Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 122

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт з дисципліни

«Вища математика» для студентів заочної форми здобуття освіти

для спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Розділ ІІ

Харків 2019

Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 122

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт з дисципліни

«Вища математика» для студентів заочної форми здобуття освіти

для спеціальності 122 «Комп'ютерні науки»

Розділ ІІ

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 16 від 13.12.2019

Харків 2019

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з тем: „Лінійна та векторна алгебра”, „Аналітична геометрія”, „Вступ до аналізу” з дисципліни «Вища математика» для студентів заочної форми здобуття освіти для спеціальності 122 «Комп’ютерні науки». Розділ ІІ / Укладачі: А.П. Харченко, О.В. Бабаєва – Харків, ХНУБА, 2019. – 68 с.

Рецензент Р.В. Посилаєва

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Дисципліна „Вища математика” є фундаментом математичної освіти бакалавра, що має важливе значення для успішного вивчення загальнотеоретичних і спеціальних дисциплін, що передбачені навчальним планом зі спеціальності «Комп’ютерні науки».

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над навчальним матеріалом, яка складається з наступних елементів: вивчення матеріалу по підручниках, розв’язування задач, самоперевірка, виконання контрольних робіт.

Мета даного видання – надати допомогу здобувачам вищої освіти в організації самостійної роботи під час вивчення таких розділів курсу вищої математики, як: „Інтегральне числення”, „Диференціальні рівняння”.

Видання містить програму навчальної дисципліни, основні поняття теоретичного змісту відповідних розділів, достатню кількість розв'язаних прикладів, варіанти індивідуальних завдань для самостійної роботи. Зміст, повнота і рівень складності завдань і прикладів, які запропоновані, відповідають рівню вимог до математичної підготовки студентів економічних спеціальностей.

Кожна контрольна робота повинна бути зроблена в окремому зошиті, на обкладинці якої студенту слід розбірливо написати своє прізвище, ініціали, шифр, номер контрольної роботи, назву дисципліни.

Розв’язання задач необхідно проводити в тій же послідовності, що і в умовах задач. При цьому умова завдання повинна бути повністю переписана перед її розв’язанням. Студент виконує той варіант контрольної роботи, який збігається з останніми двома цифрами його навчального шифру.

Програма навчальної дисципліни

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ ІІІ. Функції багатьох змінних. Невизначені і визначені інтеграли.

Тема 1. Невизначений інтеграл. Таблиця інтегралів. Методи інтегрування.

Тема 2. Інтегрування підстановкою та частинами.

Тема 3. Інтеграли, що містять квадратний трьохчлен. Раціональні дроби і їх розкладання.

Тема 4. Інтегрування раціональних дробів.

Тема 5. Інтегрування тригонометричних виразів. Інтегрування ірраціональних функцій

Тема 6. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбниця

Тема 7. Інтегрування заміною змінної та частинами.

Тема 8. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення площі плоскої фігури, об'єму тіла ,тіла обертання, поверхні.

Тема 9. Механічні застосування визначеного інтеграла. Фізичні задачі.

Тема 10. Невласні інтеграли 1 та 2 роду, ознаки збіжності.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ IV. Диференціальні рівняння.

Тема 11. Диференціальні рівнянь І порядку. Задача Коші. Рівняння з відокремлюваними змінними Рівняння, однорідні відносно змінних.

Тема 12. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Тема 13. Рівняння другого порядку. Три типа рівнянь, що припускають зниження порядку

Тема 14. Лінійні однорідні диференціальні рівняння П порядку. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами.

Тема 15. Лінійні неоднорідні рівняння 2 порядку. Теорема про загальний розв'язок. Метод варіації довільних сталих.

Тема 16. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.

Тема 17. Системи диференціальних рівнянь.

Контрольна робота №3
Невизначені і визначені інтеграли.

Невизначені інтеграли. Застосування визначених інтегралів.

3.1. Первісна функції. Невизначений інтеграл

Означення. Функція $F(x)$ називається **первісною для функції** $f(x)$**,** визначеної на проміжку $(a;b)$, якщо в усіх точках цього проміжку виконується рівність $F'(x) = f(x)$ (або $dF(x) = f(x)dx$).

Наприклад, первісною функцією для функції $f(x) = 4x^3$ буде $F(x) = x^4$, оскільки $(x^4)' = 4x^3$. Однак похідна від функції $(x^4 + 5)$ також дорівнює $4x^3$, а це означає, що функція $(x^4 + 5)$ буде також первісною для функції $4x^3$. І взагалі, $F(x) = x^4 + C$, де C –- стала, також будуть первісними для $f(x) = 4x^3$, оскільки $(x^4 + C)' = 4x^3$.

Теорема. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на проміжку $(a;b)$, то множина всіх первісних для функції $f(x)$ на цьому проміжку $(a;b)$ міститься у виразі $F(x) + C$, де C – довільна стала.

Означення. Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для функції $f(x)$, визначеної на проміжку $(a;b)$, називається **невизначеним інтегралом від функції** $f(x)$ на цьому проміжку і позначається символом $\int f(x)dx$, де $f(x)$ – підінтегральна функція, $f(x)\,dx$ – підінтегральний вираз, x – змінна інтегрування.

Таким чином, якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Справедливе й обернене твердження.

Операція знаходження невизначеного інтеграла від функції називається **інтегруванням цієї функції**.

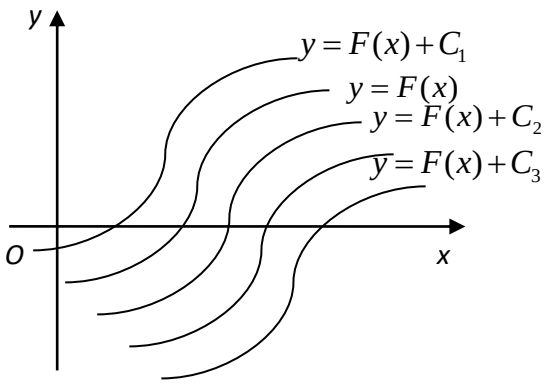

Рис.3.6.1

Геометрично невизначений інтеграл являє собою сукупність кривих $y = F(x) + C$ (кожному числовому значенню С відповідає крива сукупності) (рис.3.6.1).

Графік кожної первісної називається **інтегральною кривою.**

Доведено, що будь-яка функція, неперервна на проміжку, має в цьому проміжку первісну, а значить, і невизначений інтеграл.

Властивості невизначеного інтеграла (правила інтегрування)

Подамо властивості, які випливають з означення невизначеного інтеграла і вибірково доведемо деякі з них (усі рівності можна довести диференціюванням їх лівої та правої частин):

1) $(\int f(x)dx)' = f(x)$ ..

2) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$.

3) $\int dF(x) = F(x) + C$.

4) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, де c = const $\neq 0$.

5) $\int (f_1(x) \pm f_2(x)dx) = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.

6) $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

7) (Інваріантність формул інтегрування).

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C,$ де $u = \varphi(x)$ – неперервно диференційована функція аргументу *x*.

Таблиця невизначених інтегралів

З таблиці похідних і означення невизначеного інтеграла можна скласти таблицю невизначених інтегралів.

$$\int Odu = \int Ou'_x dx = C . \qquad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx == u + C . \qquad (2)$$

$$\int u^{\alpha} du = \int u^{\alpha} u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. \quad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \quad . \quad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C. \quad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C. \quad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C. \quad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C. \quad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u \cdot u'_x dx = -\cos u + C. \quad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u \cdot u'_x dx = \sin u + C. \quad (10)$$

$$\int tgu du = \int tgu \cdot u'_x dx = -\ln|\cos u| + C. \quad (11)$$

$$\int ctgu du = \int ctgu \cdot u'_x dx = \ln|\sin u| + C. \quad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = tgu + C. \quad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C. \quad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C. \quad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \quad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C. \quad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \quad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C. \quad (19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2+A}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2+A}} = \ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C. \qquad (20)$$

$$\int \sqrt{u^2+A}du = \int \sqrt{u^2+A}\cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+A}\right| + C. \qquad (21)$$

$$\int \sqrt{a^2-u^2}du = \int \sqrt{a^2-u^2}\cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C, \text{ (a>0).} \qquad (22)$$

Зауважимо, що символ u може позначати як незалежну змінну, так і неперервну диференційовану функцію від незалежної змінної.

Кожна із формул цієї таблиці справедлива в будь-якому проміжку, який міститься в області визначення відповідної підінтегральної функції, її вірність можна перевірити диференціюванням.

Невизначені інтеграли (1-22) називають основними або табличними інтегралами і їх необхідно запам`ятати.

Корисно також запам`ятати, що коли $u = ax + b$ і

$$\int F(u)du = F(u) + C,$$

то

$$\int F(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \qquad (23)$$

Є три основні методи інтегрування функцій: метод розкладу, метод заміни змінної і метод інтегрування частинами. Розглянемо кожний з цих методів.

3.2 Безпосереднє інтегрування і метод розкладу

Під безпосереднім інтегруванням розуміють пряме використання таблиці інтегралів.

Приклад . Знайти $\int (5x^7 - 7x^2 + 2)dx.$

Розв`язання. Скориставшись властивостями невизначеного інтеграла, матимемо $\int (5x^7 - 7x^2 + 2) = \int 5x^7 dx - \int 7x^2 dx + \int 2dx = 5\int x^7 dx - 7\int x^2 dx + 2\int dx.$

Звідки застосувавши степеневий інтеграл (1)

$$\int (5x^7 - 7x^2 + 2)dx = = 5\frac{x^8}{8} + C_1 - 7\frac{x^3}{3} + C_2 + 2x + C_3 = \frac{5x^8}{8} - 7x^3 + 2x + C,$$

де $C = C_1 + C_2 + C_3.$

Приклад. Знайти $\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx.$

Розв`язання. Маємо

$$\int \frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^x dx+\int\frac{dx}{x}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C=C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|.$$

3.3 Інтегрування методом заміни змінної (метод підстановки)

Якщо безпосередньо (за допомогою таблиці) не вдається знайти первісну, то застосовують метод заміни змінної. Суть цього методу полягає у застосуванні такої нової змінної інтегрування, що заданий інтеграл зводиться до нового інтеграла, який є табличним або таким, що зводиться до нього.

Нехай треба обчислити інтеграл $\int f(x)dx$. Заміна змінної здійснюється за допомогою підстановок двох видів:

1) покладають $x=\varphi(t),$ де $\varphi(t)-$ неперервно диференційована функція нової змінної t, яка має обернену функцію. Тоді $dx=\varphi'(t)dt$ і, застосувавши властивість інваріантності форми першого диференціала, отримаємо формулу заміни змінної

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

2) покладають $u=\psi(x),$ де u – нова змінна, тоді формула заміни змінної має вигляд

$$\int f[\psi(x)]\psi'(x)dx=\int f(u)du.$$

Приклад. Знайти $\int \sin^3 x\cos x dx$.

Розв`язання. $\int \sin^3 x\cos x dx=\left|\begin{matrix}u=\sin x\\du=\cos x dx\end{matrix}\right|=\int u^3du=\frac{u^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C.$

Приклад. Знайти $\int\frac{x^2dx}{x^6+9}.$

Розв`язання. Покладемо, що $x^3 = t.$ Тоді $3x^2\,dx=dt$ і

$$\int\frac{x^2dx}{x^6+9}=\left|\begin{matrix}x^3=t\\3x^2dx=dt\end{matrix}\right|=\frac{1}{3}\int\frac{3x^2dx}{x^6+9}=\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{t}{3}+C=$$

$$=\frac{1}{9}arctg\frac{x^3}{3}+C.$$

3.4 Метод інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ – дві функції, які мають неперервні похідні. Тоді $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$. Інтегруючи цю рівність, отримаємо

$$\int d(uv) = \int vdu + \int udv, \text{ але } \int d(uv) = uv + C,$$

звідки

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (3.9.1)$$

Ця формула називається **формулою інтегрування частинами**, а метод інтегрування, що грунтується на застосуванні цієї формули, – **методом інтегрування частинами.**

Метод інтегрування частинами є ефективним, якщо інтеграл у правій частині рівності виявиться простішим, ніж вихідний.

Укажемо деякі види інтегралів, для знаходження яких застосовують метод інтегрування частинами (Табл. 1).

Таблиця 1

№ з/п	Вид інтеграла	Позначення підінтегрального виразу
1	$\int P(x)e^{ax}dx,$ де P(x) – многочлен	$u=P(x);$ $dv=e^{ax}dx$
2	$\int P(x)\cos bxdx$	$u=P(x);$ $dv=cosbxdx$
3	$\int P(x)\sin bxdx$	$u=P(x);$ $dv=sinbxdx$
4	$\int P(x)\ln xdx$	$u=lnx;$ $dv=P(x)dx$
5	$\int P(x)\log_a xdx$	$u=\log_a x;$ $dv=P(x)dx$
6	$\int P(x)arctgbxdx$	$u=arctgbx;$ $dv=P(x)dx$
7	$\int P(x)arcctgbxdx$	$u=arcctgbx;$ $dv=P(x)dx$
8	$\int P(x)\arcsin bxdx$	$u=arcsinbx;$ $dv=P(x)dx$
9	$\int P(x)\arccos bxdx$	$u=arccosbx;$ $dv=P(x)dx$
10	$\int e^{ax}\cos bxdx$	Обидва рази за u вибирають або показникову функцію, або

		тригонометричну
11	$\int e^{ax}\sin bxdx$	Обидва рази за u вибирають або показникову функцію, або тригонометричну

Приклад. Знайти $\int x^2 \ln x dx$.

Розв`язання. Вважаючи, що $u(x)=\ln x$, $dv(x)=x^2dx$ і застосувавши формулу (3.9.1), одержимо

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx; & v = \int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C.$$

Розв`язання цього прикладу можна записати ще й так:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}\int \ln x dx^3 = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^3 d\ln x\right) = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^2 dx\right) = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3\right) + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C.$$

3.5 Інтегрування раціональних дробів

Нагадаємо, що раціональною функцією називається функція вигляду

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}, \qquad (3.10.1)$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – алгебраїчні многочлени з дійсними коефіцієнтами, причому $Q_m(x) \neq 0$. Якщо $Q_m(x) \equiv C \neq 0,$ то раціональна функція (3.10.1) буде цілою раціональною функцією (многочленом). Таку функцію інтегрують безпосередньо:

$$a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + C.$$

Раціональний дріб $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається правильним, якщо степінь многочлена $P_n(x)$ менша, за степінь многочлена $Q_m(x)$, тобто коли $n < m$ і є неправильним раціональним дробом у противному випадку, тобто коли $n \geq m$.

Неправильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n \geq m)$ можна завжди подати у вигляді

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = T(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

де *T(x)* – ціла раціональна функція (многочлен) і $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ ($k< m$) – правильний раціональний дріб.

Як інтегрується ціла раціональна функція ми вже знаємо. Тепер розглянемо інтегрування правильного раціонального дробу $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ $(n < m)$. Насамперед покажемо, як інтегруються елементарні раціональні дроби, тобто дроби типу:

I $\frac{A}{x-a}$;

II $\frac{A}{(x-a)^k}$, де *к* – ціле число, *к>1*;

III $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, де $D=b^2-4ac<0$, тобто квадратний тричлен не має дійсних коренів.

IV $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$, де *к* – ціле число, *к>1* і $D=b^2-4ac<0$.

У всіх чотирьох випадках вважаємо, що *A, B, a, в, c* – дійсні числа.

Перераховані елементарні дроби називають також найпростішими дробами I, II, III і IV типів.

Розглянемо інтеграли від найпростіших дробів.

I. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$

II. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\cdot\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$, де $к\neq 1$.

III.

$$\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx = \left|\left(ax^2+bx+c\right)' = 2ax+b\right| = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{ax^2+bx+c}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}} =$$

$$= \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| + \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{A}{2a}\ln\left|ax^2+bx+c\right| +$$

$$+\begin{cases} \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\,arctg\,\frac{x+\frac{b}{2a}}{\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac<0 \\ \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x+\frac{b}{2a}}\right)+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac=0 \\ \frac{1}{a}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\ln\left|\frac{x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}{x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}}}\right|+C, & \text{якщо } b^2\text{-}4ac>0 \end{cases}$$

IV. $$\int \frac{Ax+B}{\left(ax^2+bx+c\right)^k}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{(ax^2+bx+c)^k}dx =$$

$$= \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^k} =$$

$$= \frac{A}{2a}\cdot\frac{(ax^2+bx+c)^{-k+1}}{-k+1} + \frac{1}{a^k}\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)^k}.$$

Останній інтеграл, як інтеграл виду $\int \frac{du}{(u^2+p^2)^k}$, можна знайти за рекурентною формулою, згідно з якою $I_k = \frac{1}{p^2}\left(\frac{u}{2(k-1)(u^2+p^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}\right)$.

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{(1-2x)^7}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу II типу. Оскільки $d(1-2x) = (1-2x)'dx = -2dx$ і $\frac{1}{(1-2x)^7} = (1-2x)^{-7}$, то

$$\int \frac{dx}{(1-2x)^7} = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-7}(-2)dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-7}\,d(1-2x) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{12(1-2x)^6} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де $A=0$, $B=1$, $b^2-4ac=-64<0$. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена $4x^2+4x+5$, одержимо табличний інтеграл (12). Дійсно

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \left|\begin{matrix} u = 2x+1 \\ du = 2dx \end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{2} arctg\frac{2x+1}{2} + C = \frac{1}{4} arctg\frac{2x+1}{2} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx.$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де $A=-8$, $B=7$, $D=b^2-4ac=-20<0$. Спочатку виділимо похідну знаменника в чисельнику дробу. Для цього чисельник $7-8x$ подамо у вигляді

$$7-8x = -2(4x-2)+3.$$

Тоді

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx = \int \frac{-2(4x-2)+3}{2x^2-2x+3}dx = -2\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx + 3\int \frac{dx}{2x^2-2x+3} =$$

$$= -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}} = -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)} =$$

$$= -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}} = -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= -2\ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{\sqrt{5}} arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

Тут $\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx$ знайдений за формулою (2) таблиці інтегралів, вважаючи $u=2x^2-2x+3$ і враховуючи, що $2x^2-2x+3>0$ для будь-якого x, а $\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}$ -

за формулою (12), вважаючи $u = x - \frac{1}{2}$ і враховуючи, що $a^2 = \frac{5}{4}$.

3.6 Інтегрування тригонометричних функцій

Інтеграли від тригонометричних функцій, як і від функцій ірраціональних, не завжди можна знайти. Однак, можна вказати на підклас таких функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді. До цього підкласу тригонометричних функцій входять тригонометричні функції, що є раціональними функціями від *sinx, cosx, tgx, ctgx, secx, cosecx*. Оскільки *tgx, ctgx, secx, cosecx* самі виражаються раціонально через *sinx* і *cosx*, то цей підклас можна охарактеризувати як підклас тригонометричних функцій, які є раціональними функціями від *sinx* і *cosx*.

1 Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx,$

де *R* –раціональна функція від *sinx* і *cosx* за допомогою так званої універсальної тригонометричної підстановки

$$tg\frac{x}{2} = t\,,\ \ (-\pi < x < \pi)$$

зводиться до інтеграла від раціональної функції. При цьому

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Зауважимо, що іноді замість підстановки $tg\frac{x}{2} = t$ вигідніше зробити підстановку $ctg\frac{x}{2} = t(0 < x < 2\pi).$

Слід також відзначити, що завдяки своїй універсальності підстановка $tg\frac{x}{2} = t$ часто призводить до занадто громіздких викладок, що ускладнює знаходження інтеграла. Тому в окремих випадках доцільно застосовувати інші підстановки, які також раціоналізують інтеграл.

Нижче вкажемо випадки, коли мета буде досягнута за допомогою простіших підстановок.

2 Інтеграл вигляду $\int R(\sin x, \cos x)dx,$

де *R* – раціональна функція від *sinx* і *cosx*.

а) Якщо виконується рівність

$$R(-sinx, cosx) \equiv -R(sinx, cosx),$$

то вигідно застосувати підстановку *cosx=t*.

б) Якщо виконується рівність

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

то доцільно застосувати підстановку $\sin x = t$.

в) Якщо виконується рівність

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то застосовують підстановку $tgx = t$ або $ctgx = t$, при цьому, якщо $tgx = t$, то

$$\sin x = \frac{tgx}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Зокрема,

$\int R(\sin x)\cos x dx$ підстановкою $\sin x = t$ зводиться до $\int R(t)dt$.

$\int R(\cos x)\sin x dx$ підстановкою $\cos x = t$ зводиться до $\int R(t)dt$.

$\int R(tgx)dx$ підстановкою $tgx = t$ зводиться до $\int R(t)\frac{dt}{1+t^2}$.

3 Інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

а) Якщо m і n – цілі числа і принаймні одне з цих чисел – непарне додатне число, наприклад $m = 2k+1$, тоді

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \cos^n x \cdot \sin^{2k} x \cdot \sin x dx =$$

$$\int \cos^n x \left(\sin^2 x\right)^k dx = -\int \cos^n x \left(1-\cos^2 x\right)^k d\cos x =$$

$$= \left|\cos x = t\right| = -\int t^n (1-t^2)^k dt.$$

Якщо ж непарним буде число $n = 2p+1 > 0$, то треба застосувати підстановку $t = \sin x$. Тоді

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int \sin^m x (\cos^2 x)^p \cos x dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^p d\sin x = \int t^m (1-t^2)^p dt.$$

б) Якщо обидва показники m і n – парні невід`ємні числа(зокрема, один із них може дорівнювати нулю), то доцільно застосувати формули

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

в) Якщо обидва показники – парні, причому принаймні один із них – від`ємний, то треба зробити заміну $tgx = t$ або $ctgx = t$.

Зауважимо, що інтеграли вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ дуже зручно знаходити за допомогою рекурентних формул.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \begin{cases} -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x dx, m \neq -n, \\ \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx, m \neq -n. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}=\begin{cases}-\dfrac{1}{m-1}\cdot\dfrac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}+\dfrac{m+n-2}{m-1}\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^{m-2}x\cos^n x}, m\neq 1,\\ \dfrac{1}{n-1}\cdot\dfrac{1}{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}+\dfrac{m+n-2}{n-1}\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}, n\neq 1.\end{cases}$$

4 Інтеграл вигляду $\int tg^m x dx$ або $\left(\int ctg^m x dx\right)$,

де m - ціле додатне число. Для знаходження такого інтеграла застосовують формулу

$$tg^2 x=\sec^2 x-1=\frac{1}{\cos^2 x}-1 \quad (\text{або} \quad ctg^2 x=\cos ec^2 x-1=\frac{1}{\sin^2 x}-1),$$

за допомогою якої послідовно знижується степінь тангенса або котангенса.

5 Інтеграли вигляду

$$\int \sin ax\cos bx dx,\quad \int \cos ax\cos bx dx,\quad \int \sin ax\sin bx dx.$$

Щоб знайти ці інтеграли, треба перейти від добутку тригонометричних функцій до суми за відомими формулами:

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\right),$$

$$\sin ax\sin bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right),$$

$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right).$$

6 Інтеграли вигляду $\int \frac{a_1\sin x+b_1\cos x+c_1}{a_2\sin x+b_2\cos x+c_2}dx.$

Такі інтеграли знаходять за допомогою універсальної підстановки $t=tg\frac{x}{2}$.

7 Інтеграли вигляду $\int \frac{a_1\sin^2 x+b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a_2\sin^2 x+b_2\sin x\cos x+c_2\cos^2 x}dx.$

Для знаходження цих інтегралів доцільно застосувати підстановку $t=tgx$.

Приклад . Знайти $\int \cos^4 x\sin^5 x dx.$

Розв'язання. Маємо інтеграл вигляду $\int \sin^m x\cos^n x dx,$ де $m=5, n=4.$

Враховуючи, що $m=5>0$ і непарне, одержимо

$$\int \cos^4 x\sin^5 x dx=\int \cos^4 x\cdot\sin^4 x\cdot\sin x dx=\int \cos^4 x(1-\cos^2 x)^2\cdot\sin x dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}t=\cos x\\ dt=-\sin x dx\end{matrix}\right|=-\int t^4(1-t^2)^2 dt=-\int t^4(1-2t^2+t^4)dt=$$

$$=-\int(t^4-2t^6+t^8)dt=-\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^7}{7}+\frac{t^9}{9}\right)+C=-\left(\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{2\cos^7 x}{7}+\frac{\cos^9 x}{9}\right)+C.$$

Приклад. Знайти $\int \sin^2 x\cos^4 x dx.$

Розв'язання. Враховуючи, що $m=2, n=4$, тобто обидва показники додатні і парні, будемо мати

$$\int \sin^2 x\cos^4 x dx=\frac{1}{4}\cdot\cos^2 x dx=\frac{1}{4}\int \sin^2 2x\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx + \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x =$$

$$= \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx + \frac{1}{16}\cdot\frac{\sin^3 2x}{3} = \frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx.$

Розв'язання. Оскільки при зміні знаків у *sinx* і *cosx* підінтегральна функція не змінює знака, то застосовуємо підстановку $tgx=t$. Отже, маємо

$$\int \frac{2tgx+3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x}dx = \int \frac{2tgx+3}{(tg^2 x+2)\cos^2 x}dx = \left| \begin{matrix} tgx = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{2t+3}{t^2+2}dt = \int \frac{2tdt}{t^2+2} + 3\int \frac{dt}{t^2+2} = \ln(t^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}} arctg\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \ln(tg^2 x+2) + \frac{3}{\sqrt{2}} arctg\frac{tgx}{\sqrt{2}} + C.$$

Приклад. Знайти $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від *sinx* і *cosx*. Тому, зробивши підстановку $tg\frac{x}{2} = t,$ одержимо

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx = \left| \begin{matrix} tg\frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{1+t^2+2t}{t(1+t^2+1-t^2)}dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t}+t+2\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|t| + \frac{t^2}{2} + 2t\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2} + tg\frac{x}{2} + C.$$

3.7 Інтегрування ірраціональних функцій

Інтеграл від будь-якої раціональної функції, як було викладено вище, завжди виражається в скінченному вигляді, чого не можна сказати про інтеграл від функції ірраціональної. Однак, можна вказати на деякі підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді.

Загальний спосіб, за допомогою якого вдається знайти інтеграл від ірраціональної функції, полягає в тому, що внаслідок тієї чи іншої підстановки інтеграл від ірраціональної функції зводиться до інтеграла від функції раціональної. Тому цей спосіб називають раціоналізацією заданого інтеграла.

Розглянемо підкласи ірраціональних функцій, інтеграли від яких виражаються в скінченному вигляді.

1 Інтеграл вигляду $\int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, x^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots, x^{\frac{m_p}{n_p}}\right)dx,$

де R- раціональна функція, m_i і n_i >1- натуральні числа *(i=1, 2,…,p).*

Цей інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $x=t^k$, де *к* – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ *(i=1, 2, …,p).*

2 Інтеграл вигляду $\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}}\right]dx,$

де R- раціональна функція, m_i і n_i >1- натуральні числа *(i=1, 2,…,p)* і визначник $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ (a, b, c, d- сталі дійсні числа).

Такий інтеграл раціоналізується за допомогою підстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, де *к*- найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_i}{n_i}$ *(i=1, 2,…,p).*

3 Інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Цей інтеграл зводиться до табличного шляхом виділення повного квадрата із квадратного тричлена.

4 Інтеграл вигляду $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx.$

Для знаходження цього інтеграла спочатку виділяємо в чисельнику похідну квадратного тричлена $ax^2+вx+c,$ після чого розкладаємо інтеграл на суму двох інтегралів:

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+B-\frac{Ab}{2a}}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{A}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(B-\frac{Ab}{2a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Перший із одержаних інтегралів є табличним інтегралом (1), а другий – розглянутий у п. 3.

5 Інтеграл вигляду $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^m\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Підстановкою $x-\alpha=\frac{1}{t}$ зводять цей інтеграл до розглянутого в п. 3.

6 Інтеграл вигляду $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx,$ де *R*- раціональна функція.

Шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена ax^2+bx+c цей інтеграл зводиться до одного з трьох інтегралів:

а) $\int R\left(z,\sqrt{m^2-z^2}\right)dz;$

б) $\int R\left(z,\sqrt{m^2+z^2}\right)dz;$

в) $\int R\left(z,\sqrt{z^2-m^2}\right)dz.$

Ці інтеграли знаходять відповідно за допомогою підстановок

а) $z=m\,sint;$

б) $z=m\,tgt;$

в) $z=\frac{m}{\cos t}.$

Приклад Знайти $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}.$

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=2,\ n_2=3,\ n_3=4,$ тому $к=12$ (найменше спільне кратне чисел *2*, *3* і *4*). Покладемо $x=t^{12}$. Тоді

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\left|\begin{array}{c}x=t^{12}\\dx=12t^{11}dt\end{array}\right|=\int\frac{t^6}{t^8-t^3}12t^{11}dt=12\int\frac{t^{17}dt}{t^3(t^5-1)}=12\int\frac{t^{14}dt}{t^5-1}=$$

$$=\left|\begin{array}{ll}t^{14} & \left|\begin{array}{l}t^5-1\\\hline t^9+t^4\end{array}\right.\\ -\ t^{14}-t^9 & \\ \hline t^9 & \\ -\ t^9-t^4 & \\ \hline t^4 & \end{array}\right|=$$

$$=12\int\left(t^9+t^4+\frac{t^4}{t^5-1}\right)dt=12\left(\int t^9dt+\int t^4dt+\frac{1}{5}\int\frac{5t^4dt}{t^5-1}\right)=$$

$$=12\left(\frac{t^{10}}{10}+\frac{t^5}{5}+\frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right|\right)+C=\frac{6}{5}\left(t^{10}+2t^5+2\ln\left|t^5-1\right|\right)+C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}=\frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt[12]{x^5}+2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right|\right)+C.$$

3.8 Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбниця

Поняття визначеного інтеграла відіграє важливу роль у математичному аналізі та у різноманітних його застосуваннях.

Розглянемо задачу, яка призводить до поняття визначеного інтеграла.

Задача обчислення площі криволінійної трапеції

Нехай на відрізку $[a;b]$ $(a<b)$ задана неперервна функція $f(x)$.

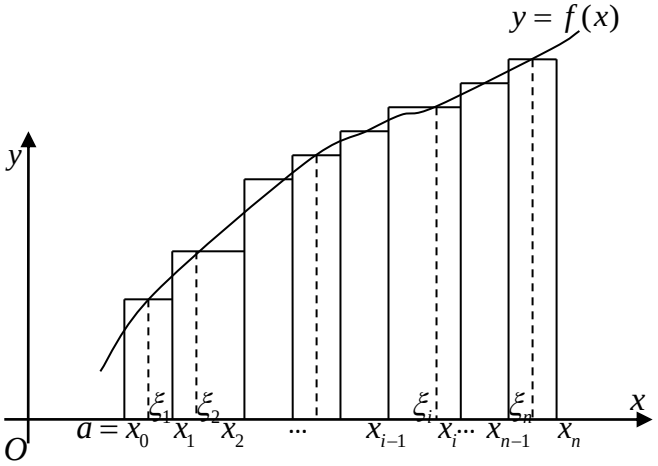

Рис.3.13.1

Криволінійною трапецією називають плоску фігуру, яка обмежена кривою $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ і відрізком осі Ox. Розглянемо випадок, коли $f(x)\geq 0$ (рис.3.13.1).

Розіб`ємо відрізок $[a;b]$ на n довільних частин точками $a=x_0,x_1,x_2,...x_{n-1},x_n=b$ $(a=x_0<x_1<x_2<...<x_{n-1}<x_n=b)$.

Кожний такий відрізок будемо називати **частковим**.

Через Δx_k позначимо довжину часткового відрізка $[x_{k-1};x_k]$ (κ=1,2,…,n):

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}.$$

На кожному частковому відрізку оберемо довільну точку, абсцису якої позначимо через ξ_k (κ=1,2,…,n), обчислимо $f(\xi_k)$ – значення заданої функції $f(x)$ у цій точці. Визначимо добуток числа $f(\xi_k)$ на довжину Δx_k відрізка, на якому взято точку ξ_k. Цей добуток $f(\xi_k)\Delta x_k$ дорівнює площі прямокутника з основою Δx_k і висотою $f(\xi_k)$. Сума всіх таких добутків

$$f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+...+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$$

дорівнює площі ступінчастої фігури, яка складається з окремих прямокутників і приблизно дорівнює площі криволінійної трапеції.

Така сума називається **інтегральною сумою для функції $f(x)$** на відрізку $[a;b]$.

За точне значення площі криволінійної трапеції можна вважати границю S, до якої прямує площа ступінчастої фігури, якщо $n \to \infty$(кількість часткових відрізків нескінченно зростає) і $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i \to 0$: $S = \lim\limits_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Означення. Границя інтегральної суми , тобто

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k ,$$

якщо вона існує і не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на часткові, ні від вибору на них точок ξ_k, називається **визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку** $[a;b]$ і позначається символом $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Отже,

$$\int f(x)dx \overset{def}{=} \lim_{\substack{\max \Delta x_k \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k . \qquad (3.13.1)$$

Таким чином, визначений інтеграл від невід'ємної функції чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції (**геометричній зміст визначеного інтеграла**) (рис.3.13.1).

Числа a і b називаються відповідно нижньою і верхньою межами інтегрування, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування, відрізок $[a;b]$ – відрізком інтегрування.

Означення. Функція $f(x)$, для якої на відрізку $[a;b]$ існує визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx.$, називається **інтегрованою на відрізку** $\int\limits_a^b f(x)dx.$.

Теорема (Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$**,** то існує границя її інтегральної суми (визначений інтеграл). Ця границя не залежить ні від розбиття відрізка $[a;b]$**,** ні від вибору точок ξ_k на часткових відрізках.

Основні властивості визначеного інтеграла:

Вважатимемо, що функція $f(x)$ є інтегрованою функцією на відрізку $[a;b]$

1) Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx .$$

2) Визначений інтеграл від суми (різниці) декількох інтегрованих функцій дорівнює сумі (різниці) інтегралів від цих функцій:

$$\int_a^b \big(f_1(x) \pm f_2(x)\big)dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx.$$

3) Якщо $f(x) \equiv 1$ для $x \in [a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b dx = b - a$.

4) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

5) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$

6) Якщо $f(x) \equiv 0$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 0dx = 0.$$

7) Якщо $f(x) \geq 0$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

8) Якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ – інтегровані функції на відрізку $[a;b]$ і $f(x) \leq \varphi(x)$ для $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

9) Якщо функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a;b]$ і $a<c<b$, то ця функція інтегрована і на відрізках $[a;c]$ і $[c;b]$, причому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Зауважимо, що має місце й обернене твердження. Цю властивість називають **адитивною властивістю визначеного інтеграла**.

10) Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, де $a<b$, і $m \leq f(x) \leq M$ для $x \in [a;b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Тут m – найменше, а M – найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Ці нерівності дають змогу оцінити значення визначеного інтеграла.

11) Теорема (про середнє значення визначеного інтеграла). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то існує точка $c \in [a;b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

При цьому значення функції $f(x)$ у точці c називають **середнім значенням цієї функції** на відрізку $[a;b]$**.**

12) Для інтеграла із змінною верхньою границею $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ (який є функцією від верхньої границі x) виконується рівність: $\Phi'(x) = f(x)$.

Формула Ньютона – Лейбніця

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і $F(x)$ – будь- яка первісна для $f(x)$ на цьому відрізку, то має місце формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad (3.13.2)$$

Ця формула має назву **формули Ньютона – Лейбніца** і є основною формулою інтегрального числення.

Приклад Обчислити $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Розв`язання. За формулою Ньютона – Лейбніця

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Отже, скориставшись цією формулою і властивістю 5 визначеного інтеграла, одержимо

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = \frac{1}{5}\int_{-2}^{-1} (11+5x)^{-3} \cdot 5dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(11+5x)^{-2}}{-2}\Bigg|_{-2}^{-1} =$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{(11+5x)^2}\Bigg|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{(11-5)^2} - \frac{1}{(11-10)^2}\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{1}{36} - 1\right) = \frac{7}{72}.$$

3.9 Заміна змінної у визначеному інтегралі

Нехай для інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ від неперервної функції $f(x)$ зроблена підстановка $x = \varphi(t)$.

Теорема. Якщо:

1) функція $x = \varphi(t)$ і її похідна $x' = \varphi'(t)$ неперервні при $t \in [\alpha;\beta]$;
2) множиною значень функції $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha;\beta]$ є відрізок $[a;b]$;
3) $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$,

Тоді $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt.$$

3.10 Інтегрування частинами визначеного інтеграла

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ неперервні разом із своїми похідними першого порядку на відрізку $[a;b]$, тоді $(uv)' = u'v + uv'$. Інтегруючи обидві частини рівності від a до b, отримаємо

$$\int_a^b (uv)'dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx.$$

Оскільки $\int (uv)'dx = uv + C$, то $\int_a^b (uv)'dx = uv\Big|_a^b$, звідки

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Отриману формулу називають формулою **інтегрування частинами для визначеного інтеграла.**

Приклад. Обчислити $\int_0^1 xe^{-x}dx.$

Розв`язання. Функції $u = x$ і $v = -e^{-x}$ неперервні разом із своїми похідними $u' = 1$ і $v' = e^{-x}$ на відрізку $[0;1]$, отже за формулою інтегрування частинами

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left| \begin{array}{cc} u = x; & du = dx \\ dv = e^{-x}dx; & v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array} \right| = -xe^{-x}\Big|_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + e^0 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

3.11 Геометричне та економічне застосування визначених інтегралів

Як було встановлено (див. геометричний зміст визначеного інтеграла) площа криволінійної трапеції, яка обмежена графіком неперервної на відрізку $[a;b]$ функції $y = f(x)$, прямими $x = a$, $x = b$ і відрізком осі Ox (рис.3.16.1), обчислюється за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx. \qquad (3.16.1)$$

Якщо криволінійна трапеція розташована нижче за вісь Ox ($f(x) < 0$), то її площа визначається за формулою

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

У загальному випадку $S = \int_a^b |f(x)|dx.$

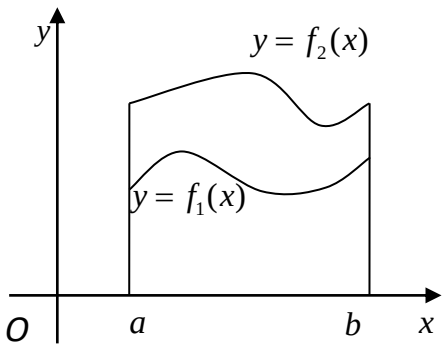

Рис.3.16.1

Якщо плоска фігура обмежена кривими $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$, причому на відрізку $[a;b]$ $f_2(x) \geq f_1(x)$ (рис.13.1), то її площу визначають за формулою

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

тобто

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \qquad (3.16.2)$$

Випадок параметричного задання функції

Нехай криволінійна трапеція обмежена кривою, яка задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

(де $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$) і ці параметричні рівняння визначають деяку функцію $y = f(x)$ на відрізку $[a;b]$. Отже, площа криволінійної трапеції може бути обчислена за формулою $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$.

Зробимо заміну змінної у цьому інтегралі, покладаючи $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$. Оскільки $y = f(x) = f(\varphi(t)) = \psi(t)$, то формула площі криволінійної трапеції, коли крива задана у параметричній формі має вигляд

$$S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt. \qquad (3.16.3)$$

Випадок полярної системи координат

Визначимо площу криволінійного сектора, тобто плоскої фігури, яка обмежена неперервною лінією $r = r(\varphi)$ і двома радіус – векторами $\varphi = \alpha$ і $\varphi = \beta$ (рис.3.16.2).

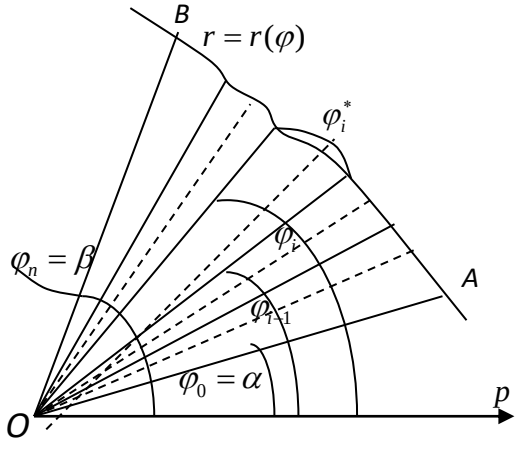

Рис.3.16.2

Розіб'ємо криволінійний сектор *OAB* радіус – векторами $\varphi = \alpha = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1, ..., \varphi = \varphi_n$ на n частин довільним чином. Площу сектора ΔS_i $(i = 1,2,...,n)$, що відповідає проміжку кутів $[\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, визначимо як площу сектора круга з радіусом $r(\varphi_i^*)$, де $\varphi_i^* \in [\varphi_{i-1}; \varphi_i]$, тобто

$$\Delta S_i = \frac{1}{2} r^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i \quad (\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}).$$

Складемо інтегральну суму $\sum_{i=1}^n \Delta S_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} r^2(\varphi_i^*)\Delta\varphi_i$. Її границя при $\max \Delta\varphi_i \to 0$ $(n \to \infty)$ є визначеним інтегралом і дає площу сектора *OAB*.

Отже, формула площі криволінійного сектора має вигляд

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (3.16.4)$$

Приклад. Переріз даху цеху має форму арки циклоїди (радіус похідного кола дорівнює *a*). Визначити площу поперечного перерізу (рис.3.16.3) , якщо висота колон цеху дорівнює h.

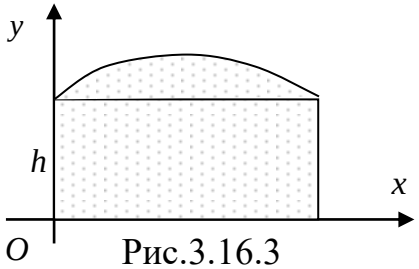

Рис.3.16.3

Розв'язання. Шукана площа є сумою площі арки циклоїди і прямокутника, сторони якого дорівнюють h і $2\pi a$, тобто

$$S = S_{ар.цікл} + 2\pi ah.$$

Циклоїда визначається рівняннями $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$. Якщо вісь Ox направити вздовж лінії, яка з'єднує вершини колон, тоді за формулою $S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt$ маємо:

$$S_{ар.цікл} = \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)(1-\cos t)dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2\left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Остаточно загальна площа $S = 3\pi a + 2\pi ah = \pi a(3a + 2h)$.

Об'єм тіла обертання

Обчислення об'єму тіла за площами паралельних перерізів

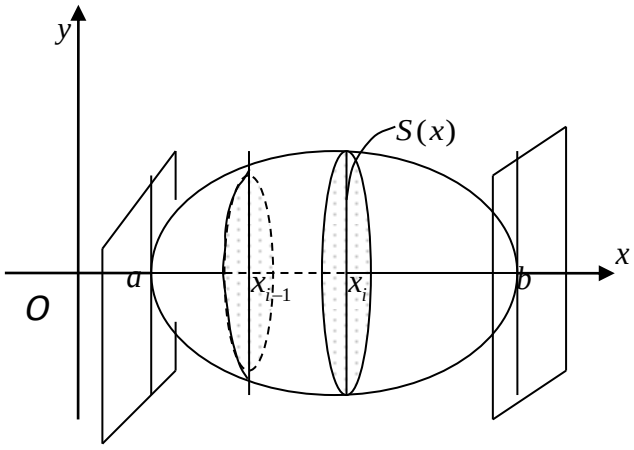

Рис.3.16.4

Визначимо об'єм V тіла, якщо відома площа перерізу цього тіла площиною, яка перпендикулярна до осі Ox: $S = S(x),\ a \le x \le b$ (рис.3.16.4).

Припустимо, що функція $S = S(x)$ неперервна на $[a;b]$.

Знов застосуємо схему побудови інтегральних сум, яка базується на означенні визначеного інтеграла.

Для цього розіб'ємо тіло площинами $x = x_0 = a_0,\ x = x_1, ..., x = x_n = b$ на n частин.

Виберемо точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, 2, ..., n)$ і побудуємо циліндричне тіло, твірна якого паралельна осі Ox, а напрямна є контуром перерізу тіла площиною $x = \xi_i$. Об'єм такого циліндру дорівнює $S(\xi_i)\Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Шуканий об'єм V дорівнює границі інтегральної суми функції $S(x)$ на відрізку $[a;b]$:

$$V = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i ,$$

тобто

$$V = \int_a^b S(x)dx . \qquad (3.16.5)$$

Нехай навколо осі *Ox* обертається криволінійна трапеція, яка обмежена неперервною лінією $y = f(x),\ f(x) \geq 0$, прямими $x = a,\ x = b$ і відрізком осі *Ox*. При цьому утворюється тіло, яке називають **тілом обертання** (рис.3.16.5). Переріз цього тіла площиною, перпендикулярною осі *Ox*, яка проведена через довільну точку *x* осі *Ox*, являє собою коло радіуса $y = f(x)$, тобто його площа $S(x) = \pi y^2$.

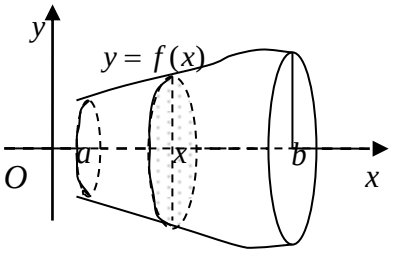

Рис.3.16.5

Застосовуючи формулу об'єму тіла за площиною паралельних перерізів, отримаємо

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx . \qquad (3.16.6)$$

Якщо криволінійна трапеція обмежена графіком неперервної функції $x = \varphi(y),\ \varphi(y) \geq 0$ і прямими $x = 0,\ y = c,\ y = d\ (c < d)$, то об'єм тіла обертання криволінійної трапеції навколо осі *Oy*, дорівнює

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy . \qquad (3.16.7)$$

3.12 Економічний зміст визначеного інтеграла.

Якщо $f(t)$ - продуктивність праці в момент часу t, то

обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0;T]$

$$u = \int_0^T f(t)dt \qquad (3.17.1)$$

обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[t_1;t_2]$

$$u = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt \qquad (3.17.1)$$

Задача Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується формулою $f(t) = (1+t)e^{3t}$.

Розв'язання Скористуємося формулою (3.17.1). Обсяг виробленої продукції дорівнює: $u = \int_0^4 (1+t)e^{3t}\,dt$.

Використаємо метод інтегрування частинами:

$$U = \int_0^4 (1+t)e^{3t}\,dt = \left| \begin{matrix} u = 1+t, & du = dt \\ dv = e^{3t}dt, & v = \int e^{3t}dt = \frac{1}{3}e^{3t} \end{matrix} \right| = (t+1)\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{1}{3}e^{3t} = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{1}{3}(5e^{12} - 1) - \frac{1}{9}(e^{12} - 1) = \frac{1}{9}(14e^{12} - 2) \approx 2{,}53 \cdot 10^5\ (\textit{ум.од.})$$

Контрольна робота №4
Диференціальні рівняння.

4.1 Основні поняття теорії диференціальних рівнянь

Означення. **Диференціальним рівнянням** називають рівняння, яке зв'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y = f(x)$ та її похідні $y', y'', ..., y^{(n)}$ (або диференціали).

Символічно диференціальне рівняння можна записати так:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (4.1.1)$$

Якщо невідома функція залежить від одного аргументу, то диференціальне рівняння називають **звичайним.**

Означення. Найбільший порядок похідної, яка входить в диференціальне рівняння (4.1.1) називається **порядком диференціального рівняння.**

Означення. Функція $y(x)$ називається **розв'язком** (або **інтегралом**) диференціального рівняння (26.1), якщо вона n-раз неперервно диференційовна на деякому інтервалі $(a,b) = I$ і задовольняє диференціальному рівнянню (4.1.1) $\forall\ x \in I$.

4.2 Диференціальні рівняння першого порядку.

При $n = 1$ диференціальне рівняння (4.1.1) називається диференціальним рівнянням першого порядку і записується таким чином

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (4.2.2)$$

Диференціальне рівняння (4.2.2) називається розв'язаним відносно похідної, якщо його можна представити у вигляді

$$y' = f(x, y) \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (4.2.3)$$

Припускаємо, що $f(x,y)$ однозначна і неперервна в деякій області D змінних *x,y*. Цю область називають областю визначення диференціального рівняння (4.2.3).

Якщо в деякій області функція $f(x,y)$ перетворюється в ∞, то в цій області розглядають диференціальне рівняння

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f(x,y)}.$$

Множину таких точок, а також тих, в яких $f(x,y)$ не визначена, але може бути довизначена до неперервності, будемо приєднувати до області визначення диференціального рівняння (4.2.3).

Поряд з (4.2.3) будемо розглядати еквівалентне диференціальне рівняння, записане в диференціалах

$$dy-f(x,y)dx=0, \tag{4.2.4}$$

або в більш загальному виді

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0\ . \tag{4.2.5}$$

Означення. Розв'язком диференціального рівняння (4.2.3) на інтервалі *I* назвемо функцію $y=\varphi(x)$, визначену і неперервно диференційовану на *I*, яка не виходить з області означення функції $f(x,y)$ і яка перетворює диференціальне рівняння (4.2.3) в тотожність $\forall\ x\in I$, тобто

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,y(x)),\quad x\in I\,.$$

В цьому випадку $y=\varphi(x)$ називається розв'язком, записаним в явній формі (вигляді).

Початковою умовою називають умову $y=y_0$ при $x=x_0$, яку записують так:

$$y(x_0)=y_0 \quad \text{або} \quad y\Big|_{x=x_0}=y_0\,. \tag{4.2.6}$$

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають функцію $y=\varphi(x,C)$ (яка залежить від x і довільної сталої C) і задовольняє умовам:

1) функція $y=\varphi(x,C)$ є розв'язком диференціального рівняння при будь-якому відомому значенню C;

2) за будь-якої початкової умови $y(x_0)=y_0$ можна відшукати таке значення $C=C_0$, що функція $y=\varphi(x,C_0)$ задовольняє цю умову.

Іноді загальний розв'язок подають у неявній формі $\Phi(x,y,C)=0$.

Означення. Частинним розв'язком диференціального рівняння першого порядку називають будь-яку функцію $y = \varphi(x, C_0)$, яка отримується із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$ при конкретному значенні сталої C = C_0.

Частинний розв'язок утворюється із загального розв'язку $y = \varphi(x, C)$, якщо в останньому довільній сталій величині C надається значення C_0, яке відповідає початковій умові.

Геометричний зміст загального і частинного розв'язків

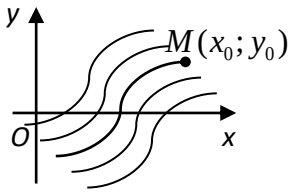

Рис.4.2.1

Геометрично загальний розв'язок зображується сімейством кривих (інтегральних кривих), які в кожній точці M(x; y) мають дотичну з кутовим коефіцієнтом, що дорівнює значенню функції $f(x, y)$ у цій точці (рис.4.2.1).

Частинний розв'язок , який відповідає початковій умові $y(x_0) = y_0$, зображується однією з цих кривих, яка проходить через точку $M(x_0; y_0)$.

Задача визначення частинного розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y\big|_{x=x_0} = y_0$, називається **задачею Коші**.

Теорема існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння

Теорема. Якщо функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $f_y(x, y)$ неперервні у деякій області на площині, яка містить точку $(x_0; y_0)$, то існує єдиний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y(x_0) = y_0$.

Цю теорему приймемо без доведення.

Якщо задача Коші (4.2.3), (4.2.6) має не один розв'язок або ж зовсім його не має, то говорять, що в точці (x_0, y_0) порушується єдиність розв'язку задачі Коші.

Означення. Розв'язок, в кожній точці якого порушується єдиність розв'язку задачі Коші, будемо називати **особливим**.

Рівняння з відокремлюваними змінними.

Диференціальне рівняння вигляду $y' = f(x) \cdot g(y)$ називають **рівнянням із відокремлюваними змінними (** $f(x) \cdot g(y) \neq 0$).

Розглянемо рівняння в диференціалах виду

$$X(x)dx + Y(y)dy = 0, \qquad (4.2.7)$$

де $X(x), Y(y)$ – неперервні функції своїх аргументів.

Диференціальне рівняння (4.2.7) є рівнянням з відокремленими змінними. Його можна переписати таким чином: $d(\int X(x)dx + \int Y(y)dy) = 0$.

Звідки маємо загальний розв'язок в квадратурах

$$\int X(x)dx + \int Y(y)dy = c. \tag{4.2.8}$$

Рівняння вигляду

$$m(x)n(y)dx + m_1(x)n_1(y)dy = 0 \tag{4.2.9}$$

також є **рівнянням з відокремлюваними змінними.**

Припустимо, що $m_1(x)n(y) \neq 0$, тоді розділимо обидві частини рівняння (4.2.9) на $m_1(x)n(y)$, отримаємо

$$\frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = 0. \tag{4.2.10}$$

Аналогічно записуємо

$$\int \frac{m(x)}{m_1(x)}dx + \int \frac{n_1(y)}{n(y)}dy = c \tag{4.2.11}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (4.2.9) і

$$\int_{x_0}^{x} \frac{m(\tau)}{m_1(\tau)}d\tau + \int_{y_0}^{y} \frac{n_1(\tau)}{n(\tau)}d\tau = 0 \tag{4.2.12}$$

– розв'язок задачі Коші (4.2.9).

На практиці інтегрування диференціального рівняння з відокремлюваними змінними $y' = f(x) \cdot g(y)$ доцільно проводити за наступною схемою:

1) похідну y' записують як $y' = \frac{dy}{dx}$;
2) розділяють змінні так, щоб одна частина рівняння містила тільки змінну *x*, а інша – змінну *y*:

$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$, тобто отримують рівняння **з відокремленими змінними;**

3) інтегрують обидві частини здобутої рівності:

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$ і визначають шуканий загальний розв'язок рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = \sqrt{1 - y^2}$.

Розв'язання. Це рівняння з відокремлюваними змінними. Виконуємо перетворення за вказаною вище схемою:

1) $x\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$;

2) $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{dx}{x}$;

3) $\int\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\dfrac{dx}{x}$,

$\arcsin y=\ln x+C$. Ця рівність, яка встановлює зв'язок між змінними x, y і сталою C, і є загальним розв'язком рівняння.

4.3 Однорідні відносно змінних диференціальні рівняння

Розглянемо рівняння в диференціалах $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$, в якому функції $M(x,y)$ і $N(x,y)$ є однорідними функціями однієї і тієї ж степені однорідності m.

Означення. Функція $f(x,y)$ називається **однорідною функцією виміру** m, якщо

$$f(tx,ty)=t^m f(x,y). \tag{4.3.1}$$

Якщо (4.3.1) виконуються при $t\geq 0$, то функція $f(x,y)$ називається додатною однорідною.

Однорідне рівняння завжди можна звести до рівняння вигляду

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{4.3.2}$$

в якому функція $\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ – однорідна функція нульового виміру.

На практиці однорідне диференціальне рівняння рівняння зручно зводити до рівняння з відокремлюваними змінними відносно нової змінної $u = u(x)$ за допомогою заміни $y=u\cdot x$

Приклад. Розв'язати рівняння $y'=\dfrac{y}{x}+1$.

Розв'язання. Це рівняння вигляду $y'=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тобто є однорідним рівнянням відносно x і y. Виконуємо заміну $y=u\cdot x$, тоді $y'=u'\cdot x+u$. Підставляємо ці вирази до рівняння і отримаємо $u'x+u=\dfrac{ux}{x}+1$ або $x\dfrac{du}{dx}=1$. Останнє рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними відносно нової змінної и. Його розв'язок знайдемо за розглянутою вище схемою:

$du = \frac{dx}{x}$; $\int du = \int \frac{dx}{x}$; $u = \ln|x| + \ln|C|$; $u = \ln|Cx|$, звідки $\frac{y}{x} = \ln|Cx|$ – загальний розв'язок рівняння.

4.4 Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Означення. Диференціальне рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{4.4.1}$$

називається **лінійним диференціальним рівнянням першого порядку**.

Метод Лагранжа (варіації довільної сталої).

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right) \tag{4.4.2}$$

– загальний розв'язок диференціального рівняння (4.4.1), який записаний через дві квадратури. Довільна стала входить завжди в загальний розв'язок лінійно.

Метод Ейлера полягає в тому, що загальний розв'язок лінійного рівняння шукають у вигляді добутку двох функцій від x: $y = u(x)v(x)$. Одну з цих функцій вибирають довільно, а іншу визначають із даного рівняння з урахуванням умови вибору першої функції.

Диференціюємо y: $y' = u'v + uv'$. Підставимо цей вираз до рівняння і отримаємо

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad \text{або} \quad u'v + u(v' + p(x)v) = q(x).$$

Виберемо функцію v так, щоб $v' + p(x)v = 0$. Це рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними. Знаходимо його розв'язок за загальною схемою:
$\frac{dv}{dx} = -p(x)v$; $\frac{dv}{v} = -p(x)dx$; $\int \frac{dv}{v} = -\int p(x)dx$, тобто $v = e^{-C_1\int p(x)dx}$ (інтеграл $\int p(x)dx$ існує, оскільки функція $p(x)$ є неперервною від x). Нехай $C_1 = 1$.

Підставимо визначену функцію $v = e^{-\int p(x)dx}$ до рівняння $u'v = q(x)$, яке отримали із попереднього з урахуванням умови $v' + p(x)v = 0$, одержимо рівняння

$$u'e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

яке є рівнянням із відокремлюваними змінними. Його розв'язком буде функція

$$u = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx.$$

Оскільки $y = u \cdot v$, то остаточно маємо формулу (4.4.2)

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right).$$

Загальний розв'язок при умові $y(x_0) = y_0$ можна записати в Формі Коші

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} p(x)dx}\left[\int_{x_0}^{x} q(x)e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}dx + y_0\right]. \qquad (4.4.3)$$

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння $y' + xy = x$.

Розв'язання. За формулою (28.10)

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}}\left[\int xe^{\frac{x^2}{2}}dx + c\right] = 1 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Приклад. Знайти частинний розв'язок рівняння $y' - \frac{y}{x} = 1 + x^3$, який задовольняє початковій умові $y\big|_{x=1} = 2$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним.

Покладемо $y = u \cdot v$, звідки $y' = u'v + uv'$.

Тоді рівняння перепишеться у вигляді

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = 1 + x^3$$

або $u'v + u(v' - \frac{v}{x}) = 1 + x^3$.

Складаємо таку систему рівнянь: 1. $v' - \frac{v}{x} = 0$;

2. $uv' = 1 + x^3$.

Спочатку розв'яжемо перше рівняння.

1. $v' - \frac{v}{x} = 0$ – рівняння з відокремлюваними змінними відносно змінної v, яке розв'яжемо за загальною схемою: $\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$ або $\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$,

звідки $\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$; $\ln|v| = \ln|x|$; $v = x$.

2. Підставимо вираз $v = x$ до рівняння $uv' = 1 + x^3$, отримаємо $u'x = 1 + x^3$ – це рівняння з відокремлюваними змінними відносно змінної и. Знайдемо його загальний розв'язок $\frac{du}{dx} = \frac{1 + x^3}{x}$ або $du = \frac{1 + x^3}{x}dx$,

звідки $du = (\frac{1}{x} + x^2)dx$; $\int du = \int \frac{1}{x}dx + \int x^2 dx$; $u = \ln|x| + \frac{x^3}{3} + C$.

Таким чином, загальний розв'язок має вигляд

$$y = x(\ln|x| + \frac{x^3}{3} + C).$$

Згідно з початковою умовою $y\big|_{x=1} = 2$ матимемо $2 = 1\cdot(\ln 1 + \frac{1}{3} + C)$, $C = \frac{5}{3}$.

Отже, маємо шуканий частинний розв'язок:

$$y = x(\ln|x| + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}).$$

4.5 Рівняння Бернуллі.

Це рівняння має вигляд

$$y' + p(x)y = q(x)y^n. \qquad (4.5.1)$$

Рівняння (4.5.1) інтегрується в квадратурах шляхом підстановки

$$y^{1-n} = z. \qquad (4.5.2)$$

Оскільки $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$, то, помноживши (4.5.1) на $(1-n)y^{-n}$:

$$(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)p(x)y^{1-n} = q(x),$$

отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x), \qquad (4.5.3)$$

яке вже є лінійним.

При $0 < n < 1$ рівняння Бернуллі має особливий розв'язок $y(x) \equiv 0$. При $n > 1$ розв'язок $y(x) \equiv 0$ міститься в загальному розв'язку при $c = \infty$.

При $n < 0$ $y(x) \equiv 0$ не є розв'язком диференціального рівняння (4.5.1)

Приклад. Розв'язати диференціальне рівняння

$$y' - y = (1+x)y^2.$$

Розв'язання. Це є рівняння Бернуллі при $n = 2$. Згідно алгоритму

$$-y^{-2}y' + \frac{1}{y} = -(1+x), \quad \frac{1}{y} = z, \quad \frac{dz}{dx} + z = -(1+x).$$

Отже,

$$\frac{1}{y} = z = e^{-x}\left[\int(-1-x)e^{x}dx + c\right] = ce^{-x} - x$$

– загальний розв'язок нашого рівняння.

4.6 Диференціальне рівняння *n*-го порядку не розв'язане відносно старшої похідної має вигляд

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0\ , \tag{4.6.1}$$

а розв'язане відносно $y^{(n)}$ має форму

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})\ . \tag{4.6.2}$$

Частинний випадок цих рівнянь – це лінійне рівняння

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x).$$

Означення. Функція *y=y(x)* визначена і *n* раз неперервно–диференційовна на *(a,b)*, називається розв'язком диференціального рівняння (4.6.1), якщо вона на *(a,b)* перетворює це рівняння в тотожність

$$F(x,y(x),y'(x),\ldots,y^{(n)}(x)) \equiv 0,\ \ x \in (a,b). \tag{4.6.3}$$

Будь-якому розв'язку диференціального рівняння (4.6.1) відповідає на площині *(x,y)* деяка крива, яку будемо називати інтегральною.

Серед диференціальних рівнянь вищого порядку найширше застосування при розв'язанні інженерних задач мають рівняння другого порядку.

У загальному вигляді диференціальне рівняння другого порядку записується так:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \ \text{або}\ \ y'' = f(x, y, y')\ . \tag{4.6.4}$$

Задача Коші.

Розглянемо диференціальне рівняння (4.6.2) і поставимо задачу Коші: серед всіх розв'язків диференціального рівняння (4.6.2) знайти такий *y=y(x)*, який задовольняє умовам

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ ...,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{n-1}, \tag{4.6.5}$$

де $x_0,\ y_0,\ y_0', ..., y_0^{n-1}$ –задані числа, x_0 – початкове значення незалежної змінної, $y_0, y_0^1, \ldots y_0^{n-1}$ –початкові данні.

Для диференціального рівняння другого порядку

$$y''(x) = f(x, y, y') \tag{4.6.6}$$

задача Коші полягає в тому, щоб знайти такий розв'язок диференціального рівняння (4.6.6), який би задовольняв умовам

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'. \tag{4.6.7}$$

Означення. Загальним розв'язком диференціального рівняння другого порядку $y'' = f(x, y, y')$ називають функцію $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ (що залежить від x і двох довільних сталих C_1 і C_2), яка задовольняє таким умовам:

1) функція $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ задовольняє рівнянню $y'' = f(x, y, y')$ при будь – яких значеннях сталих C_1 і C_2;
2) при заданих початкових умовах $y\big|_{x=x_0} = y_0$; $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$ можна визначити такі значення сталих $C_1 = C_1^0$ і $C_2 = C_2^0$, що функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ буде задовольняти цим умовам.

Задачу визначення розв'язку диференціального рівняння другого порядку $y'' = f(x, y, y')$, який задовольняє початковим умовам $y\big|_{x=x_0} = y_0$; $y'\big|_{x=x_0} = y_0'$, називають **задачею Коші.**

Розв'язати задачу Коші означає знайти частинний розв'язок рівняння.

Сформульована задача Коші має єдиний розв'язок , якщо функція $f(x, y, y')$ та її похідні $f_y(x, y, y')$, $f_{y'}(x, y, y')$ неперервні в деякій області, яка містить точку $(x_0; y_0, y_0')$ (теорема існування та єдиності).

4.7 Рівняння, що допускають зниження порядку

Рівняння виду:

$$y^{(n)} = f(x), \tag{4.7.1}$$

де *f(x)* – неперервна функція на деякому інтервалі, інтегрують послідовно n разів:

$$y = \underbrace{\iint \ldots \int f(x)}_{n\ разів} dx dx \ldots dx = C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

Це і є загальний розв'язок рівняння.

Приклад Розв'язати задачу Коші для рівняння $y''' = \sin^3 x$, якщо $y\big/_{x=0} = -\frac{7}{27}; y'\big/_{x=0} = 0; y''\big/_{x=0} = \frac{1}{3}.$

Розв'язання Задане рівняння є рівнянням третього порядку, яке містить лише незалежну змінну x, та третю похідну. Послідовно три рази інтегруємо його:

$$y'' = \int \sin^3 x dx + C_1 = \int \sin x \left(1 - \cos^2 x\right) dx + C_1 = \int \sin x dx -$$

$$- \int \cos^2 x \sin x dx + C_1 = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C_1.$$

$$y' = \int\left(-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C_1\right)dx + C_2 = \int\left(-\cos x + \frac{1}{3}\cos x\left(1-\sin^2 x\right) + C_1\right)dx +$$

$$+ C_2 = \int\left(-\frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3}\sin^2 x\cos x + C_1\right)dx + C_2 = -\frac{2}{3}\sin x - \frac{\sin^3 x}{9} + C_1 x + C_2 .$$

Отже: $y = \int\left(-\frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{9}\sin^3 x + C_1 x + C_2\right)dx + C_3 =$

$$= \int\left(-\frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{9}\sin x\left(1-\cos^2 x\right) + C_1 x + C_2\right)dx + C_3 =$$

$$= \int\left(-\frac{7}{9}\sin x + \frac{1}{9}\cos^2 x\sin x + C_1 x + C_2\right)dx + C_3 =$$

$$= \frac{7}{9}\cos x - \frac{1}{27}\cos^3 x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Використовуючи початкові умови, будемо мати:

$$\frac{7}{9}\cos 0 - \frac{1}{27}\cos^3 0 + C_3 = -\frac{7}{27}; -\frac{2}{3}\sin 0 - \frac{\sin^3 0}{9} + C_2 = 0;$$

$$-\cos 0 + \frac{\cos^3 0}{3} + C_1 = \frac{1}{3}, \text{ звідки } C_1=1,\ C_2=0,\ C_3=-1.$$

Частинний розв'язок рівняння має вигляд: $y = \frac{7}{9}\cos x - \frac{1}{27}\cos^3 x + \frac{x^2}{2} - 1.$

4.8 Рівняння другого порядку, яке не містить невідомої функції

Порядок рівняння $y'' = f(x, y')$ можна знизити підстановкою $y' = p(x)$, тоді $y'' = p'(x)$.

Рівняння першого порядку $p' = f(x; p)$ з невідомою функцією *p(x)* має загальний розв'язок $p=p(x;C_1)$. Тоді з рівності $\frac{dy}{dx} = p$ знайдемо загальний розв'язок заданого рівняння: $y = \int p(x;C_1)dx + C_2$.

4.9 Рівняння другого порядку, яке не містить незалежної змінної

Порядок рівняння $y'' = f(y, y')$ можна знизити підстановкою $y' = p(y)$, тоді $y'' = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp(y)}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$. Задане рівняння матиме вигляд: $p\frac{dp}{dy} = f(y; p)$. Якщо його загальним розв'язком є $p = p(y;C_1)$, тоді одержуємо таке рівняння: $\frac{dy}{dx} = p(y;C_1)$.

Відокремлюючи змінні, знаходимо $\frac{dy}{p(y;C_1)}=dx$. Інтегруючи це рівняння, одержимо загальний розв'язок заданого рівняння: $\Phi(x;y;C_1;C_2)=0$.

Приклад Розв'язати задачу Коші для рівняння $yy''=(y')^2+1$, якщо $y(1)=1; y'(1)=0$.

Розв'язання Нехай $y'=p$, тоді $y''=p\frac{dp}{dy}$. Отже, $yp\frac{dp}{dy}=p^2+1$. Це рівняння першого порядку з відокремленими змінними: $\frac{pdp}{p^2+1}=\frac{dy}{y}$; $\frac{1}{2}\ln(p^2+1)=\ln|y|+\ln C$, звідки $\sqrt{p^2+1}=yC$ або $p^2=y^2C_1-1, p=\pm\sqrt{y^2C_1-1}$, $y'=\pm\sqrt{y^2C_1-1}$. За умовою $y'(1)=0$, а *y(1)=1*, тоді $0=\sqrt{1C_1-1}$; $C_1=1$. Отже, $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$, де $y'=\frac{dy}{dx}$, тоді $\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{y^2-1}; \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}=\pm dx$.

Загальним інтегралом цього рівняння буде: $\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x+C_2$. Відомо, що *y(1)=1*, тому $0=\pm1+C_2$, $C_2=\mp1$. Розв'язком задачі Коші заданого рівняння є: $\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x\mp1$.

4.10 Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Означення Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами називається рівняння

$$y''+py'+qy=0, \tag{4.10.1}$$

де p і q – дійсні числа.

Для його розв'язання складають рівняння:

$$k^2+pk+q=0, \tag{4.10.2}$$

яке називається характеристичним рівнянням.

Очевидно, що характеристичне рівняння одержимо, коли в рівнянні (4.10.1) замінимо похідні різних порядків відповідними степенями k. Відповідно до коренів характеристичного рівняння, лінійне однорідне рівняння має свій особливий вигляд незалежних частинних та загального розв'язків, а саме:

Таблиця 4.10.1

Лінійне однорідне рівняння	$y'' + py' + qy = 0$; p, q - const		
Характеристичне рівняння	$k^2 + pk + q = 0$		
Корені характеристичного рівняння $k_{1,2} = -p/2 \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$k_1 \neq k_2$ (дійсні)	$k_1 = k_2$ (кратні)	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ (уявні)
Частинні розв'язки	$y_1 = e^{k_1 x}$ $y_2 = e^{k_2 x}$	$y_1 = e^{kx}$ $y_2 = x e^{kx}$	$y_1 = e^{\alpha x}\cos \beta x$ $y_2 = e^{\alpha x}\sin \beta x$
Загальний розв'язок	$y = C_1 e^{k_1 x} +$ $+ C_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x)$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x +$ $+ C_2 \sin \beta x)$

Приклад Проінтегрувати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Розв'язання Складаємо характеристичне рівняння: $k^2 - 5k + 6 = 0$. Визначаємо його корені: $k_1=2$; $k_2=3$. Маємо випадок різних, дійсних коренів. Отже, загальним розв'язоком рівняння є: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Приклад Проінтегрувати рівняння $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Розв'язання Відповідне характеристичне рівняння має вигляд: $k^2 - 4k + 13 = 0$. Знаходимо його корені: $k_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$.

У випадку уявних коренів характеристичного рівняння загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння має вигляд: $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, де $\alpha=2$; $\beta=3$. Отже, $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

4.11 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Означення Лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку із сталими коефіцієнтами називається рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x). \qquad (4.11.1)$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (4.11.1) є сума загального розв'язку $\bar{y}$ відповідного однорідного лінійного рівняння (9) та будь-якого частинного розв'язку Y неоднорідного рівняння (4.11.1), тобто $y = \bar{y} + Y$.

Існує загальний метод знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння (4.11.1), який називається методом варіації довільних сталих, або методом Лагранжа, за яким частинний розв'язок рівняння (4.11.1) має вигляд:

$$Y = y_2 \int \frac{y_1(x) f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2(x) f(x)}{W} dx, \qquad (4.11.2)$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння, а $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ - є визначник Вронського.

Як було вже вказано, частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4.11.2) можна знайти методом варіації довільних сталих. Проте для деяких видів правої частини $f(x)$ рівняння (20.11) існують простіші методи знаходження частинних розв'язків.

Розглянемо один із них – метод невизначених коефіцієнтів.

Наведемо таблицю найпростіших правих частин $f(x)$ рівняння (4.11.1) та відповідних видів частинних розв'язків Y за цим методом.

Таблиця 4.11.1

Вид правої частини рівняння (4.11.1)	Вид частинного розв'язку Y
$f(x)=P_n(x)$ (многочлен n-го степеню)	$Y=X^S Q_n(x)$, де $S=\begin{cases}0, \text{якщо } k_1\neq 0\neq k_2\\ 1, \text{якщо } k_1=0\neq k_2\end{cases}$ $Q_n(x)$ – многочлен n-го степеня, коефіцієнти якого треба визначити
$f(x)=P_n(x)e^{ax}$	$Y=X^S Q_n(x)e^{ax}$, де $S=\begin{cases}0, \text{якщо } k_1\neq a\neq k_2\\ 1, \text{якщо } k_1=a\neq k_2\\ 2, \text{якщо } k_1=a=k_2\end{cases}$
$f(x)=A\cos bx+B\sin bx$ (A, B, b – числа)	$Y=X^S(M\cos bx+N\sin bx)$, де $S=\begin{cases}0, \text{якщо } k_1\neq bi\neq k_2\\ 1, \text{якщо } k_1=bi\neq k_2\end{cases}$, M, N – коефіцієнти, які треба визначити

У загальному випадку, коли $f(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x)$; $Q_m(x)$ – многочлени з дійсними коефіцієнтами степеню відповідно n і m, тоді: $Y=X^S e^{ax}\left[R_k(x)\cos bx+T_k(x)\sin bx\right]$, де $k=max\{n, m\}$; $R_k(x)$, $T_k(x)$ – многочлени степеню k, коефіцієнти яких треба визначити;

$$S=\begin{cases}0, \text{якщо } k_1\neq a+bi\neq k_2\\ 1, \text{якщо } k_1=a+bi\neq k_2\\ 2, \text{якщо } k_1=a+bi=k_2\end{cases}.$$

Приклад Знайти загальний розв'язок рівняння $2y''+y'-y=2e^x$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y=\overline{y}+Y$. Для

знаходження $\bar{y}$ розв'язуємо лінійне однорідне диференціальне рівняння, що йому відповідає $2y''+y'-y=0$. Складемо характеристичне рівняння $2\kappa^2+\kappa-1=0$. Його корені $\kappa_1=-1$ і $k_2=\frac{1}{2}$. Отже, $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Права частина $f(x)=2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x)=P_n(x)e^{ax}$, де $n=0$, $a=1$, тому $Y=Ae^x$ бо $a\neq k_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y'=Ae^x, Y''=Ae^x$. Підставимо Y, Y', Y'' в дане рівняння: $2Ae^x+Ae^x-Ae^x\equiv 2e^x$, звідки знаходимо $A=1$. Отже, $Y=e^x$. Тоді загальний розв`язок рівняння $2y''+y'-y=2e^x$ має вигляд: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$.

Приклад Знайти загальний розв`язок рівняння $y''+7y'+6y=\sin x$.

**Розв`язання.** Переконуємося, що дане рівняння є лінійним неоднорідним II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, тому його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y=\bar{y}+Y$. Розв`язуємо відповідне йому однорідне рівняння $y''-7y'+6y=0$. Його характеристичне рівняння $\kappa^2-7\kappa+6=0$ має корені $\kappa_1=1$, $\kappa_2=6$. Отже, $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{6x}$. Права частина даного рівняння $f(x)=\sin x$ являє собою функцію вигляду $f(x)=A\cos bx+B\sin bx$, де $A=0$, $B=1$, $b=1$. Оскільки $bi=1\neq k_{1,2}$, то $Y=M\cos x+N\sin x$, де M і N - коефіцієнти, які треба визначити. Диференціюючи Y двічі, знаходимо:

$Y'=-M\sin x+N\cos x,\quad Y''=-M\cos x-N\sin x.$

Підставимо вирази Y, Y', Y'' в рівняння $y''+7y'+6y=\sin x$:

$-M\cos x-N\sin x-7(-M\sin x+N\cos x)+6(M\cos x+N\sin x)=\sin x.$

У лівій частині отриманої тотожності зведемо подібні доданки:

$(5M-7N)\cos x+(7M-5N)\sin x\equiv 0\cos x+\sin x.$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ в обох частинах тотожності, одержимо систему рівнянь $\begin{cases}5M-7N=0,\\7M+5N=1.\end{cases}$

Розв`язавши її, знаходимо $M=\frac{7}{74}, N=\frac{5}{74}$. Отже, $Y=\frac{7}{74}\cos x+\frac{5}{74}\sin x$.

Таким чином, загальний розв`язок даного рівняння має вигляд $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{7}{74}\cos x+\frac{5}{74}\sin x$.

4.12 Системи диференціальних рівняннь

Розв'язування систем диференціальних рівнянь методом виключення.

У багатьох економічних задачах потрібно знати не одну, а одразу кілька невідомих функцій, пов'язаних між собою кількома диференціальними рівняннями . Сукупність таких рівнянь утворює систему диференціальних рівнянь.

Розглянемо деякі найпростіші системи.

Позначимо незалежну зміну *x,* залежні зміні *y, z.*

Нормальні системи рівнянь

Означення. **Нормальною системою диференціальних рівнянь** називають систему вигляду

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f_1(x; y; z), \\ \frac{dy}{dx} f_2(x; y; z); \end{cases} \text{ або } \begin{cases} y' = f_1(x; y; z), \\ z' = f_2(x; y; z) \end{cases} \qquad (1)$$

Інакше кажучи, систему диференціальних рівнянь називають **нормальною**, якщо в лівій частині рівнянь зовсім не містять похідних.

Означення. **Розв'язком** системи (1) називають сукупність функцій $y=Y_1(x)$ та $z=Y_2(x)$, які задовольняють кожне з рівнянь цієї системи.

До системи нормальних рівнянь зводять системи і рівняння вищих порядків. Наприклад, система 2-го порядку

$$\begin{cases} x'' = 2x' + y' - x + y. \\ y'' = y' + x \end{cases}$$

введенням нових змінних *x'=u, y'=v, x''=u', y''=v'* зводиться до нормальної системи

$$\begin{cases} x' = u, \\ y' = v, \\ u' = 2u + v - x + y \\ v' = v + x. \end{cases}$$

Введенням нових змінних всяке диференціальне рівняння *n*-го порядку, розв'язане відносно вищої похідної, зводиться до еквівалентної нормальної системи *n* рівнянь 1-го порядку.

Нехай задано рівняння *n*-го порядку

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y' \dots y^{(n-1)}\right).$$

Припустимо: $y=u_1, y' = u_2, \dots, y^{(n-1)} = u_n.$ Тоді

$y'=u_1' = u^2, y'' = u_2' = u^3, \dots y^{(n-1)} = u_{n-1}' = u_n, y^{(n)} = u_n'.$

Отримаємо нормальну систему $u_i'=u_{i+1}'$, $i=1,\dots,n-1$, $u_n'=f(x, u_1, u_2, \dots, u_n.$

Нормальну систему рівнянь можна замінити одним рівнянням, порядок якого дорівнює числу рівнянь системи.

Нехай задана нормальна система (1). Продиференціюємо за *x* будь-яке, наприклад перше, рівняння:

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x} + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x}.$$

Підставивши в цю рівність значення похідних $u_1', u_2', u_{3,\dots,}' u_n'$ з системи (1), дістанемо $u_1'' = F_2\left(x, u_1, u_2, u_{3,\dots,} u_n\right).$

Аналогічно знаходимо похідні *n*-го порядку включно:

$$u_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial u_n} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x} = F_3\left(x, u_1, u_2, \dots, u_n\right),$$

$$u_1^{(n)} = F_n\left(x, u_1, u_2, \dots, u_n\right).$$

Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} u_1' = F_2\left(x, u_1, u_2, \dots, u_n\right) \\ u_1'' = F_2\left(x, u_1, u_2, \dots, u_n\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_1^{(n)} = F_2\left(x, u_1, u_2, \dots, u_n\right) \end{cases} \qquad (2)$$

Якщо з перших *n-1* рівнянь системи (2) знайти (якщо це можливо) змінні

$$u_2 = Y_2\left(x, u_1, u_1', \dots, u_1^{(n-1)}\right),$$

$$u_3 = Y_3\left(x, u_1, u_1', \dots, u_1^{(n-1)}\right),$$

$$u_n = Y_n\left(x, u_1, u_1', \dots, u_1^{(n-1)}\right), \qquad (3)$$

і підставити їх значення в останнє рівняння, одержимо рівняння *n*-го порядку відносно змінної u_1:

$$u_1^{(n)} = \Phi\left(x, u_1, u_2, \dots, u_1^{(n-1)}\right). \qquad (4)$$

Нехай $u_1, \psi_1\left(x, C_1, C_{2,\dots,} C_n\right)$ – розв'зок рівняння (4), де $C_1, C_{2,\dots,} C_n$ – довільні сталі.

Продиференціюємо його *n-1* раз і, підставивши значення похідних $u_1', u_1'', \dots, u_1^{(n-1)}$ у рівняння (3), дістанемо

$$\begin{cases} u_2 = \psi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ u_3 = \psi_3(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = \psi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

Для нормальної системи (2) справджується теорема Коші про існування і єдність розв'язку.

Теорема Коші

Якщо в деякій області G функції $f_k(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$, k=1,2,…,n системи (2) неперервні разом з усіма своїми похідними $\frac{\partial f_k}{\partial u_1}$, i,k=1,2,…,n, то для будь-якої точки $(x_0, u_{10,\dots,} u_{n0} \epsilon G$ існує один розв'язок $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, який задовольняє початкові умови:

$u_1(x_0) = u_{10};\ u_2(x_0) = u_{20}; \dots; u_n(x_0) = u_{n0.}$

Для інтегрування системи (2) можна застосувати метод, за допомогою якого ця система буде зведена до рівняння (4). Цей метод називають методом включення змінної.

Приклад. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Розв'язання.

Продиференціюємо перше рівняння:

$x'' = -7x' + y'.$

Підставимо в це рівняння значення похідної *y'* із другого рівняння системи:

$x'' = -7x' + (-2x - 5y).$

З першого рівняння підставимо $x'' = x' + 7x$ в отримане рівняння:

$x'' + 12x' + 37x = 0.$

Маємо лінійне однорідне рівняння 2-го порядку із сталими коефіцієнтами. Інтегруючи його, одержуємо

$x=e^{-6t}(C_1 cost + +C_2 sint).$

Оскільки $y=x'+7x$, то

$$y = -6e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t) + e^{-6t}(-C_1\sin t + C_2\cos t) + 7e^{-6t}(C_1\cos t + C_2\sin t) =$$
$$= e^{-6t}((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t)$$

Отже, загальний розв'язок має вигляд:

$x=e^{-6t}(C_1 cost + C_2 sint),$

$y=e^{-6t}(\big((C_1 + C_2)cost + (C_2 - C_1)sint\big)$

Індивідуальні завдання.

Контрольна робота № 3

Завдання1. Обчислити невизначені інтеграли**.**

1.1. а) $\int\left(x^3-6x^2+7\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{5x+1}$ в) $\int x\sin x dx$

г) $\int(1+3x)^3 dx.$ д) $\int\sqrt[3]{2+3tg\,x}\cdot\frac{dx}{cos^2 x}.$ е) $\int 3^{tg\,x}\cdot\frac{3dx}{cos^2 x}.$

1.2. а) $\int\left(x^4-5x^3+2x-1\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{(2x-20)^3}$ в) $\int x\cos 2x dx$

г) $\int\frac{2\cos x dx}{3\sin^2 x-7}.$ д) $\int\frac{4dx}{x\left(16+ln^2\,x\right)}.$ е) $\int\frac{5x^2 dx}{\sqrt{12x^6+3}}.$

1.3. а) $\int\left(3x^2+6x-7\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{(5x-1)^3}$ в) $\int\cos^2 x\sin x dx$

г) $\int\frac{dx}{5^{-x}\left(3+2\cdot 5^x\right)}.$ д) $\int\frac{3-4x^6+5x}{x^2}dx.$ е) $\int x\cdot 5^{-x}\,dx.$

1.4. а) $\int\left(5x^4-6x^2+7\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{6x+1}$ в) $\int arctgx dx$

г) $\int\frac{17\sin 6x dx}{\sqrt{9-5\cos^2 3x}}.$ д) $\int\frac{x\sqrt{x}-5x^3+12}{x^2}dx.$ е) $\int\frac{5\cdot 2^x dx}{3+4^x}.$

1.5. а) $\int\left(x^3-6x^5+2x^2-3\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{(2x-3)^4}$ в) $\int tg^2 x\frac{dx}{\cos^2 x}$

г) $\int\frac{5\cdot 3^x dx}{\sqrt{4-9^x}}.$ д) $\int\frac{x^4-3x^2+7}{x^3}dx.$ е) $\int 5x\cdot 7^{-x}\,dx.$

1.6. а) $\int\left(x^8-6x^5+2x^2-3\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{(3x+2)^3}$ в) $\int arcctgx dx$

г) $\int\frac{2cos\,3x dx}{10+5\,sin\,3x}.$ д) $\int\frac{5\cdot 3^x dx}{\sqrt{4-9^x}}.$ е) $\int x\cdot 5^{-x^2}\,dx.$

1.7. а) $\int\left(x^3-2x^2-5x+1\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{(5x-4)^7}$ в) $\int\ln x dx$

г) $\int 2^{-\mathrm{ctg}\,x}\cdot\frac{dx}{\sin^2 x}.$ д) $\int\frac{\ln^2 x-\sqrt{x}+2}{x}dx.$ е) $\int\frac{5cos\,x dx}{\sqrt{3-sin^2 x}}.$

1.8. а) $\int\left(x^4-3x^3+5x^2-6\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{(6x-1)^8}$ в) $\int\frac{x^2}{1-x^3}dx$

г) $\int \frac{5dx}{(2+tg^2 x)\cos^2 x}$.

д) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2-3}{x}dx$.

е) $\int x\,ctg\,3x\,dx$.

1.9. а) $\int (x^7-3x^4+2x+5)dx$

б) $\int \frac{dx}{4x+1}$

в) $\int \frac{x}{x^2+5}dx$

г) $\int \frac{3\cdot 5^x dx}{\sqrt{12-5^x}}$.

д) $\int \frac{dx}{x\ln^5 x}$.

е) $\int x\cdot 3^{-x}\,dx$.

1.10. а) $\int (x^7-3x^4+2x+3)dx$

б) $\int \frac{dx}{4x-1}$

в) $\int 3x\cos x dx$

г) $\int \frac{xe^x+\sqrt{x}-4}{x}dx$.

д) $\int \frac{7\sin 5x dx}{\sqrt{3+2\cos 5x}}$.

е) $\int x\cdot 8^{-x^2}\,dx$.

1.11. а) $\int (x^3-2x^2+3x+8)dx$

б) $\int \frac{dx}{(5x+2)^4}$

в) $\int x\ln x dx$

г) $\int \frac{18\cos 2x dx}{\sqrt{3}-4\sin 2x}$.

д) $\int \frac{18\cos 2x dx}{\sqrt{3}-4\sin 2x}$.

е) $\int x\cdot 10^{-x^2}\,dx$.

1.12. а) $\int (x-3x^2+5x^4)dx$

б) $\int \frac{dx}{(8x-7)^3}$

в) $\int 2x\sin 2x dx$

г) $\int \frac{18\cos 2x dx}{\sqrt{3}-4\sin 2x}$.

д) $\int \frac{4dx}{x\sqrt{13+2\ln x}}$.

е) $\int x\cdot 15^{-x^2}\,dx$.

1.13. а) $\int (x^4+6x^5-x^2+2)dx$

б) $\int \frac{dx}{(3x-5)^4}$

в) $\int x\cos 3x dx$

г) $\int \frac{7x^4 dx}{\sqrt{3x^{10}+12}}$.

д) $\int \frac{9dx}{(3+2\,\mathrm{tg}^2 5x)\cos^2 5x}$.

е) $\int 10^{x^3-4}\cdot 5x^2 dx$.

1.14. а) $\int (x^6-2x^3-5)dx$

б) $\int \frac{dx}{(5x-7)^4}$

в) $\int 3x\sin x dx$

г) $\int \frac{7\cos 6x dx}{\sqrt{4+3\sin 6x}}$.

д) $\int \frac{5dx}{x\sqrt{\ln^2 x-7}}$.

е) $\int x^2\cdot 4^{-x^3}\,dx$.

1.15. а) $\int (7-3x+8x^4-6x^3)dx$

б) $\int \frac{dx}{6x-11}$

в) $\int 3arctg3x dx$

г) $\int \frac{11dx}{\cos^2 x(\mathrm{tg}^2 x-13)}$.

д) $\int \frac{3^{\sqrt{x}}+1}{\sqrt{x}}dx$.

е) $\int x^3\cdot 6^{-x^4}\,dx$.

1.16. а) $\int (x^3+x^2-7x+9)dx$

б) $\int \frac{dx}{(18x-3)^2}$

в) $\int \arcsin x dx$

г) $\int \frac{9dx}{\sin^2 x(\mathrm{ctg}^2 x-7)}$.

д) $\int \frac{e^{4x}dx}{3+e^{4x}}$.

е) $\int x\cdot 11^{-x^2}\,dx$.

1.17. а) $\int (1+\sin x-\cos x)dx$

б) $\int \frac{dx}{(2x-1)3}$

в) $\int (x+1)\cos x dx$

г) $\int \frac{2x^4 - 3x + 7x^2 e^{5x^2}}{x}\,dx.$ д) $\int \frac{dx}{(3+\operatorname{ctg}^2 5x)\sin^2 5x}.$ е) $\int \frac{3x^5 dx}{\sqrt{7x^{12}+17}}.$

1.18. а) $\int (x^4 - 2x^2 - 5)dx$ б) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ в) $\int (x+1)\ln x\,dx$

г) $\int \sqrt[3]{2-5\operatorname{ctg} 3x}\cdot \frac{dx}{\sin^2 3x}.$ д) $\int \frac{11x^7 dx}{15+7x^8}.$ е) $\int x\cdot 12^{-x^2}\,dx.$

1.19. а) $\int (7 - 3x + 3x^2 - 6x^{-3})dx$ б) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ в) $\int 5arcctgx\,dx$

г) $\int e^{2x}\cos e^{2x} dx.$ д) $\int (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2\,dx.$ е) $\int x\cdot 24^{-x^2}\,dx.$

1.20. а) $\int (4x^3 + 3x^2 + 3x + 1)dx$ б) $\int \frac{dx}{(x-3)^3}$ в) $\int (2x+4)\cos x\,dx$

г) $\int \frac{7\cos x dx}{13+5\sin^2 x}.$ д) $\int \frac{5cos\,2x dx}{\sqrt{3-sin^2 2x}}.$ е) $\int x\cdot 16^{-x^2}\,dx.$

1.21.а) $\int (x^4 - 16x^2 + 7)dx$ б) $\int \frac{dx}{6x+1}$ в) $\int x\,sin\,2x dx$

г) $\int \frac{14x^3 dx}{13x^8 - 5}.$ д) $\int \frac{x^7 - 3x^2 + 7}{2x^8}\,dx.$ е) $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 3x}}{1+9x^2}\,dx.$

1.22. а) $\int (x^5 - 5x^4 + 12x - 1)dx$ б) $\int \frac{dx}{(5x-20)^4}$ в) $\int x\,cos\,5x dx$

г) $\int \frac{4dx}{x^7\sqrt{(8+5\ln x)^5}}.$ д) $\int \frac{\sin x\cos x dx}{3+\sin^2 x}.$ е) $\int \frac{3\cdot 4^x}{\sqrt{9-16^x}}\,dx.$

1.23. а) $\int (3x^3 + 6x^2 - 7)dx$ б) $\int \frac{dx}{(6x-10)^3}$ в) $\int \cos^2 x\sin x\,dx$

г) $\int \frac{dx}{7^{-x}(3+2\cdot 7^x)}.$ д) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}.$ е) $\int x\cdot 27^{-x}\,dx.$

1.24. а) $\int (5x^6 - 6x^2 + 7)dx$ б) $\int \frac{dx}{7x+1}$ в) $\int arctg\,2x dx$

г) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x\cdot\sqrt{1-x^2}}.$ д) $\int \left(x - \sqrt[3]{x^2} + \frac{7}{x}\right)dx.$ е) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x\cos^2 3x}.$

1.25. а) $\int (x^7 - 6x^5 + 12x^2 - 13)dx$ б) $\int \frac{dx}{(12x-5)^4}$ в) $\int ctg^2 x\frac{dx}{sin^2 x}$

г) $\int \frac{5\cdot 6^x dx}{\sqrt{4-36^x}}.$ д) $\int \frac{5x^4 dx}{3+4x^5}.$ е) $\int 3x\cdot 9^{-x}\,dx.$

1.26. а) $\int\left(x^8-6x^5+2x^2-3\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{(3x+2)^3}$ в) $\int arcctgxdx$

г) $\int\frac{2\cos 3xdx}{10+5\sin 3x}$. д) $\int\frac{5\cdot 3^x dx}{\sqrt{4-9^x}}$. е) $\int x\cdot 5^{-x^2}dx$.

1.27. а) $\int\left(x^9-2x^8-5x+1\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{(5x-12)^9}$ в) $\int x^2\ln xdx$

г) $\int e^{\operatorname{arctg}3x}\cdot\frac{dx}{1+9x^2}$. д) $\int\frac{(7\ln x+8)^2}{5x}dx$. е) $\int\sin\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2}$.

1.28. а) $\int\left(x^9-3x^3+5x^2-6\right)dx$ б) $\int\frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+8}dx$. в) $\int\frac{dx}{(6x-1)^8}$

г) $\int\frac{5dx}{(2+tg^2 5x)\cos^2 5x}$. д) $\int\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^3-5}{x}dx$. е) $\int x\,ctg\,7x\;dx$.

1.29. а) $\int\left(x^{10}-9x^4+2x^3+5\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{8x+1}$ в) $\int\frac{3x}{x^2+25}dx$

г) $\int\frac{6\cdot 3^x dx}{\sqrt{12-3^x}}$. д) $\int\cos\left(3e^x+1\right)e^x dx$. е) $\int x\cdot 8^{-x}\;dx$.

1.30. а) $\int\left(x^6-25x^4+23x+3\right)dx$ б) $\int\frac{dx}{12x-1}$ в) $\int 3x\cos 5xdx$

г) $\int\frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$. д) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\cdot\arcsin^3 2x}$. е) $\int x\cdot 23^{-x^2}dx$.

Завдання2. Обчислити визначені інтеграли.

2.1. а) $\int_{-1}^{2}\left(x^3-6x^2+x\right)dx$ б) $\int_0^{\pi/4}\sin x\sin 7xdx$

2.2. а) $\int_{-1}^{2}\left(x^3-x^2+2\right)dx$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x-1)\cos 3xdx$

2.3. а) $\int_5^6\left(x^3-x^2+1\right)dx$ б) $\int_1^3\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$

2.4. а) $\int_{-2}^{1}\left(x^3-3x+1\right)dx$ б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2 x}dx$

2.5. а) $\int_3^4\left(x^3+6x-1\right)dx$ б) $\int_1^3\frac{1}{x^2}2^{\frac{1}{x}}dx$

2.6. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x dx$ б) $\int_{0}^{\pi} x \sin 5x dx$

2.7. а) $\int_{1}^{2} 2^{3x} dx$ б) $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{5x}} dx$

2.8. а) $\int_{-2}^{2} (x^2 + 6x - 1) dx$ б) $\int_{1}^{e} \ln x dx$

2.9. а) $\int_{-3}^{4} (x^3 - 6x + 2) dx$ б) $\int_{0}^{1} arctgx dx$

2.10. а) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 5x dx$ б) $\int_{0}^{\pi/4} x \cos x dx$

2.11. а) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos 4x dx$ б) $\int_{-3}^{4} (x^2 + 6x - 1) dx$

2.12. а) $\int_{0}^{1} \sqrt{x+1} dx$ б) $\int_{0}^{1} x e^{-x} dx$

2.13. а) $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x dx$ б) $\int_{0}^{1} x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

2.14. а) $\int_{-2}^{3} (x^4 - 6x + 8) dx$ б) $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2 + 1}$

2.15. а) $\int_{-3}^{4} (x^3 - 6x + 2) dx$ б) $\int_{1}^{e} \ln x dx$

2.16. а) $\int_{0}^{1} x^2 \sqrt{1 + x^3} dx$ б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 x} dx$

2.17. а) $\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{\cos^3 x} \sin x dx$ б) $\int_{0}^{1} x^3 \sqrt{x^4 + 1} dx$

2.18. а) $\int_{-2}^{3} (5x^4 - 2x + 1) dx$ б) $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

2.19. а) $\int_{-3}^{4} (4x^3 + 2x + 3) dx$ б) $\int_{1}^{e} x \ln x dx$

2.20. а) $\int_{0}^{1} x \sqrt{1 + x^2} dx$ б) $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx$

2.21. а) $\int_{-1}^{2} (x^4 - 6x^2 + x) dx$ б) $\int_{0}^{\pi/4} \sin 2x \sin 6x dx$

2.22. а) $\int_{-1}^{2}\left(x^5-x^2+3\right)dx$ б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(x-1)\cos 6x dx$

2.23. а) $\int_{5}^{6}\left(x^4-x^3+1\right)dx$ б) $\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2}5^{\frac{1}{x}}dx$

2.24. а) $\int_{-2}^{1}\left(x^6-6x+1\right)dx$ б) $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1}{\sin^2 2x}dx$

2.25. а) $\int_{3}^{4}\left(x^5+8x-1\right)dx$ б) $\int_{1}^{3}\frac{1}{x^2}14^{\frac{1}{x}}dx$

2.26. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 12x dx$ б) $\int_{0}^{\pi}x\sin x^2 dx$

2.27. а) $\int_{1}^{2}5^{4x}dx$ б) $\int_{1}^{4}\frac{1}{\sqrt{8x}}dx$

2.28. а) $\int_{-2}^{2}\left(x^5+6x^3-10\right)dx$ б) $\int_{1}^{e}x\ln x dx$

2.29. а) $\int_{-3}^{4}\left(x^3-6x+2\right)dx$ б) $\int_{0}^{1}arctgx dx$

2.30. а) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin 4x dx$ б) $\int_{0}^{\pi/4}x\cos 2x dx$

Завдання3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

3.1. $y=4-x^2, y=0$;

3.2. $y=x^2, y=6-x, y=0$;

3.3. $y^2=4x, y=0, x=4, x=9$

3.4. $y=e^x, y=e^{-x}, x=1$;

3.5. $y=4-x^2, y=x+2$;

3.6. $y=x^2, 2x-y+3=0$;

3.7. $xy=4, x+y=5$;

3.8. $y=x, x+y=5, x=4$;

3.9. $y=\sin x, y=x, x=\frac{\pi}{2}$;

3.10. $y=x^2, y=-x^2+4$;

3.11. $y=tgx, x=\frac{\pi}{3}, y=0$;

3.12. $y=\ln x, x=e, y=0$;

3.13. $y=x^2-2x+4, x=1, y-4=x$;

3.14. $x-2y+4=0, x+y-5=0, y=0$;

3.15. $y=-\frac{1}{3}x^2+3, y=0, x=0, x=3$;

3.16. $y=4x-x^2, y=0$;

3.17. $y=x^2, 5x-y-6=0$;

3.18. $y=\frac{1}{4}x^2, y=-\frac{1}{2}x^2+3x$;

3.19. $y=-x^2+6, y=2x+3$;

3.20. $y=x^2-2x+3, y=0, x=0, x=3$.

3.21. $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

3.22. $x^2=4y$, $y=\frac{8}{x^2+4}$.

3.23. $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

3.24. : $y=(x+2)^2$, $y=4-x$.

3.25. : $y=\ln x$, $y=0$, $x=e^{-1}$, $x=e$.

3.26. $y=(x+2)^2$, $y=4-x$ і $y=0$.

3.27. : $y^2=16x$, $y=x$.

3.28. $y^2=16-8x$ і $y^2=24x+48$.

3.29. $y=x^2-3x$, $3x+y-4=0$.

3.30. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$

Завдання 4. Розв'язати задачі.

4.01

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y=e^x$, $y=e^{-x}$ і прямою $x=1$.
2. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі OX фігури яка обмежена лініями $y = 4x - x^2$, $y = x$.

4.02.

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $x^2=4y$ і локоном Аньєзі $y = \frac{8}{x^2 + 4}$.
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox однієї півхвилі синусоїди $y=\sin x$ $(0 \le x \le \pi)$.

4.03

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 4\cos 2\varphi$.
2. Обчислити довжину півкубічної параболи $y = \sqrt{x^3}$ від точки $O(0;0)$ до точки $A(5;5\sqrt{5})$.

4.04

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 5\sin 3\varphi$.
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x=1$, $x=-1$, і $y=0$.

4.05

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r = 3 + \sin\varphi$..
2. Обчислити довжину дуги лінії $y = \frac{(3-x)\sqrt{x}}{3}$ між точками, ординати яких дорівнюють нулю.

4. 06

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=(x+2)^2$, $y=4-x$ і $y=0$.
2. Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 8\sin t + 6\cos t, \\ y = 6\sin t - 8\cos t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

4.0 7

1. Фігура обмежена лінією, заданою рівнянням $r = 4\cos 3\varphi$ в полярних координатах. Обчислити площу тієї її частини, яка розміщена зовні круга з центром в полюсі і радіусом $r=2$.

2. Обчислити довжину дуги параболи $y = 2\sqrt{x}$ від точки *O(0;0)* до точки *M(1;2).*

4. 08

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y^2=16-8x$ і $y^2=24x+48$.
2. Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметричними рівняннями $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6}, \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$ між точками її перетину з осями координат.

4. 09

1. Обчислити площу фігури, обмеженої параболою $y=x^2-3x$ і прямою $3x+y-4=0$.
2. Обчислити довжину дуги півкубічної параболи $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, якщо $-1 \le x \le 4$.

4. 10

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ і параболою $y = \dfrac{x^2}{2}$.
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої колом $x^2+y^2=1$, параболою $y = \sqrt{1{,}5x}$ і віссю *Ox*.

4 11

1. Обчислити площу фігури, обмеженої гіперболою $xy=4$ і прямою $x+y=5$.
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$

4. 12

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = 3(1 - \cos\varphi)$ і колом $r = 3\cos\varphi$.
2. Обчислити довжину першого звою архімедової спіралі $r = 5\varphi \quad (0 \le \varphi \le 2\pi)$.

4. 13

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2=x+1$ і $y^2=9-x$.
2. Обчислити довжину дуги параболи $y = \dfrac{x^2}{2}$ від початку координат до точки з абсцисою $x=6$.

4. 14

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y^2=(x+1)x^2$.
2. Обчислити довжину ланцюгової лінії $y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ від $x_1=0$ до $x_2=1$.

4. 15

1. У якому відношенні парабола $y^2=2x$ поділяє площу круга $x^2 + y^2 \le 8$.
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої локоном Аньєзі $y = \frac{8}{x^2 + 4}$ і параболою $x^2=4y$.

4. 16

1. Обчислити площу фігури, обмеженої першим звоєм архімедової спіралі $r = a\varphi$, полярною віссю і колом $r = 2\pi a$.
2. 2. Обчислити об`єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі Ox кривої $y = \sin^2 x$ від $x_1=0$ до $x_2 = \pi$.

4. 17

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $(x^2+y^2)^2=ax^3$.
2. Знайти довжину дуги логарифмічної спіралі $r = ae^{m\varphi}$ ($m>0$), яка знаходиться усередині круга $r=a$.

4. 18

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$
2. Обчислити об`єм тіла, обмеженого параболоїдом $z = \frac{x^2}{4} + y^2$ і площиною $z=2$.

4. 19

1. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею кривої $\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$
2. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням ланцюгової лінії $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$ навколо осі абсцис від $x_1=0$ до $x_2=a$.

4. 20

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=10x - x^2 - 16$ і віссю абсцис.
2. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox однієї арки лінії $y=\cos x$.

4. 21

1. Обчислити площу фігури, обмеженої еліпсом $4x^2+9y^2=36$, віссю ординат і прямою $2x-3\sqrt{3}=0.$
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривими $y=2^x$, $y=4^x$ і прямою $x=1$.

4. 22

1. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=5-x^2$ і $y=x-1$.
2. Знайти довжину дуги кривої $y=\ln x$ від $x_1=\frac{3}{4}$ до $x_2=\frac{12}{5}$.

4. 23

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $r=5(1+\sin\varphi)$.
2. Обчислити довжину дуги кривої $y^2=x^3$, відтятою прямою $x=\frac{4}{3}$.

4. 24

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $\begin{cases} x=2(2\cos t-\cos 2t), \\ y=2(2\sin t-\sin 2t). \end{cases}$
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y^2=(x+4)^3$ і $x=0$ навколо осі ординат.

4. 25

1. Обчислити площу фігури, обмеженої петлею лінії $4(y^2-x^2)+x^3=0$.
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $y=x^3$, $y=8$ і $x=0$.

4. 26

1. Обчислити площу фігури, обмеженої слимаком Паскаля $r=2+\cos\varphi$.
2. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y=e^{-x}$ від $x_1=0$ до $x_2=+\infty$.

4. 27

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y^2=x^2(1-x^2)$.
2. Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $r\varphi=1$ від точки $M_1\left(2;\frac{1}{2}\right)$ до точки $M_2\left(\frac{1}{2};2\right)$.

4. 28

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y=x(x-1)(x-2)$ і віссю абсцис.
2. Знайти довжину дуги лінії $r=\frac{a}{1+\cos\varphi}$, якщо $|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$.

4. 29

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $4y^2=x$ і прямою $4y=x$.
2. Обчислити об`єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис строфоїди $y^2=\frac{x(x-a)^2}{2a-x}$.

4. 30

1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\left(\frac{x}{5}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{2}{3}}=1$.
2. Фігура, обмежена кривими $y=tgx$, $y=ctgx$ і прямою $x=\frac{\pi}{6}$, обертається навколо осі абсцис. Знайти об`єм тіла обертання.

Завдання5. Дослідити на збіжність невласні інтеграли, обчислюючи їх безпосередньо (за означенням) або скориставшись ознаками збіжності:

5.1 $\int_1^{\infty}\frac{\sqrt{x}}{1+x}dx.$

5.2 $\int_1^3\frac{2+\cos x}{(x-1)^2}dx.$

5.3 $\int_3^6\frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{(x^2+2x-15)^2}}.$

5.4 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x}\sqrt[3]{1+x^2}}.$

5.5 $\int_0^{\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx.$

5.6 $\int_e^{e^2}\frac{x\ln x}{(x-e)^3}dx.$

5.7 $\int_2^3\frac{dx}{x^2-4x+3}.$

5.8 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xdx}{x^2+2}.$

5.9 $\int_2^{+\infty}\frac{3+arcsin\frac{1}{x}}{1+x\sqrt{x}}dx.$

5.10 $\int_{0,5}^1\frac{\sin xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$

5.11 $\int_e^{\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}dx.$

5.12 $\int_2^{\infty}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

5.13 $\int_2^{\infty}x\cos xdx.$

5.14 $\int_e^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x\ln x+1}}.$

5.15 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}tg^2xdx.$

5.16 $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{2x^2+6x+5}.$

5.17 $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

5.18 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$.

5.19 $\int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx$.

5.20 $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 - 5x^2}$.

5.21 $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

5.22 $\int_0^a x^{p-1} e^{-x} dx$ (p – фіксоване).

5.23 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$.

5.24 $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

5.25 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

5.26 $\int_0^1 (\ln x)^5 dx$.

5.27 $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

5.28 $\int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^4}} dx$.

5.29 $\int_a^{\infty} \frac{xdx}{x^3+4}$.

5.30 $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{1+x^4}$.

Індивідуальні завдання

Контрольна робота № 4

Завдання 1. Знайти загальний розв'язок диференціальних рівнянь.

1.1 а) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;

б) $y' - \frac{y}{x} = x^2$;

в) $y'' + 3y' + 2y = 1 - x^2$.

1.2 а) $(e^x + 8)dy - ye^x dx = 0$;

б) $y' + (2x^2 + x)y = tgx$;

в) $y'' + 3y' + 2y = 3\cos x$.

1.3 а) $\sqrt{4+y^2}dx - ydy = x^2 ydy$;

б) $y' - yctgx = 2x\sin x$;

в) $y'' - y' = 6x^2 + 3x$

1.4 а) $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$;

б) $y' + y\cos x + 2\sin 3x = 0$;

в) $y'' + 3y' + 2y = 4x - 2$.

1.5 а) $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2 ydy$

б) $y' = (x-4)y + 2ctgx$

1.6 а) $6xdx - ydy = yx^2 dy - 3xy^2 dx$;

б) $y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}$

в) $y''+3y'+2y=2x+1$

1.7 а) $x\sqrt{3+y^2}dx+y\sqrt{2+x^2}dy=0$

б) $y'=yctgx+\sin x$

в) $y''+3y'+2y=\cos x$

1.8 а) $yy'=\dfrac{(8+y)y}{3x-4}$

б) $y'-y\sin x=\sin x\cos x$

в) $y''+4y=8e^{-4x}$

1.9 а) $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}dx=0$

б) $y'=\dfrac{y}{x-4}+(x-4)^2$

в) $y''+8y'+20y=3x+1$

1.10 а) $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$

б) $x^2y'+xy+1=0$

в $y''+7y'+10y=5e^x$

1.11 а) $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$

б) $y'+\dfrac{4y}{x+1}=x-1$

в) $y''-6y'+10y=5e^{-3x}$

1.12 а) $y\ln y+xy'=0$

б) $xy'-2y=2x^4$

в) $y''+3y'+2y=3\cos x$

1.13 а) $yy'\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$

б) $y'-y\cos 3x=\sin 3x$

в) $y''+3y'+2y=\cos x$

1.14 а) $\left(1+e^x\right)y'=ye^x$

б) $xy'-y=-x$

в) $y''+3y'+2y=12x^3-39$

1.15 а) $y\left(4+e^x\right)dy-e^xdx=0$

б) $y'=4x^2\left(\sqrt{2x}+3y\right)$

в) $y''+3y'+2y=3x-2$

1.16 а) $yy'=\dfrac{(x+4)y}{3y-1}$

б) $xy'+y=\sin x$

в) $2y''+3y'=6x^2+2x+1$

1.17 а) $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0$

б) $y'+3x^2y=\sqrt{x}$

в) $y''-2y'+5y=3x+1$

1.18 а) $yy'=\dfrac{2y^2+5y}{5-x}$

б) $x^2y'-2xy=3$

в) $y''-6y'+10y=5e^{-x}$

1.19 а) $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx$

1.20 а) $y'=\dfrac{2x-4}{3y+5}$

б) $y' = 2x\left(y + x^2\right)$

в) $y'' + 7y' + 10y = 5e^x$

б) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

в) $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}$

1.21

а) $x\sqrt{7+y^2}\,dx + y\sqrt{15+x^2}\,dy = 0$

б) $y' + \frac{y}{x+2} = x - 1$

в) $y'' - 6y' + 10y = 25e^{-3x}$

1.22

1.12 а) $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$

б) $xy' - 8y = 6x^4$

в) $y'' + 3y' + 2y = 3\sin x$

1.23 а) $yy'\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} + 1 = 0$

б) $y' - y\sin 2x = \cos 2x$

в) $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

1.24 а) $\left(1+e^x\right)y' = ye^x$

б) $xy' - y = -x$

в) $y'' + 2y' + y = 12x^3 - 39$

1.25 а) $y^2\left(4+5^x\right)dy - 5^x dx = 0$

б) $y' = 4x^3\left(\sqrt{2x} + 5y\right)$

в) $y'' + y' - 2y = 3x - 2$

1.26 а) $yy' = \frac{(x+4)y}{3y-1}$

б) $xy' + y = x^2$

в) $2y'' + 5y' = 6x^2 + 2x + 1$

1.27 а) $\sqrt{4-x^2}\,y' + xy + x = 0$

б) $y' + \frac{y-1}{x} = 1$

в) $y'' - 4y' + 4y = 3x + 1$

1.28 а) $yy' = \frac{5y^2 + 2y}{9 - x}$

б) $x^2y' - 4xy = 6$

в) $y'' - 3y' - 10y = 5e^{-x}$

1.29 а) $2xdx - 2y^2dy = x^2y^2dy - 2xy^3dx$

б) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$

в) $y'' + 7y' + 10y = 16e^{2x}$

1.30 а) $y' = \frac{4x-4}{3y+6}$

б) $(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$

в) $y'' - 8y' + 16y = 5e^x$

Завдання 2 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

2.1

1. $2y'' - 9y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 6$.
2. $y'' + 4y' + 5y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

2.2

1. $2y'' + 5y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
2. $y'' - 2y' = 5y = 0.$
3. $4y'' + 4y' + y = 0.$

2.3

1. $3y'' + 5y'' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0.$
3. $y'' + 2y' + y = 0$

2.4

1. $4y'' + y' - 3y = 0, y(0) = 1{,}5, y'(0) = 0{,}25.$
2. $y'' + 4y = 0.$
3. $y'' - 2y' + y = 0.$

2.5

1. $10y'' - 3y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0{,}1.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 8y' + 16y = 0.$

2.6

1. $3y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7.$
2. $y'' + 9y = 0.$
3. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

2.7

1. $3y'' + 2y' - 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{14}{3}.$
2. $y'' - 4y' + 29y = 0.$
3. $0{,}04y'' + 0{,}4y' + y = 0.$

2. 8

1. $4y'' - 17y' = 15y = 0, y(0) = 7, y'(0) = 0{,}5.$
2. $y'' + 16y = 0.$
3. $y'' + y' + 0{,}25y = 0.$

2.9

1. $5y'' - 8y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{5}.$
2. $y'' - 8y' + 20y = 0.$
3. $y'' - 14y' + 49y = 0.$

2. 10

1. $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$
2. $y'' + 8y' + 25y = 0.$
3. $25y'' - 10y' + y = 0.$

2.11

1. $2y'' - 7y' + 6y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 4.$
2. $y'' + 25y = 0.$

2.12

1. $y'' - y' - 12y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 10.$
2. $y'' - 2y' + 10y = 0.$

3. $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

2.13

1. $y'' + 14y' + 24y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 20.$
2. $y'' - 4y' + 5y = 0.$
3. $\frac{1}{4}y'' - y' + y = 0.$

2.15

1. $y'' - y' - 20y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 8.$
2. $y'' - 6y' + 10y = 0.$
3. $4y'' - 20y' + 25y = 0.$

2.17

1. $y'' + 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 4y = 0.$

2.19

1. $4y'' - 8y' + 5y = 0, y(0) - 2, y'(0) = 3.$
2. $y'' + 5y' - 14y = 0.$
3. $16y'' - 40y' + 25y = 0.$

2. 21

1. $y'' - 2y' = 0, y(0)2, y'(0)2.$
2. $y'' - 6y' + 34y = 0.$
3. $y'' - 22y' + 121y = 0.$

2.23

1. $y'' - 3y' - 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$
2. $100y'' - 20y' + y = 0.$
3. $y'' - 6y' + 25y = 0.$

3. $y'' + 16y' + 64y = 0.$

2.14

1. $y'' - 11y' - 60y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 4.$
2. $y'' + y' = 0.$
3. $9y'' + 24y' + 16y = 0.$

2.16

1. $9y'' - 6y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$
3. $y'' - 10y' = 0.$

2. 18

1. $y'' + 7y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6.$
2. $\frac{4}{9}y'' - \frac{4}{3}y'' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

2. 20

1. $y'' + 4y' - 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 8.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $169y'' + 26y' + y = 0.$

2. 22

1. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $81y'' - 18y' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 17y = 0.$

2.24

1. $4y'' - 7y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{4}.$
2. $y'' + 10y' + 61y = 0.$
3. $121y'' - 44y' + 4y = 0.$

2. 25

1. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1.$
2. $y'' - 8y' + 15y = 0.$
3. $17y'' + 2y' + y = 0.$

2. 26

1. $3y'' + 7y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + 49y = 0.$
3. $4y'' - 28y' + 49y = 0.$

2. 27

1. $y'' + 4y' + 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 5y' - 14y = 0.$
3. $1{,}44y'' - 2{,}4y' + y = 0.$

2. 28

1. $2y'' - 3y' - 35y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5.$
2. $y'' - 14y' + 58y = 0.$
3. $81y'' - 36y'' + 4y = 0.$

2.29

1. $y'' - 13y' + 22y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 3.$
2. $y'' + 81y = 0.$
3. $y'' - 30y' + 225y = 0.$

2. 30

1. $5y'' - 6y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' + 26y = 0.$
3. $y'' - 5y' + 6{,}25y = 0.$

Завдання 3. Розв'язати задачу Коші методом невизначених коефіцієнтів.

3.1 $y'' + y = x^2;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 0.$

3.2 $y'' - 2y' + 10y = 5x + 9;\ y(0) = 4;\ y'(0) = 6.$

3.3 $y'' - 2y' = x^2 - x;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2.$

3.4 $y'' + y = 7e^x;\ y(0) = 7;\ y'(0) = -3.$

3.5 $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$

3.6 $y'' - 3y' + 2y = -4e^x;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2.$

3.7 $y'' - 2y' + y = 16e^x;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 2.$

3.8 $y'' - 3y' = 6 - 3x^2;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 1.$

3.9 $y'' + 4y = \sin x;\ y(0) = y'(0) = 1.$

3.10 $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x};\ y(0) = y'(0) = 0.$

3.11 $y'' - 2y' + y = 4\sin x + 4\cos x;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0.$

3.12 $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x;\ y(0) = y'(0) = 2.$

3.13 $y'' - y = 8e^x;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 4.$

3.14 $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 0.$

3.15 $y'' + y = \cos 2x;\ y(0) = -\frac{1}{3};\ y'(0) = 1$.

3.16 $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3;\ y(0) = \frac{4}{3};\ y'(0) = \frac{1}{27}$.

3.17 $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 11$.

3.18 $y'' - 2y' = 2e^x;\ y(1) = -1;\ y'(1) = 0$.

3.19 $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0$.

3.20 $y'' - 2y' + 5y = 5x + 3;\ y(0) = 2;\ y'(0) = 6$.

3.21 $y'' - 4y = 8x + 3;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 4$.

3.22 $y'' + y = 4e^x;\ y(0) = 4;\ y'(0) = -3$.

3.23 $y'' - 2y' + y = e^x;\ y(0) = 1;\ y'(0) = -2$.

3.24 $y'' + 4y = 4\sin x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 2$.

3.25 $y'' + 4y' + 4y = 5e^{3x};\ y(0) = \frac{1}{5};\ y'(0) = \frac{8}{5}$.

3.26 $y'' - 2y' - 3y = e^{2x};\ y(0) = -\frac{1}{3};\ y'(0) = 0$.

3.27 $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14;\ y(0) = 3;\ y'(0) = 11$.

3.28 $y'' + 4y = 8x;\ y(0) = 0;\ y'(0) = 4$.

3.29 $y'' - 5y' + 4y = x^2 = 1;\ y(0) = \frac{29}{32};\ y'(0) = -\frac{3}{8}$.

3.30 $y'' - 3y' = 6x + 1;\ y(0) = 5;\ y'(0) = 2$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.

2 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

3 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. шк., 2001.

4 Мелентьєв Б.В., Оранська А.І., Харченко А.П. Вища математика у прикладах і задачах. – Київ УМК ВО, І ч., 1992.

ЗМІСТ

Вступ……..... 4
Програма навчальної дисципліни .....…… 5
Контрольна робота №3…… 6
Контрольна робота № 4……..……. 30
Індивідуальні завдання. Контольна робота №3……..…….. 49
Індивідуальні завдання. Контольна робота №4……..... 60
Список джерел інформації…….. 67

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з тем: „Лінійна та векторна алгебра”, „Аналітична геометрія”, „Вступ до аналізу” з дисципліни «Вища математика» для студентів заочної форми здобуття освіти для спеціальності 122 «Комп’ютерні науки». Розділ ІІ / Укладачі: А.П. Харченко, О.В. Бабаєва – Харків, ХНУБА, 2019. – 68 с.

Укладачі: Харченко Анатолій Петрович
Бабаєва Олена Вікторівна

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор

План 2020р., поз. 230 Формат 60х84 1/16.
Підп. до друку 16.12.19 Папір друк. №2.
Надруковано на різографі. Умов. друк. арк. 3,3
Тираж 50 прим. Зам. № 5979 Безкоштовно.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури