати лише сумісно або з подією A_1, або з подією A_2, які утворюють повну групу, бо $P(A_1) + P(A_2) = 0{,}9 + 0{,}1 = 1$. Тому, за теоремою додавання, будемо мати

$$P(A) = P(AA_1 + AA_2) = P(AA_1) + P(AA_2).$$

Ураховуючи далі те, що події AA_1 і AA_2 є залежними, за теоремою множення будемо мати

$$P(AA_1) = P(A_1)P_{A_1}(A); P(AA_2) = P(A_2)P_{A_2}(A).$$

Отже,

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A) + P(A_2)P_{A_2}(A).$$

Умовна ймовірність того, що з першої коробки вийнято одну стандартну радіолампу за умови, що з другої коробки в першу перекладено стандартну радіолампу, обчислюється таким чином: $P_{A_1}(A) = \frac{19}{21}$, а це означає те, що в коробці міститься 21 радіолампа, а також те, що серед цієї кількості радіоламп 19 радіоламп є стандартними.

Умовна ймовірність того, що з першої коробки вийнято одну стандартну радіолампу за умови, що з другої коробки в першу перекладено одну нестандартну радіолампу, обчислюється таким чином: $P_{A_2}(A) = \frac{18}{21}$, оскільки в першій коробці тепер міститься 21 радіолампа, а кількість стандартних радіоламп, як і раніше, становить 18.

Таким чином, шукана ймовірність має вигляд

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0{,}9.$$

Задача 9. Імовірність одного влучення в ціль у результаті здійснення одного залпу з двох гармат дорівнює 0,38. Обчислити ймовірність влучення в ціль у результаті здійснення одного пострілу з першої гармати, якщо відомо, що для другої гармати така ймовірність дорівнює 0,8.

Розв'язання. Введемо події:

A – влучення в ціль в результаті здійснення одного залпу з двох гармат;

A_1 – влучення в ціль в результаті здійснення одного пострілу з першої гармати;

A_2 – влучення в ціль в результаті здійснення одного пострілу з другої гармати.

Тоді $A = A_1\overline{A_2} + \overline{A_1}A_2$. Оскільки події $A_1\overline{A_2}$ і $\overline{A_1}A_2$ є несумісними, а події A_1, A_2, $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$ – незалежними в сукупності, то

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = p_1q_2 + q_1p_2.$$

За умовою задачі $P(A_2) = p_2 = 0{,}8$, тоді $P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$. Враховуючи також те, що *P(A)* = 38, а $q_1 = 1 - p_1$, будемо мати

$$0{,}38 = 0{,}2p_1 + 0{,}8(1 - p_1),$$

звідки шукана ймовірність матиме вигляд

$$p_1 = \frac{0{,}42}{0{,}6} = 0{,}7.$$

Задача 10. Імовірність хоча б одного влучення в ціль в результаті здійснення чотирьох пострілів (подія *A*) дорівнює 0,9984. Обчислити ймовірність влучення в ціль у результаті здійснення одного пострілу (подія A_1).

Розв'язання. Згідно з формулою (3.12) $P(A) = 1 - q^n$.

За умовою відомо, що *P(A)* = 0,9984, *n* = 4 (кількість пострілів), тому

$$0{,}9984 = 1 - q^4 \text{ або } q^4 = 1 - 0{,}9984 = 0{,}0016,$$

звідки

$$q = 0{,}2.$$

Таким чином, $q = P(\overline{A_1}) = 0{,}2$.

Отже, шукана ймовірність обчислюється таким чином:

$$P(A_1) = p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Задача 11. Ймовірність влучення в рухому ціль у результаті здійснення одного пострілу є сталою і дорівнює 17%. Визначити витрату снарядів, необхідних для виконання вогневого завдання з імовірністю 92%, якщо для її виконання достатньо хоча б одного влучення.

Розв'язання. Використовуючи формулу (3.12) і враховуючи, що $P(A) = 92\% = 0{,}92$, $p = 17\% = 0{,}17$, $q = 1 - p = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$, виконаємо такий розрахунок:

$$n = \frac{\ln(1 - 0{,}92)}{\ln 0{,}83} = \frac{\ln 0{,}08}{\ln 0{,}83} \approx 13.$$

Задача 12. В урну, яка містить дві кулі, опущено білу кулю, після чого з неї навмання вийнято одну кулю. Обчислити ймовірність того, що вийнята з урни куля виявиться білою, якщо всі можливі припущення щодо початкового складу куль (за кольором) є рівноможливими.

Розв'язання. Позначимо через A подію, що полягає в витягненні білої кулі. Можливими є наступні припущення (гіпотези) щодо початкового складу куль: B_1 – жодна з куль не є білою, B_2 – одна з куль є білою, B_3 – дві з куль є білими.

Отже, взагалі існує три гіпотези, причому за умовою вони є рівноймовірними. Сума ймовірностей гіпотез дорівнює одиниці (оскільки вони утворюють повну групу подій), тоді ймовірність кожної з гіпотез дорівнює $\frac{1}{3}$, тобто

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}.$$

Умовна ймовірність того, що з урни буде вийнято білу кулю, за умови, що на початку в урні не було білих куль, складає $P_{B_1}(A) = \frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність того, що з урни буде вийнято білу кулю, за умови, що на початку в урні була одна біла куля, складає $P_{B_2}(A) = \frac{2}{3}$.

Умовна ймовірність того, що з урни буде вийнято білу кулю, за умови, що на початку в урні було дві білих кулі, складає $P_{B_3}(A) = 1$.

Імовірність того, що з урни буде вийнято білу кулю, обчислимо за формулою (3.13):

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Задача 13. Два автомати виробляють однакові деталі, які надходять на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата є вдвічі більшою за продуктивність другого. На першому автоматі виробляється в середньому 60% деталей відмінної якості, на другому – 84%. Виявилося, що навмання взята з конвеєра деталь, має відмінну якість. Обчислити ймовірність того, що ця деталь вироблена на першому автоматі.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що деталь має відмінну якість. Можна висунути два припущення (гіпотези): B_1 – деталь вироблена на першому автоматі, причому, оскільки на першому автоматі виробляється вдвічі більше деталей, ніж на другому, то $P(B_1)=\frac{2}{3}$; B_2 – деталь вироблена на другому автоматі, причому $P(B_2)=\frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність того, що деталь матиме відмінну якість, якщо вона вироблена на першому автоматі, складає $P_{B_1}(A)=0{,}6$.

Умовна ймовірність того, що деталь матиме відмінну якість, якщо вона вироблена на другому автоматі, складає $P_{B_2}(A)=0{,}84$.

Імовірність того, що навмання взята деталь матиме відмінну якість, можна визначити за формулою повної ймовірності (3.13)

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{2}{3}\cdot 0{,}6+\frac{1}{3}\cdot 0{,}84=0{,}68.$$

Імовірність того, що взята навмання деталь матиме відмінну якість, якщо вона вироблена на першому автоматі, можна визначити за формулою Байєса (3.14)

$$P_A(B_1)=\frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}=\frac{2/3\cdot 0{,}6}{0{,}68}=\frac{10}{17}.$$

Задача 14. Два автоматичні станки виробляють однакові деталі, які надходять на загальний конвеєр. Продуктивність першого станка є вдвічі більшою за продуктивність другого. Перший станок виробляє 70% деталей відмінної якості, другий – 85%. Виявлено, що навмання взята з конвеєра деталь, має відмінну якість. Обчислити ймовірність того, що дана деталь вироблена на першому станку.

Розв'язання. Назвемо подією A той факт, що деталь має відмінну якість. Можна висунути два припущення: B_1 – деталь вироблена на першому станку, причому за умовою задачі, перший станок виробляє вдвічі більше деталей, ніж другий, а отже, $P(B_1)=\frac{2}{3}$; B_2 – деталь вироблена на другому станку, причому $P(B_2)=\frac{1}{3}$.

Умовна ймовірність того, що деталь, яка має відмінну якість, вироблено на першому станку, складає $P_{B_1}(A)=0{,}7$, а ймовірність того, що таку деталь вироблено на другому станку, складає $P_{B_2}(A)=0{,}85$. Імовірність того, що,

деталь, взята навмання, матиме відмінну якість обчислюється за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}7 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}85 = 0{,}75.$$

Шукана ймовірність того, що взята деталь відмінної якості, вироблена на першому автоматі, обчислюється за формулою Бейєса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{2/3 \cdot 0{,}7}{0{,}75} = 0{,}62.$$

Питання для самоперевірки

1 Які теореми вважаються основними теоремами теорії ймовірностей?

2 Що розуміється під сумою подій A і B ?

3 Сформулюйте теорему додавання для несумісних подій.

4 Сформулюйте теорему додавання для сумісних подій.

5 Якою буде сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу ?

6 Якою буде сума ймовірностей протилежних подій ?

7 Що розуміється під добутком подій A і B ?

8 Що називається умовною ймовірністю?

9 Сформулюйте теорему множення для незалежних подій.

10 Сформулюйте теорему множення для залежних подій.

11 Якою буде ймовірність появи хоча б однієї з n незалежних подій?

12 Якою буде ймовірність появи хоча б однієї з n незалежних подій A_1, A_2, ..., A_n, якщо ймовірність їх настання є однаковою? Наведіть формулу для її обчислення.

13 Запишіть формулу повної ймовірності.

14 Сформулюйте теорему Байєса.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Для подання сигналу про аварію встановлено два незалежно працюючих сигналізатори. Ймовірність того, що в разі виникнення аварії сигналізатор спрацює, складає: для першого сигналізатора – 0,95, для другого – 0,9. Обчислити ймовірність того, що в разі виникнення аварії спрацює лише один сигналізатор.

Відповідь. 0,14.

Завдання 2. Студент відшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься в першому, другому, третьому довідниках відповідно складає 0,6, 0,7 і 0,8. Обчислити ймовірність того, що формула міститься:

а) лише в одному довіднику;

б) лише в двох довідниках;

в) у всіх трьох довідниках.

Відповідь. а) 0,188; б) 0,452; в) 0,336.

Завдання 3. У читальному залі налічується 6 підручників із теорії ймовірності, три з яких мають політуру. Бібліотекар взяв для використання 2 підручники. Обчислити ймовірність того, що обидва підручники мають палітуру.

Відповідь. 0,2.

Завдання 4. У коробці знаходиться 10 однакових кубиків, на які нанесено номери від 1 до 10. Навмання з коробки виймається по одному 3 кубики. Обчислити ймовірність того, що за послідовного виймання з'являться кубики з номерами 1, 2, 3:

а) без повторення;

б) з повторенням (вийнятий кубик повертається назад у коробку).

Відповідь. а) $\frac{1}{720}$; б) 0,001.

Завдання 5. Три дослідники, незалежно один від одного, виконують вимірювання деякої фізичної величини. Ймовірність того, що перший дослідник при цьому припуститься помилки, дорівнює 0,1, другий – 0,15, третій – 0,2. Обчислити ймовірність того, що в разі одноразового вимірювання хоча б один із дослідників припуститься помилки.

Відповідь. 0,388.

Завдання 6. Імовірність успішного виконання вправи для кожного з двох спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени виконують вправу по черзі, причому кожний виконує по дві спроби. Той, хто першим виконає вправу, отримує приз. Обчислити ймовірність отримання призу кожним із спортсменів.

Відповідь. 0,9375.

Завдання 7. Мішень складається з п'яти зон: 5, 4, 3, 2, 1, якщо їх рахувати від центру. Ймовірність влучення в них відповідно дорівнює: 0,12; 0,16; 0,20; 0,10; 0,25. Якою є ймовірність того, що кулю не буде випущено із зони 3?

Відповідь. 0,48.

Завдання 8. Консультативний пункт університету отримує пакети з контрольними роботами з міст *A, B* і *C*. Ймовірність отримання пакета з міста *A* дорівнює 0,7, із міста *B* – 0,2. Обчислити ймовірність того, що наступний пакет буде отримано з міста *C*.

Відповідь. 0,1.

Завдання 9. Із зенітної гармати проводиться стрільба по літаку. Пальне на літаку зосереджується в чотирьох баках, розташованих у фюзеляжі один за одним. Площі баків є однаковими. Для того, щоб загорівся літак, досить влучити двома снарядами або в один і той самий бак, або в сусідні баки. Відомо, що в область баків влучало два снаряди. Обчислити ймовірність того, що літак загориться.

Відповідь. $\frac{5}{8}$.

Завдання 10. Серед 50 електролампочок 3 є нестандартними. Обчислити ймовірність того, що дві, навмання взяті електролампочки, будуть нестандартними (задачу потрібно розв'язати двома способами).

Відповідь. $\frac{3}{1225}$.

Завдання 11. На підприємстві брак складає в середньому 2 % від загального випуску виробів. Серед придатних виробів до першого ґатунку відноситься 95 %. Якою може бути ймовірність того, що виріб, взятий навмання, буде відноситись до першого сорту, якщо його взято:

а) із-поміж тих виробів, які пройшли перевірку?

б) із-поміж виробів, що належать до загальної кількості виготовленої продукції?

Відповідь. а) 0,95; б) 0,931.

Завдання 12. У мішку змішано нитки, 30 % з яких мають білий колір, а решта – червоний. Обчислити ймовірність того, що обрані навмання дві нитки, матимуть один колір.

Відповідь. 0,58.

Завдання 13. Серед цифр 1, 2, 3, 4, 5 обирається навмання одна цифра, а серед тих, які залишилися – друга. Обчислити ймовірність того, що обрана цифра буде непарною:

а) першого разу;

б) другого разу;

в) обидва рази.

Відповідь. а) 0,6; б) 0,6; в) 0,3.

Завдання 14. Екзаменаційний білет містить три питання. Ймовірність того, що студент відповість на перше питання дорівнює 0,9, на друге – 0,9, на третє – 0,8. Обчислити ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно буде відповісти:

а) на всі питання;

б) хоча б на два питання.

Відповідь. а) 0,648; б) 0,954.

Завдання 15. У касі кінотеатру залишилось 8 розрізнених квитків на місця двадцятого ряду і 4 розрізнених квитки на місця десятого ряду. Якою є ймовірність того, що кожна з перших чотирьох осіб, які стоять у черзі, придбає лише один квиток із тих, які залишилися на місця десятого ряду ?

Відповідь. 1/495.

Завдання 16. Електричне коло складається з двох послідовно з'єднаних елементів, які можуть вийти з ладу незалежно один від одного з імовірностями p_1=0,1 і p_2=0,2 відповідно. Обчислити ймовірність розриву живлення електричного кола.

Відповідь. 0,28.

Завдання 17. Імовірність того, що скляна тара розіб'ється під час завантаження в автомашину складає 0,06, а під час транспортування на автомашині – 0,05. Якою може бути ймовірність того, що скляна тара розіб'ється?

Відповідь. 0,107.

Завдання 18. Для перевірки складеної схеми послано три одиничних імпульси. Ймовірність надходження кожного з них не залежить від того, надійшли інші імпульси чи ні, і відповідно дорівнює: $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}7$. Обчислити ймовірність того, що надійде не менше двох з посланих імпульсів.

Відповідь. 0,712.

Завдання 19. Для складання колоквіуму студент повинен відповісти на два з трьох запитань, запропонованих викладачем. Студент не знає відповідей на вісім запитань із тих сорока, які можуть бути запропонованими. Обчислити ймовірність того, що студент складе колоквіум? (Розв'язати задачу двома способами).

Відповідь. 0,90.

Завдання 20. Студент знає відповіді на 20 із 25 питань, запропонованих викладачем. Обчислити ймовірність того, що студент знає відповіді на 3 питання, запропоновані екзаменатором. (Розв'язати задачу двома способами).

Відповідь. $\frac{57}{115}$.

Завдання 21. Через канал зв'язку з однаковими ймовірностями передається 10 сигналів. У зв'язку з перешкодами, що виникають на їх шляху, чотири з переданих сигналів спотворюються. Обчислити ймовірність того, що серед трьох сигналів, які надішли, хоча б один буде неспотвореним.

Відповідь. 0,936.

Завдання 22. Дане підприємство в середньому виробляє 21 % продукції вищого ґатунку і 70 % – продукції першого ґатунку. Обчислити ймовірність того, що випадково придбаний продукт виявиться продуктом першого або вищого ґатунку.

Відповідь. 0,91.

Завдання 23. Для проходження виробничої практики тридцятьма студентами відводиться: 15 місяців у м. Харкові, 8 – у м. Києві, і 7 – у м. Запоріжжі. Якою може бути ймовірність того, що двоє певних студентів зможуть проходити практику в одному й тому самому місті?

Відповідь. 0,331.

Завдання 24. Дванадцять робітників отримало путівку в чотири будинки відпочинку: 3 – в перший, 3 – в другий, 2 – в третій і 4 – в четвертий. Якою може бути ймовірність того, що три певних робітники поїдуть на відпочинок до одного й того самого будинку відпочинку?

Відповідь. 0,0273.

Завдання 25. Абонент забув останню цифру номера телефону, тому набирає її навмання. Обчислити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше ніж у три місця. Як може змінитися така ймовірність, якщо відомо, що остання цифра є непарною?

Відповідь. 0,3; 0,6.

Завдання 26. Поїздка пасажира від деякої трамвайної зупинки до місця роботи обслуговується трамваями маршрутів 3 і 11. Через дану зупинку проходять трамваї п'яти маршрутів. Відомо, що серед сорока трамваїв, які

курсують через дану зупинку, є 8 трамваїв маршруту 3 і 10 трамваїв маршруту 11. Обчислити ймовірність того, що перший трамвай, який з'явиться, буде відповідати потрібному маршруту. До того ж потрібно зважати на те, що з трамвайного парку ще не виходив жодний трамвай і що одночасна поява на даній зупинці трамваїв обох маршрутів є неможливою.

Відповідь. $\frac{9}{20}$.

Завдання 27. До механізму входить дві деталі однакового типу. Механізм не спрацює, якщо обидві деталі, які входять до даного механізму, матимуть зменшений розмір. Складальник має всього 10 деталей, 3 з яких мають розмір, менший за стандартний. Обчислити ймовірність того, що механізм спрацює, якщо й першу, й другу деталі складальник обере без перевірки.

Відповідь. $\frac{14}{15}$.

Завдання 28. До студентської групи входить 10 дружинників, серед яких 3 дівчини і 7 юнаків. Для здійснення чергування потрібно обрати трьох дружинників шляхом жеребкування. Обчислити ймовірність того, що для здійснення чергування буде обрано трьох юнаків.

Відповідь. $\frac{7}{24}$.

Завдання 29. Підприємство виготовляє 95 % стандартних виробів, причому 86 % із них є виробами першого ґатунку. Обчислити ймовірність того, що взятий навмання виріб, виготовлений на даному підприємстві, буде виробом першого ґатунку.

Відповідь. 0,817.

Завдання 30. Імовірність того, що в результаті здійснення одного пострілу стрілець влучить у десятку, дорівнює 0,6. Скільки пострілів повинен здійснити стрілець, щоб з імовірністю, не меншою за 0,8, він влучив у десятку хоча б один раз?

Відповідь. $n \geq 2$.

Завдання 31. Імовірність того, що в результаті проведення трьох незалежних у сукупності випробовувань подія A настане хоча б один раз дорівнює 0,936. Обчислити ймовірність настання події в результаті проведення одного випробовування, якщо ймовірність настання події в результаті проведення кожного випробовування є однаковою.

Відповідь. 0,6.

Завдання 32. В обчислювальній лабораторії є шість автоматичних клавішних приладів і чотири напівавтоматичних. Імовірність того, що під час виконання деякого розрахунку автоматичний клавішний прилад не вийде з ладу, дорівнює 0,95; щодо напівавтоматичного приладу така ймовірність дорівнює 0,8. Студент виконує розрахунок на навмання обраному приладі. Обчислити ймовірність того, що до завершення розрахунку прилад не вийде з ладу.

Відповідь. 0,89.

Завдання 33. У ящику міститься 12 деталей, виготовлених на заводі №1, 20 деталей, виготовлених на заводі №2, 18 деталей, виготовлених на заводі №3. Імовірність того, що деталь, виготовлена на заводі №1, має відмінну якість, дорівнює 0,9. Для деталей, виготовлених на заводах №2 і №3, такі ймовірності відповідно дорівнюють 0,6 і 0,9. Обчислити ймовірність того, що деталь, взята навмання, матиме відмінну якість.

Відповідь. 0,78.

Завдання 34. Імовірності того, що під час роботи цифрової електронної машини відбудеться збій в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті та в інших пристроях, відносяться як 3:2:5. Імовірності виявлення збою в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті та в інших пристроях відповідно дорівнюють 0,8; 0,9;0,9. Обчислити ймовірність того, що збій, який виникне в машині, буде виявлено.

Відповідь. 0,87.

Завдання 35. До спеціалізованої лікарні надходить у середньому 50% хворих на захворювання *K*, 30% – на захворювання *L*, 20% – на захворювання *M*. Імовірність повного вилікування хвороби *K* дорівнює 0,7; для хвороб *L* і *M* такі ймовірності відповідно дорівнюють 0,8 і 0,9. Хворого, який надійшов до лікарні, було виписано здоровим. Обчислити ймовірність того, що він страждав на захворювання *K*.

Відповідь. $5/11$.

Завдання 36. Виріб перевіряється щодо його стандартності одним із двох товарознавців. Імовірність того, що для проведення перевірки виріб потрапить до першого товарознавця, становить 0,55, а до другого – 0,45. Імовірність того, що виріб буде визнано стандартним після проведення перевірки першим товарознавцем дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Обчислити ймовірність того, що перевірку виробу буде проводити другий товарознавець.

Відповідь. 0,47.

Завдання 37. Число вантажних автомобілів, які проїжджають по шосе, де працює бензоколонка, відноситься до числа легкових автомобілів, що проїжджають по тому самому шосе, як 3:2. Імовірність того, що на бензоколонці буде заправлятись вантажний автомобіль, дорівнює 0,1; для легкового ж автомобіля така ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки під'їхав автомобіль для здійснення заправки. Обчислити ймовірність того, що автомобіль, який під'їхав для здійснення заправки, є вантажним.

Відповідь. $3/7$.

4 ПОВТОРНІ ВИПРОБОВУВАННЯ

У процесі проведення декількох випробовувань (за умови, що ймовірність події *A* в кожному з випробовувань не залежить від наслідків інших випробовувань) їх називають незалежними відносно події *A*.

Далі розглянемо лише такі незалежні випробування, за яких настання події *A* має одну й ту саму ймовірність.

Формула Бернуллі. Ймовірність $P_n(k)$ того, що в процесі проведення *n* незалежних випробовувань, для кожного з яких існує ймовірність настання події *A,* становить p (0 <*p*< 1), подія *A* настане рівно *к* разів (неважливо в якій послідовності), становить

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{4.1}$$

де

$$q = 1 - p \ ,$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Слід зауважити, що формула Бернуллі використовується тоді, коли значення *n* є малим, оскільки за великих значень *n* формула потребує виконання дій щодо дуже великих чисел.

Граничні теореми. Якщо число випробовувань *n* є великим, то застосування формули Бернуллі приводить до дуже громіздких обчислень, тому в подібних випадках використовуються наближені формули (формула Пуассона, а також формули, які виражають зміст локальної та інтегральної теорем Лапласа).

1 Локальна теорема Лапласа. Якщо ймовірність *p* настання події *A* в кожному з *n* незалежних випробовувань є сталою, причому 0<*p*<1, а кількість випробовувань є досить великою, то ймовірність $P_n(k)$ того, що під час випробовувань подія *A* настане *к* разів, наближено дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\,(x), \tag{4.2}$$

де

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},$$

а функція φ (*x*) визначається за рівністю

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Таблицю значень функції *φ* (*x*) наведено в додатку Д, причому лише для додатних значень *φ*, так як дана функція є парною, тобто *φ*(–*x*)=*φ*(*x*). Потрібно вважати, що для значень *x* > 5 значення функції *φ* (*x*) наближено дорівнює 0.

На рисунку 6 зображено графік функції $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Для більшої наочності приймаються різні масштаби щодо осей координат. Крива (крива ймовірностей), зображена на рисунку, дозволяє для кожного значення $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ визначити найближче значення $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, а звідси й значення $P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}$ φ(*x*).

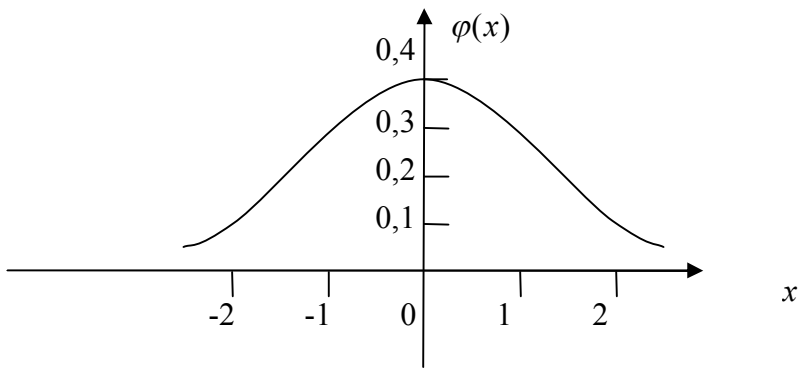


Рисунок 6

Дана формула надає можливість отримати тим більш близькі до точного значення ймовірності $P_n(k)$ результати, чим більшим є значення $\sqrt{npq}$. Причому в даному випадку можливим є не лише значення *n,* а й значення pq. За одних і тих самих значень *n* значення ймовірності, обчислене за формулою Лапласа, є тим більше наближеним до значення ймовірності, обчисленого за формулою Бернуллі, чим більше pq до 0,25 (таке значення для pq є найбільшим). У задачах зі значеннями *p* і *q*, близькими до нуля, застосування формули (4.2) надає можливість визначити більш помітні відхилення від точних значень $P_n(k)$, які можна отримати за формулою Бернуллі. У зв'язку з цим, хоча й рідко коли (якщо *p* є наближеним до 0), з успіхом застосовується наближена формула Пуассона.

2 Формула Пуассона. Якщо в процесі кожного з випробовувань імовірність *p* настання події *A* є сталою і малою, а кількість випробовувань *n* є досить великою, то ймовірність $P_n(k)$ того, що подія *A* настане *к* разів, наближено дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \tag{4.3}$$

де $\lambda = np$.

Слід зазначити, що наближення є тим кращим, чим більшою є кількість випробовувань *n* і меншою – ймовірність *p*. Застосування даної формули припустиме за умови, якщо $\lambda = np \le 10$.

Для спрощення розрахунків практично замість безпосереднього обчислення ймовірності $P_n(k)$ за формулою Пуассона необхідно використовувати таблицю значень функції Пуассона, яка є функцією двох змінних: *к* і $\lambda = np$.

Застосування в подібних випадках локальної теореми Лапласа приводить до отримання неточних значень ймовірностей $P_n(k)$.

Доцільність застосування обчислень за формулою Пуассона, наприклад, для $n = 100$ і p = 0,01, показує наступна таблиця значень $P_{100}(к)$:

$к$	0	1	2	5	9
За формулами:					
Бернуллі	0,366	0,370	0,185	0,003	0,000001
Лапласа	0,242	0,411	0,242	0,001	0,000000
Пуассона	0,368	0,368	0,184	0,003	0,000001

3 Інтегральна теорема Лапласа. Якщо ймовірність p настання деякої події A в процесі кожного з випробовувань є сталою, причому $0<p<1$, а кількість випробовувань n є досить великою, то ймовірність того, що така подія настане не менше ніж $к_1$ раз і не більше ніж $к_2$ рази наближено дорівнює

$$P_n(k_1,k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{4.4}$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

а функція Лапласа $\Phi(x)$ визначається за рівністю

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Функція $\Phi(x)$ є непарною, тобто $\Phi(-x)=-\Phi(x)$ і є монотонно зростаючою, а границя $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi(x) = 0{,}5$. До цієї границі функція наближається досить швидко. За набуття значення $x=5$ значення функції $\Phi(x)$ дуже мало відрізняється від значення 0,5. Дійсно, $\Phi(5)=0{,}499997$, тому для всіх значень $x>5$ функція набуває значення $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Точність імовірностей, які визначаються за формулою (4.4), цілком задовольняє потребам практики за умови, що добуток npq має порядок декількох сотень. Якщо задача не потребує більш точної відповіді, то формулу (4.4) можна використовувати й тоді, коли значення добутку npq є невеликим, але більшим за 20. У противному випадку треба користуватися не інтегральною теоремою Лапласа, а формулою Бернуллі та теоремою додавання ймовірностей.

У часткових випадках:

1 Формула (4.4) спрощується у випадках, якщо $к_1$ є меншим, а $к_2$ є більшим за np на одне й те саме число ε:

$$P_n(np - \varepsilon \le m \le np + \varepsilon) = P_n(|m - np| \le \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right).$$

2 Імовірність того, що за проведення n незалежних випробовувань, під час кожного з яких імовірність настання події дорівнює p $(0 < p < 1)$, абсолютна величина відхилення відносної частоти настання події від імовірності настання події не перевищує додатного числа ε, наближено дорівнює подвоєній функції Лапласа за $x = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$P(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (4.5)$$

Приклади розв’язання задач

Задача 1. Імовірність того, що витрата електроенергії протягом доби не перевищує установленої норми, дорівнює 0,8. Обчислити ймовірність того, що в найближчі 5 діб витрата електроенергії протягом трьох діб не перевищить норму.

Розв'язання. Ймовірність нормальної витрати електроенергії протягом кожної з п’яти діб є сталою і дорівнює 0,8. Отже, ймовірність перевитрати електроенергії за кожну добу також є сталою і дорівнює $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Оскільки в розглянутій задачі n є малим (n = 5), то шукану ймовірність обчислимо за формулою (4.1):

$$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = C_5^2 p^3 q^2.$$

Після виконання обчислень остаточно отримаємо:

$$P_5(3) = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot(0{,}8)^3\cdot(0{,}2)^2 = 0{,}2048.$$

Задача 2. Тридцять відсотків виробів певного підприємства належить до продукції вищого ґатунку. Дехто придбав 6 виробів, виготовлених на даному підприємстві. Якою може бути ймовірність того, що 4 з них буде належати до продукції вищого ґатунку?

Розв'язання. Ймовірність того, що виріб, виготовлений на даному підприємстві, належить до продукції вищого ґатунку, є сталою і дорівнює 0,3. Тоді ймовірність того, що виріб належить до продукції вищого ґатунку обчислюється таким чином: q = 1 - 0,3 = 0,7 і також є сталою.

Отже, ймовірність того, що 4 з 6 придбаних виробів належать до продукції вищого ґатунку обчислюємо за формулою Бернуллі:

$$P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = C_6^2 p^4 q^2 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2}\cdot(0{,}3)^4\cdot(0{,}7)^2 \approx 0{,}06.$$

Задача 3. Двоє рівносильних шахістів грають у шахи. Настання якої з подій є більш імовірним: отримання виграшу в трьох партіях із шести чи в двох із чотирьох? Нічиї до уваги не беруться.

Розв'язання. Так як у грі беруть участь рівносильні шахісти і нічиї до уваги не беруться, то ймовірність отримання виграшу в обох партіях є сталою і дорівнює 0,5. Отже, ймовірність програшу також є сталою і дорівнює 0,5, тобто p=q=0,5. Тоді, за формулою Бернуллі, ймовірність того, що в трьох партіях із шести буде отримано виграш можна обчислити таким чином: $P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot(0{,}5)^3\cdot(0{,}5)^{32} = \frac{5}{16}$, а в двох із чотирьох партій – таким: $P_4(2) = C_4^{24} p^{24} q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot(0{,}5)^2\cdot(0{,}5)^2 = \frac{6}{16}$.

Оскільки ймовірність $P_4(2)$ є більшою за ймовірність $P_6(3)$, то ймовірніше, що виграш буде отримано в двох партіях із 4, а не в 3 із 6.

Задача 4. Ймовірність того, що насіння даного сорту рослин проросте, дорівнює 0,8. Якою може бути ймовірність того, що з 5 посіяних насінин:

а) проросте не менше 4;

б) проросте менше 4?

Розв'язання:

а) Маємо $n = 5$, $p = 0{,}8$ і $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $к \geq 4$, тобто $к$ набуває значення або 4, або 5. Тому шукана ймовірність матиме вигляд:

$$P_5(k \geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5 q^0 = 5p^4 q + p^5 = p^4(5q + p).$$

Після виконаних обчислень остаточно отримаємо:

$$P_5(к \geq 4) = (0{,}8)^4 \cdot (5 \cdot 0{,}2 + 0{,}8) = 0{,}73728.$$

б) Маємо $n = 5$, $p = 0{,}8$ і $q = 0{,}2$; $к < 4$, тобто $к$ набуває значення або 0, або 1, або 2, або 3.

Тому шукану ймовірність можна обчислити таким чином:

$$P_5(к < 4) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3).$$

Застосовуючи далі формулу Бернуллі для обчислення ймовірностей, які належать до правої частини рівності, отримаємо остаточний результат. Не важко, однак, переконатися, що безпосереднє застосування формули Бернуллі приведе до надто громіздких обчислень (перевірте самостійно). Шукану ймовірність можна обчислити більш простим способом, враховуючи той факт, що події, за яких проросте не менше 4 насінин із 5 і проросте менше 4 насінин із 5" являються протилежними, а тому

$$P_5(к \geq 4) + P_5(к < 4) = 1,$$

звідки

$$P_5(к < 4) = 1 - P_5(к \geq 4).$$

Оскільки ймовірність $P_5(к \geq 4) = 0{,}73728$ обчислено раніше, то остаточно матимемо

$$P_5(к < 4) = 1 - 0{,}73728 = 0{,}26272.$$

Зауважимо, що такий спосіб обчислення доцільно застосовувати і в ряді інших завдань.

Задача 5. За даними ВТК, серед сотні металевих брусків, підготовлених для обробки, 30 мають зазубрини. Якою може бути ймовірність того, що серед семи, випадково взятих брусків, не матимуть зазубрин не більше 2?

Розв'язання. Нехай подією A є відсутність на бруску зазубрин. Тоді $P(A) = p = 0{,}7$ і $P(\bar{A}) = q = 0{,}3$. Число випробовувань $n = 7$, $к \leq 2$, тобто $к$ набуває значення або 0, або 1, або 2.

За теоремою додавання, шукана ймовірність обчислюється таким чином:

$$P_7(к \leq 2) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2).$$

Застосовуючи далі формулу Бернуллі для обчислення ймовірностей у правій частині рівності, остаточно будемо мати

$$P_7(к \leq 2) = C_7^0 p^0 q^7 + C_7^1 p^1 q^6 + C_7^2 p^2 q^5 =$$

$$= (0{,}3)^7 + 7 \cdot 0{,}7 \cdot (0{,}3)^6 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)^5 =$$

$$= (0{,}3)^5 (0{,}09 + 1{,}47 + 10{,}29) = 0{,}0287555 \approx 0{,}029.$$

Задача 6. За усталеного технологічного режиму зафіксовано 12 обривань на 100 веретенах за годину. Обчислити ймовірність того, що кількість обривань за годину на 25 веретенах буде більшою за 2, але меншою за 8.

Розв'язання. У даному випадку, якщо n=25, то p=0,12 і q=0,88. Приймаючи $\kappa_1 = 3$ і $\kappa_2 = 7$, будемо мати $3 \le \kappa \le 7$.

Шукану ймовірність обчислюємо за формулою додавання:

$$P_{25}(3 \le \kappa \le 7) = P_{25}(3) + P_{25}(4) + P_{25}(5) + P_{25}(5) + P_{25}(7).$$

Обчислюючи ймовірність, яка належить до правої частини отриманої рівності, а також застосовуючи формулу (4.1), остаточно матимемо:

$$P_{25}(3 \le \kappa \le 7) = C_{25}^{3} \cdot (0{,}12)^{3} \cdot (0{,}88)^{22} + C_{25}^{4} \cdot (0{,}12)^{4} \cdot (0{,}88)^{21} +$$

$$+ C_{25}^{5} \cdot (0{,}12)^{5} \cdot (0{,}88)^{20} + C_{25}^{6} \cdot (0{,}12)^{6} \cdot (0{,}88)^{19} + C_{25}^{7} \cdot (0{,}12)_{7} \cdot (0{,}88)^{18} \approx$$

$$\approx 0{,}2387 + 0{,}1790 + 0{,}1025 + 0{,}0466 + 0{,}0173 = 0{,}5841 \approx 0{,}58.$$

Щодо останньої задачі слід зазначити, що використання формули Бернуллі часто пов'язане з обчислювальними труднощами. Тому зі зростанням значень n і κ стає доцільним використання наближених формул.

Для визначення того, наскільки незначним є відхилення результату застосування наближених формул для обчислення $P_n(k)$ від результату обчислення за точною формулою, розв'яжемо наступні задачі.

Задача 7. Ймовірність влучення в рухому мішень приймається рівною 0,7. Якою є ймовірність того, що 15 із 20 виконаних пострілів виявляться вдалими?

Розв'язання. За умовою задачі: n=20, κ=15, p=0,7 і q=0,3. Обчислимо шукану ймовірність за наближеною формулою Лапласа, визначивши спочатку значення x.

$$x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}} = \frac{15 - 20 \cdot 0{,}7}{\sqrt{20 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} \approx \frac{1}{2{,}0494} \approx 0{,}49\,.$$

Далі, за формулою (4.2), отримаємо:

$$P_{20}(15) \approx \frac{1}{2{,}0494} \cdot \varphi(0{,}49) = \frac{1}{2{,}0494} \cdot 0{,}3538 \approx 0{,}1726\,.$$

Обчислення за точною формулою, тобто за формулою Бернуллі надає можливість отримати наступний результат:

$$P_{20}(15) = C_{20}^{15} p^{15} q^{5} = C_{20}^{5} p^{15} q^{5} = \frac{20!}{15!5!} \cdot (0{,}7)^{15} \cdot (0{,}3)^{5} = 0{,}1789.$$

Легко підрахувати що відносна похибка наближеного результату складає 3,5 %. Зі зростанням значення n відсоток відносної похибки наближеного результату знижується.

Нехай за умовою попередньої задачі потрібно знайти ймовірність того, що 5 пострілів виявляться вдалими. Застосовуючи формулу Бернуллі, отримаємо:

$$P_{20}(5) = C_{20}^{5} \cdot ((0{,}7)^{5} \cdot (0{,}3)^{15} \approx 0{,}00003739\,.$$

Отримане значення ймовірності вказує на те, що настання очікуваної події практично неможливе.

Застосовуючи наближену формулу Лапласа, отримаємо:

$$P_{20}(5) \approx \frac{1}{2{,}0494} \cdot \varphi(4{,}39) \approx 0 .$$

Зауважимо, що значення функції φ(4,39) не може бути визначеним, оскільки в додатку Д наведено значення функції φ(x) для $x \leq 3{,}99$. Значенням x>3,99 відповідають дуже малі значення функції φ(x), що свідчить про практичну неможливість настання події.

Задача 8. Відомо, що до складу отриманої прийнятої партії із 1000 деталей належить чотири бракованих. Обчислити ймовірність того, що серед 50, навмання взятих деталей, не виявиться бракованих.

Розв'язання. За умовою задачі n=50, ймовірність появи бракованої деталі складає p = 0,004, ймовірність появи якісної деталі складає q=0,004. Відсутність серед 50 деталей бракованих означає, що всі взяті деталі є якісними. Тому, якщо $к$= 0, то за формулою Бернуллі, отримаємо:

$$P_{50}(0) = C_{50}^{0} p^{0} q^{50} = (0{,}996)^{50} .$$

Логарифмуючи рівність, виконаємо наступні дії:

$$\ln P_{50}(0) = 50 \ln 0{,}996 = 50 \cdot (-0{,}00401) = -0{,}2004 ,$$

звідки

$$P_{50}(90) = e^{-0{,}2004} = 0{,}8184 .$$

Обчислюючи параметр Пуассона: $\lambda = np = 50 \cdot 0{,}004 = 0{,}2$, і застосовуючи формулу Пуассона, будемо мати $P_{50}(0) \approx \frac{\lambda^{0} \cdot e^{-0{,}2}}{0!} = 0{,}8187,$ що свідчить про відхилення від результату, отриманого за формулою Бернуллі, менше ніж на 0,3%. Зауважимо, що застосування наближеної формули Лапласа потребує більш громіздких обчислень, в результаті яких шукана ймовірність обчислюється таким чином:

$$P_{50}(0) = \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 0{,}004 \cdot 0{,}996}} \cdot \varphi(0{,}45) \approx 0{,}8077 ,$$

що свідчить про те, що відхилення від точного значення складає 1,07 % .

Задача 9. Ймовірність виготовлення виробів вищого ґатунку на даному підприємстві дорівнює 0,4. Обчислити ймовірність того, що половина від 26 виробів, взятих навмання, матиме вищий ґатунок.

Розв'язання. За умовою задачі n=26, $к$=13, p=0,4 і q=0,6. Оскільки n=26 є великим числом, то скористаємося локальною теоремою Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) ,$$

де

$$x = \frac{к - np}{\sqrt{npq}} .$$

Обчислюємо значення x:

$$x = \frac{13 - 26 \cdot 0{,}4}{\sqrt{26 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} \approx \frac{2{,}6}{2{,}5} = 1{,}04 .$$

За додатком А обчислюємо значення $\varphi(x) = \varphi(1{,}04) = 0{,}2323$. Значення шуканої ймовірності наближено дорівнюватиме

$$P_{26}(13) \approx \frac{0{,}2323}{2{,}5} \approx 0{,}093\,.$$

Задача 10. За установленого технологічного процесу фабрика випускає в середньому 70 % продукції першого ґатунку. Якою є ймовірність того, що в партії з 2100 виробів першосортні містяться між 1450 і 1500 виробами?

Розв'язання. Число незалежних випробовувань n складає 2100. Ймовірність настання події p в кожному окремому випробуванні складає 0,7. Треба обчислити ймовірність того, що число настання події міститься між числами $к_1$=1450 і $к_2$=1500. Шукану ймовірність обчислимо за формулою (4.4):

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)\,,$$

де

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\,,$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\,.$$

Обчислимо значення x_1 і x_2:

$$x_1 = \frac{1450 - 2100 \cdot 0{,}7}{\sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = -\frac{20}{21} \approx -0{,}95;$$

$$x_2 = \frac{1500 - 2100 \cdot 0{,}7}{\sqrt{2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}} = \frac{30}{21} \approx 1{,}43.$$

Враховуючи, що функція Лапласа є непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отримаємо

$P_{2100}(1450;\ 1500) \approx \Phi(1{,}43) - \Phi(-0{,}95) = \Phi(1{,}43) + \Phi(0{,}95) = 0{,}4236 + 0{,}3289 = 0{,}7525.$

Значення функції Лапласа $\Phi(1{,}43)$ і $\Phi(0{,}95)$ отримано за додатком Е.

Задача 11. Завод відправив на базу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу в дорозі дорівнює 0,002. Обчислити ймовірність того, що в дорозі буде пошкоджено виробів: а) рівно 3; б) менше за 3; в) більше за 3; г) хоча б 1.

Розв'язання. Кількість виробів є великою величиною: n=500, ймовірність їх пошкодження дорівнює p = 0,002 є малою і події "пошкодження виробів" є незалежними, тому має місце застосування формули Пуассона:

$$P_n(к) \approx \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{к!}\,,$$

де $\lambda = np$.

а) Обчислимо параметр Пуассона λ:

$$\lambda = np = 500 \cdot 0{,}002 = 1,$$

а також ймовірність того, що буде пошкоджено три вироби ($к$=3):

$$P_{500}(3) \approx \frac{e^{-1}}{3!} \approx \frac{0{,}36788}{6} \approx 0{,}0613\,.$$

б) Обчислимо ймовірність того, що буде пошкоджено менше трьох виробів ($к$ < 3):

$$P_{500}(k<3) = P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = \frac{5e^{-1}}{2} \approx \frac{5}{2} \cdot 0{,}36788 = 0{,}9197.$$

в) Обчислимо ймовірність того, що буде пошкоджено більше трьох виробів. Події "пошкоджено більше трьох виробів" і "пошкоджено не більше трьох виробів" є протилежними, тому

$$P_{500}(к > 3) + P_{500}(к \le 3) = 1,$$

звідки

$$P_{500}(к > 3) = 1 - P_{500}(к \le 3) = 1 - (P_{500}(к < 3) + P_{500}(к = 3)).$$

Використовуючи результати, отримані вище, будемо мати

$$P_{500}(к > 3) = 1 - (0{,}9197 + 0{,}0613) = 0{,}019.$$

г) Обчислимо ймовірність того, що буде пошкоджено хоча б один виріб. Події A («пошкоджено хоча б один виріб») і $\bar{A}$ («жоден із виробів не пошкоджено») є протилежними, а отже, $P(A)+P(\bar{A})=1$, звідки шукану ймовірність можна обчислити таким чином:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0{,}36788 \approx 0{,}632.$$

Задача 12. Обчислити середнє число λ бракованих виробів серед партії виробів, якщо ймовірність того, що в ній міститься хоча б один бракований виріб дорівнює 0,95. Припустимо, що число бракованих виробів у даній партії розподілено за законом Пуассона.

Розв'язання. Позначимо через A подію, яка полягає в тому, що в партії, яка розглядається, міститься хоча б один бракований виріб, а через $\bar{A}$ – подію, яка полягає у тому, що в партії, що розглядається, бракованих виробів немає. Так як події A і $\bar{A}$ є протилежними, то $P(A)+P(\bar{A})=1$. Із даної рівності, застосовуючи формулу Пуассона, отримаємо

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_n(0) = 1 - e^{-\lambda}.$$

За умовою задачі така ймовірність дорівнює 0,95, тому

$$1 - e^{-\lambda} = 0{,}95,$$

звідки

$$e^{-\lambda} = 1 - 0{,}95 = 0{,}05.$$

Розв'язавши рівняння, отримаємо

$$-\lambda = \ln 0{,}05$$

або

$$\lambda = 3.$$

Таким чином, у партії, що розглядається, середнє число бракованих виробів – 3.

Задача 13. Ймовірність настання події в процесі кожного з 900 незалежних випробовувань дорівнює 0,5. Обчислити ймовірність того, що значення відносної частоти настання події відхиляється від значення ймовірності її настання за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02.

Розв'язання. За умовою задачі, n=900, p=0,5, q=0,5, ε=0,02.

Потрібно обчислити ймовірність того, що значення відносної частоти настання події відхиляється від значення ймовірності її настання за абсолютною величиною не більше ніж на 0,02:

$$P\left(\left|\frac{m}{900} - 0{,}5\right| \le 0{,}02\right).$$

Скористаємося формулою (4.5):

$$P(\left|\frac{m}{n}-P\right|\le\varepsilon)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

отримаємо

$$P(\left|\frac{m}{900}-0{,}5\right|\le 0{,}02)\approx 2\Phi\left(0{,}02\cdot\sqrt{\frac{900}{0{,}5\cdot 0{,}5}}\right)=2\Phi(1{,}2)\,.$$

Далі, за додатком Е, обчислимо функції Лапласа: $\Phi(1{,}2)=0{,}3849$.

Отже, шукана ймовірність матиме вигляд

$$P(\left|\frac{m}{900}-0{,}5\right|\le 0{,}02)\approx 2\cdot 0{,}3849=0{,}7698.$$

Задача 14. З конвеєра сходить у середньому 85 % виробів першого ґатунку. Скільки виробів необхідно взяти для того, щоб з імовірністю 0,997 відхилення частоти сходження виробу серед них першого ґатунку від 0,85 за абсолютною величиною не перевищувало 0,01?

Розв'язання. За умовою задачі, p=0,85, q=1– 0,85=0,15, ε=0,01,

$$P(\left|\frac{m}{n}-0{,}85\right|\le 0{,}01)=0{,}997.$$

Згідно з формулою (4.5) маємо

$$2\Phi\left(0{,}01\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}85\cdot 0{,}15}}\right)=0{,}997\,,$$

або

$$\Phi\left(0{,}028\sqrt{n}\right)=0{,}4985\,.$$

За додатком Е знаходимо значення функції Лапласа: $\Phi(2{,}96)=0{,}4985.$

Отже,

$$0{,}028\sqrt{n}=2{,}96,$$

звідки

$$n=11176.$$

Таким чином, шукане число виробів – $n=11176.$

Задача 15. Відділ технічного контролю перевіряє на відповідність стандартам 900 деталей. Ймовірність того, що деталь є стандартною, дорівнює 0,9. З імовірністю 0,9544 визначити межі, в яких буде перебувати число m стандартних деталей з числа перевірених.

Розв'язання. За умовою задачі, n=900, p=0,9, q=0,1,

$$P(\left|\frac{m}{900}-0{,}9\right|\le\varepsilon)=0{,}9544.$$

Згідно з формулою (4.5) маємо

$$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{900}{0{,}9\cdot 0{,}1}}\right)=0{,}9544\,,$$

або

$$\Phi(100\varepsilon)=0{,}4772\,.$$

За додатком Е знаходимо значення функції Лапласа: $\Phi(2)=0{,}4772$.

Отже,

$$100\,\varepsilon=2,$$

звідки

$$\varepsilon = 0{,}02.$$

Таким чином, з імовірністю 0,9544 відхилення відносної частоти числа стандартних деталей від ймовірності 0,9 задовольняє нерівності $\left|\frac{m}{900} - 0{,}9\right| \le 0{,}02.$

Розв'язуючи дану нерівність, отримаємо

$$-0{,}02 \le \frac{m}{900} - 0{,}9 \le 0{,}02,$$

або

$$0{,}88 \le \frac{m}{900} \le 0{,}92,$$

звідки

$$792 \le m \le 828.$$

Отже, шукане число m стандартних деталей серед 900 перевірених з ймовірністю 0,9544 знаходиться в межах $792 \le m \le 828$.

Питання для самоперевірки

1 Які події називаються незалежними?

2 Що називається "повторними випробуваннями" ?

3 Як обчислити ймовірність того, що в результаті n незалежних випробовувань подія настане рівно $к$ разів?

4 Формула Бернуллі та її застосування.

5 Сформулюйте локальну теорему Лапласа. В яких випадках вона застосовується?

6 Як обчислити значення $\varphi(x)$, якщо $x > 5$?

7 Наведіть формулу Пуассона для обчислення $P_n(к)$. В яких випадках вона застосовується?

8 Сформулюйте інтегральну теорему Лапласа.

9 Який вигляд має функція $\varphi(x)$?

10 Властивості функції $\varphi(x)$. Як обчислити значення функції $\varphi(x)$, якщо $x>5$?

11 Наведіть формулу для обчислення ймовірності $P(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon)$.

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Імовірність того, що насіння даної рослини проросте, складає 90%. Обчислити ймовірність того, що три з чотирьох посіяних насінин проросте.

Відповідь. 0,2916.

Завдання 2. Імовірність отримати виграш, маючи один білет лотереї, складає $\frac{1}{7}$. Якою може бути ймовірність того, що серед 6 білетів лотереї виграшними можуть бути лише два?

Відповідь. 0,1652.

Завдання 3. На автобазі знаходиться 12 автомашин. Імовірність виходу на лінію кожної з них дорівнює 0,8. Обчислити ймовірність нормальної роботи автобази в найближчі 5 діб, якщо для цього необхідно, щоб на лінії працювало не менше 8 автомашин.

Відповідь. 0,9017.

Завдання 4. Серед партії з 2000 гайок 30 мають брак у нарізці. Обчислити ймовірність того, що серед 100, взятих навмання гайок, не буде бракованих.

Відповідь. 0,223.

Завдання 5. У результаті штамповки металевих клем для з'єднувальних пластин виходить 20% браку. Обчислити ймовірність наявності від 100 до 125 клем, які не відповідають стандарту, серед партії, до складу якої входить 600 клем.

Відповідь. 0,67.

Завдання 6. Перевіркою якості годинників, виготовлених на заводі, встановлено, що в середньому 98 % від їх загальної кількості відповідає пред'явленим вимогам, а 2 % потребує додаткового регулювання. Приймальник перевіряє якість 300 виготовлених годинників. Якщо під час перевірки серед них виявиться 11 і більше годинників, які потребують додаткового регулювання, то вся партія повертається на завод для доопрацювання. Обчислити ймовірність того, що партія годинників буде відповідати пред’явленим вимогам.

Відповідь. 0,9438.

Завдання 7. Під час штампування деталей 70% із них належать до першого ґатунку, 20% – до другого і 10 % – до третього. Визначити число відштампованих деталей, яке треба взяти, щоб з імовірністю, рівною 0,9973, можна було б стверджувати, що число деталей першого ґатунку серед них буде відрізнятися від ймовірності виготовлення деталей першого ґатунку за абсолютною величиною не більше ніж на 0,05?

Відповідь. 756.

Завдання 8. Майстерня гарантійного ремонту телевізорів обслуговує 2000 абонентів. Імовірність того, що придбаний телевізор потребує гарантійного ремонту, дорівнює 0,3. Припускаючи, що подія, ймовірність настання якої складає 0,9973, є вірогідною, визначити межі кількості телевізорів, які потребують гарантійного ремонту.

Відповідь. $538 \le m \le 662$.

Завдання 9. Імовірність настання події в процесі кожного з 21 незалежного випробовування дорівнює 0,7. Обчислити ймовірність того, що подія настане в процесі більшості випробовувань.

Відповідь. 0,95945.

Завдання 10. Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів на наявність браку. Ймовірність того, що виріб є бракованим, дорівнює 0,05. З імовірністю 0,9426 визначити межі, в яких буде знаходитись число m бракованих виробів серед перевірених.

Відповідь. $14 \le m \le 32$.

Завдання 11. У результаті автоматичного штампування клем для запобіжників виявляється, що 10 % клем від їх загальної кількості може відхилятися від прийнятого стандарту. Яку кількість стандартних клем можна виявити з імовірністю 0,0587 серед 400 автоматично відштампованих клем?

Відповідь. 360 ± 3.

Завдання 12. Посаджено 400 дерев. Імовірність того, що окреме дерево приживеться дорівнює 0,8. Обчислити ймовірність того, що число дерев, які приживуться, буде більшим за 250.

Відповідь. 1.

Завдання 13. Із партії деталей, серед яких доля деталей першого ґатунку дорівнює 0,8, відібрано 60 одиниць (з поверненням). Обчислити ймовірність того, що 48 з відібраних деталей матимуть перший ґатунок.

Відповідь. 0,1287.

Завдання 14. Студент-заочник відіслав контрольну роботу, в якій розв'язано 5 задач, для отримання рецензії. Імовірність того, що кожна із задач розв'язана правильно, дорівнює 0,8. Обчислити ймовірність того, що чотири з п'яти задач розв'язано студентом правильно.

Відповідь. 0,4096.

Завдання 15. Імовірність своєчасного прибуття кожного з потягів далекого слідування дорівнює 0,95. Обчислити ймовірність того, що чотири з п'яти потягів, які прибувають послідовно, прибудуть без запізнення.

Відповідь. 0,2036.

Завдання 16. У ящику знаходиться 30 кульок: 20 білих і 10 чорних. Із ящика виймається чотири кульки підряд, причому кожна вийнята кулька повертається в ящик перед її наступним вийманням і кульки в ящику перемішуються. Обчислити ймовірність того, що дві з чотирьох вийнятих кульок будуть білими.

Відповідь. $\frac{8}{27}$.

Завдання 17. Імовірність того, що під час виконання пострілу виявиться, що куля долетить далі ніж потрібно, дорівнює $\frac{1}{3}$, а ймовірність того, що куля долетить ближче ніж потрібно, дорівнює $\frac{2}{3}$. Обчислити ймовірність отримання накривної групи під час 4 пострілів, якщо накривна група має наступні співвідношення недолітань і перелітань: - - + +; - - - +; + + + -.

Відповідь. $\frac{64}{81}$.

Завдання 18. Імовірність хоча б одного влучення в результаті двох виконаних пострілів дорівнює 0,96. Обчислити ймовірність 3 влучень у результаті виконання 4 пострілів.

Відповідь. 0,4096.

Завдання 19. Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що в результаті перевезення якусь пляшку буде розбито,

дорівнює 0,003. Обчислити ймовірність того, що розбитих пляшок виявиться: а) рівно 2; б) менше 2; в) більше 2; г) хоча б 1.

Вказівка. Потрібно вважати, що $e^{-1} = 0{,}04979$.

Відповідь. а) 0,224; б) 0,1992; в) 0,5768; г) 0,96.

Завдання 20. Обчислити наближену ймовірність того, що серед 4200 кинутих гральних кубиків, що випали гранню, на якій написано число 3, буде визначатись на проміжку між числами 650 і 700.

Відповідь. 0,481.

5 ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ЗАКОНИ ЇХ РОЗПОДІЛУ

Випадковою називається величина, яка в результаті випробовування набуває одного і тільки одного можливого значення (наперед відомо, якого саме), що залежить від випадкових причин, які заздалегідь не можуть бути враховані.

Випадкові величини прийнято позначати великими буквами *X, Y, Z*, а їх можливі значення – відповідними малими буквами *x, y, z*. Наприклад, якщо випадкова величина *X* має три можливих значення, то вони будуть позначені через x_1, x_2, x_3. Випадкові величини бувають дискретними і неперервними.

Дискретною (перервною) називається випадкова величина, що набуває окремих, ізольованих можливих значень, які мають певні ймовірності.

Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченим або нескінченим. Якщо число можливих значень дискретної випадкової величини є нескінченим, то множина його всіх можливих значень називається лічильною.

Законом розподілу (рядом розподілу) дискретної величини називається перелік її можливих значень і відповідних їм ймовірностей.

Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* може бути заданий у вигляді таблиці, перший рядок якої містить можливі значення x_i, а другий їх імовірності p_i:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

(5.1)

де

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Якщо множина можливих значень *X* є нескінченною (лічильною), то ряд $\sum_{i=1}^{n} p_i$ збігається і його сума дорівнює одиниці.

Закон розподілу дискретної випадкової величини *X* може бути також заданий за допомогою аналітичної формули: $P(X = x_i) = \varphi(x_i)$, або за допомогою інтегральної функції (про таку функцію йтиметься в матеріалі наступного заняття).

Закон розподілу дискретної випадкової величини можна зобразити графічно, для чого в прямокутній декартовій системі координат потрібно відкласти точки $M_1(x_1; p_1)$, $M_2(x_2 ; x_2)$, ... , $M_n(x_n ; p_n)$ (x_i – можливі значення X, p_i – відповідні їм ймовірності) і з'єднати їх відрізками прямих. Отримана фігура називається прямокутником розподілу.

5.1 Закони розподілу дискретної випадкової величини

Закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа настання події в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність появи події є сталою і рівною p, називається біноміальним.

Імовірність можливого значення $X=к$ (числа $к$ настання події в n випробовуваннях) обчислюється за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Якщо число випробовувань є великим, а ймовірність настання події в кожному випробовуванні є малою, то використовується формула Пуассона:

$$P_n(к) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{к!},$$

де $\lambda = np$.

У такому випадку говорять, що випадкова величина розподілена за законом Пуассона.

5.2 Числові характеристики дискретної випадкової величини

До числових характеристик дискретної випадкової величини відносяться математичне сподівання, дисперсія і середнє квадратичне відхилення.

5.2.1 Математичне сподівання дискретної випадкової величини

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини називається сума добутків усіх її можливих значень на їх імовірності:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n. \qquad (5.2)$$

Якщо випадкова величина набуває лічильної множини можливих значень, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i,$$

причому припускається, що ряд, який знаходиться в правій частині рівності, збігається абсолютно, а сума всіх ймовірностей p_i дорівнює одиниці. Під час повторних випробовувань математичне сподівання обчислюється за формулою

$$M(X) = np, \qquad (5.3)$$

де n – число випробовувань;

p – ймовірність появи події в одному випробовуванні.

Математичне сподівання X наближено дорівнює середньому арифметичному значень випадкової величини, які спостерігались (тим точніше, чим більше число випробовувань):

$$M(X) \approx X_{ср}.$$

Слід підкреслити, що математичне сподівання можна обчислити до проведення випробовувань, а середнє значення – лише після їх проведення.

5.2.2 Властивості математичного сподівання

1 $M(C) = C,$ де $C = const.$

2 $M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n).$

3 $M(X_1X_2... X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot ... \cdot M(X_n).$

4 $M(CX) = C \cdot M(X).$

5.2.3 Дисперсія дискретної випадкової величини

Дисперсією (розсіянням) дискретної випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 . \qquad (5.4)$$

Зауважимо, що відхиленням називається різниця між випадковою величиною і її математичним сподіванням.

Математичне сподівання відхилення дорівнює нулю: $M[X – M(X)] = 0$.

Нарівні з терміном "відхилення" використовується термін "центрована величина". Центрованою випадковою величиною $\overset{\circ}{X}$ називається різниця між випадковою величиною і її математичним сподіванням:

$$\overset{\circ}{X} = X - M(X) .$$

Назва "центрована величина" пов'язана з тим, що математичне сподівання є центром розподілу X. Зауважимо також, що на практиці дисперсію доцільно обчислювати за формулою

$$D(X) = M(X^2) – M^2(X). \qquad (5.5)$$

Для обчислення дисперсії в разі повторних випробовувань використовується формула

$$D(X) = npq, \qquad (5.6)$$

де n – число випробовувань;

p – імовірність настання події в результаті одного випробовування;

q – імовірність ненастання події в результаті одного випробовування.

5.2.4 Властивості дисперсії

1 $D(C) =0$, де $C = const.$

2 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$

3 $D(CX) = C^2 \cdot D(X).$

5.2.5 Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини

Середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини називається квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} . \qquad (5.7)$$

5.2.6 Закон великих чисел

Нерівність Чебишева. Імовірність того, що відхилення випадкової величини x від її математичного сподівання за абсолютною величиною є меншою за додатне число ε не менше ніж на $1 - \frac{D(x)}{\varepsilon^2}$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (5.8)$$

Теорема Чебишева. Якщо послідовність попарно незалежних випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n, ... має скінчене математичне сподівання і дисперсії даних величин є рівномірно обмеженими (не перевищують стале число C), то середнє арифметичне випадкових величин збігається за ймовірністю до середнього арифметичного їх математичних сподівань, тобто якщо ε – будь-яке додатне число, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Бернуллі. Якщо в кожному з n незалежних випробовувань ймовірність p настання події A є сталою, то доволі близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від імовірності p за абсолютною величною буде доволі малим, якщо число випробовувань є досить великим. Інакше, якщо ε – доволі мале додатне число, то за виконання умов теореми має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Із нерівності Чебишева випливає, що

$$P(|m - np| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{npq}{\varepsilon^2},$$

або

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}, \qquad (5.9)$$

а також формула, яка виражає теорему Чебишева:

$$P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}. \qquad (5.10)$$

Приклади розв’язання задач

Задача 1. Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента під час одного з випробовувань дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, які відмовили під час одного з випробовувань.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X (число елементів, що відмовили під час одного з випробовувань) набуває наступних можливих значень: x_1=0 (жоден із елементів пристрою не відмовив), x_2=1 (відмовив один

із елементів пристрою), x_3 = 2 (відмовило два елементи пристрою) і x_4 = 3 (відмовило три елементи пристрою).

Відмови елементів є незалежними одна від одної, ймовірності відмови кожного з елементів є рівними між собою, тому потрібно використовувати формулу Бернуллі. Враховуючи, що за умовою задачі $n = 3$, $p = 0{,}1$, $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$, отримаємо:

$$P(X=0)=P_3(0)=C_3^0p^0q^3=(0{,}9)^3=0{,}729;$$
$$P(X=1)=P_3(1)=C_3^1p^1q^2=3\cdot 0{,}1\cdot(0{,}9)^2=0{,}243;$$
$$P(X=2)=P_3(2)=C_3^1p^2q^1=3\cdot(0{,}1)^2\cdot 0{,}9=0{,}027;$$
$$P(X=3)=P_3(3)=C_3^3p^3q^0=(0{,}1)^3=0{,}001.$$

Контроль. $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}729+0{,}243+0{,}027+0{,}001=1.$

Шуканий біноміальний закон розподілу X можна подати в такому вигляді:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

Задача 2. Серед партії, що складається з шести деталей, міститься чотири стандартних. Навмання відібрано три деталі (без повернення).

Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних.

Побудувати многокутник отриманого розподілу.

Розв'язання. Випадкова величина X – число стандартних деталей серед відібраних, може мати наступні можливі значення: x_1 = 1 (стандартною є одна деталь), x_2 = 2 (стандартними є дві деталі), x_3 = 3 (стандартними є всі три деталі). Ймовірності одержання цих значень відповідно дорівнюють:

$$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^2}{C_6^3}=\frac{4\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3}{6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{5};$$
$$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_2^1}{C_6^3}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot1\cdot6\cdot5\cdot4}=\frac{3}{5};$$
$$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_2^0}{C_6^3}=\frac{4\cdot1\cdot1\cdot2\cdot3}{1\cdot6\cdot5\cdot4}=\frac{1}{5}.$$

Шуканий закон розподілу X можна подати в такому вигляді:

X	1	2	3
P	1/5	3/5	1/5

Контроль. $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=1.$

Будуємо багатокутник розподілу випадкової величини X (рис.7).

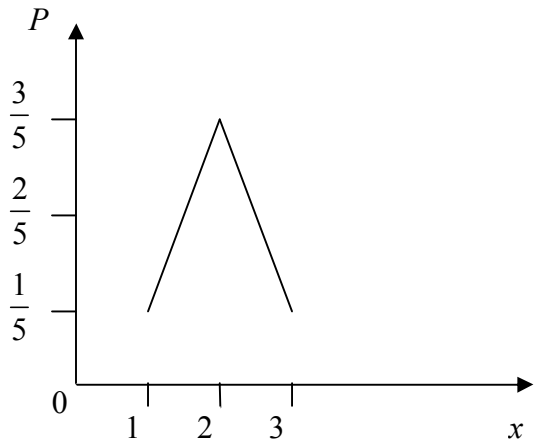


Рисунок 7

Задача 3. Обчислити математичне сподівання дискретної випадкової величини X, задане таким законом розподілу:

X	4	6	8	10	12
P	0,3	0,15	0,18	0,17	0,2

Розв'язання. За формулою (5.2) маємо:

$$M(X) = 4 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}15 + 8 \cdot 0{,}18 + 10 \cdot 0{,}17 + 12 \cdot 0{,}2 =$$
$$= 1{,}2 + 0{,}9 + 1{,}44 + 1{,}7 + 2{,}4 = 7{,}64.$$

Отже, математичне сподівання дискретної випадкової величини X дорівнює 7,64.

Задача 4. Обчислити математичне сподівання випадкової величини $Z=3X+4Y$, якщо відомо, що $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями 2 і 4 математичного сподівання, матимемо:

$$M(Z) = M(3X + 4Y) = M(3X) + M(4Y) = 3M(X) + 4M(Y) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 6 + 24 = 30.$$

Задача 5. Відомий перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а також відоме математичне сподівання даної величини і її квадрата: $M(X)=2{,}3$, $M(X^2)=5{,}9$. Обчислити ймовірності, які відповідають можливим значенням X.

Розв'язання. Враховуючи те, що

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1,\ M(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i p_i,\ \ M(X^2) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 p_i,$$

а також беручи до уваги те, що $M(X)=2{,}3$, $M(X^2)=5{,}9$, отримаємо таку систему трьох лінійних рівнянь відносно невідомих імовірностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1; \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 2{,}3; \\ p_1 + 4p_2 + 9p_3 = 5{,}9. \end{cases}$$

Розв'язавши дану систему рівнянь, визначимо шукані ймовірності: p_1=0,2, p_2 = 0,3, p_3 = 0,5.

Задача 6. Відділ технічного контролю перевіряє відповідність виробів стандартам. Імовірність того, що виріб є стандартним дорівнює 0,9. У кожній партії міститься 5 виробів. Обчислити математичне сподівання дискретної випадкової величини X – число партій, у кожній з яких виявиться рівно 4 стандартних вироби, якщо перевірці підлягає 50 партій.

Розв'язання. За формулою (4.1), визначаємо ймовірність того, що в партії, яка складається з 5 виробів, рівно 4 вироби є стандартними:

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q = 5 \cdot (0{,}9)^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}32805.$$

За умовою задачі перевірці підлягає 50 партій, тому за формулою (5.3) $M(X) = 50 \cdot 0{,}32805 \approx 16$.

Таким чином, у 16 партіях із 50, які підлягають перевірці, виявиться рівно 4 вироби, які будуть стандартними.

Задача 7. Випадкові величини X і Y є незалежними. Обчислити дисперсію випадкової величини $Z = 2X + 3Y$, якщо відомо, що $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями 2 і 4 дисперсії, отримаємо $D(Z) = D(2X + 3Y) = D(2X) + D(3Y) = 4D(X) = 9D(Y) = 4 \cdot 4 + 9 \cdot 5 = 16 + 45 = 61$.

Задача 8. Обчислити дисперсію (двома способами) і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, заданої законом розподілу, наведеним у вигляді таблиці:

X	-5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Розв'язання:

І спосіб. Виходячи з означення, дисперсію можна обчислити таким чином:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Визначимо спочатку математичне сподівання X:

$$M(X) = -5 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 = -0{,}3.$$

Закон розподілу випадкової величини $(X - M(X))^2$ наведено у вигляді таблиці:

$(X - M(X))^2$	$(-5 + 0{,}3)^2$	$(2 + 0{,}3)^2$	$(3 + 0{,}3)^2$	$(4 + 0{,}3)^2$
P	0,4	0,3	0,1	0,2

Обчислимо математичне сподівання $(X - M(X))^2$, тобто шукану дисперсію:

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = (-5 + 0{,}3)^2\, 0{,}4 + (2 + 0{,}3)^2\, 0{,}3 + (3 + 0{,}3)^2\, 0{,}1 +$$
$$+ (4 + 0{,}3)^2 \cdot 0{,}2 = 8{,}836 + 1{,}587 + 1{,}089 + 3{,}698 = 15{,}21.$$

ІІ спосіб. Обчислимо дисперсію за формулою (5.5):

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X).$$

Обчислимо математичне сподівання X (див. перший спосіб розв’язання):

$$M(X) = -0{,}3.$$

Обчислимо математичне сподівання X^2:

$$M(X^2) = (-5)^2\,0{,}4 + 2^2\,0{,}3 + 3^2\,0{,}1 + 4^2\,0{,}2 = 25\,0{,}4 + 4\,0{,}3 + 9\,0{,}1 + 16\,0{,}2 =$$
$$= 10 + 1{,}2 + 0{,}9 + 3{,}2 = 15{,}3.$$

Обчислимо шукану дисперсію:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 15{,}3 - (-0{,}3)^2 = 15{,}3 - 0{,}09 = 15{,}21.$$

Як бачимо, результат отримано такий самий, як і за розв'язання першим способом.

Очевидно, що обчислення дисперсії за означенням є процесом більш трудомістким, тому в подальшому будемо її обчислювати за формулою (5.5).

Шукане середнє квадратичне відхилення X обчислимо за формулою (5.7):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{15{,}21} = 3{,}9\,.$$

Задача 9. Дискретно випадкова величина X набуває лише два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Ймовірність того, що X набуде значення x_1 дорівнює 0,2. Скласти закон розподілу X, якщо математичне сподівання $M(X)$ = =2,6, а середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = 0{,}8$.

Розв'язання. Сума ймовірностей усіх можливих значень дискретної випадкової величини дорівнює одиниці, тому ймовірність того, що дискретна випадкова величина X набуде значення x_2 буде такою: $p_2 = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$.

Наведемо закон розподілу X у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2
P	0,2	0,8

Для обчислення x_1 і x_2 за формулами (5.2) і (5.5) виразимо відоме математичне сподівання і дисперсію через x_1 і x_2:

$$M(X) = 0{,}2x_1 + 0{,}8\,x_2,$$
$$D(X) = 0{,}2 \cdot x_1^2 + 0{,}8 \cdot x_2^2 - M^2(X).$$

Підставляючи до отриманих рівнянь значення $M(X)$=2,6 і $D(X)=\sigma^2(X)=(0{,}8)^2=0{,}64$, після елементарних перетворень отримаємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 0{,}2x_1 + 0{,}8x_2 = 2{,}6; \\ 0{,}2x_1^2 + 0{,}8x_2^2 = 7{,}4. \end{cases}$$

Помноживши обидві частини кожного з отриманих рівнянь системи на п'ять, матимемо

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 13; \\ x_1^2 + 4x_2^2 = 37. \end{cases}$$

Виражаємо з першого рівняння системи x_1 і підставляємо цей вираз до другого рівняння, після чого отримаємо:

$$(13 - 4\,x_2)^2 + 4\,x_2^2 = 37.$$

Після нескладних перетворень дане рівняння набуде вигляду

$$5\,x_2^2 - 26\,x_2 + 33 = 0,$$

а його розв'язок буде таким:

$$x_2 = \frac{13 \pm \sqrt{169-165}}{5} = \frac{3 \pm 2}{5}.$$

Отже, маємо два розв'язки системи:

$$x_2^1 = 3, \quad x_1^1 = 13 - 4x_2^1 = 1;$$
$$x_2^{11} = 2{,}2, \quad x_1^{11} = 13 - 4x_2^{11} = 4{,}2.$$

За умовою задачі $x_1 < x_2$, тому даній задачі задовольняє лише перший розв'язок, тобто $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Таким чином, шуканий закон розподілу можна записати в такому вигляді:

X	1	3
P	0,2	0,8

Задача 10. Знайти дисперсію дискретної випадкової величини X - числа настання події A під час двох незалежних випробовувань, якщо ймовірності її настання під час таких випробовувань є однаковими і відомо, що $M(X) = 0{,}9$.

Розв'язання:

І спосіб. Можливі значення величини є такими: $x_1 = 0$ (подія не настала), $x_2 = 1$ (подія настала один раз) і $x_3 = 2$ (подія настала двічі).

Знайти ймовірність можливих значень величини за формулою Бернуллі:

$$P_2(0) = C_2^0 p^0 q^2 = q^2;$$
$$P_2(1) = C_2^1 p^1 q^1 = 2pq;$$
$$P_2(2) = C_2^2 p^2 q^0 = p^2.$$

Наведемо закон розподілу X у вигляді таблиці:

Можливі значення	0	1	2
Імовірності	q^2	$2pq$	p^2

Обчислимо $M(X)$:

$$M(X) = 0 \cdot q^2 + 1 \cdot 2\,q\,p + 2 \cdot p^2 = 2\,p(p+q) = 2\,p \cdot 1 = 2\,p.$$

Згідно з умовою $M(X) = 0{,}9$, тобто $2p = 0{,}9$, звідки $p = 0{,}45$.

Отже, $q = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

Шукану дисперсію запишемо наступним чином:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0 \cdot q^2 + 1 \cdot 2\,pq + 4\,p^2 - 0{,}81 =$$
$$= 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 + 4 \cdot 0{,}2025 - 0{,}81 = 0{,}495.$$

ІІ спосіб. За формулою (5.3) маємо:

$$M(X) = np.$$

Оскільки, за умовою $M(X) = 0{,}9$, а $n = 2$, то $2p = 0{,}9$. Звідси $p = 0{,}45$, а отже, $q = 0{,}55$. Шукану дисперсію обчислимо за формулою (5.6):

$$D(X) = npq = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}495.$$

Перевага другого способу є наочною.

Задача 11. Проводяться незалежні випробовування з однаковою ймовірністю настання події A під час кожного з них. Обчислити ймовірність настання події A під час одного з випробовувань, якщо дисперсія числа настання події під час трьох незалежних випробовувань дорівнює 0,63.

Розв'язання. Використовуючи формулу (5.6) і беручи до уваги те, що n = 3, $D(X)$ = 0,63, $p + q = 1$, отримаємо:

$$3\,p(1 - p) = 0{,}63,$$

або

$$p^2 - p + 0{,}21 = 0.$$

Після розв'язання даного рівняння ймовірність настання події A під час кожного з випробовувань дорівнює або 0,3 або 0,7.

Задача 12. Дискретна випадкова величина X задана відповідно до закону розподілу:

X	0,1	0,4	0,6
P	0,2	0,3	0,5

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < \sqrt{0{,}4}$.

Розв'язання. За даним законом розподілу величини X обчислимо $M(X)$ і $D(X)$:

$$M(X) = 0{,}1\cdot 0{,}2 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}02 + 0{,}12 + 0{,}3 = 0{,}44;$$

$$D(X) = (0{,}1)^2 \cdot 0{,}2 + (0{,}4)^2 \cdot 0{,}3 + (0{,}6)^2 \cdot 0{,}5 - (0{,}44)^2 =$$

$$= 0{,}002 + 0{,}048 + 0{,}18 - 0{,}1936 = 0{,}0364.$$

Підставляючи $M(X)$ = 0,44, $D(X)$ = 0,0364, $\varepsilon = \sqrt{0{,}4}$ до нерівності (5.8), остаточно отримаємо

$$P(|X - 0{,}44| < \sqrt{0{,}4}) \geq 1 - \frac{0{,}0364}{0{,}4} = 0{,}909.$$

Задача 13. До освітлювальної мережі паралельно підімкнемо 20 ламп. Імовірність того, що за час T лампу буде ввімкнено, дорівнює 0,8. Скориставшись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом увімкнених ламп і середнім числом (математичним сподіванням) увімкнених ламп за час T виявиться: а) меншою за три; б) не меншою за три.

Розв'язання:

а) Позначимо через X дискретну випадкову величину – число ввімкнених ламп за час T.

Тоді

$$M(X) = np = 20 \cdot 0{,}8 = 16,$$

$$D(X) = npq = 20 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 3{,}2.$$

Скористаємося нерівністю Чебишева:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Підставляючи $M(X)$ = 16, $D(X)$ = 3,2, ε = 3 до даної нерівності, отримаємо

$$P(|X - 16| < 3) \geq 1 - \frac{3{,}2}{9} = 0{,}64.$$

б) Події $|X - 16| < 3$ і $|X - 16| \geq 3$ є протилежними, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці.

Отже, $P(|X-16| \geq 3) \geq 1-0{,}64 = 0{,}36.$

Задача 14. Дано: $P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$ і $D(X) = 0{,}009$. Використовуючи нерівність Чебишева, обчислити ε.

Розв'язання. Згідно з нерівністю (5.8) $P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geq 1-\dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

З урахуванням того, що $P(|X-M(X)| < \varepsilon) \geq 0{,}9$, а $D(X)$=0,009 матимемо $1-\dfrac{0{,}009}{\varepsilon^2} = 0{,}9$ або $\varepsilon^2 = \dfrac{0{,}009}{1-0{,}9} = 0{,}09$, звідки $\varepsilon = \sqrt{0{,}09} = 0{,}3$.

Задача 15. Дисперсія кожної з попарно незалежних 16000 випадкових величин не перевищує 10. Потрібно:

а) оцінити ймовірність того, що відхилення середньої арифметичної $\overline{X}$ даних величин від математичного сподівання їх середньої M($\overline{X}$) не перевищує 0,25;

б) визначити кількість таких випадкових величин, яку потрібно взяти, щоб із ймовірністю, не меншою за 0,99, можна було б стверджувати, що абсолютна величина різниці між $\overline{X}$ і $M(\overline{X})$ не перевищує 0,25.

Розв'язання:

а) Для оцінки ймовірності скористаємося нерівністю (5.10):

$$P(|\overline{X}-M(\overline{X})| \leq \varepsilon) \geq 1-\frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

За умовою: $n = 16000$, $D(X) \leq C = 10$, $\varepsilon = 0{,}25$,

Отже, $P(|\overline{X}-M(\overline{X})| \leq 0{,}25) \geq 1-\dfrac{10}{16000\cdot(0{,}25)^2} = 0{,}99.$

б) Використовуючи нерівність (5.8) і беручи до уваги те, що $P(\left|\overline{X}-M(\overline{X})\right| \leq 0{,}25) = 0{,}99$, $C = 10$, $\varepsilon = 0{,}25$, одержимо

$$1-\frac{10}{n\cdot(0{,}25)^2} \geq 0{,}99,$$

звідки

$$n \geq \frac{10}{(1-0{,}99)\cdot(0{,}25)^2} = 16000.$$

Задача 16. За даними ВТК, партія відштампованих пластмасових пластинок пластмаси містить 3 % браку. Обчислити ймовірність того, що під час перегляду партії, до якої входить 1000 пластинок, виявиться відхилення від установленого відсотка браку менше за 1 %.

Розв'язання. У даному випадку потрібно визначити ймовірність $P(\left|\dfrac{m}{n}-p\right| < \varepsilon)$, якщо $p = 3\ \% = 0{,}03$, $\varepsilon = 1\% = 0{,}01$, $n = 1000$.

Використовуючи нерівність (5.9), одержимо

$$P \geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1-\frac{0{,}03\cdot 0{,}97}{1000\cdot(0{,}01)^2} = 1-\frac{0{,}0291}{0{,}1} = 0{,}709.$$

Таким чином, $P \geq 0{,}709$.

Задача 17. Імовірність того, що випущений екземпляр годинника має точність ходу в межах стандарту, дорівнює 0,97. Оцінити ймовірність того, що серед 1000 годинників доля годинників з точністю ходу в межах норми відхилиться (за абсолютною величиною) від ймовірності 0,97 не більше ніж на 0,02.

Розв'язання. За умовою даної задачі, $\varepsilon = 0{,}02$, p = 0,97, q=0,03, n= 1000. Отже, згідно з нерівністю (5.9), ймовірність шуканої події визначається таким чином:

$$P(\left|\frac{m}{1000} - 0{,}97\right| \le 0{,}02) \ge 1 - \frac{0{,}97 \cdot 0{,}03}{1000 \cdot (0{,}02)^2} = 1 - \frac{0{,}0291}{0{,}4} = 0{,}92725.$$

Задача 18. Яку кількість деталей потрібно перевірити, щоб з імовірністю, не меншою за 0,98, можна було б сподіватись, що абсолютна величина відхилення частоти виявлення якісних деталей від імовірності того, що деталь може бути якісною (що становить 0,95), не перевищить 0,01.

Розв'язання. Відповідно до нерівності (5.9) $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$.

Якщо за відомих значень p, q і ε число n буде обрано таким, що різниця $1 - \frac{p\,q}{n\,\varepsilon^2}$ буде меншою за задане в умові значення ймовірності p, то одержимо нерівність $1 - \frac{pq}{n\,\varepsilon^2}. \ge P$, із якої визначимо значення n.

За умовою даної задачі, p = 0,95, q = 0,05, ε = 0,01 і p = 0,98, тому

$$1 - \frac{0{,}95 \cdot 0{,}05}{n \cdot (0{,}01)^2} \ge 0{,}98,$$

або

$$0{,}02 \ge \frac{0{,}0475}{0{,}0001n},$$

звідки

$$n \ge \frac{0{,}0475}{0{,}02 \cdot 0{,}0001} = 23750.$$

Таким чином, потрібно перевірити не менше 23750 деталей.

Задача 19. Число телевізорів підвищеної якості складає в середньому 75 % від загальної кількості їх випуску, яка складає 3000 штук.

За допомогою нерівності Чебишева оцінити ймовірність того, що серед 3000 штук телевізорів підвищену якість матимуть ті, які за здійснення їх переліку будуть належати до проміжку між числами 2190 і 2310 включно.

Розв'язання. Кількість телевізорів підвищеної якості серед їх загальної кількості, яка складає 3000 штук, є випадковою величиною X, розподіленою за біноміальним законом. Тому математичне сподівання даної величини можна записати таким чином: $M(X) = np$=3000·0,75 = 2250, а дисперсію – таким: $D(X)=npq$ = 3000 · 0,75 · 0,25 = 562,5.

Оскільки проміжок між числами 2190 і 2310, який є межею припустимих значень випадкової величини, симетричної відносно числа математичного сподівання, дорівнює 2250 (одне є меншим, а друге – більшим на 60), то

нерівність $2190 \le X \le 2310$ є рівносильною до нерівності $X - 2250 \le 60$. Тому, згідно з нерівністю Чебишева, якщо $\varepsilon = 60$, то

$$P(2190 \le X \le 2310) = P(|X - 2250| \le 60) \ge 1 - \frac{262{,}5}{3600} = 1 - 0{,}15625 = 0{,}84375.$$

Отже, ймовірність настання шуканої події складає не менше, ніж 0,84375.

Задача 20. Імовірність настання події A в результаті проведення кожного з 1000 випробовувань складає 0,3. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що відхилення числа настання даної події від математичного сподівання буде більшим за 30.

Розв'язання. Число настання події A в результаті проведення $n = 1000$ випробовувань є випадковою величиною X, розподіленою за біноміальним законом. Тому

$$M(X) = np = 1000 \cdot 0{,}3 = 300,$$
$$D(X) = npq = 1000 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 210.$$

Використовуючи нерівність Чебишева і враховуючи те, що $M(X)=300$, $D(X) = 210$ і $\varepsilon = 30$, визначимо ймовірність настання шуканої події:

$$P(|X - 300| > 30) \le \frac{210}{30^2} \approx 0{,}233.$$

Питання для самоперевірки

1 Яка величина називається випадковою?

2 Як прийнято позначати випадкові величини та їх значення?

3 Що собою являє закон розподілу випадкової величини?

4 Як можна задати закон розподілу випадкової величини?

5 Яка випадкова величина називається дискретною?

6 Як прийнято задавати закон розподілу дискретної випадкової величини?

7 У чому полягають біноміальний закон та закон Пуассона дискретної випадкової величини?

8 Наведіть числові характеристики дискретної випадкової величини.

9 Що називається математичним сподіванням дискретної випадкової величини? Яким чином математичне сподівання характеризує дискретну випадкову величину?

10 Назвіть властивості математичного сподівання.

11 Що називається дисперсією дискретної випадкової величини? Яким чином дисперсія характеризує дискретну випадкову величину?

12 Яка формула для обчислення дисперсії використовується на практиці?

13 Назвіть властивості дисперсії випадкової величини.

14 Що називається середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини? Для чого його вводять?

15 Що можна оцінити за допомогою нерівності Чебишева? Яким чином?

16 Сформулюйте теорему Чебишева та теорему Бернуллі.

17 Як оцінюються ймовірності $P(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon)$ і $P(|\overline{X} - M(\overline{X})| < \varepsilon)$?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Імовірність того, що виріб, виготовлений на автоматичному станку, виявиться виробом першого або другого ґатунку, складає 0,8. Для контролю якості регулювання станка робітник періодично перевіряє один за одним вироблені вироби, але не більше п'яти штук кожного разу. Якщо виявиться, що ґатунок першого виробу є нижчим за ґатунок другого, то станок зупиняється для регулювання. Вважаючи, що ймовірність виготовлення виробів першого та другого ґатунків залишається сталою, скласти теоретичний розподіл кількості перевірок виробів, виготовлених робітником під час однієї серії випробовувань. Обчислити математичне сподівання даної випадкової величини.

Відповідь. 3,3616.

Завдання 2. Серед 10 годинників, які потребують ремонту, шість потребують чистки механізму. Поділ годинників відповідно до виду ремонту не здійснено. Майстер, який бажає відокремити годинники, які потребують чистки механізму, оглядає їх по черзі і, виявивши такі годинники, припиняє їх подальший огляд. Скласти закон розподілу випадкової величини – кількості оглянутих годинників, і обчислити математичне сподівання даної випадкової величини.

Відповідь. $1\frac{4}{7}$.

Завдання 3. Відповідно до встановленого технологічного процесу $\frac{2}{3}$ від загальної кількості виробів, які виготовляються автоматичним верстатом, є вироби першого ґатунку і $\frac{1}{3}$ – виробів другого ґатунку. Скласти закон розподілу кількості виробів першого ґатунку для 5 виробів, відібраних випадково, і користуючись ним, обчислити математичне сподівання і дисперсію даної випадкової величини. Перевірити справедливість теорем про математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка підлягає біноміальному закону розподілу.

Відповідь. $M(X) \approx 3{,}33$; $D(X) \approx 1{,}11$.

Завдання 4. Споживання електроенергії підприємствами № 1 і № 2 протягом доби характеризується такими даними:

а) стосовно підприємства № 1

Кількість споживаної електроенергії, квт–ч (X)	840	860	880	900
Імовірність (p)	0,1	0,3	0,5	0,1

б) стосовно підприємства № 2

Кількість споживаної електроенергії, квт–ч($У$)	950	980	1000
Імовірність (q)	0,3	0,5	0,2

Потрібно виконати наступні дії: скласти закон розподілу кількості електроенергії, споживаної протягом доби обома підприємствами разом; використовуючи даний закон, знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка розглядається, і перевірити справедливість теорем про математичне сподівання та дисперсію суми незалежних випадкових величин.

Відповідь. $M(X) = 872$, $M(Y) = 975$, $D(X) = 256$, $D(Y) = 325$.

Завдання 5. Імовірність влучення ціль в результаті здійснення одного пострілу дорівнює 0,8 і від пострілу до пострілу не змінюється. Обчислити математичне сподівання числа витрачених снарядів, якщо в наявності є 4 снаряди і стрільба виконується до перших двох влучень.

Відповідь. 2,464.

Завдання 6. Із ящика, в якому знаходиться 6 білих і 4 чорних кульки, виймається кулька п'ять разів підряд, до того ж після кожного виймання кулька знову повертається в ящик, після чого кульки перемішуються. Випадкова величина X – це число вийнятих білих кульок. Скласти закон розподілу випадкової величини X і знайти її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Відповідь. $M(X) = 3$, $D(X) = 1{,}2$, $\sigma(X) = 1{,}095$.

Завдання 7. Визначити середнє число вражених цілей, якщо для здійснення пострілів відпущено 200 снарядів. Імовірність влучення в будь-яку ціль дорівнює 0,1 і для влучення в кожну ціль достатньо двох пострілів.

Відповідь. 10.

Завдання 8. Скласти закон розподілу числа очок, зароблених стрільцем у результаті здійснення чотирьох пострілів, якщо ймовірність влучення в ціль в результаті здійснення пострілу дорівнює 0,3, причому за кожне влучення стрілець заробляє по п'ять очок, а за кожний промах він втрачає два очка.

Відповідь.

X	-8	-1	6	13	206
P	0,2401	0,4116	0,2646	0,0756	0,0081

Завдання 9. Із ящика, в якому знаходиться 4 білих і 20 чорних кульок, послідовно виймаються кульки доти, доки не буде вийнято чорну кульку. X – (число вийнятих кульок) є дискретною випадковою величиною. Скласти закон розподілу X і обчислити $M(X)$.

Відповідь. 1,19.

Завдання 10. Дискретна випадкова величина X набуває три можливих значення: $x_1=4$ з імовірністю $p_1 = 0{,}5$; $x_2 = 6$ з імовірністю $p_2 = 0{,}3$ і x_3 з імовірністю p_3. Обчислити x_3 і p_3, якщо відомо що $M(X) = 8$.

Відповідь. $x_3 = 21$; $p_3 = 0{,}2$.

Завдання 11. Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: $x_1= -1$; $x_2= 0$; $x_3= 1$. Також відомими є математичне сподівання даної величини і її квадрата: $M(X) = 0{,}1$; $M(X^2) = 0{,}9$.

Обчислити ймовірності: p_1, p_2, p_3, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.

Відповідь. $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}1$; $p_3 = 0{,}5$.

Завдання 12. Серед партії з 10 деталей міститься 3 нестандартних. Навмання взято 2 деталі (без повернення). Обчислити математичне сподівання дискретної випадкової величини X – числа нестандартних деталей серед двох узятих.

Відповідь. 0,6.

Завдання 13. Обчислити дисперсію дискретної випадкової величини X – числа елементів деякого пристрою, які відмовили під час проведення десяти незалежних випробовувань, якщо ймовірність відмови елемента під час кожного з проведених випробовувань дорівнює 0,9.

Відповідь. 0,9.

Завдання 14. Дискретна випадкова величина X має лише три можливих значення: $x_1 = 1$; x_2 і x_3, до того ж $x_1 < x_2 < x_3$. Імовірність того, що випадкова величина X набуває значень x_1 і x_2 відповідно дорівнює 0,3 і 0,2. Скласти закон розподілу величини X, якщо відомими є її математичне сподівання: $M(X) = 2{,}2$, і дисперсія: $D(X) = 0{,}76$.

Відповідь.

X	1	2	3
P	0,3	0,2	0,5

Завдання 15. Дискретні незалежні випадкові величини задано такими законами розподілу:

X	-1	0	1
P	0,3	0,4	0,3

Y	-2	1	2	3
q	0,3	0,3	0,3	0,1

Довести, що $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Завдання 16. Імовірність відмови деталі під час проведення дослідження щодо її надійності дорівнює 0,2. Обчислити математичне сподівання і дисперсію числа деталей, які відмовили, якщо дослідженню буде підлягати 10 деталей.

Відповідь. $M(X) = 2$; $D(X) = 1{,}6$.

Завдання 17. Обчислити математичне сподівання числа лотерейних білетів, які виявляться виграшними, якщо придбано 20 білетів, до того ж імовірність виграшу одного білета дорівнює 0.3.

Відповідь. 6 білетів.

Завдання 18. На заводі працює чотири автоматичні лінії. Ймовірність того, що протягом робочої зміни перша лінія не потребуватиме регулювання дорівнює 0,9, друга – 0,8, третя – 0,75, четверта – 0,27. Обчислити математичне сподівання числа ліній, які протягом робочої зміни не потребуватиме регулювання.

Відповідь. 3,15.

Завдання 19. Імовірність того, що в бібліотеці існуватиме вільний доступ до користування книгою, необхідною для студента, дорівнює 0,3. Скласти закон розподілу числа бібліотек, які може відвідати студент, якщо в місті існує чотири бібліотеки.

Відповідь.

X	1	2	3	4
P	0,3	0,21	0,147	0,343

Завдання 20. До складу шестилампового радіоприймача входить шість різних ламп, одна з яких вийшла з ладу. Для усунення несправності навмання обрана лампа замінюється на явно придатну для використання із запасного комплекту, після чого одразу перевіряється працездатність радіоприймача. Скласти закон розподілу числа заміни ламп.

Відповідь.

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Завдання 21. Для проведення випробування відібрано 1200 проб руди. Визначити математичне сподівання і дисперсію числа проб з промисловим вмістом металу, якщо ймовірність промислового вмісту металу в них дорівнює 0,09.

Відповідь. $M(X) = 108$, $D(X) = 98{,}28$.

Завдання 22. Обчислити сталу ймовірність влучень у ціль у результаті здійснення кожного пострілу і кількість виконаних пострілів, якщо середнє число влучень дорівнює 72, а середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка характеризує число влучень, дорівнює 6.

Відповідь. $p = 0{,}5$, $n = 144$.

Завдання 23. Щодо трьох дослідних ділянок отримано наступні дані про врожайність з 1 га:

Ділянка	I	II	III
Центнерів з 1 га	18	20	22
Розмір ділянки в га	10	20	20

Визначити середнє значення випадкової величини врожайності з 1 га для всіх трьох ділянок і її середнє квадратичне відхилення.

Відповідь. $M(X) = 20{,}4$ ц, $\sigma(X) \approx 1{,}5$ ц.

Завдання 24. На шляху руху автомобіля працює 4 світлофори, кожний із яких або дозволяє, або забороняє подальший рух автомобіля з імовірністю 0,5. Обчислити математичне сподівання і дисперсію числа світлофорів, які трапляться на шляху автомобіля до здійснення ним першої зупинки.

Відповідь. 0,938; 1,43.

Завдання 25. Електростанція обслуговує мережу, до складу якої входить 18000 ламп, імовірність загорання кожної з яких у зимовий вечір дорівнює 0,9. Якою може бути ймовірність того, що число ламп, які обслуговують мережу зимовим вечором, відрізняється від його математичного сподівання за абсолютною величиною не більше ніж на 200?

Відповідь. $P \geq 0{,}9595$.

Завдання 26. Дискретна випадкова величина X задана таким законом розподілу:

X	-1	0	2	4	6
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X) < 5.|$

Відповідь. $P \geq 0{,}872$.

Завдання 27. Середнє значення довжини деталі складає 50 см, а дисперсія складає 0,1. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що довжина випадково взятої деталі виявиться не меншою за 49,5 см і не більшою за 50,5 см.

Відповідь. $P \geq 0{,}6$.

Завдання 28. Імовірність того, що серед загальної кількості випущених радіоламп нестандартні радіолампи складають 25%. Оцінити знизу ймовірність того, що в партії, до складу якої входить 1000 радіоламп, число нестандартних радіоламп буде відрізнятися від 250 менше ніж на 40 одиниць.

Відповідь. $P \geq 0{,}8667$.

Завдання 29. Кількість пророслого насіння певної культури складає 0,75. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що з 1000 посіяних насінин число тих, які проростуть, складатиме від 700 до 800 штук включно.

Відповідь. $P \geq 0{,}925$.

Завдання 30. Математичне сподівання швидкості вітру на заданій висоті дорівнює 25 км/год, а середнє квадратичне відхилення – 4,5 км/год. Які швидкості вітру на заданій висоті можна очікувати з імовірністю, не меншою за 0,9?

Відповідь. $10{,}8 \leq X \leq 39{,}2$.

Завдання 31. Добова витрата води в населеному пункті є випадковою величиною, середнє квадратичне відхилення якої дорівнює 10000 л. Оцінити ймовірність того, що витрати води в даному пункті протягом доби відхиляться від математичного сподівання за абсолютною величиною більше ніж на 25000 л.

Відповідь. $P \leq 0{,}16$.

Завдання 32. Партію випущених електроламп запаковано в 200 однакових ящиків. Для визначення середньої тривалості горіння електролампи вийнято довільно по одній лампі з кожного ящика. Оцінити знизу ймовірність

того, що середня тривалість горіння вийнятих 200 електроламп відрізняється від середньої тривалості горіння всієї партії ламп за абсолютною величиною менше ніж на 5 годин, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння кожної з вийнятих ламп складає менше ніж 7 годин.

Відповідь. $P \geq 0{,}9902$.

Завдання 33. Для визначення середньої врожайності поля, площа якого складає 5000 га, припускається відміряти на вибір по 1м^2 від кожного гектара площі і точно підрахувати зібраний врожай. Оцінити ймовірність того, що показник середньої вибіркової врожайності буде відрізнятися від показника істинної середньої врожайності на всьому масиві не більше ніж на 0,2 ц, якщо припустити, що середнє квадратичне відхилення врожайності на кожному гектарі не перевищує 5 ц.

Відповідь. $P \geq 0{,}875$.

Завдання 34. Скільки треба провести незалежних вимірювань деякої величини, щоб із ймовірністю, не меншою за 0,95, можна було б стверджувати, що значення середнього арифметичного результатів вимірювань відрізняється від істинного значення за абсолютною величиною менше ніж на 2, якщо середнє квадратичне відхилення кожного виміру є меншим за 10?

Відповідь. $n \geq 500$.

Завдання 35. Імовірність виготовлення нестандартної радіолампи складає 0,02. Яку найменшу кількість радіоламп потрібно відібрати, щоб з імовірністю, більшою за 0,8, можна було б стверджувати, що доля нестандартних радіоламп серед них буде відрізнятися від ймовірності виготовлення нестандартної лампи за абсолютною величиною не більше ніж на 0,005?

Відповідь. $n = 3920$.

Завдання 36. Під час штампування виробів виявилося, що 70 % із них присвоєно перший ґатунок. Яку кількість виробів потрібно взяти, щоб з імовірністю, яка перевищує 0,9973, можна було б стверджувати, що кількість виробів першого ґатунку, які входять до загальної кількості, буде відрізнятися за абсолютною величиною від імовірності 0,7 не більше ніж на 0,05?

Відповідь. $n \geq 31112$.

Завдання 37. На заводі, який випускає масову продукцію, 75 % виробів від їх загальної кількості мають перший ґатунок. Оцінити ймовірність того, що кількість виробів першого ґатунку серед 200000 виготовлених буде відрізнятися від ймовірності виготовлення виробів першого ґатунку не більше ніж на 0,01 у той чи інший бік.

Відповідь. $P > 0{,}99$.

6 НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ І ЗАКОНИ ЇХ РОЗПОДІЛУ

Неперервною називається випадкова величина, можливі значення якої цілком заповнюють деякий проміжок (скінчений або нескінчений).

Очевидно, що число можливих значень неперервної випадкової величини є нескінченим.

Слід зазначити, що дане означення неперервної випадкової величини не є точним. Оскільки, на відміну від дискретної випадкової величини, яка може бути задана переліком усіх її можливих значень і їх ймовірностей, а неперервна випадкова величина не може бути задана таким способом, то виникає необхідність створення загального способу задання будь-яких типів випадкових величин. З такою метою вводяться функції розподілу ймовірностей випадкової величини.

Функцією розподілу (інтегральною функцією) називається функція $F(x)$, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування набуває значення, меншого за x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \qquad (6.1)$$

Далі можна навести більш точне означення неперервної випадкової величини. Випадкова величина називається неперервною, якщо її функція розподілу є неперервною кусково-диференційованою функцією з неперервною похідною.

Існує дві властивості функції розподілу:

Властивість 1. Значення функції розподілу належать відрізку [0;1], тобто $0 \le F(x) \le 1$.

Властивість 2. $F(x)$ є неспадною функцією, тобто $F(x_2) \ge F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

Наслідок 1. Імовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке належить інтервалу $(a;в)$, дорівнює приросту функції розподілу на даному інтервалі:

$$P(a < X < в) = F(в) - F(a).$$

Наслідок 2. Імовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде одного певного значення дорівнює 0.

Властивість 3. Якщо можливі значення випадкової величини належать інтервалу $(a;в)$, то:

1) $F(x) = 0$, якщо $x \le a$;
2) $F(x) = 1$, якщо $x \ge в$.

Наслідок 3. Якщо можливі значення неперервної випадкової величини заповнюють всю числову вісь $0x$, то правильними є такі граничні співвідношення: $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

Графік функції розподілу зображено на рисунку 8.

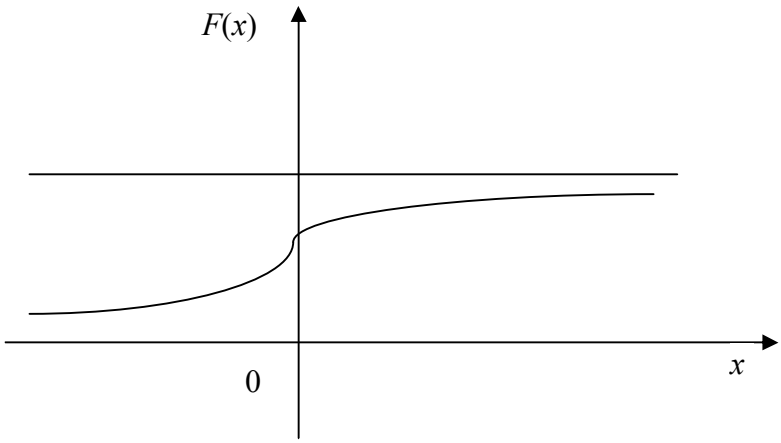


Рисунок 8

Спосіб задання неперервної величини за допомогою функції розподілу не є єдиним. Неперервну випадкову величину можна також задати, використовуючи іншу функцію, яка називається щільністю розподілу, або щільністю ймовірності (іноді її називають диференціальною функцією) і позначається через $f(x)$.

За означенням,

$$f(x) = F'(x), \tag{6.2}$$

тобто щільність розподілу є першою похідною від функції розподілу.

Із цього означення випливає, що

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{6.3}$$

Існує дві властивості щільності розподілу:

Властивість 1. Щільність розподілу є невід'ємною функцією, тобто $f(x) \geq 0$.

Властивість 2. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до $+\infty$ дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{6.4}$$

6.1 Закони розподілу неперервних випадкових величин

6.1.1 Імовірність потрапляння неперервної випадкової величини до заданого інтервалу

Імовірність того, що неперервна випадкова величина *X,* яка набуває значення, що належить інтервалу (*а; в*), є наступною:

$$P(a < X < в) = \int_{a}^{в} f(x)dx = F(в) - F(a), \tag{6.5}$$

де $f(x)$ – диференціальна функція (щільність розподілу);

$F(x)$ – інтегральна функція (функція розподілу).

6.1.2 Закон рівномірного розподілу ймовірностей

Розподіл ймовірностей називається рівномірним, якщо на інтервалі, до якого належать усі можливі значення випадкової величини, щільність розподілу зберігає старе значення.

Щільність імовірності рівномірного розподілу можна задати таким чином:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ x \leq a; \\ \dfrac{1}{в-a}, & якщо\ a < x \leq в; \\ 0, & якщо\ x > в. \end{cases}$$

6.1.3 Нормальний закон розподілу

Нормальним називається розподіл ймовірностей неперервної випадкової величини, якщо її щільність розподілу є такою:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta^2}}, \qquad (6.6)$$

де a – математичне сподівання X;

σ – середнє квадратичне відхилення X.

Графік щільності нормального розподілу (крива Гауса) зображено на рисунку 9.

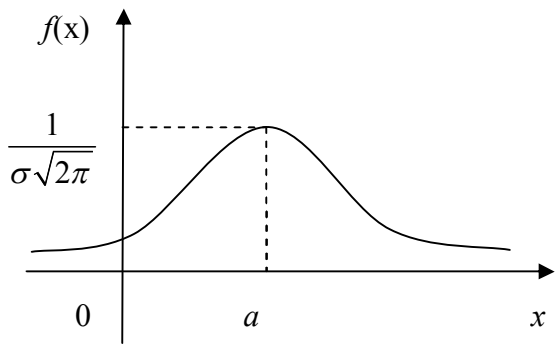


Рисунок 9

6.1.4 Імовірність потрапляння до заданого інтервалу нормально розподіленої випадкової величини

Імовірність того, що X набуде значення, яке належить до інтервалу (α; β), обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (6.7)$$

де $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функція Лапласа.

Імовірність того, що абсолютна величина відхилення є меншою за додатне число δ є такою:

$$P(|X-a|<\delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (6.8)$$

Зокрема, якщо $a = 0$, то правильною буде рівність

$$P(|X|<б) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (6.9)$$

6.2 Числові характеристики неперервної випадкової величини

Неперервна випадкова величина має такі самі числові характеристики, як і дискретна.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать до всієї числової осі $O\,x$, визначається рівністю

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad (6.10)$$

де $f(x)$ – диференціальна функція.

Припускається, що невласний інтеграл збігається абсолютно.

Зокрема, якщо всі можливі значення X належать до інтервалу (a; $в$), то

$$M(X) = \int_a^в xf(x)dx. \qquad (6.11)$$

Дисперсія неперервної випадкової величини називається математичним сподіванням квадрата її відхилення.

Якщо можливі значення неперервної величини X належать до осі $0x$, то дисперсія визначається рівністю

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx, \qquad (6.12)$$

що рівносильно

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - M^2(X), \qquad (6.13)$$

Зокрема, якщо всі можливі значення X належать до інтервалу (a;$в$), то

$$D(X) = \int_a^в (x - M(X))^2 f(x)dx,$$

або

$$D(X) = \int_a^в x^2 f(x)dx - M^2(X). \qquad (6.14)$$

Зауважимо, що всі властивості математичного сподівання і дисперсії, наведені вище для дискретних величин, зберігаються також для неперервних величин.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ неперервної випадкової величини визначається так само, як і дискретної величини, тобто за рівністю $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Приклади розв’язання задач

Задача 1. Випадкову величину X на всій осі $0x$ задано інтегральною функцією $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctgx.$

Обчислити ймовірність того, що в результаті випробування величина X набуде значення, яке належатиме до інтервалу (0; 1).

Розв'язання. Для визначення шуканої ймовірності скористаємося рівністю (6.5): $P(a < X < в) = F(в) - F(a)$.

Вважаючи, що $a = 0$ і $в = 1$, отримаємо:

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\ 1 - (\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg\ 0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot 0 = \frac{1}{4}.$$

Задача 2. Випадкову величину X задано інтегральною функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ \ x \le 2, \\ 0{,}5x - 1, & при\ \ 2 < x \le 4, \\ 1, & при\ \ x > 4. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність того, що в результаті випробування величина X набуде значення: а) меншого за 0,2; б) меншого за 3; в) не меншого за 3; г) не меншого за 5.

Розв'язання.

а) За означенням функції розподілу, маємо $F(x) = P(X < x)$. Отже, $P(X < 0{,}2) = F(0{,}2) = 0$, бо, якщо $x \le 2$, то функція $F(x) = 0$.

б) $P(X < 3) = F(3) = 0{,}5 \cdot 3 - 1 = 1{,}5 - 1 = 0{,}5$, так як значення x=3 належить до інтервалу (2,4], на якому функція $F(x) = 0{,}5x - 1$.

в) Події $X \ge 3$ і $X < 3$ є протилежними, тому $P(X \ge 3) + P(X < 3) = 1$. Звідси, з урахуванням того, що $P(X < 3) = 0{,}5$ (див. п. б), отримаємо $P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

г) Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тому $P(X \ge 5) + P(X < 5) = 1$. Звідси, використовуючи умову, в силу якої функція $F(x)=1$, якщо $x > 4$, отримаємо $P(X \ge 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - 1 = 0$.

Задача 3. Випадкову величину X задано інтегральною функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le 0, \\ x^2, & при \quad 0 < x \le 1, \\ 1, & при \quad x > 1. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність того, що в результаті проведення чотирьох незалежних випробовувань величина X рівно тричі набуде значення, яке належить до інтервалу (0,25; 0,75).

Розв'язання. Спочатку визначимо ймовірність того, що випадкова величина X в результаті проведення одного з випробовувань набуде значення, яке належить до інтервалу (0,25; 0,75).

За формулою (6.5) виконаємо такий розрахунок:

$$p = P(0{,}25 < X < 0{,}75) = F(0{,}75) - F(0{,}25) = (0{,}75)^2 - (0{,}25)^2 = 0{,}5.$$

Беручи до уваги те, що в результаті проведення чотирьох незалежних випробовувань (кількість випробовувань n=4 є малою) випадкова величина X рівно тричі повинна набути значення, яке належить до інтервалу (0,25; 0,75), за формулою Бернуллі обчислимо шукану ймовірність:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot (0{,}5)^3 (1 - 0{,}5) = 4 \cdot (0{,}5)^4 = 4 \cdot 0{,}0625 = 0{,}25.$$

Задача 4. Випадкову величину X задано на всій осі $0x$ інтегральною функцією

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x}{2}.$$

Визначити можливе значення x_1, яке задовольняє умові: з імовірністю $\frac{1}{4}$ випадкова величина X у результаті випробування набуде значення, більшого за x_1.

Розв'язання. Події $X \le x_1$ і $X > x_1$ є протилежними, тому $P(X \le x_1) + P(X > x_1) = 1$.

За умовою $P(X > x_1) = \frac{1}{4}$, а отже, $P(X \le x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Оскільки $P(X = x_1) = 0$, то $P(X \le x_1) = P(X = x_1) + P(X < x_1) = P(X < x_1) = \frac{3}{4}$.

За означенням інтегральної функції, $P(X < x_1) = F(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x_1}{2}$.

Отже,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arctg \frac{x_1}{2} = \frac{3}{4},$$

або

$$arctg \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{4},$$

звідки

$$\frac{x_1}{2} = 1$$

або

$$x_1 = 2.$$

Таким чином, шукане значення є таким: $x_1 = 2$.

Задача 5. Дискретну випадкову величину задано таким законом розподілу:

X	3	4	7	10
p	0,2	0,1	0,4	0,3

Визначити інтегральну функцію і побудувати її графік.

Розв'язання:

1 Якщо $x \le 3$, то $F(x)=0$. Дійсно, значень, менших за число 3, величина X не набуває. Отже, якщо $X \le 3$, то функція $F(x) = P(X < x) = 0$.

2 Якщо $3 < x \le 4$, то $F(x) = 0{,}2$. Дійсно, величина X може набути значення 3 з імовірністю 0,2.

3 Якщо $4 < x \le 7$, то $F(x) = 0{,}3$. Дійсно, величина X може набути значення 3 з імовірністю 0,2 і значення 4 – з імовірністю 0,1. Отже, одного з даних значень байдуже якого саме, величина X може набути (за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій) з імовірністю 0,2 + 0,1 = 0,3.

4 Якщо $7 < x \le 10$, то $F(x) = 0{,}7$. Дійсно, величина X може набути значення 3 з імовірністю 0,2, значення 4 – з імовірністю 0,1 і значення 7 – з імовірністю 0,4, а отже, одного з даних значень, байдуже якого саме, величина X може набути (за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій) з імовірністю 0,2 + 0,1 + 0,4 = 0,7.

5 Якщо $x > 10$, то $F(x) = 1$. Дійсно, подія $X \le 10$ є вірогідною, тому її ймовірність настання дорівнює одиниці.

Таким чином, шукану інтегральну функцію аналітично можна записати таким чином:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 3, \\ 0{,}2, & \text{якщо} \quad 3 < x \le 4, \\ 0{,}3, & \text{якщо} \quad 4 < x \le 7, \\ 0{,}7, & \text{якщо} \quad 7 < x \le 10, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 10. \end{cases}$$

Графік інтегральної функції зображено на рисунку 10.

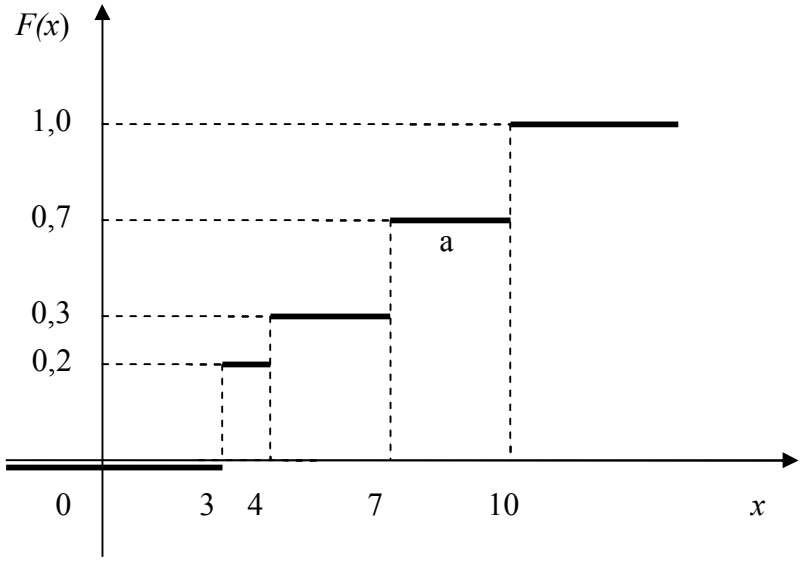


Рисунок 10

Із рисунка 10 видно, що графік інтегральної функції дискретної випадкової величини має східчастий вигляд.

Задача 6. Дано інтегральну функцію неперервної випадкової величини X:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ \sin 2x, & \text{якщо} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Обчислити диференційну функцію $f(x)$.

Розв'язання. За означенням, диференціальна функція дорівнює першій похідній від інтегральної функції, тобто

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x \le 0, \\ 2\cos 2x, & \text{якщо} \quad 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 0, & \text{якщо} \quad x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Задача 7. Неперервну випадкову величину на інтервалі (0; ∞) задано диференціальною функцією $f(x)=ae^{-ax}$ (a>0), за межами даного інтервалу $f(x)=0$.

Обчислити ймовірність того, що величина X набуде значення, яке належить до інтервалу (1; 2).

Розв'язання. За формулою (6.5) матимемо

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 ae^{-ax}dx = -e^{-ax}\Big|_1^2 = -(e^{-2a} - e^{-a}) - e^{-2a}(1 - e^{a}) = \frac{e^{a} - 1}{e^{2a}}.$$

Задача 8. Дано диференціальну функцію неперервної випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ x \le 1, \\ x - 0{,}5, & якщо\ 1 < x \le 2, \\ 0, & якщо\ x > 2. \end{cases}$$

Визначити інтегральну функцію $F(x)$.

Розв'язання. За формулою (6.3), $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty в} f(x)dx.$

Якщо $x \le 1$, то $f(x) = 0$, отже, $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0 \cdot dx = 0.$

Якщо $1 < x \le 2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 0dx + \int_1^x (x - 0{,}5)dx = (\frac{x^2}{2} - 0{,}5x)\Big|_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 - x).$$

Якщо $x > 2$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{1} 0dx + \int_1^2 (x - 0{,}5)dx + \int_2^x 0dx = (\frac{x^2}{2} - 0{,}5x)\Big|_1^x = 2 - 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & якщо\ x \le 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & якщо\ 1 < x \le 2, \\ 1, & якщо\ x > 2. \end{cases}$$

Задача 9. Диференціальну функцію неперервної випадкової величини X задано на всій осі $0x$ рівністю $f(x) = \frac{2C}{1 + x^2}$.

Визначити сталий параметр C.

Розв'язання. Згідно з властивістю (6.4) диференціальної функції маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Оскільки неперервну випадкову величину X задано на всій осі $0x$ рівністю $f(x) = \frac{2C}{1 + x^2}$, то $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2C}{1 + x^2} dx = 1.$

Обчислимо невласний інтеграл:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2C}{1+x^2}dx = 2C\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = 2C\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = 2C\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} arctg\ x\Big|_b^a =$$

$$= 2C\left(\lim_{b\to+\infty} arctg\ b - \lim_{a\to-\infty} arctg\ a\right) = 2C\left(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\right) = 2\pi C.$$

Прирівнюючи отриманий вираз до одиниці, визначимо шукане значення параметра:

$$1 = 2\pi C,$$

звідки

$$C = \frac{1}{2\pi}.$$

Задача 10. Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0, & якщо\quad x \le 0, \\ a(4x - x^3), & якщо\quad 0 < x \le 2, \\ 0, & якщо\quad x > 2. \end{cases}$$

За якого значення a функції $f(x)$ можна вважати щільність ймовірності випадкової величини X? Визначити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення відповідної випадкової величини X. Обчислити ймовірність $P(1 < X < 3)$.

Розв'язання. Функція $f(x)$ може вважатися щільністю ймовірності, якщо $f(x) \ge 0$ і $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Беручи до уваги те, що функція $f(x) = 0$, якщо $x < 0$ і $x > 2$ і згідно з рівністю (6.4), отримаємо $\int_0^2 a(4x - x^3)dx = 1$.

Обчисливши інтеграл, будемо мати $a(2x^2 - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2 = 1$ або $a(8-4) = 1$, звідки $a = \frac{1}{4}$.

Оскільки задана функція $f(x) \ge 0$, якщо $a = \frac{1}{4}$ (пропонуємо переконатися в цьому самостійно) і невласний інтеграл від даної функції дорівнює одиниці, то одержимо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & якщо\quad x \le 0, \\ \frac{1}{4}(4x - x^3), & якщо\quad 0 < x \le 2, \\ 0, & якщо\quad x > 2 \end{cases}$$

а отже, функція $f(x)$ являється щільністю ймовірності неперервної випадкової величини X.

Далі, за формулою (6.11), обчислимо математичне сподівання X:

$$M(X)=\int_a^в xf(x)dx=\int_0^2\frac{1}{4}x(4x-x^3)dx=\frac{1}{4}\int_0^2(4x^2-x^4)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{32}{3}-\frac{32}{5})=8(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{16}{15}.$$

Далі, за формулою (6.14), обчислимо дисперсію випадкової величини *X:*

$$D(X(=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X)=\int_0^2\frac{1}{4}x^2(4x-x^3)dx-\left(\frac{16}{15}\right)^2=\frac{1}{4}\int_0^2(4x^3-x^5)dx-\frac{256}{225}=$$

$$=\frac{1}{4}(x^4-\frac{x^6}{6})\Bigg|_0^2-\frac{256}{225}=\frac{1}{4}(16-\frac{32}{3})-\frac{256}{225}=\frac{4}{3}-\frac{256}{225}=\frac{300-256}{225}=\frac{44}{225}.$$

Обчислимо середнє квадратичне відхилення *X*:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{44}{225}}=\frac{2}{15}\sqrt{11}\approx 0{,}44\,.$$

За формулою (6.5) обчислимо шукану ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, яке належить до інтервалу (1; 3):

$$P(1<X<3)=\int_1^2\frac{1}{4}(4x-x^3)dx+\int_2^3 0dx=\frac{1}{4}(2x^2-\frac{x^4}{4})\Bigg|_1^2=\frac{1}{4}(8-4-2+\frac{1}{4})=\frac{9}{16}.$$

Задача 11. Випадкову величину *X* задано інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases}0, & якщо \quad x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & якщо \quad 0<x\le 2,\\ 1, & якщо \quad x>2.\end{cases}$$

Визначити:

1) диференціальну функцію;

2) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення;

3) імовірність того, що в результаті випробовування *X* набуде значення, яке належить до інтервалу (1; 4) (двома способами).

Побудувати графіки функцій *F(x)* і *f(x).*

Розв'язання:

1) Визначимо диференціальну функцію *f(x)*, для чого продиференціюємо по *x* інтегральну функцію *F(x)* (формула (6.2)):

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & якщо \quad x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & якщо \quad 0<x\le 2,\\ 0, & якщо \quad x>2.\end{cases}$$

2) Застосовуючи послідовно формули (6.10), (6.13) і (5.7), обчислимо відповідно математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\int_{0}^{2} x\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{\infty} x\cdot 0\cdot dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^2dx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{4}{3};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-M^2(X)=\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\cdot dx+\int_{0}^{2} x^2\cdot\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{\infty} x^2\cdot 0\cdot dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{2} x^3dx-\frac{16}{9}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^2-\frac{16}{9}=2-\frac{16}{9}=\frac{2}{9};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Зауважимо, що обчислення дисперсії за формулою (6.12) є більш трудомістким. (Пропонуємо переконатись у цьому самостійно).

3) Імовірність того, що в результаті випробовування X набуде значення, яке належить до інтервалу (1; 4), знайдемо двома способами:

І спосіб. Шукана ймовірність дорівнює приросту інтегральної функції на заданому інтервалі:

$$P(1<X<4)=F(4)-F(1)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

ІІ спосіб. Шукана ймовірність дорівнює визначеному інтегралу в межах від 1 до 4 від диференціальної функції:

$$P(1<X<4)=\int_{1}^{2}\frac{x}{2}dx+\int_{2}^{4}0\cdot dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

Зауваження.

Для обчислення ймовірності того, що в результаті випробовування X набуде значення, яке належить до інтервалу ($a;в$), доцільно скористатися функцією, яка задана умовою задачі.

Графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$ зображено на рисунках 11 і 12 відповідно.

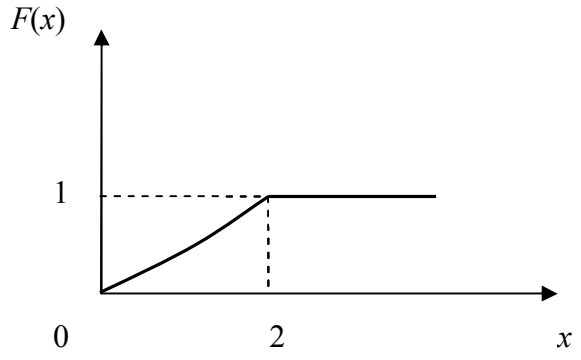


Рисунок 11

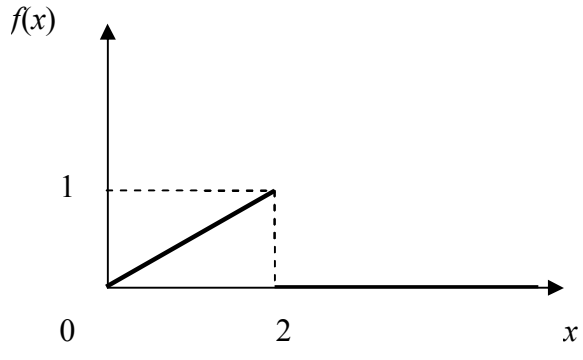


Рисунок 12

Задача 12. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X, яка розподілена рівномірно на проміжку ($a;в$).

Розв'язання. Враховуючи те, що на проміжку *(а;в)* функція $f(x)=\frac{1}{b-a}$ і застосовуючи послідовно формули (6.11), (6.14) і (5.7), визначимо числові характеристики випадкової величини:

$$M(X)=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2};$$

$$D(X)=\int_a^b x^2f(x)dx-M^2(X)=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_a^b-\frac{(a+b)^2}{4}=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\frac{a^2-2ab+b^2}{12}=\frac{(a-b)^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

У даному випадку враховано те, що $b > a$.

Задача 13. Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Показання приладу заокругляється до найближчої цілої поділки. Визначити ймовірність того, що відлік буде здійснюватися з похибкою:

а) меншою за 0,04;

б) більшою за 0,05.

Розв'язання:

а) Похибку заокруглення відліку можна розглядати як випадкову величину *X*, розподілену рівномірно на проміжку між двома сусідніми цілими поділками. У даній задачі довжина проміжку, на якому містяться можливі значення *X*, дорівнює 0,2, тому $f(x)=\frac{1}{0{,}2}=5.$

Легко зрозуміти, що похибка відліку буде меншою за 0,04, якщо вона буде міститися на проміжках (0; 0,04) або (0,16; 0,20), тобто, якщо $0< X <0{,}04$ або $0{,}16<X <0{,}20$. Оскільки події $0< X <0{,}04$ і $0{,}16 < X <0{,}20$ є несумісними, то, за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій, матимемо:

$$P(X < 0{,}04) = P(0 < X < 0{,}04) + P(0{,}16 < X < 0{,}20).$$

Застосовуючи далі формулу *(6.5)*, отримаємо

$$P(X < 0{,}04) = \int_0^{0{,}04}5dx+\int_{0{,}16}^{0{,}20}5dx=5x\Bigg|_0^{0{,}04}+5x\Bigg|_{0{,}16}^{0{,}20}=0{,}2+1-0{,}8=0{,}4.$$

Таким чином, імовірність того, що відлік буде здійснюватися з похибкою, меншою за 0,04, дорівнює 0,4.

б) Відлік буде здійснюватися з похибкою, більшою за 0,05, якщо $0{,}05<X<0{,}15$, тому

$$P(X > 0{,}05) = P(0{,}05 < X < 0{,}15) = \int_{0{,}05}^{0{,}15}5dx=5x\Bigg|_{0{,}05}^{0{,}15}=0{,}75-0{,}25=0{,}5.$$

Задача 14. Автобуси деякого маршруту рухаються строго за розкладом. Інтервал руху становить 5 хвилин. Обчислити ймовірність того, що пасажир, який перебуває на зупинці, буде очікувати черговий автобус менше 3 хвилин.

Розв'язання. Час очікування чергового автобуса можна розглядати як випадкову величину *X*, розподілену рівномірно. У даній задачі довжина інтервалу руху, на якому містяться можливі значення *X*, дорівнює 5 хвилин, тому

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5}.$$

Очевидно, що пасажир, який перебуває на зупинці, буде очікувати черговий автобус менше 3 хвилин, якщо $2 < X < 5$.

За формулою $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$, визначимо шукану ймовірність:

$$P(X < 5) = P(2 < X < 5) = \int_2^5 \frac{1}{5}dx = \frac{1}{5}x\Big|_2^5 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює 0,6.

Задача 15. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення нормально розподіленої випадкової величини *X* відповідно дорівнюють 20 і 5. Знайти ймовірність того, що в результаті випробовування величина *X* набуде значення, яке належить до інтервалу (15; 25).

Розв'язання. Враховуючи те, що випадкова величина *X* розподілена нормально, а також те, що $a = 20$, $\sigma = 5$, $\alpha = 15$, $\beta = 25$, за формулою (6,7), визначимо ймовірність того, що в результаті випробовування величина *X* набуде значення, яке належить до інтервалу (15; 25):

$$P(15 < X < 25) = \Phi\left(\frac{25-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) =$$

$$= 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

Значення функції Лапласа: $\Phi(1) = 0{,}3413$ визначимо за додатком Е. Враховано також те, що $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Задача 16. Автоматичний станок штампує деталі. Контролюється довжина деталі *X*, розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), що дорівнює 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей є не меншою за 32 мм і не більшою за 68 мм. Визначити ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі є:

1) більшою за 55 мм;

2) меншою за 40 мм.

Розв'язання:

1) Оскільки фактична довжина виготовлених деталей є не меншою за 32 мм і не більшою за 68 мм, то подія $32 \le x \le 68$ є вірогідною. Тому

$$P(32 \le X \le 68) = P(32 < X < 68) = 1.$$

З іншого боку, за формулою (6.7):

$$P(32 < X < 68) = \Phi\left(\frac{68-50}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{32-50}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-18}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right).$$

Отже, $2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right)=1$, або $\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right)=0{,}5$.

Враховуючи таблицю значень функції Лапласа (додаток Е), визначаємо, що $\frac{18}{\sigma}=5$, звідки $\sigma=\frac{18}{5}=3{,}6$.

Шукана ймовірність, тобто ймовірність того, що довжина деталі, взятої навмання, є більшою за 55 мм і очевидно меншою за 68 мм, буде такою:

$$P(55<X<68)=\Phi\left(\frac{68-50}{3{,}6}\right)-\Phi\left(\frac{55-50}{3{,}6}\right)=\Phi(5)-\Phi(1{,}39)=0{,}5-0{,}4177=0{,}0823.$$

2) Імовірність того, що довжина деталі, взятої навмання, буде меншою за 40 мм і очевидно більшою за 32 мм, можна обчислити таким чином:

$$P(32<X<40)=\Phi\left(\frac{40-50}{3{,}6}\right)-\Phi\left(\frac{32-50}{3{,}6}\right)=\Phi(-2{,}78)-\Phi(-5)=\Phi(5)-\Phi(2{,}78)=$$
$$=0{,}5-0{,}4973=0{,}0027.$$

Задача 17. Автоматичний станок виготовляє шарики. Шарик вважається придатним для використання, якщо відхилення величини X діаметра шарика від її проектного розміру за абсолютною величиною є меншим за 0,7 мм. Вважаючи, що випадкова величина X розподілена нормально щодо середнього квадратичного відхилення $\sigma=0{,}4мм$, серед ста виготовлених шариків визначити кількість придатних для використання.

Розв'язання. Оскільки величина X є відхиленням діаметра шарика від проектного розміру, то $M(X)=a=0$.

За формулою (6.9), $P(|X|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$.

Підставляючи до цієї формули значення $\sigma=0{,}4$ і $\delta=0{,}7$, отримаємо

$$P(|x|<0{,}7)=2\Phi\left(\frac{0{,}7}{0{,}4}\right)=2\Phi(1{,}75)=2\cdot 0{,}4599=0{,}9198\approx 0{,}92.$$

Таким чином, імовірність відхилення, яке є меншим за 0,7 мм, дорівнює 0,92, звідки випливає, що приблизно 92 із 100 виготовлених шариків будуть придатними для використання.

Питання для самоперевірки

1 Яка випадкова величина називається неперервною?

2 Що називається інтегральною функцією? Сформулюйте її властивості.

3 Наведіть означення диференціальної функції (щільності розподілу). Сформулюйте її властивості.

4 Що називається рівномірним законом розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини?

5 Що називається нормальним законом розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини?

Завдання для самостійного виконання

Завдання 1. Випадкову величину X задано інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x\le -2, \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{2}, & якщо \quad -2<x\le 2, \\ 1, & якщо \quad x>2. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність того, що в результаті випробовування величина X набуде значення, яке належить до інтервалу (-1; 1).

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

Завдання 2. Випадкову величину X задано на всій осі $0x$ інтегральною функцією

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x}{2}.$$

Визначити можливе значення x_1, яке задовольняє умові про те, що з імовірністю $\frac{1}{6}$ випадкова величина X у результаті випробовування набуде значення, більшого за значення x_1.

Відповідь. $x_1=2\sqrt{3}$.

Завдання 3. Дискретну випадкову величину задано законом розподілу, що має вигляд

X	10	20	30	40	50
P	0,2	0,3	0,35	0,1	0,05

Визначити інтегральну функцію і побудувати її графік.

Відповідь.

$$F(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x\le 10, \\ 0{,}2, & якщо \quad 10<x\le 20, \\ 0{,}5, & якщо \quad 20<x\le 30, \\ 0{,}85, & якщо \quad 30<x\le 40, \\ 0{,}95, & якщо \quad 40<x\le 50, \\ 1, & якщо \quad x>50. \end{cases}$$

Завдання 4. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & якщо \quad x<2, \\ (x-2)^2, & якщо \quad 2\le x\le 3, \\ 1, & якщо \quad x>3. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини X до інтервалів (1; 2,5) і (2,5; 3,5).

Відповідь. $P(1<X<2{,}5)=0{,}25;\quad P(2{,}5<X<3{,}5)=0{,}75.$

Завдання 5. Диференціальна функція неперервної випадкової величини X на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ дорівнює $f(x)=\frac{2}{\pi}\cos^2 x$, а за його межами – $f(x)=0$. Обчислити ймовірність того, що в результаті трьох незалежних випробовувань величина X набуде рівно 2 значення, які належать до інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь. $3\cdot\left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2\cdot\frac{3\pi-2}{4\pi}$.

Завдання 6. Диференціальна функція неперервної випадкової величини X має такий вигляд:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x\le\frac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x, & \textit{якщо} \quad \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}, \\ 1, & \textit{якщо} \quad x>\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Обчислити інтегральну функцію $F(x)$.

Відповідь.

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x\le\frac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & \textit{якщо} \quad \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3}, \\ 1, & \textit{якщо} \quad x>\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Завдання 7. Випадкова величина X підпорядкована закону розподілу із щільністю ймовірності

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x<0, \\ a(3x-x^2), & \textit{якщо} \quad 0\le x\le 3, \\ 1, & \textit{якщо} \quad x>3. \end{cases}$$

Визначити:

1) коефіцієнт a;

2) функцію розподілу $F(x)$;

3) імовірність потрапляння величини X до інтервалу (1;2) (двома способами). Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

Відповідь. а) $\frac{2}{9}$; б) $f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x<0, \\ \frac{1}{3}x^2-\frac{2}{27}x^3, & \textit{якщо} \quad 0\le x\le 3, \\ 1, & \textit{якщо} \quad x>3. \end{cases}$; в) $\frac{13}{27}$.

Завдання 8. Диференціальна функція неперервної випадкової величини X на інтервалі ($0;\frac{\pi}{2}$) має вигляд $f(x)=C\cdot\sin 2x$, а за його межами – $f(x)=0$. Визначити сталий параметр C.

Відповідь. 1.

Завдання 9. Диференціальну функцію неперервної випадкової величини *X* на інтервалі (0;1) задано рівністю $f(x) = C \cdot arctgx$, за його межами – рівністю $f(x) = 0$. Визначити сталий параметр *C*.

Відповідь. $\frac{\pi - \ln 4}{4}$.

Завдання 10. Диференціальну функцію неперервної випадкової величини *X* на всій осі *0x* задано функцією $f(x) = \frac{4C}{e^x + e^{-x}}$. Визначити сталий параметр *C*.

Відповідь. $\frac{1}{2\pi}$.

Завдання 11. Довести, що функція $f(x) = \frac{1}{x^2 + \pi^2}$ визначає щільність ймовірності деякої випадкової величини *X* і обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини *X* до інтервалу (π; ∞).

Відповідь. 0,25.

Завдання 12. Щільність розподілу випадкової величини *X* визначає функція $f(x) = |x|e^{-x^2}$. Обчислити ймовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення, яке належить до інтервалу (0; 1).

Відповідь. $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$.

Завдання 13. Випадкову величину *X* на інтервалі (0;2) задано диференціальною функцією $f(x) = \frac{1}{2}x$, а за його межами – функцією $f(x) = 0$. Обчислити математичне сподівання величини *X*.

Відповідь. $\frac{4}{3}$.

Завдання 14. Випадкову величину *X* задано диференціальною функцією (розподіл Лапласа) $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Визначити математичне сподівання величини *X*.

Відповідь. 0.

Завдання 15. Випадкову величину *X* на інтервалі (0;1) задано диференціальною функцією $f(x) = C(x^2 + 2x)$, а за його межами – функцією $f(x) = 0$.

Визначити:

а) параметр *C*;

б) математичне сподівання величини *X*.

Відповідь. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{11}{16}$.

Завдання 16. Випадкову величину *X* на інтервалі (-3;3) задано диференціальною функцією $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}$, а за його межами – функцією $f(x) = 0$.

Визначити:

а) дисперсію X;

б) який результат випробовування виявиться ймовірнішим: $X<1$ чи $X>1$?

Відповідь. а) $D(X)=4{,}5$; б) імовірніше, що в результаті випробовування $X<1$.

Завдання 17. Випадкову величину X на інтервалі (0;5) задано диференціальною функцією $f(x)=\frac{2}{25}x$, а за його межами – функцією $f(x)=0$. Обчислити дисперсію випадкової величини X.

Відповідь. $\frac{25}{18}$.

Завдання 18. Щільність розподілу неперервної випадкової величини задано функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x<0, \\ \frac{1}{2}\sin x, & \textit{якщо} \quad 0\le x\le \pi, \\ 0, & \textit{якщо} \quad x>\pi. \end{cases}$$

Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Відповідь. $M(X)=\frac{\pi}{2}$; $D(X)=\frac{\pi^2}{4}-2$; $\sigma(X)\approx 0{,}69$.

Завдання 19. Неперервну випадкову величину X задано диференціальною функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x\le 0, \\ 3e^{-3x}, & \textit{якщо} \quad x>0. \end{cases}$$

Обчислити математичне сподівання $M(X)$ і ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, яке належить до інтервалу (1; 2).

Відповідь. $M(X)=\frac{1}{3}$; $P(1<X<2)\approx 0{,}0473$.

Завдання 20. Випадкову величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x\le 0, \\ \frac{x^2}{36}, & \textit{якщо} \quad 0<x\le 6, \\ 1, & \textit{якщо} \quad x>6. \end{cases}$$

Обчислити:

1) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X;

2) імовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке належить до інтервалу (0,5; 7) (двома способами). Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

Відповідь. 1) $M(X)=4$; $D(X)=2$; $\sigma(X)=\sqrt{2}$; 2) $P(0{,}5<X<7)=1$.

Завдання 21. Ціна поділки шкали амперметра дорівнює 0,1А. Показання округляються до найближчої цілої поділки. Обчислити ймовірність того, що відлік буде здійснюватися з похибкою, яка перевищує 0,02А.

Відповідь. 0,6.

Завдання 22. Хвилинна стрілка електронного годинника переміщується стрибками в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в певний момент годинник покаже час, який відрізняється від істинного, не більше ніж на 20с.

Відповідь. $\frac{2}{3}$.

Завдання 23. Обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*, розподіленої рівномірно на інтервалі (2;8).

Відповідь. $M(X)=5;\ \ D(X)=3;\ \ \sigma(X)=\sqrt{3}$.

Завдання 24. Усі значення рівномірно розподіленої випадкової величини *X* належать до відрізка [2; 8]. Обчислити ймовірність потрапляння *X* до інтервалу (3; 5).

Відповідь. $\frac{1}{3}$.

Завдання 25. Нормально розподілену випадкову величину *X* задано диференціальною функцією $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$. Обчислити математичне сподівання і дисперсію *X*.

Відповідь. $M(X)=1;\ \ D(X)=25$.

Завдання 26. Математичне сподівання і дисперсія нормально розподіленої випадкової величини *X* відповідно дорівнюють 2 і 25. Обчислити ймовірність того, що в результаті випробовування *X* набуде значення, яке належить до інтервалу (1; 4).

Відповідь. 0,2347.

Завдання 27. Зважується деяка речовина без систематичних похибок. Випадкові похибки зважування підпорядковуються нормальному закону, середнє квадратичне відхиленням яких складає $\sigma=20\tau$. Обчислити ймовірність того, що зважування буде здійснюватись з похибкою, яка за абсолютною величиною не перевищує 10τ.

Відповідь. 0,383.

Завдання 28. Деталь, виготовлена на станку, вважається придатною для користування, якщо відхилення її контрольованого розміру від проектного не перевищує 10 мм. Випадкові відхилення контрольованого розміру від проектного підпорядковуються нормальному закону, середне квадратичне відхилення і математичне сподівання складають відповідно $\sigma=5мм$ і $a=0$. Який відсоток придатних деталей виготовляється на станку?

Відповідь. Приблизно 95%.

Завдання 29. Бомбардувальник скинув бомби на міст, довжина якого становить 60 м, а ширина – 12 м. Розсіювання влучень відбувається за нормальним законом, дисперсія якого становить 225 м по довжині і 36 м – по ширині. Середньою точкою влучень є центр мосту. Розсіювання по довжині і ширині є незалежними.

Обчислити:

а) імовірність зруйнування мосту в результаті скидання однієї бомби;

б) імовірність зруйнування мосту, в результаті скидання двох бомб, якщо до того ж відомо, що для зруйнування мосту достатньо хоча б одного влучення.

Відповідь. а) 0,6515; б) 0,8785.

Завдання 30. Випадкову величину *X* розподілено нормально з математичним сподіванням $a = 25$. Ймовірність потрапляння величини *X* до інтервалу (10;15) дорівнює 0,2. Якою буде ймовірність потрапляння величини *X* до інтервалу (35; 40)?

Відповідь. 0,2.

Завдання 31. Станок, на якому виготовляються валики, має здатність одночасно контролювати розмір їх діаметра *X*. Вважаючи *X* нормально розподіленою випадковою величиною, яка має математичне сподіванням $a = 10мм$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0,1мм$, визначити інтервал, до якого з імовірністю 0,9973 будуть належати діаметри виготовлених валиків.

Відповідь. (9,7; 10,3).

Завдання 32. Вважається, що відхилення довжини виготовлених деталей від їх стандартної величини являється випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Якщо стандартна довжина виготовлених деталей становить 40 см, а середнє квадратичне відхилення – 0,4 см, то яку точність довжини деталі можна гарантувати з імовірністю 0,8?

Відповідь. $\delta \approx 0,52$.

Завдання 33. Довжина деталі, виготовленої на станку, являє собою випадкову величину *X*, розподілену за нормальним законом з параметрами $a = 15$ і $\sigma = 0,2$. Обчислити ймовірність виявлення браку, якщо припустимі розміри деталі будуть складати $15 \pm 0,3$.

Відповідь. 0,1336.

Завдання 34. Дано графік щільності ймовірності випадкової величини *X,* зображений на рисунку 13. Скласти аналітичний вираз щільності ймовірності і обчислити математичне сподівання і дисперсію випадкової величини *X*.

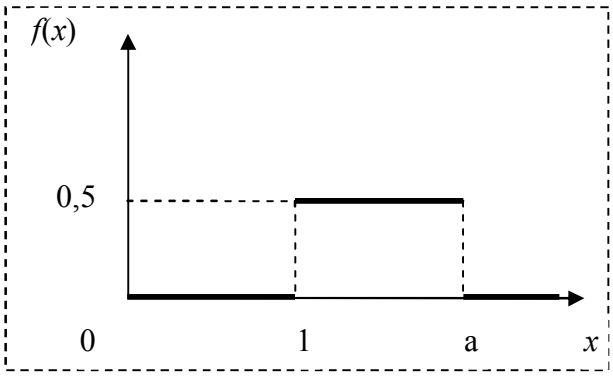


Рисунок 13

Відповідь. $M(X) = 2;\ \ D(X) = \frac{1}{3}$.

Завдання 35. Станок, на якому виготовляються деталі, одночасно контролює довжину деталі X, яка розподілена нормально з математичним сподіванням, що дорівнює 30 мм. Фактична довжина виготовлених деталей є не меншою за 24 мм і не більшою за 36 мм. Обчислити ймовірність того, що довжина деталі, взятої навмання, буде більшою за 32 мм.

Відповідь. 0,0475.

ДОДАТОК А

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1

1 Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

2 Розв'язати рівняння $\frac{A_x^3 P_{x-3}}{P_{x-2}} = 6$.

Варіант 2

1 Скількома способами можна розмістити 6 осіб на одній лавці?

2 Число розміщень із n елементів по 2 є в 7 разів більшим за число розміщень із n - 4 елементів по 2. Обчислити n.

Варіант 3

1 Четверо юнаків і четверо дівчат розміщено на вісьмох місцях, розташованих підряд, причому юнаків розміщено на парні місця, а дівчат – на непарні. Скільки може існувати способів такого розміщення?

2 Розв'язати рівняння $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15} A_{x+1}^{3}$.

Варіант 4

1 Обчислити число діагоналей n – кутника.

2 Розв'язати рівняння $A_n^4 = 12 A_n^2$.

Варіант 5

1 У ліфт 9-поверхового будинку зайшло 5 пасажирів. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта, якщо вони будуть виходити по одному на кожному поверсі, починаючи з другого?

2 Розв'язати рівняння $C_{n+2}^4 = 11 C_n^2$.

Варіант 6

1 На складі є в наявності 5 ящиків з різними фруктами і 3 ящики з різними овочами. Скількома способами можна видати ящики з фруктами і овочами кожній із двох торгуючих фруктово-овочевих палаток, якщо видавати по одному ящику з фруктами і по одному ящику з овочами?

2 Розв'язати рівняння $\frac{C_{2n}^{n+1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \frac{3}{5}$.

Варіант 7

1 Скільки різних восьмизначних чисел можна отримати, використовуючи у їх написанні цифру 1 два рази, а цифри 2 і 3 – по три рази?

2 Розв'язати рівняння $\frac{A_{x+2}^{n+2}P_{x-n}}{P_x}=20$.

Варіант 8

1 Скільки перестановок можна виконати з букв, із яких складаються слова: а) мама; б) брат?

2 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} A_{m-2}^{n}:A_{m-2}^{n-1}=8; \\ C_{m-2}^{n}:C_{m-2}^{n-1}=1{,}6. \end{cases}$

Варіант 9

1 Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, якщо кожна з цифр, які утворюють число, зустрічається не частіше ніж один раз?

2 Розв'язати рівняння $C_{4x+9}^{4(x+1)}=5A_{4x+7}^{3}$.

Варіант 10

1 Скільки тризначних чисел можна скласти з 5 різних цифр, якщо кожне число записується в порядку складання цифр?

2 Розв'язати рівняння $\frac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}}=132.$

Варіант 11

1 Скількома способами можна розділити групу з 20 осіб на дві підгрупи по 10 осіб?

2 Розв'язати рівняння $\frac{1}{4}A_{n+3}^{2}=\overline{C_n^4}$.

Варіант 12

1 Знайти суму цифр у всіх п'ятицифрових числах, утворених за допомогою цифр 1, 4, 6, 7, 8, якщо цифри в числах не повторюються.

2 Розв'язати рівняння $C_{x+8}^{x+3}=5A_{x+6}^{3}$.

Варіант 13

1 Скількома способами можна розділити 6 різних предметів так, щоб кожна особа отримала 2 предмети?

2 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} C_x^y=C_x^{y+2}; \\ C_x^2=153. \end{cases}$.

Варіант 14

1 Скількома способами можна взяти по два олівці і по три ручки з комплектів, які містять 5 різних олівців і 5 різних ручок?

2 Із скількох елементів можна скласти 56 розміщень по два елементи в кожному?

Варіант 15

1 Скількома способами можна подарувати 4 різних книжки шістьом учням таким чином, щоб кожен учень отримав:

а) не більше ніж одну книжку;

б) не більше ніж чотири книжки?

2 Обчислити *m*, якщо $A_{m-4}^2 + A_{m-3}^2 + A_{m-2}^2 = 20$.

Варіант 16

1 Скільки різних неправильних дробів можна скласти з чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, щоб до кожного дробу входило два числа?

2 Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} A_{5x}^{n-3} : A_{5x}^{n-2} = 1 : 7; \\ C_{5x}^{n-2} : C_{5x}^{n-3} = 7 : 4. \end{cases}$

Варіант 17

1 Скільки перестановок можна виконати з букв, які містяться в слові «Харків»?

2 Розв'язати рівняння $\frac{2A_4^x + A_5^x}{A_5^x} = 3$.

Варіант 18

1 Скільки різних слів можна скласти із слова «трикутник»?

2 Розв'язати рівняння $C_x^3 = \frac{5x(x-3)}{4}$.

Варіант 19

1 Серед 25 деталей, які підлягають перевірці, є всього 15 точних. Знайти число тих вибірок по 10, у яких буде 8 точних деталей.

2 Обчислити C_x^2, якщо $C_{18}^x = C_{18}^{x+2}$.

Варіант 20

1 Скільки різних варіантів футбольної команди можна скласти з 9 нападаючих, 7 захисників і 3 воротарів, якщо до складу команди повинно ввійти 4 нападаючих, 6 захисників і 1 воротар?

2 Обчислити *n*, якщо $A_{2n}^3 = 20A_n^2$.

Варіант 21

1 Скільки різних натуральних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, якщо в позначенні кожного числа кожна з даних цифр зустрічається не більше одного разу?

2 Обчислити значення *x* із рівняння $\frac{5P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1}P_{2x-n}} = 4\overline{A_{2x+1}^2}$.

Варіант 22

1 У розіграшу першості країни з футболу бере участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота, срібна та бронзова медалі?

2 Розв'язати рівняння $5C_x^3 = C_{x+2}^4$.

Варіант 23

1.Студенту потрібно скласти 4 екзамени протягом 8 днів. Скількома способами це можна зробити?

2 Обчислити C_n^{19}, якщо $C_n^{12} = C_n^8$.

Варіант 24

1 Скількома способами можна посадити за круглий стіл трьох хлопців і трьох дівчат так, щоб жодна з двох осіб однієї статі не сиділа поруч?

2 Розв'язати рівняння $\frac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$.

Варіант 25

1 На зборах повинно виступити 4 особи: *A, B, C, D*. Скількома способами їх можна розмістити в списку ораторів?

2 Розв'язати рівняння $C_{x+1}^5 = \frac{3A_x^3}{8}$.

Варіант 26

1 Скільки різних парних дільників має число 3570?

2 Розв'язати рівняння $\frac{10P_x - P_{x+1}}{P_{x-1} + P_x} = 2$.

Варіант 27

1 Скількома способами можна поставити на книжкову полицю 15 книг так, щоб три певні книги стояли поряд?

2 Обчислити значення *n* із рівняння $A_n^2 + A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2 = 38$.

Варіант 28

1 Скількома способами можна переставити букви в слові «молоко» так, щоб три букви «о» не були розташовані поряд?

2 Довести, що $C_m^n + C_m^{n-1} = C_{m+1}^n$.

Варіант 29

1 Скільки точок *M(x;y)* можна утворити, якщо абсциса *x* і ордината *y* можуть набувати значень 1, 2, 3, 4, 5, 6?

2 Розв'язати рівняння $2\overline{C}_{3x-2}^2 = C_{3x}^{3(x-1)}$.

Варіант 30

1 У першості області з баскетболу беруть участь команди з 11 районів. Скільки існує різних способів розподілу місць у таблиці розіграшу, якщо на перше місце претендує лише 4 певних команди?

2 Обчислити $\overline{C}_x^2$, якщо $C_{15}^{x-1} = C_{15}^{x}$.

ДОДАТОК Б

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1

1 Із восьми букв розрізної азбуки складається слово «інтеграл». Далі картки перемішуються і знову розкладаються одна за одною в порядку їх появи. Якою буде ймовірність того, що знову буде отримано слово «інтеграл»?

2 У ящику знаходиться 3 білих і 9 чорних кульок. Із нього навмання виймають одну кульку. Якою може бути ймовірність того, що вийнята кулька буде чорною?

Варіант 2

1 Дві грані симетричного кубика зафарбовано в синій колір, три – в зелений і одну – в червоний. Кубик підкидають один раз. Яка існує ймовірність того, що верхня грань буде зафарбована в зелений колір?

2 У ящику знаходиться 4 білих і 7 чорних кульок. Із нього одночасно виймають дві кульки. Якою може бути ймовірність того, що обидві вийняті кульки будуть білими?

Варіант 3

1 Усередині круга радіусом 20 см. проведено два кола, які не перетинаються: одне радіусом 5 см, друге – 10 см. Обчислити ймовірність того, що точка, поставлена навмання в середині великого кола, буде знаходитись у середині одного з малих кіл.

2 У партії з 8 деталей є 6 стандартних. Обчислити ймовірність того, що серед 5 вийнятих навмання деталей 3 будуть стандартними.

Варіант 4

1 Тризначне число утворено трьома навмання обраними цифрами, які не повторюються, з переліку цифр 0,1,2,3,4,5. Якою може бути ймовірність того, що це число не є парним?

2 Олена та Микола домовились зустріти Новий рік у компанії з 10 осіб, причому обоє хотіли сидіти поруч. Обчислити ймовірність виконання їх бажання, якщо серед друзів розподіл місць прийнято виконувати шляхом жеребкування.

Варіант 5

1 У деякій точці С, положення якої на телефонній лінії АВ довжиною 1км є рівноможливим, відбувся розрив. Обчислити ймовірність того, що точка С віддалена від точки А на відстань: а) не більшу за 400 метрів; б) не меншу за ніж 400 метрів.

2 Тридцять дві букви українського алфавіту написано на картках розрізної азбуки. Шість карток беруть навмання і кладуть одну за одною в

порядку їх появи. Обчислити ймовірність того, що буде отримано слово “кінець”.

Варіант 6

1 Із цифр 1,2,3,4 складено чотиризначне число. Обчислити ймовірність того, що:

а) таке число починається з цифри чотири;

б)перші дві цифри такого числа утворюють число 32.

2 На полиці знаходиться 25 підручників, 5 із яких – з теорії ймовірностей. Студент навмання бере 2 підручники. Обчислити ймовірність того, що це будуть підручники з теорії ймовірності.

Варіант 7

1 У ящику міститься 9 білих і 6 чорних кульок. Із ящика навмання виймається одночасно 3 кульки. Обчислити ймовірність того, що 2 з узятих кульок будуть чорними.

2 Із п’яти букв розрізної азбуки складено слово “книга”. Дитина, яка не вміє читати, розсипала всі букви, а потім зібрала їх у довільному порядку. Обчислити ймовірність того, що знову буде отримано слово “книга”.

Варіант 8

1 У партії, до складу якої входить 100 деталей, 5 є бракованими. Яка ймовірність того, що серед 50 деталей, відібраних навмання, буде хоча б одна бракована?

2 Із шести букв розрізної азбуки складено слово “ананас”. Далі картки з буквами ретельно перемішано і знову розкладено в довільному порядку одну за одною. Якою може бути ймовірність того, що знову буде отримано слово “ананас”?

Варіант 9

1 На полиці лежить 12 підручників, 7 із яких – з математики. Студент навмання бере 5 підручників. Якою може бути ймовірність того, що він візьме підручники будуть з математики?

2 Тризначне число утворено з навмання обраних трьох цифр, які не повторюються, з переліку цифр 1,2,3,4,5. Якою може бути ймовірність того, що це число буде парним?

Варіант 10

1 Квадрат зі стороною a розбито на чотири частини відрізками прямих, які з’єднують середини протилежних сторін. У квадрат кинуто монету радіусом $R<a/4$. Обчислити ймовірність того, що монета не буде перетинати жодної зі сторін квадратів, на які розбито основний квадрат.

2 Задумано двозначне число, до складу якого входять дві різні цифри. Обчислити ймовірність того, що задуманим числом виявиться:

а) випадково назване двозначне число;

б) випадково назване двозначне число, цифри якого є різними.

Варіант 11

1 На книжкову полицю у невизначеному порядку поставлено п'ять томів енциклопедичного словника. Якою може бути ймовірність того, що хоча б один із томів словника знаходиться не на своєму місці?

2 У пачці міститься 20 лотерейних білетів, які мають номери 101, 102,…, 120 і розташовані довільно. Покупець навмання придбає два білети. Обчислити ймовірність того, що придбані білети будуть мати номери 101 і 120.

Варіант 12

1 Автобус повинен виконати 8 зупинень. Обчислити ймовірність того, що жодні 2 пасажири з 5, які їдуть автобусом, не зійдуть на одній і тій самій зупинці.

2 Монету кинуто двічі. Обчислити ймовірність того, що хоча б один раз вона впаде гербом догори.

Варіант 13

1 У ящику міститься 30 кульок, із яких: 5 білих, 10 зелених, 4 червоних і 11 синіх. Із ящика навмання виймається одна кулька. Якою може бути ймовірність того, що вона буде кольоровою?

2 На складі є в наявності 15 телевізорів, 10 із яких виготовлено на Львівському заводі. Обчислити ймовірність того, що серед 5, взятих навмання телевізорів, 3 будуть такими, що виготовлені на Львівському заводі.

Варіант 14

1 Вісім кульок розміщується навмання у вісьмох ящиках. Обчислити ймовірність того, що кожний ящик буде заповнено кульками.

2 Пристрій складається з 5 елементів, 2 з яких є зношеними. В момент спрацювання пристрою навмання спрацьовує 2 елементи. Обчислити ймовірність того, що вони будуть незношеними.

Варіант 15

1 У забігу бере участь 5 спортсменів: А, Б, В, Г, Д, кожний із яких має однакові шанси на перемогу. Якою може бути ймовірність того, що перші 3 місця займуть відповідно бігуни А, Б і В ?

2 Збори, на яких є присутніми 25 осіб, у тому числі 5 жінок, обирають делегацію, до складу якої повинно входити 3 особи. Вважаючи що кожний із присутніх з однаковою ймовірністю може бути обраним, обчислити ймовірність того, що до складу делегації ввійде 2 жінки і 1 чоловік.

Варіант 16

1 Слово «література» складено з букв розрізної азбуки. Далі картки з буквами перемішано і з їх числа взято одну за одною шість карток. Якою може бути ймовірність того, що з шести взятих карток у порядку їх обрання буде складено слово «літера»?

2 Із партії, до складу якої входить 31 небракована деталь і 6 – бракованих, взято навмання 3 деталі. Якою може бути ймовірність того, що всі три деталі, взяті навмання, будуть небракованими?

Варіант 17

1 Із 15 білетів виграшними є 4. Якою може бути ймовірність того, що серед шести білетів, узятих навмання, 2 будуть виграшними?

2 Під час стрільби з гвинтівки відносна частота влучення в ціль виявилася рівною 0,85. Обчислити число промахів, якщо всього було виконано 120 пострілів.

Варіант 18

1 У класі навчається 15 хлопчиків і 25 дівчаток. П'ять учнів даного класу необхідно перевести до іншого класу. Якою може бути ймовірність того, що серед учнів, переведених до іншого класу, буде дві дівчинки?

2 У барабані револьвера є сім гнізд, у п'ять із яких вкладено патрони, а два залишено порожніми. Барабан приводиться в обертання, в результаті чого напроти ствола випадково з'являється одно з гнізд. Після цього натискається спусковий курок. Якщо гніздо є пустим, то постріл не відбудеться. Обчислити ймовірність того, що за повторення такого випробування два рази підряд постріл не відбудеться.

Варіант 19

1 Із ящика, в якому міститься 6 білих і 8 чорних кульок, навмання й одночасно виймається 2 кульки. Якою може бути ймовірність того, що вийняті кульки будуть мати один колір?

2 Із партії, до складу якої входить 31 небракована деталь і 7 – бракованих, взято навмання 3 деталі. Якою може бути ймовірність того, що всі 3 деталі, взяті навмання, будуть небракованими?

Варіант 20

1 Серед 100 виробів, 10 із яких є нестандартними, навмання беруть 4 вироби. Якою може бути ймовірність того, що 3 з 4 узятих виробів будуть нестандартними?

2 У студентській групі 10 осіб, що виконують обов'язки дружинників. Серед них 3 особи в віці від 18 до 20 років, 5 – від 20 до 22, 2 – від 22 до 24 років. Шляхом жеребкування серед загальної кількості дружинників потрібно обрати одну особу для здійснення чергування. Якою може бути ймовірність того, що буде обрано особу у віці від 18 до 22 років?

Варіант 21

1 Якою може бути ймовірність того, що під час гри в спортлото «5» із «36» в одній картці буде закреслено 5 виграшних номерів?

2 Усередині еліпса, довжини півосей якого складають 50 і 20 см, проведено 4 кола, радіуси кожного з яких складають 2,1 см, причому вони не перетинаються ні з еліпсом, ні одне з одним. Обчислити ймовірність того, що

випадкова точка, розміщення якої в середині еліпса є рівноможливим, буде розміщуватись у середині одного з кругів.

Варіант 22

1 Група з 10 чоловіків і 10 жінок поділяється навмання на 2 однакові підгрупи. Обчислити ймовірність того, що в кожній із підгруп буде однакова кількість як чоловіків, так і жінок.

2 Мінометний взвод рівномірно обстрілює площу, на якій знаходиться гарматна обслуга супротивника. Ширина площі складає 90 метрів, глибина – 100 метрів. Обчислити ймовірність прямого влучення однією міною, якщо гарматна обслуга розташована на площі 20 кв.м.

Варіант 23

1 На кожній із п'яти карток написано по одній букві: "і", "с", "т", "ш", "ь". Картки перемішуються і довільно розкладаються одна за одною. Обчислити ймовірність того, що в результаті розкладання карток буде отримано слово «шість».

2 На склад надійшло 3000 деталей, виготовлених на першому верстаті й 2000 – на другому. Серед деталей, виготовлених на першому верстаті, виявилось 0,2% браку, а на другому – 0,3%. Обчислити ймовірність надходження на склад бракованої деталі.

Варіант 24

1 Цифри 1,2,3,4,5,6,7,8,9 написано на окремих картках. Їх кладуть у ящик і перемішують. Потім навмання виймають одну картку. Обчислити ймовірність того, що число, яке на ній написано, буде: а) парним; б) непарним; в) складеним; г) однозначним; д) двозначним.

2 У середину круга, що має радіус R, навмання кинуто точку. Обчислити ймовірність того, що точка потрапить у середину правильного трикутника, вписаного в круг. Припускається, що ймовірність потрапляння точки в частину круга є пропорційною до площі цієї частини і не залежить від її положення відносно круга.

Варіант 25

1 У куб вписано кулю. Якою може бути ймовірність того, що точка, яку кинуто навмання в середину куба, потрапить у середину кулі?

2 У партії з 20 деталей міститься 4 нестандартних. Обчислити ймовірність того, що серед узятих навмання 6 деталей не більше ніж одна деталь виявиться нестандартною.

Варіант 26

1 У ящику містяться картки з номерами від 1 до 50. Якою може бути ймовірність того, що номер першої картки, вийнятої навмання, не містить цифри 4?

2 Серед 17 студентів групи, 8 із яких – дівчата, розігрується 7 білетів. Якою може бути ймовірність того, що серед студентів, які отримають білети, буде 4 дівчини?

Варіант 27

1 На полиці розміщено 15 підручників, 5 із яких – з математики. Студент навмання взяв 5 підручників. Обчислити ймовірність того, що підручники будуть з математики.

2 У центрі круга закріплено стрілку, яка розкручується й вільно обертається до повного зупинення. Якою може бути ймовірність того, що стрілка зупиниться в межах наперед визначеного центрального кута, що має величину 450^0? Вважаючи, що таке випробування проводиться багаторазово (серіями по 40 повторень), знайти середню кількість зупинень стрілки у визначеному секторі, на які можна очікувати під час кожної серії випробовувань.

Варіант 28

1 У результаті перевірки партії, до складу якої входить 20 виробів, відносна частота появи бракованих виробів виявилася рівною 0,2. Обчислити кількість стандартних виробів, які входять до складу даної партії.

2 З метою зменшення загальної кількості ігор на змаганнях 16 волейбольних команд розподілено на 2 підгрупи (по 8 команд у кожній підгрупі). Обчислити ймовірність того, що учасників двох найсильніших команд буде розподілено: а) до різних підгруп; б) до однієї підгрупи.

Варіант 29

1 Складальник має 10 деталей, які майже не відрізняються одна від одної. Із них: 4 деталі належать до першого типу і по 2 – до другого, третього і четвертого типів. Якою може бути ймовірність того, що серед 6 взятих одночасно деталей 3 належатимуть до першого типу, 2 – до другого і 1 – до третього.

2 Імовірність того, що розміри деталей, які виробляються на станку, відповідають межам заданих допусків, складає 0,96. Яку кількість непридатних для використання деталей в середньому буде виявлено в кожній із партій, до яких входить по 500 штук деталей?

Варіант 30

1 На стрільбах було виконано 400 пострілів, під час яких 320 разів було влучено в ціль. Якою може бути ймовірність того, що влучення в ціль досягалося в результаті одного пострілу? На яку кількість влучень у середньому слід очікувати під час кожної серії по 20 пострілів?

2 У розіграшу першості з баскетболу бере участь 24 команди, з яких навмання формується 2 групи по 12 учасників. Серед учасників змагань є 6 команд екстракласу. Обчислити ймовірність того, що: а) всі команди екстракласу потраплять до першої групи; б) дві команди екстракласу потраплять до першої групи, а чотири – до другої.

ДОДАТОК В

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1

1 Стрілець А виконує два постріли по мішені з імовірністю влучення 0,5 у результаті кожного пострілу, а стрілець В – один постріл з імовірністю влучення 0,7. В результаті кожного влучення стрілці отримають по 5 очок. Скласти закон розподілу числа зароблених стрільцями очок. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

2 Робітник, який працює на конвеєрі, складаючи механізм, вмонтовує в нього певну деталь. Інколи її доводиться додатково обробляти (підганяти), а також перевіряти якість підганяння методом пробного встановлення її в механізм. Закон розподілу випадкової величини X – кількості пробних установлень деталі в механізм наведено далі:

Установлень (X)	1	2	3	4	5
Імовірність (p)	0,38	0,26	0,20	0,14	0,02

Обчислити математичне сподівання і дисперсію величини X двома способами.

Варіант 2

1 На двох автоматичних станках виготовляються однакові вироби. Закони розподілу кількості бракованих виробів, які виготовляються протягом зміни на кожному із станків, задано далі.

Для першого станка закон розподілу задано таким чином:

Кількість бракованих виробів (X)	0	1	2	3
Імовірність (p)	0,1	0,6	0,2	0,1

Для другого станка закон розподілу задано таким чином:

Кількість бракованих виробів (Y)	0	1	2
Імовірність (q)	0,5	0,3	0,2

Скласти закон розподілу кількості бракованих виробів, які виготовляються протягом зміни на обох станках. Переконатися в тому, що $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$.

2 Білет містить три задачі. Ймовірність правильного розв’язання першої задачі дорівнює 0,9, другої – 0,8, третьої – 0,7. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості правильно розв’язаних задач і обчислити математичне сподівання та дисперсію цієї випадкової величини.

Варіант 3

1 Мисливець, який має 4 патрони, виконує постріл в ціль до першого влучення або доти, доки не витратить усі патрони. Обчислити математичне сподівання та дисперсію числа витрачених патронів, якщо відомо, що ймовірність влучення в результаті кожного з виконаних пострілів дорівнює 0,25. Побудувати графік функції розподілу випадкової величини X – числа витрачених патронів.

2 Студенти двох груп визначають висоту і взаємну видимість точок. Дані для визначення висоти і взаємної видимості точок наведено далі.

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7
Тривалість (X)	5	9	8	7	8	7	6

№ з/п	1	2	3	4	5	6	7
Тривалість (Y)	6	8	7	5	9	9	5

Скласти ряд розподілу дискретної випадкової величини $X + Y$, обчислити математичне сподівання і дисперсію, виконати порівняльне оцінювання роботи груп.

Варіант 4

1 Виконується стрільба по мішені. Ймовірність влучення в результаті одного пострілу дорівнює 0,7. Обчислити математичне сподівання числа витрачених снарядів для випадку, якщо постріли здійснюються до першого влучення і в наявності є 5 снарядів.

2 Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: x_1=-1, x_2=3, x_3=4, а також відомі математичні сподівання цієї величини та її квадрата: $M(X)$=1,2, $M(X^2)$=6,4. Обчислити ймовірності, які відповідають можливим значенням X.

Варіант 5

1 Екзаменатор ставить студенту запитання доти, доки той дає правильні відповіді. Після того, як число правильних відповідей досягне чотирьох або після того, як студент відповість неправильно, екзаменатор припиняє задавати запитання. Ймовірність отримання правильної відповіді на одне із запитань становить 2/3. Скласти закон розподілу числа заданих студенту запитань.

2 Гральний кубик кинуто три рази. Скласти закон розподілу числа появи п’ятірки. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення.

Варіант 6

1 Із двох окремих гармат виконано по одному пострілу по мішені. Імовірність влучення в ціль становить відповідно 0,4 і 0,5. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа влучень, і обчислити $M(X)$, $D(X)$ та $\sigma(X)$. Побудувати графік функції розподілу випадкової величини X.

2 У рекламних цілях торгова фірма вкладає в кожну десяту одиницю товару грошовий приз у розмірі 1000 грн. Скласти закон розподілу випадкової величини (розміру виграшу) в результаті п'яти виконаних покупок. Визначити числові характеристики випадкової величини.

Варіант 7

1 Троє стрільців виконують по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення в ціль відповідно становить: 0,6; 0,8; 0,9. Скласти закон розподілу числа влучень і обчислити $M(X)$.

2 Дискретна випадкова величина X набуває три можливих значення: x_1 – з імовірністю p_1=0,5; x_2 =6 – з імовірністю p_2 = 0,3; x_3 – з імовірністю p_3. Обчислити значення x_3 і p_3, якщо відомо, що $M(X) = 8$.

Варіант 8

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X, яка може набувати лише два значення: x_1 з імовірністю $p_1 = 0,6$ і x_2, причому $x_1 < x_2$, якщо математичне сподівання $M(X) = 4$, а дисперсія $D(X) = 6$.

2 Нехай X, Y, Z – випадкові величини: X – виручка фірми, Y – її затрати, $Z = X–Y$ – прибуток. Визначити розподіл прибутку Z, якщо затрати й виручка є незалежними і задані такими розподілами:

x_i	3	4	5
p_i	1/3	1/3	1/2

y_j	3	4	5
p_j	1/3	1/3	1/2

Довести, що $M(X-Y) = M(X) - M(Y)$.

Варіант 9

1 По мішені виконано два постріли, ймовірність влучення в ціль яких становить 0,4 і 0,7. Скласти закон розподілу числа промахів і знайти дисперсію.

2 Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини X: x_1=-1, x_2=0, x_3=1, а також математичне сподівання цієї величини та її квадрата: $M(X)$=0,1, $M(X^2)$=0,9. Обчислити ймовірності p_1, p_2, p_3, які відповідають можливим значенням x_1, x_2, x_3.

Варіант 10

1 Стрілець виконує два постріли по мішені. Ймовірність влучення в ціль у результаті кожного з них складає 0,3. За кожне влучення стрільцю зараховується 10 очок. Скласти закон розподілу кількості зароблених стрільцем очок, визначити математичну дисперсію і сподівання.

2 У магазині продається 5 вітчизняних і 3 імпортних телевізори. Скласти закон розподілу випадкової величини X – кількості імпортних телевізорів серед чотирьох телевізорів, відібраних навмання. Визначити функцію розподілу цієї випадкової величини і побудувати її графік.

Варіант 11

1 Контрольна робота складається з трьох запитань, на які потрібно дати відповіді. На кожне з запитань дано чотири відповіді, одна з яких є правильною. Скласти закон розподілу величини X – числа правильних відповідей та визначити числові характеристики X.

2 Дві незалежні випадкові величини: X і Y задано такими законами розподілу:

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

y_j	0	1	2	3
p_j	0,4	0,3	0,2	0,1

Довести, що $M(X\text{-}Y) = M(X) - M(Y)$.

Варіант 12

1 Виконується вправа “стрільба до першого влучення”. Стрільцю видається три патрони. Після першого влучення стрільба припиняється. Обчислити математичне сподівання числа витрачених патронів на стрільбу, якщо ймовірність влучення в результаті першого, другого і третього пострілів відповідно становить: 0,6, 0,8 і 0,9.

2 Із 10 телевізорів, виставлених на виставці, 4 виготовлено фірмою “Sony”. Навмання для огляду взято 3 телевізори. Скласти закон розподілу числа випадкової величини X – телевізорів фірми “Sony” серед трьох, узятих для огляду, та обчислити квадратичне відхилення.

Варіант 13

1 Виконується два постріли по мішені з імовірностями влучення в ціль у результаті першого і другого пострілів відповідно рівними 0,4 і 0,7. Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа промахів і знайти середнє квадратичне відхилення.

2 Задано функцію розподілу випадкової величини X:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0{,}3, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}7, & 2 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Визначити:

1) ряд розподілу;

2) числові характеристики випадкової величини $M(X)$ і $D(X)$;

3) побудувати многокутник розподілу і графік $F(x)$.

Варіант 14

1 Із ящика, в якому міститься 4 білих і 20 чорних кульок, послідовно виймаються кульки доти, доки не з’явиться чорна кулька. X – це число вийнятих при цьому кульок, яке є дискретною випадковою величиною. Скласти закон розподілу величини X і обчислити $M(X)$.

2 Імовірність того, що необхідна для студента книга є наявною в бібліотеці, дорівнює 0,3. Скласти число розподілу кількості бібліотек, які зможе відвідати студент, якщо в місті їх чотири. Обчислити числові характеристики випадкової величини.

Варіант 15

1 Двом танкам потрібно подолати мінне поле. Ймовірність того, що перший танк подолає мінне поле дорівнює 0,6, а другий – 0,7. Скласти закон розподілу кількості танків, які подолали мінне поле. Обчислити середнє квадратичне відхилення.

2 Випадкова величина може набувати наступних значень: $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3=6$, $x_4=9$. Ймовірності набуття перших трьох значень є такими: $p_1=0,4$; $p_2=0,05$; $p_3 = 0,2$. Обчислити числові характеристики випадкової величини $M(X)$ і $D(X)$.

Варіант 16

1 Із ящика, в якому міститься 6 білих і 4 чорних кульки, виймається кулька 5 разів підряд, причому кожного разу вийнята кулька повертається в ящик і кульки перемішують. Випадкова величина X є числом вийнятих білих кульок. Скласти закон розподілу для X і обчислити $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

2 Відповідно до трьох дослідних ділянок отримано наступні дані про врожайність з 1 га:

Ділянка	I	II	III
Центнерів з 1 га	18	20	22
Розмір ділянки, га	10	20	20

Обчислити середнє значення випадкової величини X – урожайності з 1 га для всіх трьох ділянок, та обчислити середнє квадратичне відхилення X.

Варіант 17

1 Із ящика, в якому міститься 4 кульки під номерами 1, 2, 3, 4, виймається дві кульки. Величина X є сумою номерів вийнятих кульок. Скласти ряд розподілу випадкової величини X і обчислити середнє квадратичне відхилення.

2 Виконуються незалежні випробування з однаковою ймовірністю настання події A під час кожного з випробовувань. Обчислити ймовірність настання події A, якщо дисперсія числа настання події A під час кожного з чотирьох незалежних випробовувань становить 0, 36.

Варіант 18

1 Скласти закон розподілу випадкової величини X – числа очок, зароблених стрільцем у результаті здійснення чотирьох пострілів, якщо ймовірність влучення в результаті здійснення одного пострілу становить 0,3, до того ж за кожне влучення стрілець заробляє 5 очок, а за кожний промах втрачає 2 очки. Закон розподілу зобразити графічно. Обчислити середнє квадратичне відхилення випадкової величини.

2 Одну з випадкових величин задано законом розподілу, наведеним далі:

X_i	-1	0	1
p_i	0,1	0,8	0,1

Інша випадкова величина має біноміальний розподіл з параметрами $n = 2$ і p=0,6. Скласти закон розподілу суми випадкових величин і обчислити її математичне сподівання.

Варіант 19

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X, яка може набувати лише двох значень : x_1 – з імовірністю p_1=0,1 і x_2, причому $x_1 < x_2$, якщо математичне сподівання $M(X) = 5,5$, а дисперсія $D(X) = 2,25$.

2 У наявності є чотири ключі, з яких лише один відкриває замок. Скласти закон розподілу числа спроб відкривання замка, якщо випробовуваний ключ у подальших спробах відкривання замка участі не бере. Обчислити числові характеристики випадкової величини.

Варіант 20

1 Виконується три незалежних випробовування, під час яких імовірність настання події A становить 0,4. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа настання події A в даних випробовуваннях і обчислити її числові характеристики.

2 Обчислити дисперсію дискретної випадкової величини X – числа настання події A під час двох незалежних випробовувань, якщо ймовірність настання події A під час даних випробовувань є однаковими й відомо, що математичне сподівання $M(X) = 1,2$.

Варіант 21

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X, яка може набувати лише двох значень: x_1 – з імовірністю $p_1 = 0,5$ і x_2 (причому x_1 повинно бути меншим за x_2), якщо математичне сподівання $M(X)$=4, а дисперсія $D(X)$=4.

2 На шляху руху автомобіля зустрічається три світлофори, кожен із яких або дозволяє, або забороняє подальший рух з імовірністю 0,5. Скласти закон розподілу числа світлофорів, які зустрічаються на шляху автомобіля до здійснення ним першої зупинки. Обчислити дисперсію випадкової величини.

Варіант 22

1 Перший стрілець в результаті здійснення одного пострілу може заробити або два, або три очки з імовірностями 0,2 і 0,8 відповідно, другий – або одно, або два, або три очки з імовірностями 0,2, 0,5 і 0,3 відповідно. Скласти ряд розподілу числа очок, зароблених обома стрільцями, якщо вони здійснюють по одному пострілу. Обчислити $M(X)$, $D(X)$ і $\sigma(X)$.

2 Виробничий брак складає 10% від повної кількості виготовлених виробів. Скласти закон розподілу величини X – числа бракованих серед 4 узятих навмання виробів. Обчислити числові характеристики випадкової величини X.

Варіант 23

1 Імовірність влучення в ціль у результаті кожного пострілу дорівнює 0,7. Скласти закон розподілу числа очок, зароблених у результаті трьох пострілів, якщо в результаті кожного влучення стрілець отримує 5 очок. Зобразити графічно закон розподілу і обчислити математичне сподівання.

2 Дискретна випадкова величина X набуває лише двох можливих значень: x_1 і x_2 (причому x_1 повинно бути меншим за x_2). Імовірність того, що величина X набуде значення x_1, дорівнює 0,6. Скласти закон розподілу X, якщо відомо, що $M(X)$=1,4, а $D(X)$ = 0,24.

Варіант 24

1 Дано незалежні випадкові величини X і Y, закони розподілу яких наведено далі.

X_i	-1	0	1
p_i	0,3	0,4	0,3

Y_i	-2	1	2	3
q_i	0,3	0,3	0,3	0,1

Довести, що $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

2 Обчислити дисперсію дискретної випадкової величини X – числа настання події A під час чотирьох незалежних випробовувань, якщо ймовірності настання події A під час випробовувань є однаковими й відомо, що $M(X)$ = 2,8.

Варіант 25

1 Визначити двома способами дисперсію дискретної випадкової величини X, заданої законом розподілу, наведеним далі.

X_i	5	7	10	15
p_i	0,2	0,5	0,2	0,1

2 Двоє стрільців виконують по два постріли по мішені. Імовірність влучення в ціль у результаті кожного з двох пострілів складає: 0,7 – для першого стрільця і 0,6 – для другого. Скласти закон розподілу числа влучень і обчислити математичне сподівання.

Варіант 26

1 Із партії, яка містить з 10 деталей, 3 з яких є нестандартними, навмання взято 2 деталі. Обчислити математичне сподівання дискретної випадкової величини X, тобто числа нестандартних деталей серед двох узятих.

2 Дискретна випадкова величина X набуває лише трьох можливих значень: x_1=1, x_2 і x_3, причому $x_1<x_2<x_3$. Ймовірності того, що випадкова величина X набуде значень x_1 і x_2 відповідно дорівнюють 0,3 і 0,2. Скласти закон розподілу величини X, якщо відомими є її математичне сподівання $M(X)$=2,2 і дисперсія $D(X)$=0,76.

Варіант 27

1 Відповідно до чотирьох дослідних ділянок отримано певні дані про врожайність з 1 га.

Ділянка	I	II	III	IV
Центнер з 1 га	20	23	24	19
Розмір ділянки, в га	20	30	30	10

Обчислити середнє значення випадкової величини X – врожайності з 1 га на всіх чотирьох ділянках і її середнє квадратичне відхилення.

2 Скласти закон розподілу числа очок, зароблених двома стрільцями, якщо відомі закони розподілу числа очок, зароблених кожним із стрільців.

X	2	3	4	5
p	0,3	0,2	0,4	0,1

Y	3	4	5
q	0,5	0,3	0,2

Обчислити $D(X+Y)$.

Варіант 28

1 На 20 приладів припадає в середньому 6 неточних. Скласти закон розподілу числа точних приладів серед навмання взятих 5 приладів. Обчислити середнє квадратичне відхилення даної випадкової величини.

2 Випадкові величини X і Y є незалежними і мають один і той самий закон розподілу, який має такий вигляд:

Значення	1	2	4
Імовірність	0,2	0,3	0,5

Скласти закон розподілу випадкових величин $2X$ і $X+У$. Переконатися в тому, що $2X \neq X+У$, але $M(2X) = M(X+У)$.

Варіант 29

1 Імовірність влучення в результаті одного пострілу становить 0,8 і від пострілу до пострілу не змінюється. Визначити математичне сподівання числа витрачених снарядів, якщо в наявності є 4 снаряди і стрільба проводиться до перших двох влучень.

2 Монету кинуто двічі. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X, тобто числа випадань монети «гербом» догори і обчислити числові характеристики величини X.

Варіант 30

1 По мішені виконано два постріли з імовірністю влучення 0,4 в результаті кожного з них. Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X, тобто числа промахів і визначити її числові характеристики.

2 Для розіграшу грошової лотереї випущено 100 білетів. Розігрується один виграш, сума якого складає 50 гривень, і десять виграшів, сума кожного з яких складає по 1 грн. Скласти і зобразити графічно закон розподілу випадкової величини X – вартості можливого виграшу для власника одного лотерейного білета. Обчислити математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення величини X.

ДОДАТОК Г

Варіанти індивідуальних завдань

Варіант 1

1 Неперервну величину X задано функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{x}{2}, & -2<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Визначити $M(X)$ і $P(-1<X<1)$.

2 Випадкову величину X розподілено рівномірно на інтервалі (3;5). Визначити: $f(x),\ F(x),\ M(X),\ D(X),\ \sigma(X),\ P(2<X<4)$.

Варіант 2

1 Дано функцію

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \textit{якщо} \quad x\le 1,\\ \frac{A}{x^4}, & \textit{якщо} \quad x>1.\end{cases}$$

Потрібно:

а) визначити значення сталої A, за якого функція буде визначати щільність ймовірності деякої випадкової величини X;

б) визначити $F(x)$;

в) обчислити $P(2<X<3)$;

г) обчислити математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення X.

2 Випадкову величину X, зосереджену на відрізку [2;6], задано функцією розподілу $F(x)=\frac{1}{16}(x^2-4x+4)$. Обчислити ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення:

а) меншого за 4;

б) меншого за 6;

в) не меншого за 3;

г) не меншого за 6;

д) визначити $f(x)$.

Побудувати графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

Варіант 3

1 Обчислити $M(X)$ і $D(X)$ випадкової величини X, щільність розподілу якої визначається функцією $f(x)=0{,}5e^{-|x+1|}$.

2 Неперервну випадкову величину X розподілено нормально. Математичне сподівання й середнє квадратичне відхилення X відповідно

дорівнюють 20 і 10. Обчислити ймовірність того, що відхилення за абсолютною величиною буде не меншим за 3.

Варіант 4

1 Дано ряд розподілу дискретної випадкової величини *X*:

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,1	0,4	0,2	0,2

Якою може бути ймовірність того, що $|X - M(X)| < 2$? Визначити оцінку ймовірнсті, скориставшись нерівністю Чебишева.

2 Графік щільності ймовірності зображено на рисунку 14.

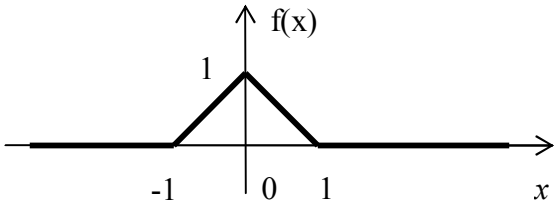


Рисунок 14

Визначити аналітичний вираз щільності ймовірності, інтегральну функцію розподілу та обчислити $M(X),\ D(X),\ \sigma(X),\ P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{4}\right)$.

Варіант 5

1 Неперервну величину *X* задано функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \frac{3}{2}\pi, \\ cosx, & \frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi, \\ 1, & x > 2\pi. \end{cases}$$

Обчислити $\sigma(X)$ і побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2 Випадкова величина, яку розподілено нормально, має дисперсію $D(X) = 0{,}16$. Обчислити ймовірність того, що значення випадкової величини буде відхилятися за модулем від математичного сподівання менше ніж на 0,3.

Варіант 6

1 Довести, що функція $f(x) = \frac{1}{x^2 + \pi^2}$ визначає щільність імовірності випадкової величини X і обчислити її математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення та ймовірність потрапляння випадкової величини X до інтервалу $(\pi;\ +\infty)$.

2 Закон розподілу випадкової величини X задано функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \frac{1}{5}, & 0<x\le 5,\\ 0, & x>5.\end{cases}$$

Обчислити:

а) ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, більшого за 2;

б) інтегральну функцію розподілу;

в) середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

Варіант 7

1 Неперервну випадкову величину X задано функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}cos\frac{x}{2}, & 0<x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Обчислити: $F(x),\ M(X),\ D(X),\ \sigma(X),\ P\left(\frac{\pi}{3}<X<\frac{\pi}{2}\right)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2 Випадкову величину X розподілено за законом Гауса: $f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{50}}$. Обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини X до інтервалу (1; 4).

Варіант 8

1 Неперервну випадкову величину X задано функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0<x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Обчислити: $F(x),\ M(X),\ D(X),\ \sigma(X), P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)$.

2 Випадкову величину X розподілено нормально з математичним сподіванням a = 5. Ймовірність потрапляння X до інтервалу (-5; 15) дорівнює 0,2. Обчислити ймовірність потрапляння X до інтервалу (35; 40).

Варіант 9

1 Неперервну випадкову величину X задано функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\frac{\pi}{2},\\ acosx, & -\frac{\pi}{2}<x\le \frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Обчислити: $M(X),\ D(X),\ F(X),\ P\left(-\frac{\pi}{4} < X < \pi\right)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2 Обчислити $P(8 < X < 18)$, якщо X – нормально розподілена випадкова величина, що має параметри $a = 12$ і $D(X) = 25$.

Варіант 10

1 Графік щільності ймовірності випадкової величини X зображено на рисунку 15.

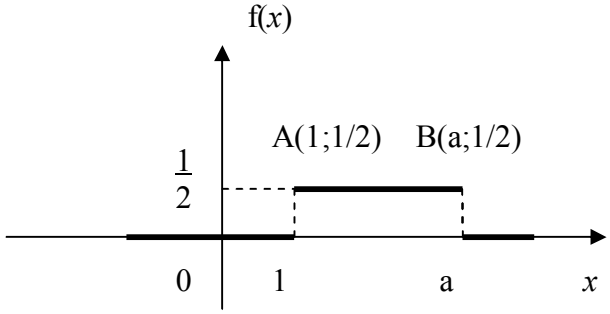


Рисунок 15

Обчислити: $M(X),\ D(X),\ \sigma(X),\ P\left(\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2}\right)$.

2 Верстат штампує деталі. Контролюється довжина деталі X, розподіленої нормально з математичним сподіванням, що складає 33 мм. Фактична довжина виготовлених деталей є не меншою за 24 мм і не більшою за 36 мм. Обчислити ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі буде більшою за 32 мм.

Варіант 11

1 Випадкову величину X задано функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{x}{4}, & 0 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Обчислити: $M(X),\ D(X),\ \sigma(X),\ P(1 < X < 5)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2 Величину діаметрів втулок, які виготовляються для бойової техніки, можна вважати нормально розподіленою випадковою величиною, математичне сподівання якої складає 1 см, і середнім квадратичним відхиленням, яке складає 0,1 мм. У яких межах із надійністю 0,9973 будуть знаходитися діаметри втулок, виготовлених на заводі?

Варіант 12

1 Неперервну випадкову величину X задано диференціальною функцією $f(x)=\frac{2}{3}\sin 3x$ на інтервалі $\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$, за межами даного інтервалу вона дорівнює нулю.

Обчислити ймовірність того, що величина X набуде значення, яке належить до інтервалу $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4}\right)$, і визначити $M(X)$.

2 Математичне сподівання рівномірно розподіленої випадкової величини X дорівнює 2, а її дисперсія дорівнює $\frac{1}{3}$. Скласти закон розподілу випадкової величини X.

Варіант 13

1 За якого значення C функція

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1,\\ \dfrac{2C}{1+x}, & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1. \end{cases}$$

визначатиме щільність імовірності? Обчислити: $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.

2 Дано: $P(|X-M(X)|<\varepsilon)\ge 0{,}9;\ D(X)=0{,}04.$ Скориставшись нерівністю Чебишева, обчислити значення ε.

Варіант 14

1 Випадкову величину X задано функцією

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ C\cdot\sin xx, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Обчислити: $C,\ M(X),\ P\left(0<X<\frac{\pi}{4}\right)$.

2 Похибка для виготовлення деталі з заданою довжиною, що складає 20см, є випадковою величиною, яку розподілено нормально. Обчислити ймовірність того, що довжина виготовленої деталі буде відрізнятися від заданої менше ніж на 0,3 см, якщо відомо, що $\sigma(x)=0{,}2$ см.

Варіант 15

1 Дано інтегральну функцію

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Визначити:

1) щільність ймовірності;

2) математичне сподівання;

3) дисперсію;

4) середнє квадратичне відхилення;

5) ймовірність потрапляння X до інтервалу (0,5; 2).

Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2 Виконується зважування деякої речовини без систематичних похибок. Випадкові похибки зважування підлягають нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням σ=10 г. Обчислити ймовірність того, що зважування буде виконано з похибкою, яка за абсолютною величиною не перевищує 5 г.

Варіант 16

1 Обчислити $M(X)$ неперервної випадкової величини X, яку задано функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3,\\ \dfrac{18}{\pi}\dfrac{1}{25-6x+x^2}, & 3<x\le 7,\\ 0, & x>7.\end{cases}$$

2 Випадкову величину X рівномірно розподілено на інтервалі (2;6). Обчислити дисперсію X та ймовірність потрапляння X до інтервалу (1;7).

Варіант 17

1 Неперервну випадкову величину X задано інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x^2}{36}, & 0<x\le 6,\\ 1, & x>6.\end{cases}$$

Визначити: $M(X)$, $D(X)$, $P(-1<X<2)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2 Електростанція обслуговує мережу, до складу якої входить 18000 ламп. Імовірність вимкнення кожної з ламп становить 0,9. Якою буде ймовірність того, що кількість ламп, включених до мережі, відрізняється від їх математичного сподівання за абсолютною величиною не більше ніж на 200 одиниць?

Варіант 18

1 Неперервну випадкову величину X задано інтегральною функцією

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Обчислити: $M(X), D(X), \sigma(X), P(-1 < X < 5)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2 Розподіл випадкової величини X задано наступною таблицею:

X	1	2	3	4	5	6
P	0,05	0,10	0,25	0,30	0,20	0,10

Якою може бути ймовірність того, що $|X - M(X)| < 2$? Оцінити її, скориставшись нерівністю Чебишева.

Варіант 19

1 Випадкову величину X на інтервалі (-3; 3) задано диференціальною функцією $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}$, а за межами даного інтервалу – функцією $f(x) = 0$. Обчислити $\sigma(X)$. Який із результатів випробовувань виявиться ймовірнішим: $X < 1$ чи $X < 1$?

2 Імовірність випуску нестандартної радіолампи становить 25%. Оцінити (знизу) ймовірність того, що в партії, до якої входить 1000 радіоламп, число нестандартних радіоламп відрізняється від 250 менше ніж на 40 одиниць.

Варіант 20

1 Щільність розподілу неперервної випадкової величини X задано функцією $f(x) = a \cdot e^{-|x|}$. Обчислити: a, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\left(\dfrac{1}{2} < X < 1\right)$.

2 Обчислити ймовірність того, що нормальна випадкова величина X, математичне сподіванням якої дорівнює 1, і дисперсія дорівнює 4, набуде значення, меншого за 0 і більшого за 5.

Варіант 21

1 На рисунку 16 зображено графік щільності ймовірності неперервної випадкової величини, де $AB \perp 0x$, $B(1; 0)$, $0A$ – пряма лінія.

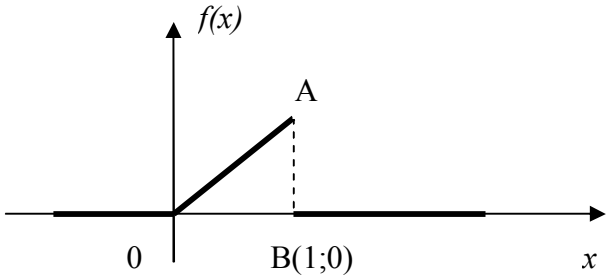


Рисунок 16

Обчислити: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(0{,}5 < X < 2)$.

2 Випадкову величину X розподілено за законом Гауса: $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-6)^2}{18}}$.

Обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини X до інтервалу (2;11).

Варіант 22

1 Неперервну випадкову величину X задано диференціальною функцією розподілу

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 2x, & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Обчислити: $M(X),\ D(X),\ \sigma(X),\ P\left(\frac{1}{3}<X<3\right),\ F(x)$. Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

2 Середнє значення довжини деталі складає 50 см, а дисперсія – 0,1. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що довжина випадково взятої деталі виявиться не меншою за 49,5 *см* і не більшою за 50,5 см.

Варіант 23

1 Неперервну випадкову величину X задано диференціальною функцією $f(x)=2\cos 2x$ на інтервалі $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$; зовні даного інтервалу диференціальна функція $f(x)=0$. Обчислити середнє квадратичне відхилення X і побудувати графік функції $f(x)$.

2 Обчислити $P(3<X<10)$, якщо X – нормально розподілена випадкова величина, математичне сподівання якої становить 3, а дисперсія – 4.

Варіант 24

1 Випадкова величина X має щільність розподілу вигляду $f(x)=|x|e^{-x^2}$. Обчислити ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення з інтервалу (0;1).

2 Розподіл випадкової величини X задано наступною таблицею:

X	-1	0	2	4	6
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Якою буде ймовірність того, що $|X-M(X)|<5$? Оцінити ймовірність даної події, користуючись нерівністю Чебишева.

Варіант 25

1 Неперервну випадкову величину X задано функцією $f(x)=ae^{-|x|}$, яка визначає щільність розподілу X.

Обчислити: a, $M(X)$, $\sigma(X)$, $P(\frac{1}{2}<X<1)$.

2 Випадкову величину X розподілено за нормальним законом, що має наступні параметри: $a = 15$, $\sigma = 0{,}2$. Яку точність довжини виготовленої деталі можна гарантувати з імовірністю 0,97 ?

Варіант 26

1 Неперервну випадкову величину X задано функцією розподілу :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \dfrac{2x^2}{1+x^2}, & 0 < x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Обчислити: $M(X)$, $D(X)$, $P(0{,}5 < X < 1.5)$.

2 Уважається, що величина відхилення довжини виготовленого виробу від стандарту є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Якщо стандартна довжина виробу дорівнює 40 см, а середнє квадратичне відхилення – 0,4 см, то яку точність довжини виробу можна гарантувати з імовірністю 0,8?

Варіант 27

1 Неперервну випадкову величину X задано інтегральною функцією $F(x) = 1 - e^{-3|x|}$. Обчислити математичне сподівання X.

2 Усі значення рівномірно розподіленої випадкової величини X належить до відрізка $[\,2;\ 8\,]$. Обючислити ймовірність потрапляння випадкової величини X до інтервалу $(\,3;\ 5\,)$, а також математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення X.

Варіант 28

1 Щільність імовірності неперервної випадкової величини на інтервалі $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ дорівнює $\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x$, а поза ним вона дорівнює нулю. Обчислити математичне сподівання X та ймовірність потрапляння випадкової величини X до інтервалу $\left(0;\ \dfrac{\pi}{4}\right)$.

2 Бомбардувальник, пролітаючи вздовж мосту, довжина якого становить 30 м, а ширина – 8 м, скидає бомби. Випадкові величини X і Y (відстані від вертикальної і горизонтальної осей симетрії мосту до місць падіння бомб) є незалежними і розподіленими нормально з середніми квадратичними відхиленнями, які відповідно дорівнюють 6 м і 4 м, і математичними сподіваннями, які дорівнює нулю. Обчислити ймовірність влучення в міст однією скинутою бомбою.

Варіант 29

1 Обчислити математичне сподівання неперервної випадкової величини X, якщо щільність розподілу визначається функцією $f(x) = 0{,}5e^{-|x+1|}$.

2 Випадкові похибки вимірювань підлягають нормальному закону із середнім квадратичним відхиленням, що складає 20 мм і математичним сподіванням, що дорівнює нулю. Обчислити ймовірність того, що випадкова похибка хоча б одного з трьох незалежних вимірювань за абсолютною величиною не перевищить 4 мм.

Варіант 30

1 Дано функцію:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0; \\ \lambda \quad (2x-3), & 0 < x \le 1; \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

За якого значення λ функція $f(x)$ може визначати щільність імовірності X? Обчислити дисперсію випадкової величини X.

2 Імовірність того, що насінина деякої культури проросте, дорівнює 0,75. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що з посіяних 1000 насінин число тих, які проростуть, становитиме від 700 до 800 включно.

ДОДАТОК Д

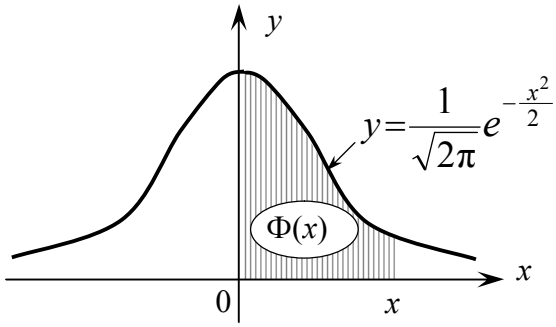
Таблиця Д.1 – Значення функції Гауса: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,399	399	399	399	399	398	398	398	398	397
0,1	397	397	396	396	395	395	394	393	393	392
0,2	391	390	389	389	388	387	386	385	384	383
0,3	381	380	379	378	377	375	374	373	371	370
0,4	368	367	365	364	362	361	359	357	356	354
0,5	352	350	349	347	345	343	341	339	337	335
0,6	333	331	329	327	325	323	321	319	317	314
0,7	312	310	308	306	303	301	299	297	294	292
0,8	290	287	285	283	280	278	276	273	271	269
0,9	266	264	261	259	257	254	252	249	247	244
1,0	242	240	237	235	232	230	228	225	223	220
1,1	218	216	213	211	208	206	204	201	199	197
1,2	194	192	190	187	185	183	180	178	176	174
1,4	150	148	146	144	142	140	137	135	133	132
1,6	111	109	107	106	104	102	101	099	097	096
1,8	079	078	076	075	073	072	071	069	068	067
1,9	066	064	063	062	061	059	058	057	056	055
2,0	054	053	052	051	050	049	048	047	046	045
2,1	044	043	042	041	040	040	039	038	037	036
2,2	036	035	034	033	033	032	031	030	030	029
2,4	022	022	021	021	020	020	019	019	018	018
2,6	014	013	013	013	012	012	012	011	011	011
2,8	008	008	008	007	007	007	007	007	006	006
2,9	006	006	006	006	005	005	005	005	005	005
3,0	004	004	004	004	004	004	004	004	004	003
3,1	003	003	003	003	003	003	003	003	003	003
3,2	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002
3,3	002	002	002	002	002	002	001	001	001	001
3,4	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001
3,5	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001
3,6	001	001	001	001	001	001	001	001	001	000

ДОДАТОК Е

Таблиця Е.1 –
Значення функції Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$



x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0,00000				
0,05	0,01994	1,05	0,35314	2,05	0,47982
0,10	0,03983	1,10	0,36433	2,10	0,48214
0,15	0,05962	1,15	0,37493	2,15	0,48422
0,20	0,07926	1,20	0,38493	2,20	0,48610
0,25	0,09871	1,25	0,39435	2,25	0,48778
0,30	0,11791	1,30	0,40320	2,30	0,48928
0,35	0,13683	1,35	0,41149	2,35	0,49061
0,40	0,15542	1,40	0,41924	2,40	0,49180
0,45	0,17364	1,45	0,42647	2,45	0,49286
0,50	0,19146	1,50	0,43319	2,50	0,49379
0,55	0,20884	1,55	0,43943	2,55	0,49461
0,60	0,22575	1,60	0,44520	2,60	0,49534
0,65	0,24215	1,65	0,45053	2,65	0,49598
0,70	0,25804	1,70	0,45543	2,70	0,49653
0,75	0,27337	1,75	0,45994	2,75	0,49702
0,80	0,28814	1,80	0,46407	2,80	0,49744
0,85	0,30234	1,85	0,46784	2,85	0,49781
0,90	0,31594	1,90	0,47128	2,90	0,49813
0,95	0,32894	1,95	0,47441	2,95	0,49841
1,00	0,34134	2,00	0,47725	3,00	0,49865
3,1	0,49903	3,2	0,49931	3,3	0,49952
3,4	0,49966	3,5	0,49977	3,6	0,49984
3,7	0,49989	3,8	0,49993	3,9	0,49995
4,0	0,499968	4,5	0,499997	5,0	0,49999997

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2003. – 479 с.

2 Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1979. – 400 с.

3 Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высш.шк., 1972. – 480 с.

4 Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Т.3. – М.: Высш. шк., 1986. – 415 с.

5 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2010. – 551 с.

ЗМІСТ

Вступ 3
1 Елементи комбінаторики (сполуки). 4
2 Елементи теорії ймовірності 10
2.1 Класичне, статистичне й геометричне означення ймовірності. . 10
3 Основні теореми теорії ймовірностей. 24
3.1 Теореми додавання 24
3.2 Теореми множення 25
4 Повторні випробовування 40
5 Дискретні випадкові величини і закони їх розподілу. 54
5.1 Закони розподілу дискретної випадкової величин 55
5.2 Числові характеристики дискретної випадкової величини 55
5.2.1 Математичне сподівання дискретної випадкової величини . . . 55
5.2.2 Властивості математичного сподівання 56
5.2.3 Дисперсія дискретної випадкової величини 56
5.2.4 Властивості дисперсії 56
5.2.5 Середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини 56
5.2.6 Закон великих чисел 57
6 Неперервні випадкові величини і закони їх розподілу 72
6.1 Закони розподілу неперервних випадкових величин. 74
6.1.1 Імовірність попадання неперервної випадкової величини до заданого інтервалу 74
6.1.2 Закон рівномірного розподілу ймовірностей 74
6.1.3 Нормальний закон розподілу 74
6.1.4 Імовірність потрапляння до заданого інтервалу нормально розподіленої випадкової величини 75
6.2 Числові характеристики неперервної випадкової величини 75
Додаток А 94
Додаток Б 99
Додаток В 104
Додаток Г 113
Додаток Д 124
Додаток Е 125
Список літератури 126

Навчальне видання

АРШАВА Олена Олександрівна
ХАРЧЕНКО Анатолій Петрович
ЩЕЛКУНОВА Любов Іванівна

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Навчальний посібник

Допущено експертною комісією
санітарно-технічного факультету
Харківського національного університету
будівництва та архітектури

Редактор В.І. Пуцик

Підписано до друку 14.06.2019 р.
Формат 60х84 1/16.
Ум.-друк. арк. 7,44
Гарнітура «Time New Roman».
Наклад 300 прим.

Папір офсетний.
Друк – лазерний.

Вид. № 312.
Зам. № 445.

Видавець: ФОП Панов А. М.
Свідоцтво серії ДК № 4847 від 06.02.2015 р.
Надруковано в типографії
ТОВ «Цифрова типографія»
м. Харків, вул. Данилевського, 30.