Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.М. Стасенко

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів спеціальності 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Харків 2018

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальності 051, 076

О.М. Стасенко

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів спеціальності 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 1 від 30.08.2018

Харків 2018

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів спеціальностей 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» / Укладач О.М. Стасенко – Харків: ХНУБА, 2018. - 88 с.

Рецензент М.І. Несвіт

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Пропоновані методичні вказівки призначені для студентів спеціальностей 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» з метою надання допомоги у вивченні теоретичного матеріалу і опануванні практичними навичками розв'язання задач з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)».

Практичне заняття – форма навчального заняття, під час якого викладач організує детальний розгляд студентами окремих теоретичних положень навчальної дисципліни та формує вміння і навички їх практичного застосування шляхом індивідуального виконання студентом відповідно сформульованих завдань.

Методичні вказівки містять програму кожного модуля, навчальний матеріал для проведення практичних занять, питання для самоперевірки, задачі для виконання домашніх завдань, приклади розв'язання задач.

Методичні вказівки доцільно використовувати як для роботи в аудиторії, так і для індивідуальної самостійної роботи.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Лінійне програмування. Спеціальні задачі лінійного програмування

Тема 1. Предмет математичного програмування. Загальна задача математичного програмування. Основні класи задач математичного програмування. Постановка задачі лінійного програмування (ЛП). Основні форми задачі ЛП: загальна, стандартна (симетрична), канонічна.

Тема 2. Види запису задачі лінійного програмування (ЛП). Геометрична інтерпретація задачі ЛП. Графічний метод розв'язування задач ЛП.

Тема 3. Основні властивості розв'язків задачі ЛП: опуклість множини допустимих розв'язків (ДР), існування базисних (опорних) і оптимального планів. Симплексний метод розв'язування задач ЛП.

Тема 4. Знаходження початкового опорного плану. Метод штучного базису (М - метод).

Тема 5. Двоїста задача ЛП. Теореми двоїстості. Економічна інтерпретація двоїстих задач. Двоїстий симплекс-метод.

Тема 6. Знаходження розв'язку однієї з пари симетричних взаємо двоїстих задач за відомим розв'язком іншої задачі. Двоїсті оцінки та дефіцитність ресурсів у околі оптимального плану задачі ЛП.

Тема 7. Аналіз розв'язків лінійних економіко математичних моделей. Аналіз коефіцієнтів технологічної матриці до базисних і вільних змінних.

Тема 8. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів. Аналіз коефіцієнтів цільової функції.

Змістовий модуль 2. Динамічне програмування. Нелінійне, опукле та стохастичне програмування.

Тема 9. Цілочислове лінійне програмування. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування. Частково і повністю цілочислові задачі лінійного програмування. Приклади економічних задач, що зводяться до задач цілочислового лінійного програмування. Метод Гоморі.

Тема 10. Транспортна задача. Економічне і математичне формулювання транспортної задачі. Замкнена і відкрита моделі транспортної задачі. Основні методи побудови початкового опорного плану.

Тема 11. Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі. Економічний зміст потенціалів.

Тема 12. Динамічне програмування**.** Загальна постановка задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності. Функціональні рівняння Беллмана.

Тема 13. Економічні задачі, які розв'язуються методом динамічного програмування: задача розподілу ресурсів.

Тема 14. Нелінійне програмування. Постановка задач, їх економічна сутність. Класичний метод оптимізації задач нелінійного програмування на базі використання множників Лагранжа.

Тема 15. Опукле програмування. Деякі з основних методів розв'язування задач опуклого програмування. Необхідні та достатні умови існування вузлової точки. Теорема Куна-Таккера. Методи аналізу оптимального плану задачі НЛП.

Тема 16. Стохастичне програмування**.** Загальна постановка задачі стохастичного програмування, її особливості щодо оперативного управління та перспективного планування.

Тема 17. Класифікація задач стохастичного програмування. Методи розв'язування задач стохастичного програмування (непрямі, прямі), приклади їх реалізації.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Постановка задачі лінійного програмування (ЛП). Основні форми задачі ЛП: загальна, стандартна (симетрична), канонічна. Приклади економічних задач, що зводяться до задач ЛП.

Розв'язання прикладів

Загальна лінійна математична модель процесів і явищ - так звана загальна задача лінійного програмування (ЛП) подається у вигляді:

знайти максимум (мінімум) функції $Z = cx_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, або

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min)$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2 \\ ..... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, ..., x_n \ge 0.$$

Симетрична, або стандартна форма задачі лінійного програмування

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n; \qquad \min Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \ge b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \ge b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \ge b_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0. \qquad x_1, x_2, ..., x_n \ge 0.$$

Канонічна, або основна форма задачі лінійного програмування

$$\max Z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, ..., x_n \ge 0.$$

Приклад 1 Скласти економіко-математичну модель задачі:

Підприємство має в своєму розпорядженні два види сировини S_1 і S_2 в кількостях 15 і 13 умовних одиниць і виготовляє з нього вироби двох видів $П_1$ і $П_2$. Для виготовлення одиниці виробу $П_1$ потрібно 1 ум.од. сировини S_1 і 3 ум.од. сировини S_2, а для виробництва одиниці виробу $П_2$ необхідно 3 ум.од. сировини S_1 та 1 ум.од. сировини S2. Відомий прибуток від реалізації однієї

одиниці продукції кожного виду. Для виду продукції $П_1$ він становить 2 грош.од, для виду $П_2$ - 3 грош.од. Потрібно знайти оптимальний план виробництва продукції, реалізація якого забезпечить підприємству максимальний прибуток.

Розв'язання. Складемо економіко-математичну модель задачі.

Реалізуємо перший етап побудови економіко-математичної моделі і виберемо змінні.

Позначимо шукані змінні наступним чином:

x_1 - кількість одиниць продукції виду $П_1$,

x_2 - кількість одиниць продукції виду $П_2$.

Другий етап побудови економіко-математичної моделі включає вивчення інформаційної бази економічного процесу або об'єкта. Вихідну інформацію надамо у вигляді таблиці

Вид сировини	Витрати сировини на 1 од. продукції		Запас сировини
	$П_1$	$П_2$	
S_1	1	3	15
S_2	3	1	13
Прибуток, грош.од.	2	3	

На третьому етапі побудови економіко-математичної моделі з'ясуємо взаємозв'язки між змінними, що характеризують об'єкт, у вигляді рівнянь і нерівностей.

Для виробництва всіх виробів виду $П_1$ потрібно використовувати сировину виду S_1 в кількості $1 \cdot x_1$ умовних одиниць. Сировина цього виду також витрачається на виробництво виробів виду $П_2$ в обсязі $3 \cdot x_2$ умовних одиниць. Загальні витрати сировини виду S_1 на виробництво всіх виробів визначаються виразом $1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$. За умовою задачі, підприємство має в своєму розпорядженні тільки 15 ум. одиниць сировини виду S_1. Оскільки витрата сировини виду S_1 не може перевищувати його запасу на підприємстві, то повинна виконуватись нерівність $x_1 + 3x_2 \le 15$, що визначає обмеження задачі за обсягом ресурсу.

Аналогічно отримаємо обмеження задачі для сировини виду S_2. Нерівність набуде вигляду $3x_1 + x_2 \le 13$.

Згідно з економічним змістом змінних (кількість продукції, що випускається не може бути від'ємною), тому необхідним є дотримання умов $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$.

Тоді система обмежень по витраті сировини набуде вигляду

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 + x_2 \le 13, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Четвертий етап побудови економіко-математичної моделі полягає у виборі критерію оптимальності і вираженні його у вигляді математичного моделі. У нашій задачі критерієм оптимальності є прибуток підприємства від реалізації продукції, що випускається. За умовою завдання, прибуток від реалізації однієї одиниці виробу виду $П_1$ складе 2 грош. одиниці. Всі вироби виду $П_1$ визначають прибуток підприємства в розмірі $2x_1$ грош. одиниць.

Аналогічно, реалізація всіх виробів виду $П_2$ принесе підприємству прибуток в розмірі $3x_2$ грош. одиниць. Загальний прибуток підприємства визначається виразом $2x_1 + 3x_2$.

Тому економіко-математична модель задачі набуває вигляду:

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2;$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 3x_1 + x_2 \le 13, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Приклад 2 Добовий попит на фарбу А не перевищує попиту на фарбу В більше ніж на 1 т, а попит на фарбу А ніколи не перевищує 2 т на добу. Яку кількість фарби кожного виду повинен виготовляти цех, щоб мати максимальний прибуток від реалізації продукції?

Розв'язання. Щоб скласти математичну модель, необхідно:

- ідентифікувати змінні (величини даної задачі, що знаходимо);
- записати обмеження, які накладаються на змінні, щоб виконувались умови, характерні для системи, яка моделюється;
- сформулювати мету, для досягнення якої з допустимих значень змінних необхідно вибрати ті, що відповідають оптимальному (найкращому) розв'язанню задачі.

У нашому випадку необхідно знайти обсяг виробництва кожної із фарб, щоб мати максимальний прибуток від реалізації продукції, враховуючи обмеження на попит та витрати сировини.

Позначимо шукані змінні наступним чином:

x_1 - добовий обсяг (т) виробництва фарби А;

x_2 - добовий обсяг (т) виробництва фарби В.

Цільова функція: Якщо вартість 1 т. фарби А дорівнює 3 умов. грош. од., то добовий прибуток від реалізації буде $3x_1$, а прибуток від реалізації фарби В - $2x_2$. Загальний прибуток: $Z = 3x_1 + 2x_2$.

Обмеження:

- витрати сировини не повинні перевищувати її запасів,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8; \end{cases}$$

- обмеження на попит продукції мають вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \le 2; \end{cases}$$

- природне обмеження полягає в тому, що обсяги виробництва продукції не можуть бути від'ємними:

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Таким чином, математична модель задачі має наступний вигляд:

Знайти невід'ємний розв'язок системи нерівностей при якому функція Z досягає свого максимального значення:

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Приклад 3 Привести до канонічної форми задачу лінійного програмування:

$$\min Z = -3x_1 - x_2 + 2x_3;$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 \le 8, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Розв'язання. Почнемо з перетворення змішаної системи обмежень в систему рівнянь. Перше обмеження є рівнянням, тому не вимагає змін. Необхідно перейти в другому і третьому обмеженнях від нерівності до рівнянь. Для цього введемо невід'ємні «балансові» змінні x_4 та x_5 в ліві частини нерівностей зі знаками «плюс» або «мінус» в залежності від знаку в нерівності. Отримаємо систему обмежень у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_5 = 8, \end{cases}$$
$$x_1, ..., x_5 \ge 0.$$

Перехід до задачі максимізації лінійної функції здійснюється шляхом введення нової функції з рівності $Z_1 = -Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$

Отже, канонічна форма задачі лінійного програмування має вигляд:

$$\max Z_1 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 0x_4 + 0x_5;$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_5 = 8, \end{cases}$$
$$x_1, ..., x_5 \geq 0.$$

Приклад 4 Привести до канонічної форми задачу лінійного програмування:

$$\max Z = x_1 - 2x_2 + x_3;$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2, \\ 4x_1 \qquad + x_3 \geq -5, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 = 0, \end{cases}$$
$$x_1 \leq 0, \quad x_3 \geq 0.$$

Розв'язання. Почнемо з заміни $x_1 = x_1'' - x_1'$ $\left(x_1'' \geq 0, x_1' \geq 0\right)$ та $x_2 = x_2'' - x_2'$ $\left(x_2'' \geq 0, x_2' \geq 0\right)$, також додамо балансові змінні в перше та друге обмеження: в першому обмеженні додаємо додаткову(балансову) змінну x_4, а в другому віднімемо x_5 $\left(x_4 \geq 0, x_5 \geq 0\right)$. Після цих перетворень отримаємо

$$\max Z = x_1 - 2x_2 + x_3 = \left(x_1'' - x_1'\right) - 2\left(x_2'' - x_2'\right) + x_3 = x_1'' - x_1' - 2x_2'' + 2x_2' + x_3;$$
$$\begin{cases} x_1'' - x_1' - 2x_2'' + 2x_2' + x_3 + x_4 \qquad = 2, \\ 4x_1'' - 4x_1' \qquad\qquad + x_3 \qquad - x_5 = -5, \\ 3x_1'' - 3x_1' - 4x_2'' + 4x_2' - 5x_3 \qquad\qquad = 0, \end{cases}$$
$$x_1'' \geq 0, x_1' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Остаточно матимемо

$$\max Z = x_1'' - x_1' - 2x_2'' + 2x_2' + x_3 + 0x_4 + 0x_5;$$
$$\begin{cases} x_1'' - x_1' - 2x_2'' + 2x_2' + x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1'' - 4x_1' + x_3 - x_5 = -5, \\ 3x_1'' - 3x_1' - 4x_2'' + 4x_2' - 5x_3 = 0, \end{cases}$$
$$x_1'' \geq 0, x_1' \geq 0, x_2'' \geq 0, x_2' \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Приклад 5 Привести до стандартного виду задачу лінійного програмування:

$$\max Z = -x_1 + x_2 - 2x_3;$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \quad + x_4 \quad - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \quad - x_4 - \quad x_5 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 \quad - 2x_4 + 2x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0.$$

Розв'язання. Методом Жордана-Гауса знайдемо базисні змінні

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & [1] & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 & -3 & [1] & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & [2] & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -\frac{1}{2} & 0 & [1] & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 & 0 & -1 & [1] & 3 \\ -\frac{11}{2} & [1] & 0 & 1 & 0 & \frac{-5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2}, \\ 4x_1 - x_4 + x_5 = 3, \\ -\frac{11}{2}x_1 + x_2 + x_4 = -\frac{5}{2}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - x_4 \geq 0, \\ x_5 = 3 - 4x_1 + x_4 \geq 0, \\ x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2}x_1 - x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Знайдені вільні змінні підставимо до функції Z

$$Z = -x_1 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{11}{2}x_1 - x_4\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - x_4\right) = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 + x_4 .$$

Відкидаємо в останній системі базисні змінні, отримаємо стандартний вид ЗЛП ($\max Z = \min(-Z_1)$)

$$\max Z = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 + x_4; \qquad \min Z_1 = \frac{7}{2} - \frac{7}{2}x_1 - x_4;$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_4 \leq \frac{1}{2}, \\ 4x_1 - x_4 \leq 3, \\ -\frac{11}{2}x_1 + x_4 \leq -\frac{5}{2}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 - x_4 \geq -\frac{1}{2}, \\ -4x_1 + x_4 \geq -3, \\ \frac{11}{2}x_1 - x_4 \geq \frac{5}{2}, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0. \qquad x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.1-3], с. 3 – 18.

Вправи

1 Скласти економіко-математичну модель задачі:

При виробництві двох видів продукції $П_1$ і $П_2$ використовуються три види сировини S_1, S_2, S_3. Відомі запаси кожного виду сировини: 40, 15 і 28. Для виготовлення одиниці продукції виду $П_1$ необхідно 3 од. сировини S_1, 2 од. сировини виду S_2 і 4 од. сировини виду S_3. Виробництво одиниці продукції виду $П_2$ вимагає витрат 5 од. сировини виду S_1, 1 од. сировини виду S_2 і 1 од. сировини виду S_3. При реалізації однієї одиниці продукції виду $П_1$ підприємство отримує прибуток в 2 грош. од, а при реалізації однієї одиниці продукції виду $П_2$ прибуток складе 4 грош. од. Потрібно скласти план випуску продукції, при якому підприємство матиме найбільший прибуток.

2 Привести до канонічної форми задачі лінійного програмування:

$$a)\ \begin{array}{l} \max Z = 5x_1 + 2x_2, \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 9, \end{cases} \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \qquad б)\ \begin{array}{l} \min Z = -x_1 + x_2 + 3x_3, \\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 \leq -2, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 5, \end{cases} \\ x_1, x_2,\ x_3 \geq 0. \end{array}$$

Питання для самоперевірки

1 Сформулюйте загальну задачу математичного програмування.

2 Яка форма задачі лінійного програмування називається загальною, стандартною, канонічною? У чому полягають подібності та відмінності цих форм?

3 Які перетворення дозволяють перейти до канонічної форми задачі лінійного програмування?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Геометрична інтерпретація задачі ЛП.
Графічний метод розв'язування задач ЛП.

Розв'язання прикладів

Алгоритм графічного методу розв'язування задач лінійного програмування складається з розглянутих далі кроків.

1. Будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо многокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\vec{c} = (c_1; c_2)$, що задає напрям зростання значень цільової функції задачі.
5. Будуємо пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$, перпендикулярну до вектора $\vec{c}$.
6. Переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$ в напрямі вектора $\vec{c}$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення.
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Графічним методом визначити оптимальні плани задач лінійного програмування:

Приклад 1 Фірма спеціалізується на виробництві офісних меблів, зокрема вона випускає дві моделі збірних книжкових полиць - А та В. Полиці обох моделей обробляють на верстатах 1 та 2. Тривалість обробки (у хвилинах) однієї полиці кожної моделі подано таблицею.

Верстати	Тривалість обробки полиці, хв, за моделями	
	А	В
1	30	15
2	12	26

Час роботи верстатів 1 та 2 становить відповідно 40 та 36 год на тиждень. Прибуток фірми від реалізації однієї полиці моделі А дорівнює 50 у. о., а моделі В - 30 у. о. Вивчення ринку збуту показало, що тижневий попит на книжкові полиці моделі А ніколи не перевищує попиту на модель В більш як на 30 одиниць, а попит на полиці моделі В не перевищує 80 одиниць на тиждень. Визначити обсяги виробництва книжкових полиць різних моделей, що максимізують прибуток фірми. Побудувати математичну модель поставленої задачі та розв'язати її графічно.

Розв'язання. Записана математична модель

$$Z = 50x_1 + 30x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \le 2400, & (1) \\ 12x_1 + 26x_2 \le 2160, & (2) \\ x_1 - x_2 \le 30, & (3) \\ x_2 \le 80, & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

є моделлю задачі лінійного програмування, що містить лише дві змінні, і тому може бути розв'язана графічно.

Перший крок згідно з графічним методом полягає в геометричному зображенні допустимих планів задачі, тобто в побудові такої області, де одночасно виконуються всі обмеження моделі. Замінюємо знаки нерівностей на знаки строгих рівностей і будуємо графіки відповідних прямих (рис. 1). Кожна з побудованих прямих поділяє площину системи координат на дві півплощини. Координати точок однієї задовольняють розглядувану нерівність, а іншої - не задовольняють. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 1 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному разі таким зображенням є інша півплощина.

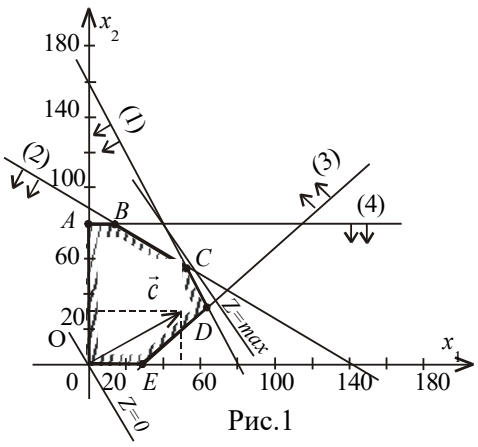


Рис.1

Умова невід'ємності змінних $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих планів задачі - шестикутник *OABCDE*. Координати будь-якої його точки задовольняють систему обмежень задачі та умову невід'ємності змінних. Тому поставлену задачу буде розв'язано, якщо ми зможемо відшукати таку точку шестикутника *OABCDE*, в якій цільова функція *Z* набуває найбільшого значення.

Для цього побудуємо вектор $\vec{c} = (c_1;\ c_2)$, компонентами якого є коефіцієнти при змінних у цільовій функції задачі. Вектор $\vec{c} = (c_1;\ c_2)$ завжди виходить із початку координат і напрямлений до точки з координатами

($x_1 = c_1$; $x_2 = c_2$).У нашій задачі век-тор $\vec{c} = (50;\ 30)$. Він задає напрям збільшення значень цільової функції Z, а вектор, протилежний йому - напрям їх зменшення.

Побудуємо лінію, що відповідає, наприклад, значенню $Z = 0$. Це буде пряма $50x_1 + 30x_2 = 0$, яка перпендикулярна до вектора $\vec{c}$ і проходить через початок координат. Оскільки маємо визначити найбільше значення цільової функції, пересуватимемо пряму $50x_1 + 30x_2 = 0$ в напрямі вектора $\vec{c}$ доти, доки не визначимо вершину шестикутника *OABCDE*, яка відповідає оптимальному плану задачі.

Із рис. 1 бачимо, що останньою спільною точкою прямої цільової функції та шестикутника *OABCDE*, є точка *C*. Координати цієї точки визначають оптимальний план задачі, тобто обсяги виробництва книжкових полиць моделей А та В, що максимізують прибуток від їх реалізації.

Координати точки *C* визначаються перетином прямих (1) і (2):

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400 \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістанемо $x_1 = 50$; $x_2 = 60$.

Отже, $X^* = (50;\ 60)$; $\max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$.

Це означає, що коли фірма щотижня виготовлятиме 50 збірних книжкових полиць моделі А та 60 - моделі В, то вона отримає максимальний прибуток 4300 у. о. При цьому тижневий фонд роботи верстатів 1 та 2 буде використано повністю.

Приклад 2 Знайти максимум функції $F = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. На рис. 2 зображено область допустимих розв'язків системи нерівностей (номери біля прямих відповідають порядковому номеру відповідної нерівності системи обмежень). Це випуклий шестикутник $ABCDEG$ з кутовими точками: $A(0,1)$, $B(0,4)$, $C(2,3)$, $D(3,2)$, $E(4,0)$, $G(1,0)$, координати яких знаходимо розв'язуючи по черзі системи з відповідних двох рівнянь.

Функція F, максимум якої потрібно знайти, є лінійною функцією координат точок площини. Спочатку вияснимо, як розташовані на площині точки, в яких дана функція приймає одне й теж довільне значення, тобто точки, в яких має місце рівність

$$F = x_1 + 3x_2 = const = a.$$

Рівність $F = x_1 + 3x_2 = const = a$ задає рівняння прямої на площині $x_1 + 3x_2 = a$ з вектором нормалі $\vec{c} = (1, 3)$. Змінюючи значення параметра a, отримаємо сімейство паралельних прямих, які називають лініями рівня, тобто лініями рівних значень функції. При збільшенні a прямі зміщуються в напрямку вектора $\vec{c}$, а при зменшенні a – в напрямку протилежному вектору $\vec{c}$. На рис. 2 пряма 5 відповідає значенню $a = 0$. Очевидно, що значення функції F буде збільшуватись при паралельному зміщенні даної прямої в напрямку вектора $\vec{c}$. Максимальне значення функція F буде приймати в точці B, тобто в точці з області допустимих розв'язків системи найвіддаленішій від початку координат в напрямку вектора $\vec{c}$.

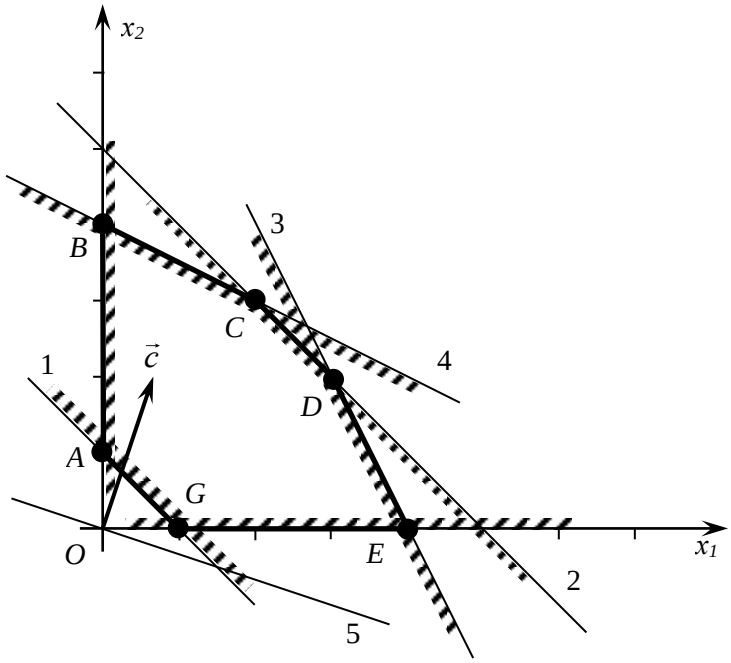


Рис. 2

Отже, $F_{max} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$ при оптимальному плані $x_1 = 0, x_2 = 4$.

Приклад 3 Знайти максимум функції $F = 3x_1 + 4x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. На рис. 3 зображено необмежену багатогранну область $ABCD$ розв'язків заданої системи обмежень, де $A(0,2)$, $B(0,1)$, $C(2,0)$, $D(3,0)$; та лінію рівня $3x_1 + 4x_2 = 25$ (пряма (IV)) з вектором $\vec{c} = (4, 3)$, який вказує напрям руху лінії рівня для знаходження F_{max}. Очевидно, що при заданій системі обмежень функція F може необмежено зростати при збільшенні змінних x_1, x_2, тобто $F_{max} = \infty$.

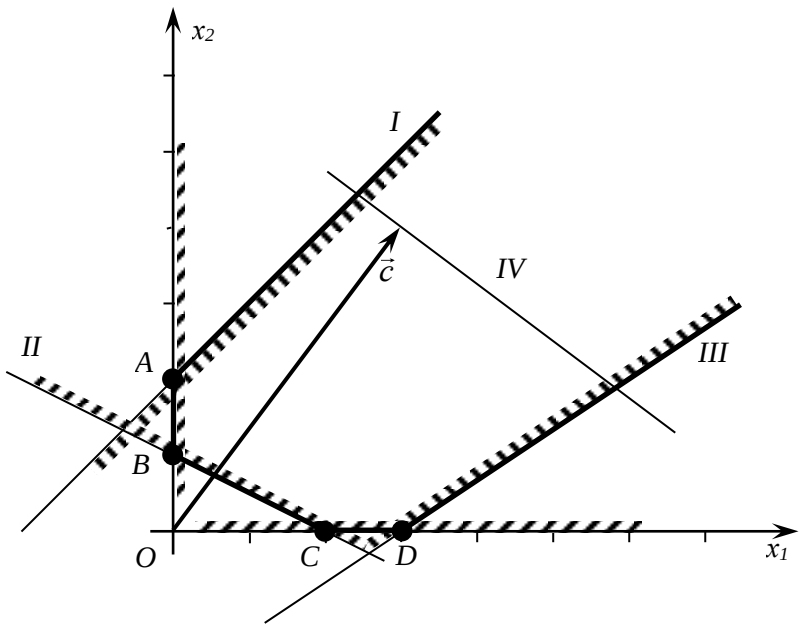


Рис. 3

Приклад 4 Знайти максимум функції $F = 2x_1 - x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Зображені на рис. 4 області, що є розв'язками відповідних нерівностей системи обмежень, не мають спільних точок, тобто немає точок, де одночасно виконувалися б усі нерівності системи обмежень. Це означає, що система обмежень несумісна і не має жодного розв'язку, в тому числі і оптимального.

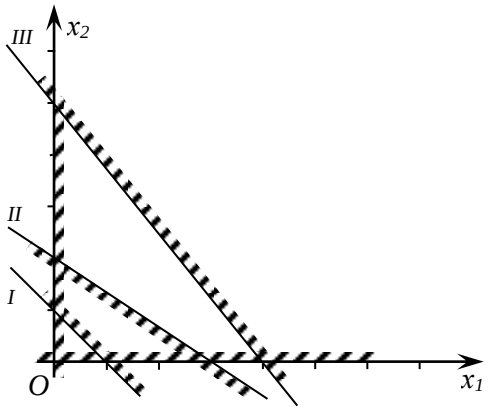


Рис. 4

Приклад 5 Знайти максимум функції $F = -x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ -2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Усім нерівностям системи обмежень задовольняють точки трикутної області ABC (рис. 5), де $A(0,5)$, $B(0,2)$, $C(1,4)$. За лінію рівня візьмемо пряму $-x_1 + 3x_2 = 10$ (пряма (V)). Як видно з рисунка, найбільшого значення функція F досягає в точці A і $F_{\max} = 15$.

Відмітимо, що при побудові трикутника ABC не використали прямі $x_1 - 2x_2 = 2$ та $x_1 + 3x_2 = 3$, що відповідають 1-й та 4-й нерівностям системи обмежень, хоча всі точки трикутника ABC задовольняють вказаним нерівностям. Таким чином нерівності $x_1 - 2x_2 \le 2$, $x_1 + 3x_2 \ge 3$ є зайвими в системі обмежень.

Зауважимо, що айві нерівності в системі обмежень можна знайти тільки після побудови області розв'язків. При розв'язанні задач лінійного програмування аналітичними методами питання про зайві обмеження не розглядається, тобто до уваги беруться всі нерівності системи обмежень.

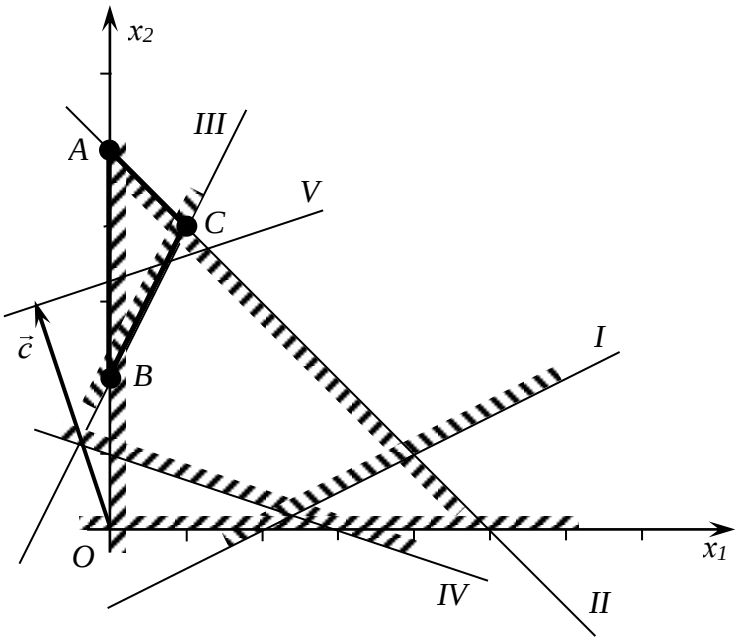


Рис. 5

Приклад 6 Знайти максимум функції $F = x_1 + x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. На рис. 6 зображено область розв'язків системи обмежень (багатокутник $ABCDO$: $A(0,2)$, $B(2,4)$, $C(4/3,14/3)$, $D(2,0)$, $O(0,0)$) і лінію рівня, яка відповідає значенню $F = 4$ (лінія IV). Якщо рухати лінію рівня паралельно самій собі в напрямку вектора $\vec{c} = (2,\ 2)$, то вона вийде з області розв'язків не в одній точці, як це було в попередніх прикладах, а співпаде з прямою BC, яка є границею області розв'язків. Всі точки відрізка BC дають одне й теж значення функції F, яке є її оптимальним значенням: $F_{max} = 2 + 4 = 6$. Таким чином, є не один, а нескінченна множина оптимальних розв'язків даної задачі, які співпадають з відрізком BC, в тому числі і з кутовими точками B та C.

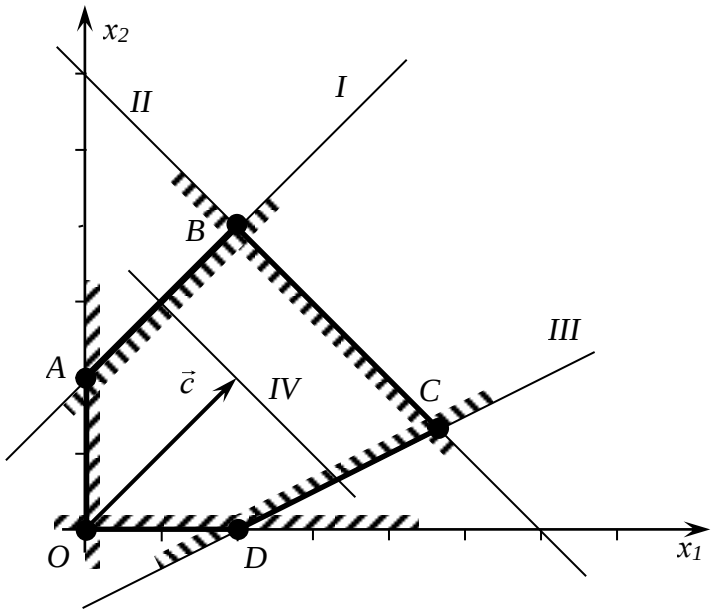


Рис. 6

Приклад 7 На меблевій фабриці зі стандартних листів фанери потрібно вирізати 24, 28 і 18 заготовок трьох розмірів. Лист фанери можна розрізати двома способами. Кількість отриманих заготовок та площу відходів за кожного способу розрізування одного листа фанери наведено в таблиці:

Заготовка	Кількість отриманих заготовок, шт., за способами	
	першим	другим
1	2	6
2	4	4
3	2	3
Площа відходів, см^2	12	18

Скільки листів фанери та за яким способом слід розрізати, щоб отримати потрібну кількість заготовок з мінімальними відходами.

Розв'язання. Математична модель задачі матиме вигляд:

Знайти мінімум функції $Z = 12x_1 + 18x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \geq 24, \\ 4x_1 + 4x_2 \geq 28, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 18, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0.$$

Графічне розв'язування задачі оптимального розрізування ілюструє рис. 7. Область допустимих розв'язків цієї задачі необмежена. Вектор $\vec{c} = (12;18)$ можна змінити згідно з масштабом графіка, наприклад $\vec{c} = (6;9)$.

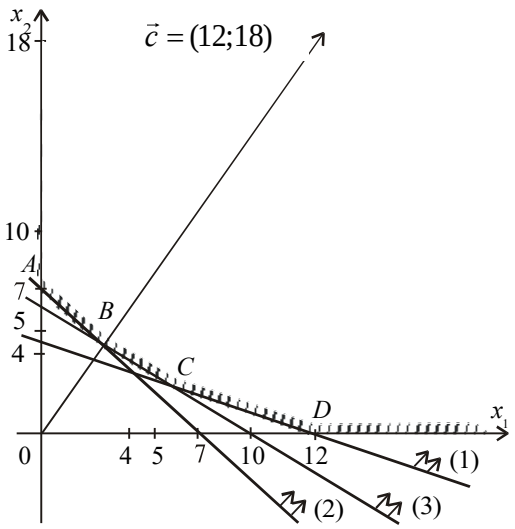


Рис. 7

Із рис. 7 бачимо, що пряма $12x_1 + 18x_2 = \min Z$ збігається зі стороною *BC* многокутника розв'язків. Це означає, що задача має альтернативні оптимальні плани: координати будь-якої точки відрізка *BC* є оптимальним планом, причому для цих координат цільова функція *Z* досягає свого найменшого значення. Визначимо лише два оптимальних плани, що відповідають кінцям відрізка *BC*.

Точка *B* утворюється перетином прямих (2) і (3); її координати визначаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 28, \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = 4, \end{cases}$$

звідки $X_1^* = (3;\ 4);\ \min Z = 12 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 108$.

Точка *C* лежить на перетині прямих (1) і (3), її координати визначаємо із системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 = 24; \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6; \\ x_2 = 2, \end{cases}$$

отже, $X_2^* = (6;\ 2);\ \min Z = 12 \cdot 6 + 18 \cdot 2 = 108$.

Повертаючись до економічного змісту розв'язаної задачі, маємо такі результати. Якщо розрізати 7 листів фанери, з яких 3 листи - першим способом, а 4 - другим, то матимемо найменшу площу відходів - 108 см^2. Але такі самі мінімальні втрати будуть і в разі розрізування шести листів першим способом і двох - другим.

Будь-який інший альтернативний оптимальний план задачі можна записати як опуклу лінійну комбінацію отриманих двох крайніх розв'язків:

$$X^* = \lambda_1 X_1^* + \lambda_2 X_2^*,$$

де $0 \le \lambda_1 \le 1;\ 0 \le \lambda_2 \le 1;\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Наприклад, нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}5$. Тоді ще один оптимальний план задачі визначається так:

$$X^* = 0{,}5\ (3;\ 4) + 0{,}5\ (6;\ 2).$$

$$X^* = (4{,}5;\ 3).$$

Цільова функція Z має таке саме мінімальне значення:

$$\min Z = 12 \cdot 4{,}5 + 18 \cdot 3 = 108.$$

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.4], с. 19 – 25.

Вправи

1 Комерційна фірма рекламує свою продукцію, використовуючи місцеві радіо- та телевізійну мережі. Витрати на рекламу в бюджеті фірми становлять 10000 дол. на місяць. Хвилина радіореклами коштує фірмі 5 дол., а телереклами – 90 дол. Фірма має намір використовувати радіорекламу принаймні вдвічі частіше, ніж рекламу на телебаченні. Досвід показав: обсяг збуту, що йо-го забезпечує 1 хв. телереклами, у 30 разів перевищує обсяг збуту, що його забезпечує 1 хв. радіореклами.

Визначити оптимальний розподіл коштів, які щомісяця мають витрачатися на рекламу, за якого обсягу збут продукції фірми буде найбільшим. Записати математичну модель задачі та розв'язати її графічно.

2 Фірма виготовляє деталі до автомобілів, ринок збуту яких практично необмежений. Будь-яка деталь має пройти послідовну обробку на трьох верстатах, час використання кожного з яких становить 10 год/добу. Тривалість обробки, хв, однієї деталі на кожному верстаті наведено в таблиці:

Деталь	Тривалість обробки деталі, хв, за верстатами		
	1	2	3
A	10	6	8
B	5	20	15

Прибуток від оптової реалізації однієї деталі кожного виду становить відповідно 20 та 30 дол.

Визначити оптимальні добові обсяги виробництва деталей кожного виду, що максимізують її прибуток. Записати математичну модель задачі та розв'язати її графічно.

Питання для самоперевірки

1 Як геометрично інтерпретуються нерівності системи обмежень задачі лінійного програмування, система нерівностей, цільова функція?

2 Назвіть, які ви знаєте, етапи розв'язання задачі лінійного програмування графічним методом.

3 Що називається лінією рівня?

4 Що називається областю допустимих розв'язків?

5 Яка пряма є опорною?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Симплексний метод розв'язування задач ЛП.

Розв'язання прикладів

Алгоритм розв'язування задачі лінійного програмування симплекс-методом складається з таких етапів:

1. Визначення початкового опорного плану задачі лінійного програмування.

2. Побудова симплексної таблиці.

3. Перевірка опорного плану на оптимальність за допомогою оцінок $\Delta_j = Z_j - C_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} - c_j;\ (j = \overline{1,n})$. Якщо всі оцінки задовольняють умову оптимальності, то визначений опорний план є оптимальним планом задачі. Якщо хоча б одна з оцінок Z_j - C_j не задовольняє умову оптимальності, то переходять до нового опорного плану або встановлюють, що оптимального плану задачі не існує.

4. Перехід до нового опорного плану задачі виконується визначенням розв'язувального елемента та розрахунком нової симплексної таблиці.

5. Повторення дій починаючи з п. 3.

Приклад 1 Продукція чотирьох видів А, В, С і Д проходить послідовну обробку на двох верстатах. Тривалість обробки одиниці продукції кожного виду задано таблицею.

Верстат	Тривалість обробки, год, одиниці продукції			
	А	В	С	Д
1	2	3	4	2
2	3	2	1	2

Витрати на виробництво одиниці продукції кожного виду визначають як величини, прямо пропорційні до часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машино-год становить 10 дол. для верстата 1 і

15 дол. - для верстата 2. Можливий час використання верстатів обмежений: для верстата 1 він становить 450 машино-год, а для верстата 2 - 380 машино-год.

Ціна одиниці продукції кожного виду дорівнює відповідно 73, 70, 55 та 45 дол.

Визначити оптимальний план виробництва продукції всіх чотирьох видів, який максимізує загальний чистий прибуток.

Розв'язання.

Побудова **математичної моделі.** Нехай x_j - план виробництва продукції j - го виду, де j може набувати значень від 1 до 4.

Умовами задачі будуть обмеження на час використання верстатів для виробництва продукції всіх видів:

для верстата 1 : $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450$ (машино-год);

для верстата 2 : $3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380$ (машино-год).

Цільова функція задачі визначається як загальний чистий прибуток від реалізації готової продукції і складається з різниці між ціною та собівартістю виготовлення продукції кожного виду:

$$Z = (73-(2\cdot 10+3\cdot 15))x_1 + (70-(3\cdot 10+2\cdot 15))x_2 + (55-(4\cdot 10+1\cdot 15))x_3 + (45-(2\cdot 10+2\cdot 15))x_4;$$

$$Z = 8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 .$$

Отже, математична модель поставленої задачі має такий вигляд:

$$\max\ Z = (8x_1 + 10x_2 - 5x_4);$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,\ 4}.$$

Розв'яжемо задачу **симплекс-методом** згідно з розглянутим алгоритмом.

1. Запишемо систему обмежень задачі в канонічному вигляді. Для цього перейдемо від обмежень-нерівностей до строгих рівнянь, увівши до лівої частини обмежень додаткові змінні x_5 та x_6:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 \qquad = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \qquad + x_6 = 380, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,\ 6}.$$

Ці додаткові змінні за економічним змістом означають можливий, але не використаний для виробництва продукції час роботи верстатів 1 та 2. У цільовій функції Z додаткові змінні мають коефіцієнти, які дорівнюють нулю:

$$\max\ Z = (8x_1 + 10x_2 + 0x_3 - 5x_4 + 0\cdot x_5 + 0\cdot x_6).$$

Канонічну систему обмежень задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1 \cdot \vec{A}_1 + x_2 \cdot \vec{A}_2 + x_3 \cdot \vec{A}_3 + x_4 \cdot \vec{A}_4 + x_5 \cdot \vec{A}_5 + x_6 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \end{pmatrix}.$$

Оскільки вектори $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$ одиничні та лінійно незалежні, саме з них складається початковий базис у зазначеній системі векторів. Змінні задачі x_5 та x_6, що відповідають одиничним базисним векторам, називають **базисними**, а решту - **вільними змінними** задачі лінійного програмування. Прирівнюючи вільні змінні до нуля, з кожного обмеження задачі дістаємо значення базисних змінних:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0, \quad x_5 = 450, \quad x_6 = 380.$$

Згідно з визначеними $x_j \, (j = \overline{1, 6})$ векторна форма запису системи обмежень задач матиме вигляд

$$0 \cdot \vec{A}_1 + 0 \cdot \vec{A}_2 + 0 \cdot \vec{A}_3 + 0 \cdot \vec{A}_4 + 450 \cdot \vec{A}_5 + 380 \cdot \vec{A}_6 = \vec{A}_0.$$

Оскільки додатні коефіцієнти x_5 та x_6 відповідають лінійно незалежним векторам, то за означенням

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380)$$

є опорним планом задачі і для цього початкового плану

$$Z_0 = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0.$$

2. Складемо симплексну таблицю для першого опорного плану задачі.

Базис	$C_{баз}$	План	8	0	0	5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
← x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	50
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	90
$\Delta_j = Z_j - C_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	

Елементи останнього рядка симплекс-таблиці є оцінками Δ_j, за допомогою яких опорний план перевіряють на оптимальність. Їх визначають так:

$$Z_1 - C_1 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 3) - 8 = -8;$$

$$Z_2 - C_2 = (0 \cdot 3 + 0 \cdot 2) - 10 = -10;$$

$$Z_3 - C_3 = (0 \cdot 4 + 0 \cdot 1) - 0 = 0;$$

$$Z_4 - C_4 = (0 \cdot 2 + 0 \cdot 2) - (-5) = 5;$$

$$Z_5 - C_5 = (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0) - 0 = 0;$$

$$Z_6 - C_6 = (0 \cdot 0 + 0 \cdot 1) - 0 = 0.$$

У стовпчику «План» оцінкового рядка записують значення цільової функції Z, якого вона набуває для визначеного опорного плану: $Z_0 = 0 \cdot 450 + 0 \cdot 380 = 0$.

3. Після обчислення всіх оцінок опорний план перевіряють на оптимальність. Для цього продивляються елементи оцінкового рядка. Якщо всі $\Delta_j \geq 0$ (для задачі на max) або $\Delta_j \leq 0$ (для задачі на min), визначений опорний план є оптимальним. Якщо ж в оцінковому рядку присутня хоча б одна оцінка, що не задовольняє умову оптимальності (від'ємна в задачі на max або додатна в задачі на min), то опорний план є неоптимальним і його можна поліпшити.

У цій задачі в оцінковому рядку дві оцінки $\Delta_1 = -8$ та $\Delta_2 = -10$ суперечать умові оптимальності, і тому перший визначений опорний план є неоптимальним. За алгоритмом симплекс-методу необхідно від нього перейти до іншого опорного плану задачі.

4. Перехід від одного опорного плану до іншого виконують зміною базису, тобто за рахунок виключення з поточного базису якоїсь змінної та включення замість неї нової з числа вільних змінних.

Для введення до нового базису беремо змінну x_2, оскільки їй відповідає найбільша за абсолютною величиною оцінка серед тих, які не задовольняють умову оптимальності $(|-10| > |-8|)$.

Щоб визначити змінну, яка підлягає виключенню з поточного базису, для всіх додатних елементів стовпчика «x_2» знаходимо симплексне відношення $\theta = b_i / a_{i2}$ і вибираємо найменше значення. Згідно з даними симплексної таблиці бачимо, що $\min\theta = \{450/3;\ 380/2\} = 150$, і тому з базису виключаємо змінну x_5, а число $a_{12} = 3$ називатимемо **розв'язувальним елементом**. Подальший перехід до нового опорного плану задачі полягає в побудові наступної симплексної таблиці, елементи якої розраховують за методом Жордана - Гаусса.

Друга симплексна таблиця має такий вигляд:

Базис	$C_{баз}$	План	8	0	0	5	0	0	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_5	10	150	2/3	1	4/5	2/3	1/3	0	225
← x_6	0	80	5/3 ↑	0	–5/3	2/3	–2/3	1	48
$Z_j - C_j \geq 0$		1500	– 4/3	0	40/3	35/3	10/3	0	

У цій таблиці спочатку заповнюють два перших стовпчики «Базис» і «$C_{баз}$», а решту елементів нової таблиці розраховують за розглянутими далі правилами:

1. Розв'язувальний (напрямний) рядок необхідно поділити на розв'язувальний елемент і здобуті числа записати у відповідний рядок нової симплексної таблиці.

2. Розв'язувальний стовпчик у новій таблиці записують як одиничний з одиницею замість розв'язувального елемента.

3. Якщо в напрямному рядку є нульовий елемент, то відповідний стовпчик переписують у нову симплексну таблицю без змін.

4. Якщо в напрямному стовпчику є нульовий елемент, то відповідний рядок переписують у нову таблицю без змін.

Усі інші елементи наступної симплексної таблиці розраховують за **правилом прямокутника**.

Щоб визначити будь-який елемент нової таблиці за цим правилом, необхідно в попередній симплексній таблиці скласти умовний прямокутник, вершини якого утворюються такими числами:

1 - розв'язувальний елемент;

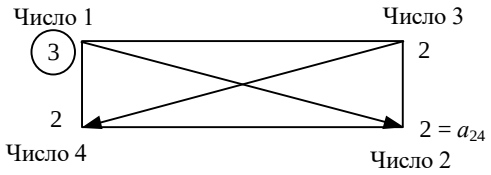
2 - число, що стоїть на місці елемента нової симплексної таблиці, який ми маємо розрахувати;

3 та 4 - елементи, що розміщуються в двох інших протилежних вершинах умовного прямокутника.

Необхідний елемент нової симплекс-таблиці визначають так:

$$\frac{\text{Число 1} \cdot \text{Число 2} - \text{Число 3} \cdot \text{Число 4}}{\text{Розв'язувальний елемент}}.$$

Наприклад, визначимо елемент a'_{24}, який розміщується в новій таблиці в другому рядку стовпчика «x_4». Складемо умовний прямокутник:



Тоді $a'_{24} = (3 \cdot 2 - 2 \cdot 2) : 3 = 2/3$. Це значення записуємо в стовпчик «x_4» другого рядка другої симплексної таблиці.

Аналогічно розраховують усі елементи нової симплексної таблиці, у тому числі елементи стовпчика «План» та оцінкового рядка. Наявність двох способів визначення оцінок опорного плану (за правилом прямокутника та за відповідною формулою) дає змогу контролювати правильність арифметичних обчислень на кожному кроці симплекс-методу.

Після заповнення нового оцінкового рядка перевіряємо виконання умови оптимальності $Z_j - C_j \geq 0$ для другого опорного плану. Цей план також неоптимальний, оскільки $\Delta_1 = -4/3$. Використовуючи процедуру симплекс-методу, визначаємо третій опорний план задачі, який наведено у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	10	118	0	1	2	2/5	3/5	–2/5
x_1	8	48	1	0	–1	2/5	–2/5	3/5
$Z_j - C_j \geq 0$		1564	0	0	12	61/5	14/5	4/5

В оцінковому рядку третьої симплексної таблиці немає від'ємних чисел, тобто всі $\Delta_j \geq 0$ і задовольняють умову оптимальності. Це означає, що знайдено оптимальний план задачі:

$$X^* = (x_1 = 48;\ x_2 = 118;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0),$$

або

$$X^* = (48;\ 118;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0);$$

$$\max Z = 8 \cdot 48 + 10 \cdot 118 + 0 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 1564.$$

Отже, план виробництва продукції, що передбачає випуск 48 одиниць продукції А та 118 од. продукції В, оптимальний і дає найбільший прибуток 1564 дол. При цьому час роботи верстатів використовується повністю ($x_5 = x_6 = 0$).

Задачу можна розв'язати симплекс-методом, узявши не три симплексні таблиці, а одну, в якій послідовно записувати всі ітерації.

Приклад 2 Розв'язати завдання за допомогою симплексного методу.

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 15, \\ 3x_1 + x_2 \leq 13, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Зведемо задачу до канонічної формі, ввівши невід'ємні змінні x_3 та x_4.

$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 15, \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 13, \end{cases}$$

$$x_1, \ldots, x_4 \geq 0.$$

Опорний план завдання набуде вигляду X_0 = (0;0;15;13).

Внесемо вихідні дані завдання в симплексну таблицю

Базис	$C_{баз}$	План	2	3	0	0	θ
			x_1	x_2 ↑	x_3	x_4	
← x_3	0	15	1	3	1	0	15/3=5
x_4	0	13	3	1	0	1	13/1=13
Δ_j		Z=0	-2 ↑	-3	0	0	
x_2	3	5	1/3	1	1/3	0	5:1/3=5·3=15
← x_4	0	8	8/3	0	-1/3	1	8:8/3=8·3/8=3
Δ_j		Z=15	-1	0	1	0	
x_2	3	4	0	1	3/8	-1/8	
x_1	2	3	1	0	-1/8	3/8	
Δ_j		Z=18	0	0	3/4	3/8	

Відповідь: $\max Z = 18,\ X^* = (x_1 = 3;\ x_2 = 4;\ x_3 = 0;\ x_4 = 0)$.

Приклад 3 Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі *A*, *B* і *C* використовує три види основної сировини: цукровий пісок, патоку і фруктове пюре. Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т. карамелі даного виду наведені в таблиці.

У ній же вказані загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також прибуток від реалізації 1 т карамелі даного виду.

Вид сировини	Норми витрат сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	B	C	
Цукровий пісок Патока Фруктове пюре	0,8 0,4 –	0,5 0,4 0,1	0,6 0,3 0,1	800 600 120
Прибуток від реалізації 1т продукції (грн.)	108	112	126	

Знайти план виробництва карамелі, який би забезпечив максимальний прибуток від її реалізації.

Розв'язання. Складемо математичну модель задачі. Позначимо через x_1 шуканий план виготовлення карамелі *A*, через x_2 – карамелі *B* і через x_3 - карамелі *C*. Оскільки фонд сировини для виготовлення цих трьох видів карамелі обмежений, то змінні x_1, x_2, x_3 повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}6x_3 \le 800, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}4x_2 + 0{,}3x_3 \le 600, \\ \qquad\quad 0{,}1x_2 + 0{,}1x_3 \le 120. \end{cases}$$

Загальна вартість виготовленої фабрикою карамелі за умов випуску x_1 т. карамелі виду *A*, x_2 т. – виду *B* і x_3 т. виду *C* становить

$$F = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3.$$

За своїм економічним змістом x_1, x_2, x_3 можуть набувати тільки невід'ємних значеннь: $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$.

Таким чином, отримали таку математичну задачу:

$$\max F = 108x_1 + 112x_2 + 126x_3;$$
$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 \le 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 \le 600, \\ \qquad\qquad 0,1x_2 + 0,1x_3 \le 120, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Зведемо цю задачу до канонічного вигляду. Для цього введемо три додаткові змінні x_4, x_5, x_6, у результаті чого обмеження запишуться у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 + 0,6x_3 + x_4 = 800, \\ 0,4x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + x_5 = 600, \\ \qquad 0,1x_2 + 0,1x_3 + x_6 = 120. \end{cases}$$

Економічний зміст: ці додаткові змінні за економічним змістом означають невикористану за даним планом виробництва кількість сировини того чи іншого виду. Наприклад, x_4 – це невикористана кількість тон цукрового піску, x_5 – патоки, x_6 – фруктового пюре.

Запишемо нашу систему рівнянь у векторній формі:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = A_0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,4 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0,6 \\ 0,3 \\ 0,1 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ A_0 = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Оскільки серед векторів $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ є три одиничних вектора (A_4, A_5, A_6), то для даної задачі можна безпосередньо записати опорний план:

$$X_0 = (0; 0; 0; 800; 600; 120).$$

Складемо симплекс-таблицю (табл. 1) для першої ітерації, обчислимо значення F_0 і Δ_j, перевіримо план на оптимальність:

$$F_0 = (C_\sigma, A_0) = 0 \cdot 800 + 0 \cdot 600 + 0 \cdot 120 = 0;$$
$$\Delta_1 = (C_\sigma, A_1) - c_1 = 0 \cdot 0,8 + 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0 - 108 = -108;$$
$$\Delta_2 = (C_\sigma, A_2) - c_2 = 0 \cdot 0,5 + 0 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,1 - 112 = -112;$$
$$\Delta_3 = (C_\sigma, A_3) - c_3 = 0 \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,3 + 0 \cdot 0,1 - 126 = -126.$$

Для базисних векторів $\Delta_j = 0$.

Таблиця 1

i	Базис	C_σ	План	108	112	126	0	0	0
				x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	x_6
1	x_4	0	800	0,8	0,5	0,6	1	0	0
2	x_5	0	600	0,4	0,4	0,3	0	1	0
3	← x_6	0	120	0	0,1	0,1	0	0	1
4	Δ_j		0	– 108	– 112	– 126	0	0	0

Як видно з таблиці 1, значення всіх основних змінних x_1, x_2, x_3 дорівнюють нулю, а додаткові змінні набувають своїх значень у відповідності з обмеженнями задачі. Ці значення змінних відповідають такому плану, при якому нічого не виготовляється, сировина не використовується і значення цільової функції дорівнює нулю. Цей план, звичайно, не є оптимальним.

Це видно із 4-го рядка нашої таблиці: $\Delta_1 = -108 < 0$, $\Delta_2 = -112 < 0$, $\Delta_3 = -126 < 0$. Від'ємні числа не тільки свідчать про можливість збільшення прибутку, але й показують, наскільки збільшиться ця сума при введенні в план одиниці того чи іншого виду продукції.

Економічний зміст: так, число (– 108) означає, що при включенні в план виробництва однієї тонни карамелі *A* забезпечується збільшення прибутку на 108 грн. Якщо включити в план виробництва по одній тонні карамелі *B* і *C*, то прибуток зросте відповідно на 112 і 126 грн. Тому з економічної точки зору найбільш доцільним є включення в план виробництва карамелі *C*.

Це ж необхідно зробити і на основі формальної ознаки симплексного методу, оскільки максимальне за абсолютною величиною від'ємне число Δ_j відповідає вектору A_3.

Визначимо вектор, який будемо виключати з базису. Для цього складаємо співвідношення.

$$\min\left\{\frac{b_i}{a_{i3}}\right\} \text{ для } a_{i3} > 0, \text{ тобто } \min\left\{\frac{800}{0,6}; \frac{600}{0,3}; \frac{120}{0,1}\right\} = \frac{120}{0,1} = 1200.$$

Оскільки мінімум досягається за третім рядком, то з базису виводиться вектор A_6.

Економічний зміст: знайшовши число $\frac{120}{0,1}$, ми таким чином з економічної точки зору визначимо, скільки тонн карамелі *C* кондитерська фабрика може виготовити із врахуванням норм витрат і наявних об'ємів сировини кожного виду. Тому що сировини даного виду відповідно є 800, 600, 120 тонн, а на одну тонну карамелі *C* потрібно витратити сировини кожного виду відповідно 0,6; 0,3; 0,1 т, то максимальна кількість тонн карамелі *C*, яка може бути виготовлена підприємством, дорівнює $\min\left\{\frac{800}{0,6}; \frac{600}{0,3}; \frac{120}{0,1}\right\} = \frac{120}{0,1} = 1200$, тобто обмежуючим фактором для виробництва карамелі *C* є наявний об'єм фруктового пюре. З

урахуванням його наявності фабрика може виготовити 1200 т. карамелі *С*. При цьому фруктове пюре буде повністю використане.

Заповнюємо таблицю наступної ітерації (табл. 2):

Таблиця 2

i	Базис	C_σ	План	108	112	126	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_4	0	80	0,8	– 0,1	0	1	0	– 6
2	x_5	0	240	0,4	0,1	0	0	1	– 3
3	x_3	126	1200	0	1	1	0	0	10
4	Δ_j		151200	– 108	14	0	0	0	1260

Спочатку заповнюємо рядок щойно введеного в базис вектора (третій рядок). Для цього кожен елемент третього рядка попередньої симплекс-таблиці ділимо на 0,1 (на ключовий елемент). Далі заповнюємо елементи стовпців для векторів, що входять у новий базис. У цих стовпцях на перетині однойменних векторів ставимо 1, а всі інші елементи покладаємо рівними 0.

Для обчислення інших елементів таблиці 3.8 використовуємо правило трикутника. Почнемо із A_0. Обчислюємо перший елемент стовпчика. Для цього знаходимо три числа:

1) число, що знаходиться у шуканій клітинці в попередній симплекс-таблиці (табл.1) (тобто, на перетині першого рядка і стовпчика A_0): 800;

2) число, що знаходиться у провідному стовпці навпроти першого числа (тобто, що знаходиться на перетині стовпчика вектора A_3 і першого рядка таблиці 1): 0,6;

3) число нової симплекс-таблиці, отримане шляхом поділу провідного рядка на ключовий елемент, що стоїть у стовпчику A_0 (тобто, на перетині стовпчика A_0 і третього рядка табл. 2): 1200.

Обчислюємо вираз $800-0,6\cdot 1200=80$ і записуємо його в першому рядку стовпчика вектора A_0.

Знаходимо значення третього елемента стовпчика A_0. Для цього згідно з правилом трикутника перші два числа старої симплекс-таблиці (табл. 1) – це 600 і 0,3, третє число – 120 з нової таблиці (табл. 2). Отже, третім елементом стовпчика A_0 буде число $600-0,3\cdot 1200=240$.

Обчислимо елементи стовпчика A_1. Для обчислення першого елемента маємо два числа таблиці 3.7 0,8 та 0,6 і третє число таблиці 3.8 0. Отже, $a'_{41}=0,8-0,6\cdot 0=0,8$. Аналогічно для третього елемента стовпчика A_1: $0,4-0,3\cdot 0=0,4$.

Аналогічним чином заповнюються стовпчики A_2 і A_6.

Залишилося заповнити останній, четвертий рядок:

$$F_0=(C_\sigma,A_0)=0\cdot 80+0\cdot 240+126\cdot 1200=151200;$$

$$\Delta_1 = (C_\sigma, A_1) - c_1 = 0 \cdot 0,8 + 0 \cdot 0,4 + 126 \cdot 0 - 108 = -108;$$
$$\Delta_2 = (C_\sigma, A_2) - c_2 = 0 \cdot (-0,1) + 0 \cdot 0,1 + 126 \cdot 1 - 112 = 14;$$
$$\Delta_6 = (C_\sigma, A_6) - c_6 = 0 \cdot (-6) + 0 \cdot (-3) + 126 \cdot 10 - 0 = 1260;$$
$$\Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_5 = 0.$$

Одержаний опорний план $X = (0; 0; 1200; 80; 240; 0)$ не є оптимальним, оскільки $\Delta_1 < 0$.

Економічний зміст: при даному плані виготовлення карамелі виготовляється 1200 т. карамелі *C* і залишаються невикористаними 80 т. цукрового піску і 240 т. патоки. Прибуток при цьому плані складає 151 200 грн. Розглянемо для прикладу дані стовпчика A_1. Число 0 у третьому рядку цього стовпчика показує, на скільки слід зменшити виготовлення карамелі *C*, якщо запланувати випуск одної тонни карамелі *A*. Числа 0,8 і 0,4 в 1-му і 2-му рядках вектора A_1 показують відповідно, скільки потрібно цукрового піску і патоки при включенні в план виробництва одної тонни карамелі *A*, а число (– 108) у четвертому рядку показує, що якщо буде заплановано випуск 1т. карамелі *A*, то це забезпечить збільшення прибутку на 108 грн. Такий же зміст мають числа стовпчика A_2. Дещо інший економічний зміст мають числа, записані в стовпці A_6. Число 10 у 3-му рядку цього стовпця показує, що збільшення запасів фруктового пюре на 1 т. дозволило б збільшити випуск карамелі *C* на 10 т. При цьому знадобилося б 6 т. цукрового піску і 3 т. патоки. Збільшення випуску карамелі *C* на 10 т. приведе до збільшення прибутку на 1260 грн.

Із викладеного економічного змісту даних таблиці 2 випливає, що отриманий план не є оптимальним.

Оскільки єдине $\Delta_1 < 0$, то A_1 включаємо в базис. Для визначення провідного рядка шукаємо $\min\left\{\frac{80}{0,8}; \frac{240}{0,4}\right\} = \frac{80}{0,8} = 100$; а, отже, з базису виключаємо A_4. Число 0,8 буде ключовим елементом.

Будуємо нову симплекс-таблицю (табл. 3):

Таблиця 3

i	Базис	C_σ	План	108	112	126	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	x_1	108	100	1	– 0,125	0	1,25	0	– 7,5
2	x_5	0	200	0	0,15	0	– 5	1	0
3	x_3	126	1200	0	1	1	0	0	10
4	Δ_j		162000	0	0,5	0	135	0	450

Спочатку ділимо всі елементи першого рядка таблиці 2 на 0,8 і результат записуємо в першому рядку таблиці 3. Далі заповнюємо елементи стовпчиків

векторів базису і за правилом трикутника всі інші числа таблиці. Після цього підраховуємо елементи 4-го рядка нової симплекс-таблиці:

$$F_0 = (C_\sigma, P_0) = 162000;$$
$$\Delta_2 = (C_\sigma, P_2) - c_2 = 0,5;$$
$$\Delta_4 = (C_\sigma, P_4) - c_4 = 135;$$
$$\Delta_6 = (C_\sigma, P_6) - c_6 = 450;$$
$$\Delta_1 = \Delta_3 = \Delta_5 = 0.$$

Оскільки всі $\Delta_j \geq 0$ $(j = \overline{1,6})$, то план $X = (100; 0; 1200; 0; 200; 0)$ буде оптимальним і $\max F = 162000$.

Економічний зміст: отже, оптимальний план виготовлення карамелі включає виготовлення 100 т карамелі *A*, 1200 т. карамелі *C*. При даному плані повністю використовується цукровий пісок і фруктове пюре, але залишаються невикористаними 200 т. патоки. Прибуток при такому плані складає 162000 грн.

Оптимальним планом виготовлення карамелі не передбачено випуск карамелі *B*. Введення у план виготовлення 1 т карамелі *B* призвело б до зменшення прибутку на 0,5 грн. (це видно з 4-го рядка стовпчика A_2).

Приклад 4 Знайти максимум функції

$$F = 2x_1 - 6x_2 + 5x_5;$$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 20, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 24, \\ 3x_1 - x_2 - 12x_5 + x_6 = 18, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}).$$

Розв'язання. Систему рівнянь задачі запишемо у векторній формі:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = A_0,$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}; \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A_0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 24 \\ 18 \end{pmatrix};$$

Оскільки серед векторів A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 є три одиничних вектори, то для даної задачі можна безпосередньо знайти опорний план. Таким є план $X = (0; 0; 20; 24; 0; 18)$. Складаємо симплекс-таблицю і перевіряємо, чи є даний опорний план оптимальним.

Базис	C_σ	План	2	-6	0	0	5	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	0	20	-2	1	1	0	1	0
x_4	0	24	-1	-2	0	1	3	0
x_6	0	18	3	-1	0	0	-12	1
Δ_j		0	-2	6	0	0	-5	0

Як видно з таблиці, початковий опорний план не є оптимальним. Тому переходимо до нового опорного плану. Це можна зробити, оскільки в стовпцях векторів A_1 і A_5, четвертий рядок яких містить від'ємні числа, є додатні елементи. Для переходу до нового опорного плану введемо в базис вектор A_5 і виключимо з базису вектор A_4. Складаємо таблицю II-ої ітерації.

Базис	C_σ	План	2	-6	0	0	5	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_3	0	12	-5/3	5/3	1	-1/3	0	0
x_5	5	8	-1/3	-2/3	0	1/3	1	0
x_6	0	114	-1	-9	0	4	0	1
Δ_j		40	-11/3	8/3	0	5/3	0	0

Як видно з останньої таблиці, новий опорний план задачі не є оптимальним, оскільки в четвертому рядку стовпця вектора A_1 стоїть від'ємне число (-11/3). Оскільки в стовпці цього вектора немає додатних елементів, то дана задача не має оптимального плану.

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.5], с. 25 – 32.

Вправи

1 Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

$$\max Z = x_1 + x_2; \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 + 2x_2 \le 10, \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\max Z = 2x_1 + 4x_2; \quad \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 40, \\ 2x_1 + x_2 \le 15, \\ 4x_1 + x_2 \le 28, \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2; \quad \begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 77, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 78, \\ 4x_1 + x_2 \le 54, \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

$$\max(\min) Z = 4x_1 + 5x_2; \quad \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \ge 20, \\ 5x_1 - 3x_2 \ge 0, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 0, \end{cases} \quad x_1, x_2 \ge 0.$$

Питання для самоперевірки

1 Для розв'язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?

2 Суть алгоритму симплексного методу?

3 Сформулюйте умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.

4 Як вибрати розв'язувальний елемент?

5 Сформулювати критерій оптимальності опорного розв'язку задачі ЛП.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

Знаходження початкового опорного плану. М-метод розв'язання задач ЛП.

Розв'язання прикладів

Алгоритм М-методу.

1 Перевіряють, чи записана ЗЛП у канонічному вигляді. Якщо ні, то необхідно перетворити її до канонічної форми (див. тему 2).

2 Будується розширена М-задача. Визначається початковий опорний розв'язок, який серед базисних змінних містить штучні змінні.

3 Будується перша симплекс-таблиця, яка відповідає початковому опорному розв'язку. На відміну від звичайного симплекс-методу індексний рядок цієї таблиці розбивається на два рядки, оскільки оцінки містять два доданки. У верхньому рядку записується доданок оцінки без М, у нижньої – коефіцієнти при М. Зауважимо, що знак оцінки визначається знаком коефіцієнта при М, незалежно від величини і знака доданка без М, оскільки М – скіль-завгодно велике додатне число. Тобто аналізується знак тільки нижнього рядку симплекс таблиці.

4 – 5 Пункти алгоритму повторюють дії аналогічних пунктів алгоритму звичайного симплекс-методу. Якщо штучна змінна виключається з базису, то відповідний стовпець коефіцієнтів у наступних симплекс-таблицях можна не обчислювати (якщо немає потреби в отриманні розв'язку двоїстої задачі).

Зауваження. Вихідна М-задача може не мати розв'язку у двох випадках.

1 Якщо під час розв'язання задачі М-методом отримують, що розширена М-задача не має розв'язків, оскільки цільова функція не обмежена зверху при наявності штучних векторів у базисі.

2 Якщо оптимальний розв'язок розширеної М-задачі існує при наявності ненульових штучних змінних в опорному плані.

Приклад 1 Розв'язати задачу з прикладу 1 практичного заняття 3 із додатковою умовою: продукція *C* має виготовлятися в кількості не менш як 9 одиниць.

Розв'язання. Математична модель задачі матиме вигляд:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380, \\ x_3 \ge 9, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,4}.$$

Застосовуючи для розв'язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку записуємо систему обмежень у канонічній формі, а далі - у векторній:

$$\max Z = 3x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380, \\ x_3 - x_7 = 9, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 7}.$$

Зауважимо, що нерівність типу «≥» у рівняння перетворюємо введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної зі знаком «–».

Векторна форма запису:

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + x_3\vec{A}_3 + x_4\vec{A}_4 + x_5\vec{A}_5 + x_6\vec{A}_6 + x_7\vec{A}_7 = \vec{A}_0,$$
$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \;\; \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\vec{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \;\; \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 450 \\ 380 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Серед записаних векторів є лише два одиничні - $\vec{A}_5$ та $\vec{A}_6$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом +1 штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\vec{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$\max Z = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380, \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 8}.$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції Z коефіцієнт $+M$ (для задачі на min) або $-M$ (для задачі на max), де M - досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380;\ 0;\ 9),$$

$$Z_0 = 8\cdot 0 + 10\cdot 0 + 0\cdot 0 - 5\cdot 0 + 0\cdot 450 + 0\cdot 380 + 0\cdot 0 - M\cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю задачі:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0	0	–M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
← x_8	–M	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	9
$Z_j - C_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	
		–9M	0	0	–M	0	0	0	M	0	

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо $Z_0 = 0 - 9M$, $Z_1 - C_1 = -8$, $Z_2 - C_2 = -10$, $Z_3 - C_3 = 0 - M$ і т. д. Як бачимо, значення оцінок складаються з двох частин, одна з яких містить M, а інша — просто число. Тому для зручності розбиваємо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок записуємо просто число, а в другий - число з коефіцієнтом M.

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Згідно з алгоритмом, розглянутим у попередніх задачах на практичному занятті 3, виконуємо перехід до наступного опорного плану задачі.

Подальше розв'язування задачі наведене у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	8	10	0	–5	0	0	0	–M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
← x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	–4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	–1	185,5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	—
$Z_j - C_j \geq 0$		0	–8	–10	0	5	0	0	0	0	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	–4/3	207
← x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	–2/3	1	–5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	—
$Z_j - C_j \geq 0$		1380	– 4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	– 40/3	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	–2/5	2	–2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	–2/5	3/5	–1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	
$Z_j - C_j \geq 0$		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	–12	
		0	0	0	0	0	0	0	0	M	

Оптимальним планом задачі є вектор

$$X^* = (57;\ 100;\ 9;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0),$$

$$\max Z = 8\cdot 57 + 10\cdot 100 + 0\cdot 9 - 5\cdot 0 = 1456.$$

Отже, оптимальним є виробництво 57 одиниць продукції A, 100 одиниць продукції B і 9 одиниць продукції C. Тоді прибуток буде найбільшим і становитиме 1456 дол.

Приклад 2 Продукція фабрики випускається у вигляді паперових рулонів стандартної ширини - 2 м. За спеціальним замовленням споживачів фабрика постачає також рулони інших розмірів, розрізуючи стандартні рулони.

Типові замовлення на рулони нестандартних розмірів наведено в таблиці:

Замовлення	Потрібна ширина рулонів, м	Потрібна кількість рулонів
1	0,8	150
2	1,0	200
3	1,2	300

Визначити оптимальний варіант розкрою стандартних рулонів, за якого спеціальні замовлення, що надходять, задовольняють повністю з мінімальними відходами паперу.

Розв'язання. Аби виконати спеціальні замовлення, які надійшли, розглянемо п'ять можливих варіантів розкрою стандартних рулонів, що можуть використовуватися в різних комбінаціях. Варіанти розкрою наведено в таблиці:

Потрібна ширина рулона, м.	Кількість нестандартних рулонів за варіантами				
	1	2	3	4	5
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,8	2	1	1	0	0
1,0	0	0	1	2	0
1,2	0	1	0	0	1
Кількість відходів, м.	0,4	0	0,2	0	0,8

Нехай x_j - кількість стандартних рулонів паперу, які буде розрізано j - способом, $j = \overline{1,5}$.

Обмеження задачі безпосередньо пов'язані з вимогою забезпечити повністю необхідну кількість нестандартних рулонів за спеціальними замовленнями. Якщо використовуватимуться всі подані в таблиці способи розкрою, дістанемо такі результати.

Кількість рулонів шириною 0,8 м

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 150.$$

Кількість рулонів шириною 1 м

$$x_3 + 2x_4 = 200.$$

Кількість рулонів шириною 1,2 м

$$x_2 + x_5 = 300.$$

Цільова функція задачі - це мінімальні загальні втрати паперу під час розрізування стандартних рулонів на рулони нестандартної ширини. Математично вона має такий вигляд:

$$\min Z = 0,4x_1 + 0x_2 + 0,2x_3 + 0x_4 + 0,8x_5.$$

Математична модель задачі в загальному вигляді записується так:

$$\min\ Z = 0,4x_1 + 0,2x_3 + 0,8x_5;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 150, \\ x_3 + 2x_4 = 200, \\ x_2 + x_5 = 300, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,5}.$$

Для розв'язування цієї задачі застосуємо процедуру симплекс-методу. Оскільки задачу сформульовано в канонічній формі, запишемо її відразу у векторній формі:

$$x_1\vec{A}_1 + x_2\vec{A}_2 + x_3\vec{A}_3 + x_4\vec{A}_4 + x_5\vec{A}_5 = \vec{A}_0,$$

де

$$\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

У системі векторів маємо лише один одиничний вектор $\vec{A}_5$. Тому в перше та друге обмеження введемо штучні змінні x_6 та x_7. Розширена задача матиме вигляд:

$$\min\ Z = 0,4x_1 + 0,2x_3 + 0,8x_5 + Mx_6 + Mx_7;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 150, \\ x_3 + 2x_4 + x_7 = 200, \\ x_2 + x_5 = 300, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0,\ \ j = \overline{1,7}.$$

Процес розв'язування задачі симплекс-методом подано у вигляді таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	0,4	0	0,2	0	0,8	M	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	0	—
← x_7	M	200	0	0	1	2	0	0	1	100
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	0	—
$Z_j - C_j \le 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0	0	
		350 M	2 M	M	2 M	2 M	0	0	0	
← x_6	M	150	2	1	1	0	0	1	1	75
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0	0	0	—
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1	0	0	—
$Z_j - C_j \le 0$		240	–0,4	0,8	–0,2	0	0	0		
		150 M	2 M	M	M	0	0	0		
← x_1	0,4	75	1	1/2	1/2	0	0			150
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0			—
x_5	0,8	300	0	1	0	0	1			300
$Z_j - C_j \le 0$		270	0	1	0	0	0			
x_2	0	150	2	1	1	0	0			
x_4	0	100	0	0	1/2	1	0			
x_5	0,8	150	–2	0	–1	0	1			
$Z_j - C_j \le 0$		120	–2	0	–1	0	0			

Згідно з останньою симплексною таблицею запишемо оптимальний план задачі:

$$X^* = (0;\ 150;\ 0;\ 100;\ 150),\ \min Z = 120.$$

Визначений оптимальний план передбачає таке: щоб у повному обсязі виконати спеціальні замовлення, які надходять на паперову фабрику, необхідно розрізати 150 стандартних рулонів другим способом, 100 рулонів - четвертим і 150 - п’ятим. За такого оптимального варіанта розкрою величина відходів паперу буде найменшою і становитиме 120 м.

Приклад 3 Знайти мінімум функції

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 + 5x_3;$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Розв’язання.

1 Спочатку зведемо задачу до канонічної форми.

Оскільки перша нерівність системи обмежень записана у вигляді «$\le$», а друге – у вигляді «$\ge$», то до їх лівих частин відповідно додамо і віднімемо додаткові невід’ємні змінні $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, які у цільову функцію ввійдуть з нульовими коефіцієнтами. Таким чином, у канонічному вигляді задача записується так:

$$\min Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5;$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

2 Будуємо розширену М-задачу.

Перше рівняння канонічної системи обмежень має базисну змінну x_4, а друге рівняння базисної змінної не містить. Тому в друге рівняння додаємо штучну змінну $x_6 \geq 0$, яка у цільову функцію увійде з коефіцієнтом + М (задача на min). Тобто розширена М-задача має вигляд.

$$\min Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + M \cdot x_6$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 - x_5 + w_1 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0\left(j = \overline{1,5}\right), x_6 \geq 0.$$

3 Складаємо першу симплекс-таблицю (табл.4.5, нульова ітерація). Для цього визначаємо базисні змінні – x_4, x_6 та вільні – x_1, x_2, x_3, x_5.

Базис	$C_{баз}$	План	2	1	5	0	0	M	θ
			x_1 ↑	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
$\leftarrow x_4$	0	4	1	1	-1	1	0	0	4/1
x_6	M	5	1	-5	1	0	-1	1	5/1
$\Delta_j = Z_j - C_j \leq 0$		0	-2	-1	-5	0	0	0	
		5M	M	-5M	M	0	-M	0	
x_1	2	4	1	1	-1 ↑	1	0	0	
$\leftarrow x_6$	M	1	0	-6	2	-1	-1	1	
$\Delta_j = Z_j - C_j \leq 0$		8	0	1	-7	2	0	0	
		M	0	-6M	2M	-M	-M	0	
x_1	2	9/2	1	-2	0	1/2	-1/2		
x_3	5	1/2	0	-3	1	-1/2	-1/2		
$\Delta_j = Z_j - C_j \leq 0$		23/2	0	-20	0	-3/2	-7/2		

4 Оскільки у нижньому рядку оцінок Δ_j є додатні коефіцієнти при М (в стовпцях A_1, A_3), то отриманий розв'язок не є оптимальним. Тому будують наступний опорний розв'язок

5 Для побудови наступної симплекс-таблиці (перша ітерація) треба визначити змінні, які додаються і виключаються з базису.

5.1 У даному випадку додатні коефіцієнти при М є рівними, тому вибирають будь-який з них, наприклад, перший, який буде розв'язувальним. Тому відповідну змінну x_1 додають до базису.

5.2 Знаходять мінімальне симплексне відношення $\theta = \min\left\{\frac{4}{1};\frac{5}{1}\right\} = 4$, що відповідає змінній x_4, яку треба виключити з базису і який відповідає розв'язувальний рядок. Таким чином, розв'язувальний елемент знаходиться на перетину першого рядку і першого стовпця і дорівнює 1.

5.3 За формулами жорданових перетворень будують наступну симплекс-таблицю (перша ітерація). Тут базисні змінні – x_1, x_6, а вільні – x_2, x_3, x_4, x_5.

На другому етапі дії повторюються.

У другій симплекс-таблиці (перша ітерація) в рядку оцінок Δ_j є одна додатна (у стовпці A_3), тому цей стовпець є розв'язувальним, а змінну x_3 треба включити до базису. В цьому стовпці є тільки один додатній елемент – в рядку A_6, що відповідає штучній змінній x_6. Тому цю змінну виключаємо з базису і у наступній симплекс-таблиці відповідний стовпець не обчислюємо. Розв'язувальний елемент знаходиться на перетину другого рядку і третього стовпця і дорівнює 2.

Будуємо наступну симплекс-таблицю (друга ітерація). Тут базисні змінні – x_1, x_3, а вільні – x_2, x_4, x_5. Оскільки всі оцінки $\Delta_j \le 0$ та всі штучні змінні дорівнюють нулю, то третій опорний розв'язок розширеної М-задачі $X = \left(\frac{9}{2};0;\frac{1}{2};0;0;0\right)$ є оптимальним і йому відповідає мінімальне значення цільової функції $\min Z = \frac{23}{2}$. Отже, оптимальний розв'язок початкової задачі має вигляд $X_{опт.} = \left(\frac{9}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, при цьому $\min Z\left(X_{опт}\right) = \frac{23}{2}$.

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.6-8], с. 33 – 50.

Вправи

Розв'язати задачі симплексним методом зі штучним базисом(М-метод)

$$Z = -x_1 + x_2 - x_3 - x_5 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 0, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 5}.$$

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 3}.$$

$$Z = x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,\ 4}.$$

Питання для самоперевірки

1 Суть методу штучного базису?

2 Яка змінна називається штучною, коли вона вводиться, і який коефіцієнт відповідає їй в цільової функції?

3 Коли вихідна задача несумісна, і як це визначити за допомогою розв'язку М-задачі?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

Двоїста задача лінійного програмування. Теореми двоїстості. Економічна інтерпретація двоїстих задач. Знаходження розв'язку однієї з пари симетричних взаємо двоїстих задач за відомим розв'язком іншої задачі.

Розв'язання прикладів

Пряма задача	Двоїста задача
Симетричні	
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i;$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j;$
$x_j \ge 0.$	$y_i \ge 0.$
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$	$F=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i;$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j;$
$x_j \ge 0.$	$y_i \ge 0.$
Несиметричні	
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$	$F=\sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \min;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j;$
$x_j \ge 0.$	$y_i \in [-\infty;\ \infty].$
$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$	$F=\sum_{j=1}^{m} b_i y_i \to \max;$
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i;$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j;$
$x_j \ge 0.$	$y_i \in]-\infty;\ \infty[.$

Приклад 1 Побудувати задачу двоїсту до даної:

$$Z = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + \ x_3 \geq 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ \ x_1 - \ x_2 \qquad \leq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Розв'язання. В системі обмежень задачі максимізації всі нерівності повинні бути записані зі знаком « ≤ » тому зведемо систему обмежень до виду:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 - \ x_3 \leq -2, \\ \ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 6, \\ \ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ \ x_1 - \ x_2 \qquad \leq 2, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Двоїста задача матиме чотири змінні y_i ($i = \overline{1,4}$) і три основних обмеження. Так як всі $x_j \geq 0$, то всі обмеження двоїстої задачі запишемо у вигляді нерівностей, причому зі знаком « ≥ 0», так як двоїста задача буде задачччею на мінімум. Всі обмеження вихідної задачі нерівності, тому $y_i \geq 0$ ($i = \overline{1,4}$). Матриця системи основних обмежень вихідної задачі має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ 3 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Матрицю системи основних обмежень двоїстої задачі отримують транспонуванням матриці A, тобто коефіцієнтами при змінних y_i трьох основних обмежень двоїстої задачі будуть елементи відповідних стовпців матриці A.

З огляду на те, що коефіцієнти цільової функції вихідної задачі стають правими частинами обмежень двоїстої задачі, а праві частини обмежень вихідної задачі стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі, отримаємо двоїсту задачу у вигляді:

$$F = -2y_1 + 6y_2 + 10y_3 + 2y_4 \to \min;$$
$$\begin{cases} -2y_1 + 3y_2 + 3y_3 + y_4 \ge 3, \\ -2y_1 - 3y_2 - 3y_3 - y_4 \ge 1, \\ -y_1 - 2y_2 + 2y_3 \qquad \ge 2, \end{cases}$$
$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Приклад 2 До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати одну з них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція Z максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак «≤». Тому перше обмеження моделі помножимо на (–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

1. Кожному обмеженню прямої задачі відповідає змінна двоїстої задачі. Кількість невідомих двоїстої задачі дорівнює кількості обмежень прямої задачі.

2. Кожній змінній прямої задачі відповідає обмеження двоїстої задачі, причому кількість обмежень дорівнює кількості невідомих прямої задачі.

3. Якщо цільова функція прямої задачі задається на пошук найбільшого значення (max), то цільова функція двоїстої задачі - на визначення найменшого значення (min), і навпаки.

4. Коефіцієнтами при змінних в цільовій функції двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень прямої задачі.

5. Правими частинами системи обмежень двоїстої задачі є коефіцієнти при змінних в цільовій функції прямої задачі.

6. Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

що складається з коефіцієнтів при змінних у системі обмежень прямої задачі, і матриця коефіцієнтів в системі обмежень двоїстої задачі

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

утворюються одна з одної транспонуванням, тобто заміною рядків стовпчиками, а стовпчиків - рядками.

Остаточно отримаємо:

$$F = -y_1 + 5y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -5, \\ -y_1 + 3x_2 \ge 2, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

1.

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

2. Векторна форма запису системи обмежень має вигляд

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній вектор $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тому використаємо штучну змінну в першому обмеженні.

3. Розширена задача лінійного програмування буде така:

$$\max Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

У цій задачі x_4 та x_5 - базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 - вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$.

Перший опорний план задачі:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 5;\ 1),\ Z_0 = -M.$$

4. Подальше розв’язування прямої задачі подано у вигляді симплекс-таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	–5	2	0	0	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow x_5$ x_4	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	–1 0	0 1	1 0	1 5/3
$Z_j - C_j \geq 0$		0 $-M$	5 –M	–2 –M	0 M	0 0	0 0	
x_2 $\leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 –1	1 0	–1 3	0 1	1 –3	— 2/3
$Z_j - C_j \geq 0$		2	7	0	–2	0	2 + M	
x_2 x_3	2 0	5/3 2/3	2/3 –1/3	1 0	0 1	1/3 1/3	0 –1	
$Z_j - C_j \geq 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	0 + M	

З останньої симплекс-таблиці бачимо, що оптимальний план прямої задачі

$$X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3;\ 0),\ Z_{\max} = 10/3.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна записати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$\min F = \max Z = 10/3,$$

$$Y^* = \vec{c}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{баз} = (2;\ 0)$ та міститься в стовпчику «$C_{баз}$» останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

він також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_5» та «x_4», які утворювали початковий базис.

Отже,

$$Y^* = (2;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;\ 2/3),$$

$$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Застосовуючи до розв’язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв’язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

Приклад 3 До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$$Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Розв'язання. За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$F = y_1 + 4y \to max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 1, \\ y_1 + 2y_2 \leq 2, \\ -y_1 + y_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$y_2 \geq 0.$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна y_1, що відповідає рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна y_2 - лише невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв'язати графічно (рис. 1).

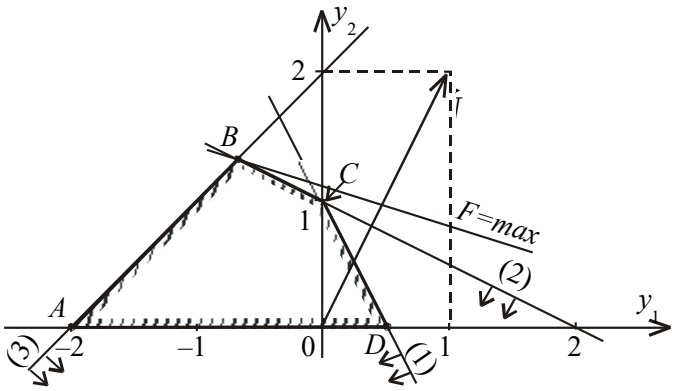


Рис. 1

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі F досягає в точці B многокутника $ABCD$. Її координати:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

тобто

$$Y^* = (-2/3;\ 4/3);\ \max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3.$$

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості.

Підставимо Y^* у систему обмежень двоїстої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:

$$\begin{cases} 2\cdot(-2/3)+4/3=0; \\ -2/3+2\cdot 4/3=2; \\ -1\cdot(-2/3)+4/3=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<1; \\ 2=2; \\ 2=2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, доходимо висновку, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю $x_1 = 0$ (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану $y_2 = 4/3$ додатна, доходимо висновку, що друге обмеження прямої задачі для X^* виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій $x_1 = 0$, та визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто

$$X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3),\ \min Z = 1\cdot 0 + 2\cdot 5/3 + 2\cdot 2/3 = 14/3.$$

Умова

$$\min Z = \max F = 14/3$$

виконується, і тому

$$X^* = (0;\ 5/3;\ 2/3);\ Y^* = (-\ 2/3;\ 4/3)$$

є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.

Приклад 4 Визначити, чи оптимальні такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$Z = 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\quad j = \overline{1,\ 3}.$$

а) $x = (8/7;\ 3/7;\ 0)$; б) $x = (0;\ 1/5;\ 8/5)$; в) $x = (1/3;\ 0;\ 1/3)$.

Розв'язання. Принцип розв'язування задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу та припускаючи, що відповідний план X є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій збігатимуться, то припущення правильне. Протилежного висновку можна дійти в таких випадках.

1. Якщо запропонований план X недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі.

2. Якщо визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі.

3. Якщо визначений план двоїстої задачі допустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції F не дорівнює значенню функції Z, тобто не виконується умова першої теореми двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу до прямої задачі лінійного програмування:

$$F = y_1 + 2y_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \le 12, \\ -3y_1 + 2y_2 \le -4, \\ y_1 + y_2 \le 2, \end{cases}$$
$$y_1 \in \left]-\infty; \infty\right[, \quad y_2 \ge 0.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1. $X = (8/7; 3/7; 0)$. Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 8/7 - 3 \cdot 3/7 + 0 = 1; \\ 8/7 + 2 \cdot 3/7 + 0 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2, \end{cases}$$

Обидва обмеження виконуються і тому $X = (8/7; 3/7; 0)$ є допустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді для нього $Z = 12 \cdot 8/7 + 4 \cdot 3/7 + 2 \cdot 0 = 12$.

Скористаємося другою теоремою двоїстості та визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки $x_1 = 8/7 > 0$; $x_2 = 3/7 > 0$, то згідно з другою частиною другої теореми двоїстості можна записати перше та друге обмеження як рівняння і визначити y_1 і y_2:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 12; \\ -3y_1 + 2y_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в третє обмеження системи двоїстої задачі:

$$y_1 + y_2 \le 2;$$
$$4 + 4 = 8 > 2.$$

Для визначених значень $y_1 = 4$; $y_2 = 4$ це обмеження не виконується, і тому відповідний план $Y = (4; 4)$ є недопустимим планом двоїстої задачі. Унаслідок цього наше припущення, що $X = (8/7; 3/7; 0)$ є оптимальним планом вихідної задачі, виявилося помилковим.

2. $X = (0; 1/5; 8/5)$. Підставимо цей план в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1/5 + 8/5 = 1; \\ 0 + 2 \cdot 1/5 + 8/5 = 2. \end{cases}$$

План допустимий і для нього $Z = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1/5 + 2 \cdot 8/5 = 12/5$.

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти x_3 та x_2 додатні, то друге та третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння:

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4; \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8/5; \\ y_2 = 2/5. \end{cases}$$

Перевіримо, що виконується перше обмеження двоїстої задачі для визначених значень y_1 та y_2: $2 \cdot 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12$. Отже, перше обмеження виконується, і тому $Y = (8/5; 2/5)$ є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього

$$F = 8/5 + 2 \cdot 2/5 = 12/5 = Z.$$

З огляду на викладене можна зробити висновок, що $Y^* = (8/5;\ 2/5)$ є оптимальним планом двоїстої задачі, а $X^* = (0;\ 1/5;\ 8/5)$ - оптимальним планом прямої задачі.

Наше припущення відносно запропонованого плану виявилося правильним.

3. $X = (1/3;\ 0;\ 1/3)$. Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються так:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/3 - 3 \cdot 0 + 1/3 = 1; \\ 1/3 + 2 \cdot 0 + 1/3 = 2/3 \neq 2. \end{cases}$$

Оскільки $X = (1/3;\ 0;\ 1/3)$ є недопустимим планом, то він не може бути також оптимальним планом прямої задачі.

Отже, перевірка запропонованих планів на оптимальність дала такі результати:

а) ні; б) так, $Y^* = (0;\ 1/5;\ 8/5)$, $\min Z = 12/5$; в) ні.

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.9], с. 50 – 55.

Вправи

1 У наведених далі задачах записати двоїсту задачу до поставленої задачі лінійного програмування. Розв'язати одну із задач і визначити оптимальний план іншої задачі:

$$Z = -30x_1 + 10x_2 \to \max; \quad \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3, \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

$$Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \to \min; \quad \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max; \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50, \\ 3x_1 + x_3 \geq 15, \\ x_1 + 4x_2 \leq 40, \end{cases} \quad x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

Питання для самоперевірки

1 У чому сутність двоїстості у лінійному програмуванні?

2 Які взаємоспряжені задачі називаються симетричними, а які - несиметричними? Чим вони відрізняються?

3 Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?

4 Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.

5 Як за розв’язком прямої задачі знайти розв’язок двоїстої?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6

Цілочислове лінійне програмування. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування. Частково і повністю цілочислові задачі лінійного програмування. Приклади економічних задач, що зводяться до задач цілочислового лінійного програмування. Метод Гоморі.

Розв’язання прикладів

Загальна задача цілочислового програмування записується так:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min), \quad (6.1)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{Bmatrix} b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \quad (6.2)$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right), \quad (6.3)$$

$$x_j \text{ - цілі} \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \quad (6.4)$$

Суть методу Гоморі полягає ось у чому:

1. Знаходять розв’язок послабленої, тобто задачі без вимог цілочисловості змінних - (6.1) - (6.3).

Якщо серед елементів умовно-оптимального плану немає дробових чисел, то цей план є оптимальним планом задачі цілочислового програмування (6.1) - (6.4).

2. Коли в умовно-оптимальному плані є дробові значення, то вибирається змінна, яка має найбільшу дробову частину. На базі цієї змінної (елементів відповідного рядка останньої симплексної таблиці, в якому вона міститься) будується додаткове обмеження Гоморі:

$$\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \ge \{b_j\},$$

де символ {} позначає дробову частину числа.

Для визначення дробової частини будь-якого числа від цього числа віднімають цілу його частину - найбільше ціле число, що не перевищує даного. Цілу частину числа позначають символом [ ]. Наприклад,

[1,3] = 1; [–1,3] = –2;

{1,3} = 1,3 – 1 = 0,3; {–1,3} = –1,3 – (–2) =2 – 1,3 = 0,7.

3. Додаткове обмеження після зведення його до канонічного вигляду і введення базисного елемента приєднується до останньої симплексної таблиці, яка містить умовно-оптимальний план. Здобуту розширену задачу розв’язують,

а далі перевіряють її розв'язок на цілочисловість. Якщо він не цілочисловий, то процедуру повторюють, повертаючись до п. 2. Так діють доти, доки не буде знайдено цілочислового розв'язку або доведено, що задача не має допустимих розв'язків у множині цілих чисел.

Досвід показує, що процес розв'язування задач великої розмірності методом Гоморі повільно збіжний. Істотними є також похибки округлення, які можуть призвести до того, що отриманий цілочисловий план не буде оптимальним.

Приклад 1 Сільськогосподарське підприємство задумало створити сушильний цех на виробничій площі 190 м^2, маючи для цього 100 тис. грн. і можливість придбати устаткування двох типів А і В. Техніко-економічну інформацію про ці два види устаткування подано в таблиці:

Техніко-економічний показник	Устаткування		Ресурс
	А	В	
Вартість, тис. грн.	25	10	100
Необхідна виробнича площа, м^2	40	20	190
Потужність, тис. грн./рік	350	150	—

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 - кількість комплектів устаткування відповідно типу А і В.

Запишемо математичну модель:

$$Z = 350x_1 + 150x_2 \to \max,$$

$$25x_1 + 10x_2 \le 100,$$

$$40x_1 + 20x_2 \le 190,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$x_1 \text{ і } x_2 \text{ - цілі.}$$

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Остання симплексна таблиця набере вигляду:

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
$Z_j - C_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження виду $\sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} x_j \ge \{b_j\}$:

$$\{1\}x_1+\{0\}x_2+\left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3+\left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4\geq\left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Оскільки $\left\{-\frac{2}{5}\right\}=\frac{3}{5}$, $\left\{-\frac{1}{4}\right\}=\frac{3}{4}$, $\left\{7\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}$, то додаткове обмеження набирає вигляду

$$\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4\geq\frac{1}{2}.$$

Зведемо його до канонічної форми та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3+\frac{3}{4}x_4-x_5+x_6\geq\frac{1}{2}.$$

Приєднавши здобуте обмеження до останньої симплексної таблиці з умовно-оптимальним планом, дістанемо:

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	350	150	0	0	0	$-M$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	$-M$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	-1	1
$Z_j-C_j\geq 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв’язуючи наведену задачу, остаточно знаходимо цілочисловий оптимальний план: $X^*(x_1=2;\ x_2=5)$, $Z_{\max}=1450$.

Приклад 2 Знайти максимум

$$Z(X)=x_1+x_2\to\max,$$

при обмеженнях

$$-x_1+3x_2\leq 3,$$
$$3x_1-x_2\leq 3,$$
$$x_1\geq 0, x_2\geq 0,$$
$$x_1, x_2-\text{цілі}.$$

Розв’язання. Застосовуючи симплекс-метод, одержимо симплекс - таблицю останнього кроку (табл.1), при якому одержимо оптимальний розв’язок.

Таблиця 1

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	1	1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_2	1	3/2	0	1	3/8	1/8
x_1	1	3/2	1	0	1/8	3/8
Δ_j		3	0	0	1/2	1/2

З таблиці 1 зробимо висновок, що оптимальний розв'язок має вигляд $X_{опт} = \left(\frac{3}{2};\ \frac{3}{2};\ 0;\ 0\right)$, який містить дробові компоненти: $x_1 = \frac{3}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}$. Оскільки їх дробові частини однакові, то за формулою $\{\beta_{i_0}\} - \sum_{x_j \in \{БЗ\}} [\alpha_{io,j}] x_j \le 0$ запишемо доповнююче обмеження, наприклад, для змінної x_1:

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\left\{\frac{1}{8}\right\} x_3 + \left\{\frac{3}{8}\right\} x_4\right) \le 0,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{8} x_3 - \frac{3}{8} x_4 \le 0,$$

$$\frac{1}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 - x_5 = \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{8} x_3 - \frac{3}{8} x_4 + x_5 = \frac{1}{2}.$$

Отримане доповнюючи обмеження заноситься в таб.2.

Таблиця 2

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	1	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	1	3/2	0	1	3/8	1/8	0
x_1	1	3/2	1	0	1/8	3/8	0
x_5	0	-1/2	0	0	-1/8	-3/8	1
Δ_j		3	0	0	1/2	1/2	0

Розв'яжемо одержану задачу двоїстим симплекс – методом, в результаті отримаємо таблицю 3:

Таблиця 3

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	1	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_2	1	4/3	0	1	1/3	0	1/3
x_1	1	1	1	0	0	0	1
x_4	0	4/3	0	0	1/3	1	-8/3
Δ_j		7/3	0	0	1/3	1/2	4/3

Знайдений оптимальний розв'язок $X_{оп} = \left(1;\ \frac{4}{3};\ 0;\ \frac{4}{3};\ 0\right)$ знову нецілочисловий, тому що містить дробові компоненти: $x_2 = 4/3$ і $x_1 = 4/3$. Отже, продовжуємо розв'язання задачі методом Гоморі до отримання оптимального цілочислового розв'язку (табл.4 , табл.5).

Таблиця 4

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	1	1	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1	4/3	0	1	1/3	0	1/3	0
x_1	1	1	1	0	0	0	1	0
x_4	0	4/3	0	0	1/3	1	-8/3	0
x_6	0	-1/3	0	0	-1/3	0	-1/3	1
Δ_j		7/3	0	0	1/3	1/2	4/3	0

Таблиця 5

$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	1	1	0	0	0	
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_2	1	1	0	1	0	0	0	0
x_1	1	1	1	0	0	0	1	0
x_4	0	1	0	0	0	1	-3	0
x_3	0	1	0	0	1	0	1	-3
Δ_j		2	0	0	0	0	1	1

Як видно, з кінцевої симплекс-таблиці (табл.5), одержано оптимальний розв'язок цілочислового програмування: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, на якому цільова функція $Z(X)$ досягає максимуму $\max Z(X) = 2$.

Приклад 3 Знайти мінімум

$$Z(X) = -3x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min,$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 3x_1 + \quad x_2 + 5x_3 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3},$$

$$x_j - \text{цілі}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Розв'язання. Використовуючи симплексний метод, знаходимо рішення задачі без умов цілочисловості. Будуємо допустиме базисне рішення(ДБР).

Розв'язуємо задачу, використовуючи отримане ДБР. Всі обчислення оформляємо у вигляді таблиці.

i	$X_{баз}$	$C_{баз}$	План	–3	–1	–2	0
				x_1	x_2	x_3	x_4
1	–	–	9	1	2	4	
2	–	–	10	3	1	5	
1	x_2	–1	$^9/_2$	$^1/_2$	1	2	
2	–	–	$^{11}/_2$	$^5/_2$	0	3	
1	x_2	–1	$^{17}/_5$	0	1	$^7/_5$	
2	x_1	–3	$^{11}/_5$	1	0	$^6/_5$	
3	$\Delta_j \leq 0$		–10	0	0	–3	
1	x_2	–1	$^{17}/_5$	0	1	$^7/_5$	0
2	x_1	–3	$^{11}/_5$	1	0	$^6/_5$	0
3	$\leftarrow x_4$	0	–1	0	0	–1 ↑	1
4			–10	0	0	–3	0
1	x_2	–1	2	0	1	0	$^7/_5$
2	x_1	–3	1	1	0	0	$^6/_5$
3	x_3	–2	1	0	0	1	–1
4			–7	0	0	0	–3

Таблиця складається з трьох частин. Побудоване ДБР виявилося оптимальним розв'язком задачі без умов цілочисельності, так як у першій таблиці всі оцінки $\Delta_j \leq 0$. Отримаємо $Z_{\min} = -10$; $X_{опт.} = \left(\frac{11}{5}; \frac{17}{5}; 0\right)$.

Нам необхідно отримати цілочисельний розв'язок. Знаходимо дробові частини x_1 та x_2: $\left\{\frac{17}{5}\right\} = \left\{3\frac{2}{5}\right\} = \frac{2}{5}$; $\left\{\frac{11}{5}\right\} = \left\{2\frac{1}{5}\right\} = \frac{1}{5}$.

Додаткове обмеження будуємо для змінної x_2 (перше рівняння), так як $\frac{2}{5} > \frac{1}{5}$.

$$\left\{\frac{7}{5}\right\} x_3 \geq \left\{\frac{17}{5}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} x_3 \geq \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad x_3 \geq 1.$$

Нерівність перетворимо в рівняння: $x_3 - x_4 = 1$. Множимо обидві частини цього рівняння на -1:

$$-x_3 + x_4 = -1.$$

У симплексній таблиці додаємо рядок і стовпець і дописуємо отримане рівняння (друга частина таблиці).

Застосовуючи двоїстий симплексний метод, отримуємо відповідь:

$$Z_{\min} = -7; \quad X_{опт.} = (1; 2; 1).$$

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.10**],** с. 55 – 61.

Вправи

1 Методом Гоморі розв'язати задачі цілочислового програмування:

$$Z = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \text{ цілі}, \quad j = \overline{1, 4}.$$

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_5 \to \min;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \text{ цілі}, \quad j = \overline{1, 5}.$$

$$Z = x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 12x_2 + 4x_3 + x_4 = 34, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 22, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \text{ цілі}, \quad j = \overline{1, 4}.$$

Питання для самоперевірки

1 В чому полягає суть методу Гоморі?

2 Який вигляд має задача цілочислового програмування?

3 Чим відрізняються одна від одної задачі повністю цілочисловою лінійного програмування та частково цілочислова задача лінійного програмування?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7

Транспортна задача. Економічне і математичне формулювання транспортної задачі. Замкнена і відкрита моделі транспортної задачі. Основні методи побудови початкового опорного плану.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Проілюструємо побудову початкового базисного рішення на прикладі транспортної задачі, заданою матрицею даних (таблиця. 1). У лівому верхньому кутку кожної клітини таблиці вказані вартості c_{ij} перевезень одиниць вантажу.

Розглянемо два методи побудови початкового плану : метод північно-західного кута (діагональний метод) і метод найменшої вартості.

Таблиця 1

Пункти признач. / Пункти відпралв.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	2	3	2	4	30
A_2	3	2	5	1	40
A_3	4	3	2	6	20
Потреби	20	30	30	10	90

Розв'язання.

Діагональний метод (метод північно-західного кута)

Спочатку роз'яснимо суть діагонального методу на прикладі транспортної задачі, заданій таблицею 1. Спробуємо задовольнити потреби першого пункту призначення B_1 запасами першого пункту відправлення A_1. В даному випадку це можна зробити, оскільки запаси $a_1 = 30$ перевершують потреби $b_1 = 20$.

Заповнимо клітину $x_{11} = 20$. Потреби пункту B_1 задоволені повністю, і тому стовпець, відповідний пункту B_1, тимчасово виключимо з розгляду. При цьому запаси пункту відправлення A_1, що залишилися, тепер дорівнюють різниці $a_1 = 30 - 20 = 10$.

Далі задовольнимо потреби пункту B_2 запасами $a_1 = 10$ пункту відправлення A_1, тобто $x_{12} = 10$. Оскільки $b_2 = 30 > a_1 = 20$, потреби пункту B_2 цілком з пункту відправлення A_1 задовольнити не можна. Тому недолік потреби пункту призначення B_2 задовольнимо за рахунок запасів пункту відправлення A_2. Це можливо, оскільки запаси пункту відправлення A_2 рівні $a_2 = 40 > b_2 - a_1 = 20$. Тому $x_{22} = 20$, а залишок запасів пункту відправлення A_2 складає $a_2 = 40 - 20 = 20$. Потреби пункту призначення B_2 задоволені повністю, і стовпець, відповідний пункту B_2, тимчасово виключимо з розгляду. Також повністю вичерпані запаси пункту відправлення A_1, і стовпець A_1 теж тимчасово виключимо.

Таким чином, запаси двох пунктів відправлення - пункту A_2 (запаси $a_2 = 20$) і пункту відправлення A_3 (запаси $a_3 = 20$). Відмітимо, що сума усіх потреб як і раніше дорівнює сумі усіх запасів.

Аналогічним прийомом продовжуємо задовольняти потреби пунктів призначення B_3 і B_4 за рахунок запасів пунктів призначення A_2 і A_3. При цьому виявляться вичерпаними усі запаси в пунктах відправлення і задоволені потреби пунктів призначення B_3 і B_4. Будуть також визначені кількості

одиниць вантажу $x_{23} = 20$, $x_{33} = 10$, $x_{34} = 10$ і заповнені відповідні клітини таблиці. Вписавши усі кількості одиниць вантажу в таблицю 1, отримаємо таблицю 2 - матрицю перевезень даної транспортної задачі. Включивши усі отримані дані в таблицю 1, отримаємо таблицю 2.

Набір значень невідомих в таблиці 2 є розв'язком, допустимим в транспортній задачі, оскільки ці розв'язки додатні. Заповнених клітин в таблиці 2 рівно стільки, скільки має бути базисних невідомих. А саме, ранг $r = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

Таблиця 2

Пункти признач. / Пункти відправл.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	**2** **20**	**3** **10**	2	4	30
A_2	3	**2** **20**	**5** **20**	1	40
A_3	4	3	**2** **10**	**6** **10**	20
Потреби	20	30	30	10	90

Згідно з діагональним методом побудови опорного плану, на кожному кроці розглядається перший з пунктів відправлення, що залишилися, і перший з пунктів призначення, що залишилися. Тому метод північно-західного кута можна описати наступною блок-схемою, в якій n - число пунктів відправлення, m - число пунктів призначення.

Метод найменшої вартості (метод мінімального елемента)

На відміну від методу північно-західного кута вибору опорного плану, побудова плану за методом найменшої вартості полягає у виборі пунктів призначення на кожному кроці, орієнтуючись на вартість перевезень. А саме, на кожному кроці слід вибирати клітину, що відповідає мінімальній вартості перевезень, і розглядати пункти призначення, які відповідають вибраній клітині.

Розглянемо побудову опорного плану за методом найменшої вартості на прикладі транспортної задачі, заданою матрицею даних в таблиці 1. Найменша вартість дорівнює одиниці ($c_{24} = 1$). Тому вважаємо $x_{24} = 10$. Вносимо значення $x_{24} = 10$ до відповідної клітини таблиці, і стовпець B_4 виключаємо з розгляду. При цьому запаси в пункті відправлення A_2 скорочуються до величини 40 - 10 = 30. Тепер мінімальна з вартостей, що залишилися, в рядку A_2 і стовпці B_2 рівна двом, і потребі пункту B_2 можна цілком задовольнити за рахунок

запасів пункту відправлення A_2: $x_{22} = 30$. Рядок A_2 і стовпець B_2 з розгляду виключаємо. Мінімальна вартість як і раніше дорівнює двом. Вибираємо ті клітини, що відповідають такій вартості, відповідні пунктам A_1 і B_1. Потреби пункту призначення B_1 можна задовольнити із запасів пункту відправлення A_1: $x_{11} = 20$. При цьому стовпець B_1 виключаємо з розгляду. Запаси пункту відправлення A_1 скорочуються до 30 - 20 = 10. Ці запаси направляємо в пункт призначення B_3: $x_{13} = 10$. Останньою заповнюємо клітину $x_{33} = 20$ із запасів пункту відправлення A_3 ($a_3 = 20$). Знайдені значення невідомих занесемо до таблиці 3.

Таблиця 3

Пункти признач. / Пункти відправл.	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси
A_1	**2** **20**	**3** **0**	**2** **10**	4	30
A_2	3	**2** **30**	5	**1** **10**	40
A_3	4	3	**2** **20**	6	20
Потреби	20	30	30	10	90

Число базисних невідомих в цій транспортній задачі $r = 6$. Число заповнених клітин в третій таблиці рівне п'яти. Тому в якості базисної змінної можна узяти будь-яку з вільних змінних, наприклад, змінну $x_{13} = 0$, оскільки клітина, відповідна змінній x_{13}, має одну з найменших вартостей : $c_{13} = 3$.

Обчислимо загальну вартість перевезень по складених опорних планах

а) по діагональному методу;

б) по методу найменшої вартості.

З таблиці 2 визначаємо загальну вартість перевезень за методом північно-західного кута:

$$F_0 = 2\times 20 + 3\times 10 + 2\times 20 + 5\times 20 + 2\times 10 + 6\times 10 = 290 .$$

З таблиці 3 визначаємо загальну вартість перевезень за методом найменшої вартості :

$$F_0 = 2\times 20 + 2\times 0 + 2\times 10 + 2\times 30 + 1\times 10 + 2\times 20 = 170 .$$

Тому загальна вартість перевезень за планом, розрахованому методом найменшої вартості, значно менше загальної вартості, розрахованої за планом, складеному методом північно-західного кута: 170 < 290.

Приклад 2 Знайти початковий опорний план даної транспортної задачі методом північно-західного кута і методом мінімального елемента(Таблиця 1). Розв'язки порівняти за значеннями цільової функції.

A_i – постачальник; B_j – споживач.

Таблиця 1

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3	5	8	
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	
$b_j - x_{ij}$					

Розв'язання. Перевіряємо умову: $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$. Маємо $\sum_{i=1}^{3} a_i = 12+5+18 = 35$, $\sum_{j=1}^{4} b_j = 10+11+8+6 = 35$. Задача закрита(збалансована).

Метод північно-західного кута

1 крок. Обчислюємо

$$x_{11} = \min\{12,10\} = 10, \quad a_1 - x_{11} = 12-10 = 2, \quad b_1 - x_{11} = 10-10 = 0$$

заносимо дані у таблицю 2 і викреслюємо перший стовпчик.

Таблиця 2

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 **10**	3	5	8	2
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	
$b_j - x_{ij}$	0	9			

2 крок. Обчислюємо

$$x_{12} = \min\{2,11\} = 2, \quad a_1^{(1)} - x_{12} = 2-2 = 0, \quad b_2 - x_{12} = 11-2 = 9$$

заносимо дані у таблицю 3 і викреслюємо перший рядок.

Таблиця 3

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 **10**	3 **2**	5	8	0
5	5	7	6	4	
18	1	4	3	7	
$b_j - x_{ij}$	0	9			

3 крок. Обчислюємо

$$x_{22} = \min\{5,9\} = 2, \quad a_2 - x_{22} = 5 - 5 = 0, \quad b_2^{(1)} - x_{22} = 9 - 5 = 4$$

заносимо дані у таблицю 4 і викреслюємо другий рядок.

Таблиця 4

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 **10**	3 **2**	5	8	0
5	5	7 **5**	6	4	0
18	1	4	3	7	
$b_j - x_{ij}$	0	4			

4 крок. Обчислюємо

$$x_{32} = \min\{18,4\} = 4, \quad a_3 - x_{32} = 18 - 4 = 14, \quad b_2^{(2)} - x_{32} = 4 - 4 = 0$$

заносимо дані у таблицю 5 і викреслюємо другий стовпчик.

Таблиця 5

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 **10**	3 **2**	5	8	0
5	5	7 **5**	6	4	0
18	1	4 **4**	3	7	14
$b_j - x_{ij}$	0	0			

5 крок. Обчислюємо

$$x_{33} = \min\{14, 8\} = 8, \quad a_3^{(1)} - x_{33} = 14 - 8 = 6, \quad b_3 - x_{33} = 8 - 8 = 0$$

заносимо дані у таблицю 6 і викреслюємо третій стовпчик.

Таблиця 6

A_i \ B_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 **10**	3 **2**	5	8	0
5	5	7 **5**	6	4	0
18	1	4 **4**	3 **8**	7	6
$b_j - x_{ij}$	0	0	0		

6 крок. Обчислюємо

$$x_{34} = \min\{6, 6\} = 6, \quad a_3^{(2)} - x_{34} = 6 - 6 = 0, \quad b_4 - x_{34} = 6 - 6 = 0$$

заносимо дані у таблицю 7 і викреслюємо або третій рядок, або четвертий стовпчик.

Таблиця 7

A_i \ B_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10 **10**	3 **2**	5	8	0
5	5	7 **5**	6	4	0
18	1	4 **4**	3 **8**	7 **6**	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	0	

Остаточно маємо такий початковий опорний план

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

якому відповідає значення цільової функції задачі

$$F_0 = 10 \cdot 10 + 3 \cdot 2 + 7 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 8 + 7 \cdot 6 = 223.$$

Метод мінімального елемента

1 крок. Вибираємо клітину (3,1) з найменшим значенням транспортних витрат $c_{31} = 1$. Обчислюємо

$$x_{31} = \min\{18, 10\} = 10, \quad a_3 - x_{31} = 18 - 10 = 8, \quad b_1 - x_{31} = 10 - 10 = 0$$

заносимо дані у таблицю 8 і викреслюємо перший стовпчик.

Таблиця 8

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3	5	8	
5	5	7	6	4	
18	1 **10**	4	3	7	8
$b_j - x_{ij}$	0				

2 крок. Серед невикреслених клітин дві клітини (1,2) і (3,3) мають найменші транспортні витрати $c_{12} = c_{33} = 3$. Спочатку заповнимо клітину з меншим номером рядка (1,2). Обчислюємо

$$x_{12} = \min\{12,11\} = 11, \quad a_1 - x_{12} = 12 - 11 = 1, \quad b_2 - x_{12} = 11 - 11 = 0$$

заносимо дані у таблицю 9 і викреслюємо другий стовпчик.

Таблиця 9

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3 **11**	5	8	1
5	5	7	6	4	
18	1 **10**	4	3	7	8
$b_j - x_{ij}$	0	0			

3 крок. Заповнюємо клітину (3,3). Обчислюємо

$$x_{33} = \min\{8,8\} = 8, \quad a_3^{(1)} - x_{33} = 8 - 8 = 0, \quad b_3 - x_{33} = 8 - 8 = 0$$

заносимо дані у таблицю 10 і викреслюємо третій рядок і третій стовпчик. При цьому заносимо базисний нуль в одну з клітин (1,3), (2,3), (3,4), наприклад, у клітину (1,3):

Таблиця 10

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3 **11**	5 **0**	8	1
5	5	7	6	4	
18	1 **10**	4	3 **8**	7	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0		

4 крок. Заповнюємо клітину (2,4). Обчислюємо

$$x_{24} = \min\{5,6\} = 5, \quad a_2 - x_{24} = 5 - 5 = 0, \quad b_4 - x_{24} = 6 - 5 = 1$$

заносимо дані у таблицю 11 і викреслюємо другий рядок.

Таблиця 11

B_j / A_i	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3 **11**	5 **0**	8	1
5	5	7	6	4 **5**	0
18	1 **10**	4	3 **8**	7	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	1	

5 крок. Заповнюємо клітину (1,4). Обчислюємо

$$x_{14} = \min\{1,1\} = 1, \quad a_1^{(1)} - x_{14} = 1 - 1 = 0, \quad b_4^{(1)} - x_{14} = 1 - 1 = 0$$

заносимо дані у таблицю 12 і викреслюємо або перший рядок, або четвертий стовпчик.

Таблиця 12

A_i \ B_j	10	11	8	6	$a_i - x_{ij}$
12	10	3 **11**	5 **0**	8 **1**	0
5	5	7	6	4 **5**	0
18	1 **10**	4	3 **8**	7	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	0	

Маємо такий початковий опорний план.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 11 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

на якому цільова функція задачі набуває значення

$$F_0 = 3\cdot 11 + 8\cdot 1 + 4\cdot 5 + 1\cdot 10 + 3\cdot 8 = 95.$$

Оскільки 95 < 223, то метод мінімального елемента дав більш економічний початковий опорний план.

Приклад 3 Побудувати початковий опорний план транспортної задачі

A_i \ B_j	40	35	30	45
45	4	3	2	7
35	1	1	6	4
40	3	5	9	4

з додатковою умовою − потреби пункту B_1 повинні бути задоволені повністю.

Розв'язання. Обчислюємо сумарний запас продукту та сумарний попит на продукт.

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 45 + 35 + 40 = 120, \ \sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 35 + 30 + 45 = 150.$$

Задача відкрита(незбалансована) попит перевищує пропозицію на $\sum_{j=1}^{4} b_j - \sum_{i=1}^{3} a_i = 150 - 120 = 30$ одиниць продукту. Вводимо фіктивного постачальника з об'ємом запасу $a_4 = 30$. Оскільки перший споживач B_1 не повинен отримувати фіктивний продукт, то клітину (4, 1) блокуємо нескінченним штрафом $M > 0$ за перевезення одиниці продукту; іншим споживачам, оскільки для них не задані додаткові умови, питомі транспортні витрати, що дорівнюють штрафам за

невивезення одиниці продукту, покладаємо рівними нулю. Дані заносимо у таблицю.

Таблиця 1

A_i \ B_j	40	35	30	45	$a_i - x_{ij}$
45	4	3	2	7	
35	1	1	6	4	
40	3	5	9	4	
30	M	0	0	0	
$b_j - x_{ij}$					

Початковий опорний план знаходимо методом мінімального елемента. Першою заповнюємо клітину (4, 1):

$$x_{42} = \min\{30, 35\} = 30, \quad a_4 - x_{42} = 30 - 30 = 0, \quad b_2 - x_{42} = 35 - 35 = 5.$$

Викреслюємо четвертий рядок у таблиці 1.

Наступною заповнюємо клітину (2, 1):

$$x_{21} = \min\{35, 40\} = 35, \quad a_2 - x_{21} = 35 - 35 = 0, \quad b_1 - x_{21} = 40 - 35 = 5.$$

Викреслюємо другий рядок (див.таблицю 2).

Далі заповнюємо клітину (1, 3):

$$x_{13} = \min\{45, 30\} = 30, \quad a_1 - x_{13} = 45 - 30 = 15, \quad b_3 - x_{13} = 30 - 30 = 0.$$

Викреслюємо третій стовпчик (див.таблицю 2)

Таблиця 2

A_i \ B_j	40	35	30	45	$a_i - x_{ij}$
45	4	3	2 **30**	7	15
35	1 **35**	1	6	4	0
40	3	5	9	4	
30	M	0 **30**	0	0	0
$b_j - x_{ij}$	5	5	0		

Наступною заповнюємо клітину (1, 2):

$$x_{12} = \min\{15, 5\} = 5, \quad a_1^{(1)} - x_{12} = 15 - 5 = 10, \quad b_2^{(1)} - x_{12} = 5 - 5 = 0.$$

Викреслюємо другий стовпчик. (див. таблицю 3)

Далі заповнюємо клітину (3, 1) :

$$x_{31} = \min\{40, 5\} = 5, \quad a_3 - x_{31} = 40 - 5 = 35, \quad b_1^{(1)} - x_{31} = 5 - 5 = 0.$$

Викреслюємо перший стовпчик (див. таблицю 3)

Наступною заповнюємо клітину (3, 4):

$$x_{34} = \min\{35, 45\} = 35, \quad a_3^{(1)} - x_{34} = 35 - 35 = 0, \quad b_4 - x_{34} = 45 - 35 = 10.$$

Викреслюємо третій рядок (див. таблицю 3).

І, накінець, заповнюємо останню невикреслену клітину (1, 4):

$$x_{14} = \min\{10, 10\} = 10, \quad a_1^{(2)} - x_{14} = 10 - 10 = 0, \quad b_4^{(1)} - x_{14} = 10 - 10 = 0.$$

Викреслюємо четвертий стовпчик (див. таблицю 3).

Таблиця 3

A_i \ B_j	40	35	30	45	$a_i - x_{ij}$
45	4	3 **5**	2 **30**	7 **10**	0
35	1 **35**	1	6	4	0
40	3 **5**	5	9	4 **35**	0
30	*M*	0 **30**	0	0	0
$b_j - x_{ij}$	0	0	0	0	

Отримали таблицю 4 з початковим опорним планом задачі.

Таблиця 4

A_i \ B_j	40	35	30	45
45	4	3 **5**	2 **30**	7 **10**
35	1 **35**	1	6	4
40	3 **5**	5	9	4 **35**
30	*M*	0 **30**	0	0

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.11**],** с. 62 – 67.

Вправи

1 Знайти початковий опорний план транспортної задачі методом мінімального елемента та методом північно-західного кута.

A_i \ B_j	**15**	**15**	**40**	**30**
30	1	8	2	3
50	4	7	5	1
20	5	3	4	4

A_i \ B_j	**40**	**60**	**70**	**25**
60	2	4	3	2
65	3	1	2	3
70	5	4	1	5

A_i \ B_j	**40**	**30**	**30**	**50**
60	2	4	5	1
70	2	3	9	4
20	3	4	22	5

Питання для самоперевірки

1 Дайте економічну і математичну постановку транспортної задачі.

2 Чим відрізняється транспортна задача від загальної задачі лінійно-го програмування?

3 Сформулюйте необхідну і достатню умову існування розв’язку транспортної задачі.

4 Властивості опорних планів транспортної задачі.

5 Чим відрізняється відкрита транспортна задача від закритої?

6 Як перетворити відкриту транспортну задачу на закриту?

7 Які ви знаєте методи побудови опорного плану?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8

Метод потенціалів розв’язування транспортної задачі. Економічний зміст потенціалів.

Розв’язання прикладів

Транспортна задача є задачею лінійного програмування, яку можна розв’язати симплекс-методом. Але специфічна структура транспортної задачі дає змогу використовувати для її розв’язування ефективніший метод, який повторює, по суті, кроки симплекс-алгоритму. Таким є метод потенціалів.

Алгоритм методу потенціалів складається з таких етапів.

1 Визначення типу транспортної задачі (відкрита чи закрита).

2 Побудова першого опорного плану транспортної задачі.

3 Перевірка плану транспортної задачі на оптимальність.

4 Якщо умова оптимальності виконується, то маємо оптимальний розв’язок транспортної задачі. Якщо ж умова оптимальності не виконується, необхідно перейти до наступного опорного плану.

5 Новий план знову перевіряють на оптимальність, тобто повторюють дії п. 3, і т. д.

Приклад 1 Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_{ij} - кількість продукції, що перевозиться з i-ї фабрики до j-го замовника $(i=\overline{1,\ 3};\ \ j=\overline{1,\ 4})$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає ось у чому: уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$Z = 4 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 2 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{22} + x_{23} + \\ + 2 \cdot x_{24} + 2 \cdot x_{31} + x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 2 \cdot x_{34} \to \min.$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + \\ + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \to \min.$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80, \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,4}..$$

Розв'язування задачі подамо в таблицях, які назвемо транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості.

A_j \ B_j	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	u_i
$A_1 = 150$	4 **110**	4	2 -2 «+»	5 «–» **40**	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 **60** «–»	2 «+» **0**	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 **40**	4	2 **40**	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум. од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$. Для подальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку (2, 4). Тепер перший план транспортної задачі є невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1+v_1=4, \\ u_1+v_4=5, \\ u_2+v_3=1, \\ u_2+v_4=2, \\ u_3+v_2=1, \\ u_3+v_4=2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

(1, 2): $u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 \ = 4$ або $\Delta_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 4 - (5 + (-1)) = 0$;

(1, 3): $u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2$ або $\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 2 - (5 + (-1)) = -2 < 0$;

(2, 1): $u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5$ або $\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 5 - (2 + (-1)) = 4 > 0$;

(2, 2): $u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3$ або $\Delta_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 3 - (2 + (-1)) = 2 > 0$;

(3, 1): $u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2$ або $\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 2 - (2 + (-1)) = 1 > 0$;

(3, 3): $u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4$ або $\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 4 - (2 + (-1)) = 3 > 0$.

Умова оптимальності не виконується для клітинки (1, 3). Порушення $\Delta_{13} = -2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку (1, 3), в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки (1, 3), та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку (1, 3) переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщуються в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщуються в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщуються в клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку $\min\{60;\ 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка (1, 3) міститиме 40 од. продукції, (2, 3) міститиме (60 - 40) = 20 од., (2, 4) міститиме (0 + 40) = 40 од. Клітинка (1, 4), звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати ($n + m - 1$).

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_j \ B_j	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	u_i
$A_1 = 150$	4 «–» **110**	4	2 «+» **40**	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 «–» **20**	2 «+» **40**	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 -1 «+»	1 **40**	4	2 «–» **40**	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому $Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки (3, 1)). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану транспортної задачі і дістанемо таку таблицю:

A_j \ B_j	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	u_i
$A_1 = 150$	4 **90**	4	2 **60**	5	$u_1 = 2$
$A_2 = 60$	5	3	1	2 **60**	$u_2 = 0$
$A_3 = 80$	2 **20**	1 **40**	4	2 **20**	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Тому $Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720$ ум. од.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. - з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість виробництва та перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

Приклад 2 З трьох складів A_1, A_2, A_3 необхідно доставити будівельні матеріали на 5 будівельних майданчиків B_1, B_2, B_3, B_4 *та* B_5. Потрібно закріпити склади за майданчиками таким чином, щоб загальна сума витрат на транспортування була мінімальною. Всі дані задачі зображені в розподільній таблиці.

Розподільна таблиця

A_j \ B_j	B_1=20	B_2=50	B_3=70	B_4=25	B_5=35
A_1=40	7	3	5	4	2
A_2=130	6	2		1	7
A_3=30	3	5	2	6	4

Треба:

1 Скласти математичну модель задачі.

2Побудувати початковий опорний розв'язок.

3 За допомогою методу потенціалів знайти оптимальний розв'язок.

4 Дати економічне тлумачення одержаного оптимального розв'язку.

Розв'язання.

1 Перед складанням математичної моделі ТЗ перевіримо, чи є ця задача закритою. Для цього знайдемо

$$\sum_{j=1}^{5} b_j = 20+50+70+25+35 = 200 \text{ і } \sum_{i=1}^{3} a_i = 40+130+30 = 200.$$

Оскільки виконується умова $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$, то ця ТЗ є задачею з закритою моделлю.

Позначимо через x_{ij} кількість одиниць будівельних матеріалів, що відправляється зі складу A_i до будівельного майданчика B_j $(i=\overline{1,3}\,;\, j=\overline{1,5})$. Цільова функція $Z(X)$ досліджується на мінімум і дорівнює

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}x_{ij} = 7x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+4x_{14}+2x_{15}+6x_{21}+2x_{22}+3x_{23}+$$
$$+x_{24}+7x_{25}+3x_{31}+5x_{32}+2x_{33}+6x_{34}+4x_{35}$$

Система обмежень має вигляд

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} = 40,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25} = 130,$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35} = 30,$$
$$x_{11}+x_{21}+x_{31} = 20,$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32} = 50,$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33} = 70,$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34} = 25,$$
$$x_{15}+x_{25}+x_{35} = 30,$$
$$x_{ij} \ge 0,\ i=\overline{1,3},\ \ j=\overline{1,5}.$$

2 Методом північно-західного кута знайдемо початковий опорний розв'язок, внаслідок чого одержимо розподільну таблицю 1.

Таблиця 1

A_j \ B_j	B_1=20	B_2=50	B_3=70	B_4=25	B_5=35
A_1=40	7 **20**	3 **20** «–»	5	4	2 «+»
A_2=130	6	2 **30** «+»	3 **70**	1 **25**	7 «–» **5**
A_3=30	3	5	2	6	4 **30**

$$X_{поч.оп.} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $(m+n-1)=(3+5-1)=7$ і число завантажених клітин дорівнює 7, то початковий опорний розв'язок є невироджений. Застосування методу для виродженого розв'язку розглянемо нижче.

Значення цільової функції на цьому розв'язку дорівнює

$Z(X_{поч.оп.}) = 20\cdot 7 + 20\cdot 3 + 30\cdot 2 + 70\cdot 3 + 25\cdot 1 + 5\cdot 7 + 30\cdot 4 = 650$ (ум.од.).

3 Застосуємо метод потенціалів.

Спочатку складемо систему рівнянь для завантажених клітин:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 7, \\ u_1 + v_2 = 3, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_3 = 3, \\ u_2 + v_4 = 1, \\ u_2 + v_5 = 7, \\ u_3 + v_5 = 4, \end{cases}$$

звідки, покладаючи, наприклад, $u_2 = 0$, одержимо значення потенціалів:

$$u_1 = 1, \quad v_1 = 6, \quad v_4 = 1,$$

$$u_2 = 0, \quad v_2 = 2, \quad v_5 = 7.$$

$$u_3 = -3, \quad v_3 = 3,$$

Обчислимо оцінки Δ_{ij} для вільних клітин.

$$\Delta_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - (1+3) = 1,$$

$$\Delta_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 4 - (1+1) = 2,$$

$$\Delta_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 2 - (1+7) = -6,$$

$$\Delta_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 6 - (0+6) = 0,$$

$$\Delta_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 3 - (-3+6) = 0,$$

$$\Delta_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 5 - (-3+2) = 6,$$

$$\Delta_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 2 - (-3+3) = 2,$$

$$\Delta_{34} = c_{34} - (u_3 + v_4) = 6 - (-3+1) = 8.$$

Одержаний початковий опорний розв’язок не є оптимальним, оскільки існує від’ємна оцінка $\Delta_{15} = -6$, тобто не виконується умова оптимальності.

Перейдемо до нового опорного розв’язку, для чого побудуємо цикл перерахування. Цикл будуємо, починаючи з клітини (1,5). Позначимо цикл в табл. 1. З клітки (1,5) розставляємо позмінно знаки «+», «–», тобто клітини (1,5), (2,2) помічаємо знаком «+», а клітини (1,2), (2,5) – знаком «–». Серед клітин зі знаком «–» знаходимо клітину з найменшим вантажем, який дорівнює 5 одиницям ($\lambda = 5$). Зробивши зсув по циклу перерахування, одержимо новий опорний розв’язок, який зображено в таблиці 2.

Таблиця 2

A_j \ B_j	B_1=20	B_2=50	B_3=70	B_4=25	B_5=35	u_i
A_1=40	7 **20** «–»	3 **15**	5	4	2 «+» **5**	$u_1 = 1$
A_2=130	6	2 **35**	3 **70**	1 **25**	7	$u_2 = 0$
A_3=30	3 «+»	5	2	6	4 «–» **30**	$u_3 = 3$
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$	$v_4 = 1$	$v_5 = 1$	

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 35 & 70 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad Z(X_1) = 620.$$

Оскільки кількість змінних дорівнює $(m + n - 1) = 7$, то знайдений опорний розв’язок є невироджений.

Обчислимо оцінки

$\Delta_{13} = 1$; $\Delta_{14} = 2$; $\Delta_{21} = 0$; $\Delta_{25} = 6$; $\Delta_{31} = -6$; $\Delta_{32} = 0$; $\Delta_{33} = -4$; $\Delta_{34} = 2$.

Існують три від’ємні оцінки $\Delta_{31} = -6$; $\Delta_{33} = -4$, тому опорний розв’язок не є оптимальним. Переходимо до нового опорного розв’язку, для чого вибираємо $\max\limits_{\Delta_j < 0} |\Delta_j| = 6$, який відповідає клітині (3,1). Починаючи з цієї клітини, здійснюємо цикл перерахування (в табл. 2) і зобразимо в таблиці 3 наступний опорний розв’язок (по циклу пересувається вантаж у розмірі 20 одиниць).

Таблиця 3

B_j / A_j	B_1=20	B_2=50	B_3=70	B_4=25	B_5=35	u_i
A_1=40	7	«–» 3 **15**	5	4	«+» 2 **25**	$u_1=1$
A_2=130	6	2 «+» **35**	3 «–» **70**	1 **25**	7	$u_2=0$
A_3=30	3 **20**	5	2 «+»	6	4 «–» **10**	$u_3=3$
v_j	$v_1=0$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=1$	$v_5=1$	

$$X_2=\begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 35 & 70 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},\ Z(X_2)=500.$$

Обчислимо оцінки:

$\Delta_{11}=6$; $\Delta_{13}=1$; $\Delta_{14}=2$; $\Delta_{21}=6$; $\Delta_{25}=6$; $\Delta_{32}=0$; $\Delta_{33}=-4$; $\Delta_{34}=2$.

Отриманий опорний розв'язок X_2 (невироджений) знову не є оптимальним, оскільки серед оцінок Δ_{ij} є від'ємні.

Далі виконуємо розрахунки без пояснень (табл. 4).

Таблиця 4

B_j / A_j	B_1=20	B_2=50	B_3=70	B_4=25	B_5=35	u_i
A_1=40	7	3 **5**	5	4	2 **35**	$u_1=1$
A_2=130	6	2 **40**	3 **60**	1 **25**	7	$u_2=0$
A_3=30	3 **20**	5	2 **10**	6	4	$u_3=-1$
v_j	$v_1=4$	$v_2=2$	$v_3=3$	$v_4=1$	$v_5=1$	

$$m+n-1=7;$$

$$\Delta_{11}=2;\ \Delta_{13}=1;\ \Delta_{14}=2;\ \Delta_{21}=2;\ \Delta_{25}=6;\ \Delta_{32}=4;\ \Delta_{34}=6;\ \Delta_{35}=4;$$

$$Z(X_3)=460.$$

Всі оцінки Δ_{ij} вільних клітин додатні, тому одержаний опорний розв'язок є оптимальним

$$X_{опт}=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 45 & 60 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому мінімальне значення цільової функції дорівнює 460 (ум.од.).

Економічний зміст отриманого результату полягає у тому, що для отримання мінімальних витрат на перевезення у розмірі 460 (ум.од.) з першого

складу A_1 треба доставити на 2-ий та 5-ий будівельні майданчики відповідно 5 та 35 умовних одиниць будівельних матеріалів; з другого складу A_2 треба доставити на 2-ий, 3-ий та 4-ий майданчики відповідно 45, 60 і 25 умовних одиниць вантажу; з третього складу A_3 треба доставити на 1-ий та 3-ій майданчики відповідно 20 та 10 умовних одиниць будівельних матеріалів.

Приклад 3 Районне агропромислове об'єднання складається з трьох господарств A_1, A_2, A_3, що спеціалізуються на вирощуванні ранніх овочів. Кожне господарство щотижня збирає відповідно 50, 30 та 20 т овочів, які необхідно відправляти в чотири магазини B_1, B_2, B_3, B_4. Магазини бажають отримувати ранні овочі в кількості відповідно 30, 30, 10 та 20 т. Вартість перевезення 1 т овочів від господарства до магазинів наведено в таблиці.

	Вартість перевезення 1 т овочів у магазини			
Господарство	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	2	3	4	2
A_2	5	7	1	4
A_3	9	4	3	2

Визначити такий план перевезення овочів до магазинів, за якого загальні витрати агропромислового об'єднання будуть найменшими.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі. Нехай x_{ij} - кількість тон овочів, які перевозять з i-го господарства j-го магазину ($i=\overline{1,\ 3}$; $j=\overline{1,\ 4}$). Тоді математична модель поставленої задачі має такий вигляд:

$$Z = 2x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 2x_{14} + 5x_{21} + 7x_{22} + x_{23} + 4x_{24} + 9x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 2x_{34} \to \min,$$

за обмежень

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 30, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 20, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} + = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + = 10, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + = 20, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=\overline{1,\ 3}; \quad j=\overline{1,\ 4}.$$

Знак «≤» у перших трьох обмеженнях задачі пояснюється тим, що за умовою транспортна задача є відкритою:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 100; \quad \sum_{j=1}^{4} b_j = 90 \ .$$

У такій ситуації, коли попит менший за пропозицію, частина овочів залишиться в господарствах і фактично буде вивезено менше, ніж зібрано.

Щоб визначити оптимальний план поставленої задачі, її необхідно збалансувати, тобто звести до закритого типу. Це виконується шляхом уведення додаткового, умовного споживача B_5 із попитом B_5 = 100 – 90 = 10 т.

Вартість перевезення одиниці продукції до умовного споживача дорівнює нулю.

Знайшовши перший опорний план транспортної задачі, бачимо, що він є виродженим, і тому в клітинку, наприклад (2, 4), поставимо нуль і вважатимемо її заповненою.

B_j / A_j	$B_1 = 30$	$B_2 = 30$	$B_3 = 10$	$B_4 = 20$	$B_5 = 10$	u_i
$A_1 = 50$	2 **30**	3 **20**	4	2	0	$u_1 = -4$
$A_2 = 30$	5 -1	7 **10** «–»	1 **10**	4 «+» **0**	0 10	$u_2 = 0$
$A_3 = 20$	9	4 -1 «+»	3	2 «–» **20**	0	$u_3 = -2$
v_j	$v_1 = 6$	$v_2 = 7$	$v_3 = 1$	$v_4 = 0$	$v_5 = 0$	

Перший опорний план

Перевірка плану за допомогою потенціалів показує, що він є неоптимальним. Перехід до другого опорного плану виконується шляхом заповнення клітинки (3, 2) згідно із побудованим циклом. Зазначену клітинку включено до циклу тому, що в разі кількох однакових найбільших порушень ($\Delta_{21} = \Delta_{32} = -1$) заповнюють таку клітинку таблиці, яка має меншу вартість перевезення одиниці продукції ($c_{32} < c_{21}$).

Другий план транспортної задачі наведемо у вигляді таблиці:

B_j / A_j	$B_1 = 30$	$B_2 = 30$	$B_3 = 10$	$B_4 = 20$	$B_5 = 10$	u_i
$A_1 = 50$	2 **30**	3 **20**	4	2	0	$u_1 = -3$
$A_2 = 30$	5	7	1 **10**	4 **10**	0 **10**	$u_2 = 0$
$A_3 = 20$	9	4 **10**	3	2 **10**	0	$u_3 = -2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	$v_5 = 0$	

Умова оптимальності для цього опорного плану виконується, і тому можна записати:

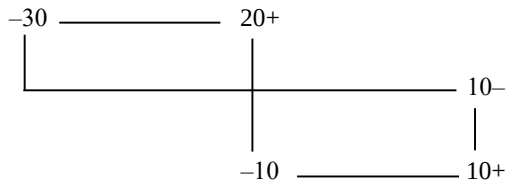
$$X_1^* = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 320 \text{ ум. од.}$$

Згідно з оптимальним планом потреба магазинів у ранніх овочах задовольняється завдяки повному вивезенню продукції з першого та третього господарств і лише частково – з другого (залишок дорівнює 10 т). У цьому разі загальна вартість усіх перевезень буде найменшою і становитиме 230 ум. од.

Але виявляється, що розглянута транспортна задача має ще один альтернативний оптимальний план. Ознакою цього є виконання умови оптимальності для порожньої клітинки: $u_i + v_j = c_{ij}$. В останній таблиці це справджується для порожньої клітинки (2, 1): $u_1 + v_1 = 0 + 5 = c_{21} = 5$.

Щоб отримати альтернативний оптимальний план, достатньо заповнити зазначену клітинку таблиці, виконавши перерозподіл продукції за таким циклом:



Наведемо транспортну таблицю, що відповідає другому оптимальному плану задачі.

B_j / A_j	$B_1 = 30$	$B_2 = 30$	$B_3 = 10$	$B_4 = 20$	$B_5 = 10$	u_i
$A_1 = 50$	2 **20**	3 **30**	4	2	0	$u_1 = -3$
$A_2 = 30$	5 **10**	7	1 **10**	4 0	0 **10**	$u_2 = 0$
$A_3 = 20$	9	4	3	2 **20**	0	$u_3 = -2$
v_j	$v_1 = 5$	$v_2 = 6$	$v_3 = 1$	$v_4 = 4$	$v_5 = 0$	

Тому

$$X_2^* = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 & 20 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Z_{\min} = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 30 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 20 = 230 \text{ ум. од.}$$

Другий оптимальний план задачі формулюється так. Перевезти з 1-го господарства 20 т овочів до 1-го магазину та 30 т – до 2-го; з 2-го господарства – 10 т до 1-го магазину та 10 т овочів до 3-го, залишаючи невивезеними 10 т, а також з 3-го господарства до 4-го магазину – 20 т овочів. У цьому разі загальні транспортні витрати становитимуть 230 ум. од. і також будуть найменшими.

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.12-15], с. 67 –90.

Вправи

1 Компанія контролює 3 фабрики, продуктивність яких в тиждень (в тис. виробів) задається вектором $\vec{A} = (19, 12, 11)$. Компанія уклала договори з чотирма замовниками, щотижневі потреби яких (в тис. виробів) задаються

вектором $\vec{B} = (9, 10, 8, 11)$. Вартість транспортування 1 тис. виробів з *i*-ої фабрики *j*-му замовнику задається матрицею тарифів $C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Потрібно визначити оптимальний план перевезень з метою мінімізації сумарних витрат на транспортування.

2 Розв'язати задачу методом потенціалів $C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 9 & 6 & 4 & 7 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$,

$\vec{A} = (20, 14, 10, 6)$, $\vec{B} = (14, 11, 14, 9, 4)$.

Питання для самоперевірки

1 Що означає «виродження» опорного плану? Як його позбутися?
2 Назвіть етапи розв'язування методом потенціалів.
3 Як обчислюють потенціали?
4 Умова оптимальності транспортної задачі.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9

Нелінійне програмування. Постановка задач, їх економічна сутність. Класичний метод оптимізації задач нелінійного програмування на базі використання множників Лагранжа.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $F(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 + 6x_1 \to \max$, (1)

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_2 \le 4, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Розв'язання. Задача (1) – (3) – це задача нелінійного програмування. Побудуємо область $R(X)$ (рис. 1). Пряма $2x_1 + 3x_2 = 24$ проходить через точки (0; 8) та (12; 0), пряма $x_1 + 2x_2 = 15$ – через точки (0; 7,5) та (15; 0), пряма $3x_1 + 2x_2 = 24$ – через точки (0; 12) та (8; 0), а пряма $x_2 = 4$ паралельна осі Ox_1.

Таким чином, $R(X) = OABC$. Отже, треба знайти таку точку *OABC*, в якій функція $f(x_1, x_2) = x_2 - x_1^2 + 6x_1$ набуває максимального значення. Якщо *h* – деяка константа, то лінія $x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h$ є параболою, причому чим більшою є константа *h*, тим більше ця парабола віддалена від осі Ox_1. Максимуму цільова

функція (3), очевидно, досягає в точці D – точці дотику параболи та прямої AB. Визначимо константу h, яка відповідає такому положенню параболи.

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = h, \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 4 - x_1^2 + 6x_1 = h \Rightarrow x_1^2 - 6x_1 + (h-4) = 0.$$

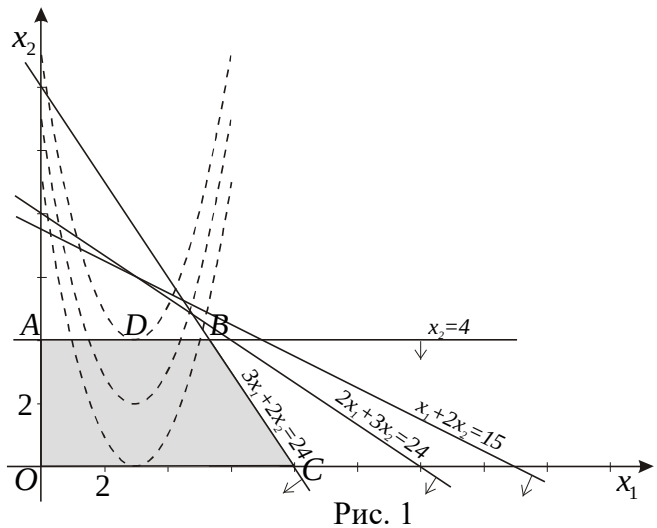


Рис. 1

Із умови $\sqrt{36-4(h-4)} = 0$, маємо $h = 13$. Координати шуканої точки D визначаються як розв'язки системи рівнянь

$$\begin{cases} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13, \\ x_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = 3,\ x_2^* = 4.$$

Отже, $X^* = (3;4)$, а $F_{\max} = 4 - 9 + 18 = 13$.

У даному випадку точка максимуму D не є вершиною багатокутника $R(X)$. Тому процедура перебору вершин багатокутника, яка застосовується при розв'язанні задач лінійного програмування, в даному випадку незастосовна.

Приклад 2. Знайти

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to \max, \min; \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 10x_1 - x_2 \le 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Розв'язання. Побудуємо область допустимих розв'язків $R(X)$ (рис. 2).

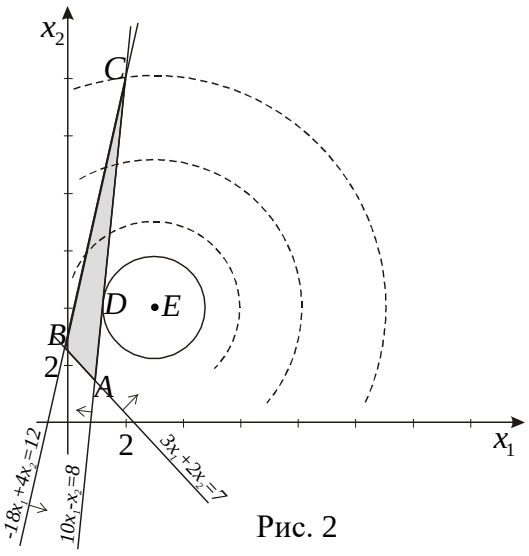


Рис. 2

Пряма $3x_1 + 2x_2 = 7$ проходить через точки (0; 3,5) та (2,3; 0), пряма $10x_1 - x_2 = 8$ – через точки (0; -8) та $\left(\frac{4}{5}; 0\right)$, пряма $-18x_1 + 4x_2 = 12$ – через точки (0; 3) та $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.

У даному випадку $R(X) = \Delta ABC$ з координатами вершин $A(1; 2)$, $B(0; 3{,}5)$, $C(2; 12)$. Якщо замість (1) записати лінію рівня

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 = h,\ h = const, \tag{4}$$

то рівняння (4) – це рівняння кола із центром у точці $E(3; 4)$ і радіусами $\sqrt{h}$. Проводячи з точки E кола різних радіусів, бачимо, що найменшого значення функція F приймає в точці D, де коло дотикається до $R(X)$. Для знаходження координат

цієї точки скористаємося рівністю кутових коефіцієнтів прямої $10x_1 - x_2 = 8$ та дотичної до кола в точці D. Оскільки $x_2 = 10x_1 - 8 \Rightarrow k_1 = 10$. Кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці D визначимо як значення похідної функції x_2 від змінної x_1 у цій точці. Диференціюючи рівняння (4), одержимо:

$$2(x_1 - 3) + 2(x_2 - 4) \cdot x_2' = 0 \Rightarrow x_2' = -\frac{x_1 - 3}{x_2 - 4}.$$

З рівності $-\frac{x_1 - 3}{x_2 - 4} = 10 \Rightarrow \quad \Rightarrow -x_1 + 3 = 10x_2 - 40 \Rightarrow x_1 + 10x_2 = 43$. Таким чином, координати точки D знаходяться як розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} x_1 + 10x_2 = 43 \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow x_1^* = \frac{123}{101}, \quad x_2^* = \frac{422}{101}, \quad F_{\min} = \frac{324}{101}$. З рисунка 2 бачимо, що максимуму цільова функція досягає в точці $C(2;\ 12)$. Отже, $x_1^* = 2$, $x_2^* = 12$, $F_{\max} = 65$.

Приклад 3. Знайти

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1 \cdot x_2 \ge 4, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Розв'язання. Рівняння $x_1^2 + x_2^2 = 25$ – це рівняння кола з радіусом $R = 5$, а $x_1 \cdot x_2 = 4$ – це рівняння гіперболи. Область $R(X)$ зображено на рисунку 3.

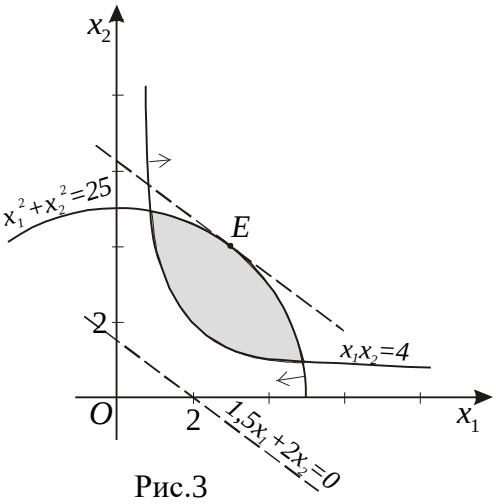


Рис.3

Записавши $3x_1 + 4x_2 = h$, де h – довільна константа, одержуємо замість цільової функції (1) лінії рівня. При $h = 6$ пряма $3x_1 + 4x_2 = 6$ проходить через точки $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ та $(2;\ 0)$. З рисунку 3 видно, що свого максимуму цільова функція досягає в точці E, координати якої потрібно знайти.

Диференціюючи рівняння $x_1^2 + x_2^2 = 25$, одержуємо: $2x_1 + 2x_2 x_2' = 0 \Rightarrow x_2' = -\frac{x_1}{x_2}$.

З іншого боку, кутовий коефіцієнт прямої $3x_1 + 4x_2 = h$ буде дорівнювати $-\frac{3}{4}$. Прирівнюючи, одержуємо: $-\frac{x_1}{x_2} = -\frac{3}{4} = 3x_1 - 4x_2 = 0$. Таким чином, координати точки E одержуються як розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 3x_2 - 4x_1 = 0, \\ x_1^2 + x_2^2 = 25, \end{cases}$ звідки $x_1^* = 4$, $x_2^* = 3$, $F_{\max} = 25$.

Приклад 4 Попит на пропозицію, що виготовляється на двох видах обладнання, становить 120 одиниць. Собівартість, тис. грн., виробництва одиниці продукції на обладнання кожної групи залежить від обсягу такого

виробництва – відповідно x_1 і x_2 – та подається у вигляді для першої групи: $3x_1 + 4x_1$; для другої: $5x_2^2$.

Знайти оптимальний план виробництва продукції на кожній групі обладнання, який за умови задоволення попиту потребує найменших витрат, пов`язаних із собівартістю продукції.

Розв'язання. Математична модель задачі:

$$F = 3x_1 + 4x_1^2 + 5x_2^2 \to \min,$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 120, \\ x_1 \geq 0,\ j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Згідно до методу множників Лагранжа складемо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1 + 4x_1^2 + 5x_2^2 + \lambda(120 - x_1 - x_2).$$

Прирівнявши до нуля частинні похідні цієї функції за невідомими параметрами x_1, x_2 і λ, дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 3 + 8x_1 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 10x_2 - \lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 120 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо: $x_1 = 66,5;$ $x_2 = 53,5;$ $\lambda = 535$.

Отже, на першій групі обладнання необхідно випускати 66,5, а на другій 53,5 одиниць продукції. При цьому мінімальні витрати тис. грн., становитимуть:

$$F = 3 \cdot 66,5 + 4 \cdot (66,5)^2 + 5 \cdot (53,5)^2 = 32199,75 \to \min.$$

Приклад 5 Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю відвело 1200 га ріллі під основні рослинницькі культури – озиму пшеницю та цукрові буряки.

Техніко-економічні показники вирощування цих культур відбиває таблиця:

Показник	Площа, га, відведена	
	під озиму пшеницю, x_1	під цукровий буряк, x_2
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн./т	800	300
Собівартість, грн./т	$y_1 = 12,5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12,5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Знайти оптимальну площу посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Нехай x_1 – площа ріллі, відведена під сотні га озимої пшениці; x_2 – площа ріллі, відведена під цукрові буряки, сотні га.

Зауважимо, що собівартість однієї тони пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо математичну модель. За критерій оптимальності візьмемо максимізацію валового прибутку:

$$F = 4\left(800 - 12,5x_1^2 + 200x_1 - 1200\right)x_1 + 35\left(300 - 12,5x_2^2 + 150x_2 - 650\right)x_2 =$$
$$= 4\left(-12,5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12,5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right)$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L\left(x_1, x_2, \lambda_1\right) = 4\left(-12,5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12,5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right) + \lambda_1\left(12 - x_1 - x_2\right) = 0.$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4\left(-37,5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 35\left(-37,5x_2 + 300x_2 - 350\right) - \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи визначимо сідлову точку. З першої та другої рівностей знайдемо вирази для λ_1 і прирівняємо їх:

$$4\left(-37,5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) = 35\left(-37,5x_2^2 + 300x_2 - 350\right),$$

або

$$-150x_1^2 + 1600x_1 - 1600 = -1312,5x_2^2 + 10500x_2 - 12250. \qquad (**)$$

Із останнього рівняння цієї системи маємо:

$$x_1 = 12 - x_2.$$

Підставивши значення x_1 у (**), дістанемо:

$$-150\left(12 - x_2\right)^2 + 1600\left(12 - x_2\right)^2 - 1600 = -1312,5x_2^2 + 10500x_2 - 12250,$$

або

$$1162x_2^2 - 8500x_2 + 11450 = 0.$$

Розв’язавши це квадратне рівняння, дістаємо $x_2^{(1)} \approx 1,78$ (178 га); $x_2^{(2)} \approx 5,53$ (553 га).

Відповідно дістаємо: $x_1^{(1)} \approx 10,22$ (1022 га); $x_1^{(2)} \approx 6,47$ (647 га). Тобто сідловими точками є такі:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 10,22, \\ x_2^{(1)} = 1,78. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)} = 6,47, \\ x_2^{(2)} = 5,53. \end{cases}$$

Обчислимо значення цільової функції у цих точках:

$$F\left(x_1=10,22;x_2=1,78\right)=4\left(800-1305,61+2044-1200\right)1022+$$
$$+35\left(300-39,615+267-650\right)178=-236247;$$
$$F\left(x_1=6,47;x_2=5,53\right)=4\left(800-523,26+1294-1200\right)647+$$
$$+35\left(300-382,26+829,5-650\right)553=4\ 625\ 863.$$

Отже, цільова функція набуває максимального значення, якщо озима пшениця вирощується на площі 647 га, а цукровий буряк – на площі 553 га.

Домашнє завдання

Повторити теорію [1, л.16-18**]**, с. 90 – 115.

Вправи

1 Розв'язати ЗНП методом Лагранжа. Знайти умовні екстремуми функцій в задачах:

$$F=2x_1^2+x_2^2,\quad 2x_1+2x_2=5.$$

$$F=\left(x_1-1\right)^2+\left(x_2-3\right)^2,\quad 2x_1-x_2=5.$$

$$F=x_1\cdot x_2\cdot x_3,\quad 2x_1\cdot x_2+x_2\cdot x_3=12,\quad 2x_1-x_2=8.$$

Питання для самоперевірки

1 Як записується в загальному вигляді задача нелінійного програмування?

2 Який вигляд має функція Лагранжа?

3 Суть методу Лагранжа?

4 Сформулюйте необхідні та достатні умови існування сідлової точки для деякої диференційованої функції.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1 Стасенко О.М. Тексти лекцій для студентів спеціальностей 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність». – ХНУБА, 2018.
2 Харченко А.П., Аршава О.О., Щелкунова Л.І. Практикум з курсу «Оптимізаційні методи та моделі» – ХНУБА, 2017.
3 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1985.
4 Ашманов С.А. Линейное программирование. — М.: Наука, 1981.
5 Белман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
6 Белман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.
7 Вагнер Г. Основы исследования операций. — Т. 1—3. — М.: Мир, 1972.
8 Карпелевич Ф.И.., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967.
9 Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975.
10 Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике.– М.: ЮНИТИ, 1999.
11 Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н. И. Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Вышейшая школа, 1994.
12 Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию. –Минск: Вышейшая школа, 1978.
13 Ковтун В.В. Навчально-методичний посібник для самостійного вивчення дисципліни «Математичне програмування та дискретна математика». – ВНТУ, 2013.
14 Зуховский С.И., Авдеева Л.И. Линейное и выпуклое программирование. – М.:Наука, 1967.
15 Бугір М.К., Якімов Ф.П. Посібник по розв’язуванню задач з лінійного програмування. – Тернопіль: Поліграфіст, 1997.

ЗМІСТ

Вступ..... 3

Програма навчальної дисципліни..... 3

Практичне заняття 1..... 5

Практичне заняття 2..... 11

Практичне заняття 3..... 20

Практичне заняття 4..... 33

Практичне заняття 5..... 41

Практичне заняття 6..... 50

Практичне заняття 7..... 56

Практичне заняття 8..... 68

Практичне заняття 9..... 80

Бібліографічний список……..... 86

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів спеціальностей 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Укладач: Стасенко Олександр Миколайович

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

За редакцією автора

План 2019р., поз. 90.19
Підп. до друку 11.09.2018
Надруковано на різографі.
Тираж 50 прим.

Формат 60х84 1/16.
Обл. -вид. арк. 4,2
Умов. друк. арк. 4,0
Зам. № 5358.

Папір друк. № 2.
Безкоштовно.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та віддруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури