Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.М. Стасенко

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів спеціальності 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Харків 2018

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальності 051, 076

О.М. Стасенко

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів спеціальності 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 1 від 30.08.2018

Харків 2018

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів спеціальностей 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність» / Укладач О.М. Стасенко – Харків: ХНУБА, 2018. - 54 с.

Рецензент М.І. Несвіт

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Методичні вказівки призначаються для надання допомоги студентам в організації самостійної роботи з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)».

Результативність самостійної роботи забезпечується системою контролю, яка включає наступні етапи:

- виконання індивідуальних домашніх завдань;
- виконання контрольних робіт;
- виконання та складання підсумкового завдання з теми;
- виконання модульної контрольної роботи за всіма темами модуля.

Методичні вказівки містять робочу програму модуля, індивідуальні домашні завдання, варіанти підсумкового завдання і приклад його виконання

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Лінійне програмування. Спеціальні задачі лінійного програмування

Тема 1. Предмет математичного програмування. Загальна задача математичного програмування. Основні класи задач математичного програмування. Постановка задачі лінійного програмування (ЛП). Основні форми задачі ЛП: загальна, стандартна (симетрична), канонічна.

Тема 2. Види запису задачі лінійного програмування (ЛП). Геометрична інтерпретація задачі ЛП. Графічний метод розв’язування задач ЛП.

Тема 3. Основні властивості розв’язків задачі ЛП: опуклість множини допустимих розв’язків (ДР), існування базисних (опорних) і оптимального планів. Симплексний метод розв’язування задач ЛП.

Тема 4. Знаходження початкового опорного плану. Метод штучного базису (М - метод).

Тема 5. Двоїста задача ЛП. Теореми двоїстості. Економічна інтерпретація двоїстих задач. Двоїстий симплекс-метод.

Тема 6. Знаходження розв’язку однієї з пари симетричних взаємо двоїстих задач за відомим розв’язком іншої задачі. Двоїсті оцінки та дефіцитність ресурсів у околі оптимального плану задачі ЛП.

Тема 7. Аналіз розв’язків лінійних економіко математичних моделей. Аналіз коефіцієнтів технологічної матриці до базисних і вільних змінних.

Тема 8. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів. Аналіз коефіцієнтів цільової функції.

Змістовий модуль 2. Динамічне програмування. Нелінійне, опукле та стохастичне програмування.

Тема 9. Цілочислове лінійне програмування. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування. Частково і повністю цілочислові задачі лінійного програмування. Приклади економічних задач, що зводяться до задач цілочислового лінійного програмування. Метод Гоморі.

Тема 10. Транспортна задача. Економічне і математичне формулювання транспортної задачі. Замкнена і відкрита моделі транспортної задачі. Основні методи побудови початкового опорного плану.

Тема 11. Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі. Економічний зміст потенціалів.

Тема 12. Динамічне програмування**.** Загальна постановка задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності. Функціональні рівняння Беллмана.

Тема 13. Економічні задачі, які розв'язуються методом динамічного програмування: задача розподілу ресурсів.

Тема 14. Нелінійне програмування. Постановка задач, їх економічна сутність. Класичний метод оптимізації задач нелінійного програмування на базі використання множників Лагранжа.

Тема 15. Опукле програмування. Деякі з основних методів розв'язування задач опуклого програмування. Необхідні та достатні умови існування вузлової точки. Теорема Куна-Таккера. Методи аналізу оптимального плану задачі НЛП.

Тема 16. Стохастичне програмування**.** Загальна постановка задачі стохастичного програмування, її особливості щодо оперативного управління та перспективного планування.

Тема 17. Класифікація задач стохастичного програмування. Методи розв'язування задач стохастичного програмування (непрямі, прямі), приклади їх реалізації.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1.1 Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

Варіанти завдань

1.	$\begin{cases} x_1+3x_2\le 3 \\ 7x_1+5x_2\le 35 \\ 2x_1+4x_2\le -8 \\ -4x_1+6x_2\le 24 \end{cases}$ $\max Z = x_1+2x_2$	2.	$\begin{cases} x_1+5x_2\ge 5 \\ 5x_1+15x_2\le 75 \\ -4x_1+5x_2\ge -20 \\ x_1-2x_2\ge -2 \end{cases}$ $\min Z = -3x_1+4x_2$
3.	$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1+3x_2\ge \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2}x_1+3x_2\ge -\frac{3}{2} \\ 3x_1+10x_2\le 30 \\ -3x_1+9x_2\le 27 \end{cases}$ $\min Z = 3x_1+x_2$	4.	$\begin{cases} x_1+6x_2\ge 6 \\ x_2\le 3 \\ -\frac{3}{2}x_1+\frac{9}{2}x_2\ge -\frac{27}{4} \\ 11x_1+7x_2\le 77 \end{cases}$ $\max Z = x_1+2x_2$
5.	$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1+2x_2\ge 1 \\ 6x_1+10x_2\le 60 \\ -2x_1+x_2\ge -2 \\ -3x_1+5x_2\le 15 \end{cases}$ $\max Z = 3x_1+x_2$	6.	$\begin{cases} 2x_1+4x_2\ge 8 \\ 4x_1+8x_2\le 32 \\ x_1\le 7 \\ x_2\le 2 \end{cases}$ $\min Z = 2x_1-3x_2$
7.	$\begin{cases} 2x_1+x_2\ge 6 \\ 9x_1+6x_2\le 54 \\ -\frac{7}{2}x_1+\frac{9}{2}x_2\ge -\frac{63}{4} \\ 3x_1-4x_2\ge -12 \end{cases}$ $\min Z = -6x_1+x_2$	8.	$\begin{cases} 2x_1+2x_2\ge 4 \\ 8x_1+12x_2\le 96 \\ 3x_1-4x_2\le 12 \\ -5x_1+2x_2\le 10 \end{cases}$ $\max Z = 4x_1+x_2$
9.	$\begin{cases} x_1+6x_2\ge 6 \\ -\frac{1}{3}x_1+3x_2\ge -1 \\ -x_1+\frac{5}{2}x_2\le \frac{5}{2} \\ 7x_1+11x_2\le 77 \end{cases}$ $\max Z = 3x_1+x_2$	10.	$\begin{cases} x_1\le 6 \\ x_1+6x_2\ge 6 \\ x_1+2x_2\le 12 \\ x_1-x_2\ge -1 \end{cases}$ $\max Z = x_1+\frac{3}{2}x_2$

11.	$\begin{cases} x_1 \le 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ 8x_1 + 12x_2 \le 96 \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12 \end{cases}$ $\min Z = -3x_1 + \frac{5}{2}x_2$	12.	$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 \ge -48 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 40 \\ 7x_1 - 5x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 73 \end{cases}$ $\max Z = 6x_1 + 5x_2$
13.	$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 + 3x_2 \ge -1 \\ -x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le \frac{5}{2} \\ 7x_1 + 11x_2 \le 77 \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$ $\min Z = -x_1 + 7x_2$	14.	$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge -24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 16 \\ x_1 - 4x_2 \le -8 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 82 \end{cases}$ $\max Z = 7x_1 + 6x_2$
15.	$\begin{cases} 2x_1 + 10x_2 \ge 20 \\ x_1 - 3x_2 \ge -12 \\ 3x_1 + \frac{5}{2}x_2 \le \frac{27}{2} \\ x_1 \le 2 \end{cases}$ $\max Z = x_1 + 2x_2$	16.	$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 \ge -30 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 6 \\ 7x_1 + 6x_2 \le 162 \end{cases}$ $\min Z = -3x_1 + 7x_2$
17.	$\begin{cases} x_1 + 12x_2 \ge 5 \\ -3x_1 + 3x_2 \ge -24 \\ 4x_1 + 10x_2 \le 50 \\ 5x_1 - 12x_2 \ge -35 \end{cases}$ $\max Z = 5x_1 + \frac{1}{2}x_2$	18.	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -24 \\ x_1 + 2x_2 \ge 12 \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 16 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 104 \end{cases}$ $\min Z = -4x_1 + 5x_2$
19.	$\begin{cases} x_1 \le 8 \\ 5x_1 + 7x_2 \ge 35 \\ -3x_1 + \frac{9}{2}x_2 \ge -\frac{27}{2} \\ x_1 - 3x_2 \ge -12 \end{cases}$ $\min Z = -6x_1 + 2x_2$	20.	$\begin{cases} -8x_1 + 5x_2 \le 29 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 54 \\ x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ -9x_1 + 3x_2 \ge -30 \end{cases}$ $\max Z = 2x_1 + 3x_2$
21.	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \ge -14 \\ x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ x_1 - x_2 \le 5 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$ $\max Z = 2x_1 + \frac{1}{2}x_2$	22.	$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \ge -8 \\ -3x_1 + x_2 \ge -14 \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 4 \\ -\frac{1}{2}x_1 + 3x_2 \le \frac{21}{2} \end{cases}$ $\min Z = -7x_1 + 7x_2$

23.	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge -20 \\ 4x_1 + 3x_2 \ge 32 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 24 \\ 4x_1 + 7x_2 \le 116 \end{cases}$ $\max Z = 3x_1 + 5x_2$	24.	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 \ge -16 \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 48 \\ 2x_1 - 3x_2 \le 32 \\ 6x_1 + 7x_2 \le 160 \end{cases}$ $\max Z = 7x_1 + 8x_2$
25.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -10 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 36 \\ x_1 - 3x_2 \le 14 \\ 4x_1 + 5x_2 \le 90 \end{cases}$ $\min Z = 2x_1 - 5x_2$	26.	$\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \ge -14 \\ x_1 + x_2 \ge 8 \\ 2x_1 - 5x_2 \le 32 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 94 \end{cases}$ $\min Z = 8x_1 - 7x_2$
27.	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 \ge 5 \\ x_1 + x_2 \le 7 \\ -4x_1 + 5x_2 \ge -20 \\ x_1 - 2x_2 \ge -2 \end{cases}$ $\max Z = \frac{1}{2}x_1 + x_2$	28.	$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 \ge -40 \\ 3x_1 + 7x_2 \ge 56 \\ 3x_1 - 3x_2 \le 22 \\ 5x_1 + 6x_2 \le 136 \end{cases}$ $\min Z = -5x_1 + 7x_2$
29.	$\begin{cases} \frac{5}{3}x_1 - x_2 \ge -10 \\ x_1 + \frac{4}{3}x_2 \ge \frac{32}{3} \\ x_1 - \frac{5}{2}x_2 \le 3 \\ 7x_1 + 6x_2 \le 162 \end{cases}$ $\max Z = 2x_1 + 3x_2$	30.	$\begin{cases} 7x_1 - 8x_2 \ge -12 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 30 \\ 3x_1 - 8x_2 \le 48 \\ 3x_1 + 4x_2 \le 84 \end{cases}$ $\max Z = 7x_1 + 9x_2$

Завдання 1.2 Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

Варіанти завдань

1.	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 4x_2 \le 21, \\ 2x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 4x_1 + 2x_2 \to \max$.	2.	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 23, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$.
3.	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 3x_1 + 2x_2 \to \max$.	4.	$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 6, \\ 11x_1 + 3x_2 \le 50, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 11x_1 + 3x_2 \to \max$.
5.	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = x_1 - x_2 \to \min$.	6.	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 5, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 25, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 7x_1 + 2x_2 \to \max$.
7.	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 23, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 3x_1 + 4x_2 \to \max$.	8.	$\begin{cases} -5x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 17, \\ 7x_1 + x_2 \le 28, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 7x_1 + x_2 \to \max$.
9.	$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 23, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 6x_1 + 5x_2 \to \max$.	10.	$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 3, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 34, \\ x_1 - 3x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 4x_1 + 3x_2 \to \min$.
11.	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 27, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \max$.	12.	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 5, \\ 4x_1 + 7x_2 \le 67, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 4x_1 + 7x_2 \to \max$.
13.	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 43, \\ x_1 - 2x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 3x_1 + 8x_2 \to \max$.	14.	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 6, \\ 7x_1 + 2x_2 \le 23, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 7x_1 + 2x_2 \to \max$.

15.	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = x_1 - x_2 \to \min$.	16.	$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 7, \\ 6x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 6x_1 + x_2 \to \max$.
17.	$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 6, \\ 8x_1 + 7x_2 \le 92, \\ 4x_1 - 3x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = -4x_1 + 3x_2 \to \min$.	18.	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 5x_2 \le 36, \\ 3x_1 + x_2 \le 24, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 3x_1 + x_2 \to \max$.
19.	$\begin{cases} -7x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 33, \\ 9x_1 + x_2 \le 54, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 9x_1 + x_2 \to \max$.	20.	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 4x_1 + x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 4x_1 + x_2 \to \max$.
21.	$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 11, \\ 3x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 3x_1 + x_2 \to \max$.	22.	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 20, \\ 4x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 4x_1 + x_2 \to \max$.
23.	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 5x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 5x_1 + x_2 \to \max$.	24.	$\begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 1, \\ 5x_1 + 8x_2 \le 61, \\ x_1 - x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 6x_1 - x_2 \to \min$.
25.	$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 11, \\ 2x_1 - x_2 \le 16, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = -2x_1 + x_2 \to \min$.	26.	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 5, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 53, \\ 3x_1 - x_2 \le 18, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 5x_1 + 6x_2 \to \max$.
27.	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = -2x_1 + x_2 \to \min$.	28.	$\begin{cases} -3x_1 + x_2 \le 2, \\ -2x_1 + 5x_2 \le 23, \\ 7x_1 - 5x_2 \le 7, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = -7x_1 + 5x_2 \to \min$.
29.	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 2, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = x_1 + x_2 \to \max$.	30.	$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$ $Z(X) = 2x_1 + 2x_2 \to \max$.

Завдання 1.3 Розв'язати задачу лінійного програмування, яка не має очевидного початкового базису, М - методом.

Варіанти завдань

№	Задача ЛП	№	Задача ЛП
1.	$F(X)=4x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}x_1+5x_2\le 10,\\2x_1+x_2\le 10,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	2.	$F(X)=3x_1+4x_2\to\max;$ $\begin{cases}5x_1+x_2\le 10,\\x_1+2x_2\le 10,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
3.	$F(X)=4x_1+3x_2\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+x_2\le 9,\\x_1+3x_2\le 9,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	4.	$F(X)=x_1+5x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 24,\\3x_1+2x_2\le 24,\\x_1-x_2\ge 3,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
5.	$F(X)=4x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+x_2\le 12,\\x_1+4x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	6.	$F(X)=x_1+4x_2\to\max;$ $\begin{cases}x_1+3x_2\le 12,\\3x_1+x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 2,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
7.	$F(X)=2x_1+4x_2\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+x_2\le 12,\\x_1+3x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	8.	$F(X)=5x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+x_2\le 12,\\x_1+4x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 2,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
9.	$F(X)=3x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 10,\\x_1+4x_2\le 10,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	10.	$F(X)=x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}x_1+4x_2\le 12,\\3x_1+x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$

11.	$F(X)=x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+5x_2\le 15,\\5x_1+2x_2\le 15,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	12.	$F(X)=2x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+x_2\le 9,\\x_1+3x_2\le 9,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
13.	$F(X)=2x_1+3x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 10,\\x_1+2x_2\le 10,\\x_1-x_2\ge 2,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	14.	$F(X)=3x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 14,\\x_1+7x_2\le 14,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
15.	$F(X)=3x_1+5x_2\to\max;$ $\begin{cases}5x_1+x_2\le 10,\\x_1+2x_2\le 10,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	16.	$F(x)=5x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}x_1+5x_2\le 20,\\2x_1+4x_2\le 20,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
17.	$F(X)=x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+4x_2\le 12,\\4x_1+3x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	18.	$F(X)=6x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 10,\\x_1+2x_2\le 10,\\x_1-x_2\ge 2,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
19.	$F(X)=3x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}4x_1+x_2\le 12,\\x_1+4x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	20.	$F(X)=x_1+5x_2\to\max;$ $\begin{cases}x_1+3x_2\le 12,\\4x_1+x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
21.	$F(X)=x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 12,\\3x_1+2x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 1,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	22.	$F(X)=3x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}x_1+3x_2\le 12,\\3x_1+x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 2,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
23.	$F(X)=2x_1+3x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 12,\\x_1+2x_2\le 12,\\2x_1-x_2\ge 2,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	24.	$F(X)=2x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 12,\\3x_1+2x_2\le 12,\\x_1-x_2\ge 2,\\x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$

25.	$F(X)=x_1+3x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2\le 14,\\ x_1+2x_2\le 14,\\ x_1-x_2\ge 1,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	26.	$F(X)=2x_1+5x_2\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+x_2\le 15,\\ x_1+5x_2\le 15,\\ x_1-x_2\ge 2,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
27.	$F(x)=3x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}x_1+3x_2\le 15,\\ 5x_1+x_2\le 15,\\ x_1-x_2\ge 1,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	28.	$F(x)=4x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+5x_2\le 30,\\ 5x_1+3x_2\le 30,\\ x_1-x_2\ge 2,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$
29.	$F(x)=x_1+4x_2\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+5x_2\le 30,\\ 5x_1+3x_2\le 30,\\ x_1-x_2\ge 1,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$	30.	$F(X)=x_1+2x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\le 12,\\ 3x_1+2x_2\le 12,\\ x_1-x_2\ge 1,\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0.\end{cases}$

Завдання 1.4 Записати двоїсту задачу до поставленої задачі лінійного програмування. Розв'язати одну із задач графічно або симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі.

Варіанти завдань

1.	$Z=-30x_1+10x_2\to\max$ $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3\ge-2,\\-3x_1+2x_2-x_3\le3,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,3}.$	2.	$Z=4x_1+3x_2+x_3\to\min;$ $\begin{cases}4x_1-3x_2+x_3\ge2,\\x_1+x_2+x_3\le5,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,3}.$
3.	$Z=3x_1+2x_2+5x_3\to\max;$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\le50,\\3x_1+x_3\ge15,\\x_1+4x_2\le40,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,3}.$	4.	$Z=-3x_1-4x_2-5x_3\to\min;$ $\begin{cases}2x_1+x_2+x_3\ge-4,\\2x_1+3x_2+2x_3\le6,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,3}.$
5.	$Z=2x_1+3x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+3x_2\le30,\\x_1+x_2=6,\\2x_1+x_2\ge10,\end{cases}$ $x_1\ge0,\ \ x_2\ge0.$	6.	$Z=5x_1+2x_2\to\min;$ $\begin{cases}x_1+3x_2\ge8,\\3x_1+4x_2\le20,\\3x_1+x_2\ge6,\end{cases}$ $x_1\ge0,\ \ x_2\ge0.$
7.	$Z=5x_1+12x_2-4x_3\to\max;$ $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\le10,\\2x_1-x_2+3x_3=8,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,3}.$	8.	$Z=-x_1+x_2\to\min;$ $\begin{cases}2x_1-x_2\le4,\\x_1+2x_2\ge2,\\x_1+x_2\le6,\end{cases}$ $x_1\ge0,\ \ x_2\ge0.$
9.	$Z=5x_1+6x_2\to\max;$ $\begin{cases}x_1+x_2=5,\\x_1+x_2\ge3,\\2x_1+x_2\le8,\end{cases}$ $x_1\ge0,\ \ x_2\ge0.$	10.	$Z=2x_1-2x_2+4x_3\to\min;$ $\begin{cases}-x_2+4x_3\ge1,\\-x_1+5x_2\le1,\\-x_1+2x_2+3x_3\le9,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,3}.$
11.	$Z=3x_1+6x_2+2x_3\to\max;$ $\begin{cases}3x_1+4x_2+x_3\le2,\\x_1+3x_2+2x_3\ge1,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,3}.$	12.	$Z=x_1+2x_2-3x_3\to\min;$ $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=5,\\x_1-x_2+2x_3\ge4,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,3}.$
13.	$Z=x_1+x_2\to\max;$ $\begin{cases}2x_1+x_2=5,\\3x_1-x_2=6,\end{cases}$ $x_j\ge0,\ \ j=\overline{1,2}.$	14.	$Z=10x_1+40x_2\to\min;$ $\begin{cases}3x_1+5x_2\ge18,\\x_1+2x_2\ge20,\\2x_1+4x_2\ge25,\end{cases}$ $x_1\ge0,\ \ x_2\ge0.$

15.	$Z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ -3x_1 + 2x_2 \le -4, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$	16.	$Z = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 \ge 12, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 20, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$
17.	$Z = x_1 + 5x_2 + 3x_3 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 = 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$	18.	$Z = 2x_1 + 4x_2 + 24x_3 + 6x_4 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \le -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge -2, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}.$
19.	$Z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}.$	20.	$Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$
21.	$Z = 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 6, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$	22.	$Z = -x_1 + 8x_2 + 20x_3 + 6x_4 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 2x_4 \le 2, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 \ge 1, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}.$
23.	$Z = -x_1 + x_2 + x_3 \to \max;$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge -2, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$	24.	$Z = 8x_1 + 8x_2 + x_3 \to \min;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 \ge 3, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$
25.	$Z = x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$	26.	$Z = 14x_1 + 15x_2 - 24x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 4x_3 \ge 1, \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 \le -3, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$
27.	$Z = x_1 + 8x_2 + 10x_3 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -1, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$	28.	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$
29.	$Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 3}.$	30.	$Z = x_1 + 10x_2 + 6x_3 + x_4 \to \min;$ $\begin{cases} 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 19, \end{cases}$ $x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}.$

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1.1 Розв'язати задачу лінійного програмування графічним методом:

Приклад 1. Знайти максимум функції $Z(X) = x_1 + 3x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 5, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 \leq 8, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Розв'язання. Рівняння в системі обмежень перетворюємо на рівності. $(I)\ x_1 + x_2 = 1$, $(II)\ x_1 + 2x_2 = 5$, $(III)\ 2x_1 + x_2 = 8$, $(IV)\ x_1 + 2x_2 = 8$. Оскільки прямі поділяють площину на дві півплощини, то зайдемо півплощини, які задовольняють системі обмежень з умови задачі.

Побудуємо область допустимих розв'язків (рис. 1). Номери біля прямих відповідають порядковому номеру відповідної нерівності системи обмежень. Це випуклий шестикутник $ABCDEG$ з кутовими точками: $A(0,1)$, $B(0,4)$, $C(2,3)$, $D(3,2)$, $E(4,0)$, $G(1,0)$, координати яких знаходимо розв'язуючи по черзі системи з відповідних двох рівнянь. Множина допустимих розв'язків системи в даному прикладі опукла.

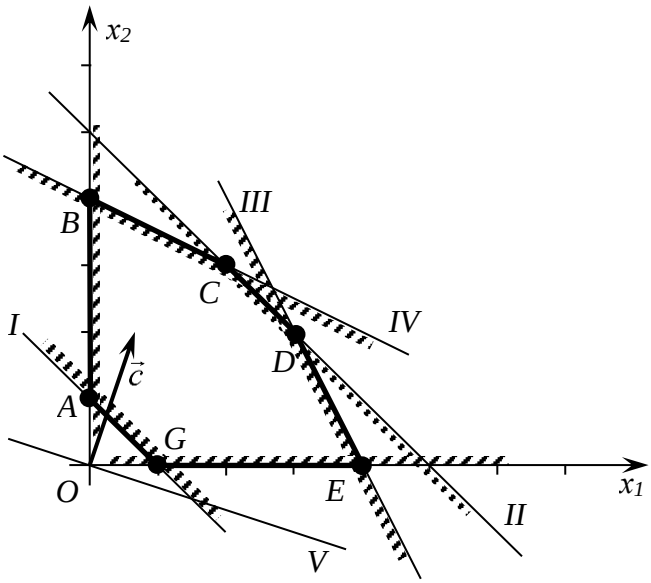

Рис. 1

Знайдемо вектор $\vec{c}=\left\{\left(c_1=\frac{\partial z}{\partial x_1}\right);\left(c_2=\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\right\}=\{1;3\}$ та лінію рівня цільової функції $Z=x_1+3x_2=const=h$. Ця рівність задає рівняння прямої на площині $x_1+3x_2=h$ з вектором нормалі $\vec{c}=\{1;3\}$. Змінюючи значення параметра h, отримаємо сімейство паралельних прямих, які і є лініями рівня, тобто лініями рівних значень функції. При збільшенні h прямі зміщуються в напрямку вектора $\vec{c}$, а при зменшенні h – в напрямку протилежному вектору $\vec{c}$. На рис. 1 пряма V відповідає значенню $h=0$. Очевидно, що значення функції Z буде збільшуватись при паралельному зміщенні даної прямої в напрямку вектора $\vec{c}$. Максимальне значення функція Z буде мати в точці B, тобто в точці з області допустимих розв'язків системи найвіддаленішій від початку координат за напрямком вектора $\vec{c}$.

Отже, $Z_{\max}=1\cdot 0+3\cdot 4=12$ при оптимальному плані $x_1=0, x_2=4$.

Приклад 2. Знайти максимум функції $Z=3x_1+4x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases}-x_1+x_2\le 2,\\ x_1+2x_2\ge 2,\\ 2x_1-3x_2\ge 6,\end{cases}$$

$$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0.$$

Розв'язання. На рис. 2 зображено необмежену багатогранну область $ABCD$ розв'язків заданої системи обмежень, де $A(0,2)$, $B(0,1)$, $C(2,0)$, $D(3,0)$; та лінію рівня $3x_1+4x_2=25$ (пряма (IV)) з вектором $\vec{c}=\{4,3\}$, який вказує напрям руху лінії рівня для знаходження $Z_{\max}$. Очевидно, що при заданій системі обмежень функція Z може необмежено зростати при збільшенні змінних x_1, x_2, тобто $Z_{\max}=\infty$.

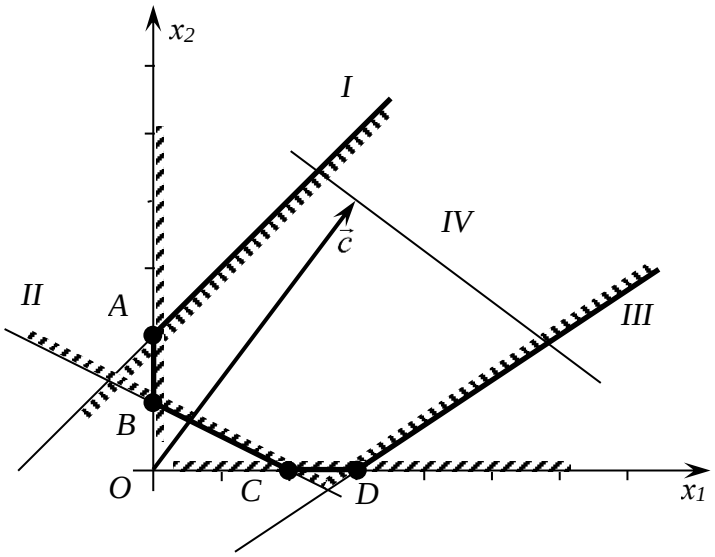

Рис. 2

Завдання 1.2 Розв'язати задачі лінійного програмування симплексним методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 120, \\ x_1 + 8x_2 \le 280, \\ 7x_1 + 4x_2 \le 240, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$Z(x) = 10x_1 + x_2 \to \max.$$

Розв'язання. Зведемо задачу до задачі ЛП в канонічній формі. Запишемо систему обмежень у вигляді рівностей з допоміжними змінними x_3, x_4, x_5

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 120, \\ x_1 + 8x_2 + x_4 = 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + x_5 = 240, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Цільова функція при цьому буде мати вигляд

$$Z(X) = 10x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 .$$

Перевіримо наявність початкового опорного розв'язку. Усі обмеження задачі (1) є так званими рівняннями з перевагою. Тобто усі обмеження мають невід'ємну праву частину і кожне рівняння містить змінну з одиничним коефіцієнтом, причому до інших рівнянь ця змінна входить з нульовим коефіцієнтом. Ці змінні x_3, x_4, x_5 є базисними, а інші змінні x_1, x_2 – вільні. Покладаючи вільні змінні рівними нулю $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, базисні змінні набувають значень відповідних правих частин системи обмежень: $x_3 = 120$, $x_4 = 280$, $x_5 = 240$. Тобто початковий опорний розв'язок має вигляд $X_1 = (0, 0, 120, 280, 240)$.

Побудуємо першу симплекс-таблицю (табл.1), яка відповідає початковому опорному розв'язку.

Таблиця 1

номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
				10	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	0	120	2	4	1	0	0
	x_4	0	280	1	8	0	1	0
	x_5	0	240	7	4	0	0	1
	$\Delta_j = z_j - c_j$		$\Delta_0 = 0$	-10	-1	0	0	0

Перевіряємо, чи є побудований опорний розв'язок оптимальним. Для цього перевіряємо знаки оцінок $\Delta_j = z_j - c_j = \vec{C}_Б \cdot \vec{A}_j - c_j$ $(\Delta_0 = \vec{C}_Б \cdot \vec{A}_0)$ в індексному рядку. В першому та другому стовпцях оцінки є від'ємними (Δ_1 = - 10, Δ_2 = - 1), тому знайдений опорний розв'язок не є оптимальним. Отже треба переходити до побудови наступного опорного розв'язку.

Потрібно будувати наступну симплекс-таблицю (табл.2), яка відповідає наступному опорному розв'язку.

В таблиці 1 знаходимо розв'язувальний стовпець, який вказує на те, яку змінну треба ввести до базису. Для цього серед від'ємних оцінок Δ_j вибираємо максимальну за модулем. Такою оцінкою є $\Delta_1 = -10$ (оскільки $\max\{|-10|;|-1|\} = 10$), тобто стовпець A_1 є розв'язувальним**.** Це означає, що в базисні змінні треба ввести змінну x_1.

Знаходимо розв'язувальний рядок, який вказує на те, яку змінну треба виключити з базисних. Для цього обчислимо відношення (симплексні відношення) коефіцієнтів стовпця A_0 відповідно до додатних коефіцієнтів стовпця A_1 (який відповідає змінній x_1). Серед усіх симплексних відношень знайдемо мінімальне $\min\left\{\frac{120}{2};\frac{280}{1};\frac{240}{7}\right\} = \frac{240}{7}$, яке відповідає змінній x_5. Це означає, що змінну x_5 треба вивести з базисних (відповідний рядок є розв'язувальним). Отже, число 7, яке знаходиться на перетину розв'язувальних стовпця та рядка, буде розв'язувальним елементом.

Елементи a'_{ij} наступної симплекс-таблиці можна обчислити за формулами жорданових перетворень $a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{lk}} a_{ik},\ i \neq l,\ a'_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{lk}},\ i = l,$ де $j = \overline{1,n}$.

Таблиця 2

Номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
				10	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	x_3	0	360/7	0	20/7	1	0	-2/7
	x_4	0	1720/7	0	52/7	0	1	-1/7
	x_1	10	240/7	1	4/7	0	0	1/7
	$\Delta_j = z_j - c_j$		2400/7	0	33/7	0	0	10/7

Оскільки всі оцінки Δ_j в таблиці 2 невід'ємні, то опорний розв'язок $X_2 = \left(\frac{240}{7}; 0, \frac{260}{7}; \frac{1720}{7}; 0\right)$ $(x_1 = \frac{240}{7};\ x_2 = 0;\ x_3 = \frac{360}{7};\ x_4 = \frac{1720}{7};\ x_5 = 0)$ буде оптимальним, і йому відповідає максимальне значення цільової функції $\max Z(X) = Z(X_2)$, отже $\max Z(X) = \frac{2400}{7}$.

Слід зазначити, що отриманий оптимальний розв'язок є єдиним, оскільки всі оцінки при вільних змінних додатні ($\Delta_2 > 0$, $\Delta_5 > 0$).

Завдання 1.3 Розв'язати задачу лінійного програмування, яка не має очевидного початкового базису, М - методом.

$$F(x) = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 \le 380; \\ x_3 \ge 9; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

Розв'язання. Застосовуючи для розв'язування поставленої задачі симплекс-метод, спочатку запишемо систему обмежень у канонічній формі:

$$F(x) = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 = 9; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,7}. \end{cases}$$

Зауважимо, що нерівність типу « $\ge$ » перетворюємо у рівняння введенням у ліву частину обмеження додаткової змінної x_7 зі знаком «–».

Система містить лише два одиничні вектори - $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\vec{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а базис у тривимірному просторі має складатися з трьох одиничних векторів. Ще один одиничний вектор можна дістати, увівши в третє обмеження з коефіцієнтом + 1 штучну змінну x_8, якій відповідатиме одиничний вектор $\vec{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Тепер можемо розглянути розширену задачу лінійного програмування:

$$F = 8x_1 + 10x_2 - 5x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 - Mx_8 \to \max$$

за умов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 450; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_6 = 380; \\ x_3 - x_7 + x_8 = 9; \\ x_j \ge 0, \quad j \ge \overline{1,8}. \end{cases}$$

На відміну від додаткових змінних штучна змінна x_8 має в цільовій функції F коефіцієнт «+M»(для задачі на min) або «–M»(для задачі на max), де M - досить велике додатне число.

У розширеній задачі базисними змінними є x_5, x_6, x_8, а решта змінних вільні. Початковий опорний план задачі такий:

$$X_0 = (0;\ 0;\ 0;\ 0;\ 450;\ 380;\ 0;\ 9),$$

$$F_0 = 8\cdot 0 + 10\cdot 0 + 0\cdot 0 - 5\cdot 0 + 0\cdot 450 + 0\cdot 380 + 0\cdot 0 - M\cdot 9 = -9M.$$

Складемо першу симплексну таблицю цієї задачі, позначивши через θ-симплексні відношення:

Розраховуючи оцінки першого опорного плану, дістаємо: $F_0 = -9M$; $F_1 - c_1 = -8$; $F_2 - c_2 = -10$, $F_3 - c_3 = -M$ і т. д. Отже, ми отримуємо оцінки двох видів: одні з них містять M, а інші є звичайними числами. Тому для зручності розділимо оцінковий рядок на два. У перший оцінковий рядок будемо записувати звичайні числа, а в другий - числа з коефіцієнтом M.

Базис	$C_Б$	План	8	10	0	-5	0	0	0	$-M$	θ
			x_1	x_2	x_3 ↑	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_5	0	450	2	3	4	2	1	0	0	0	112,5
x_6	0	380	3	2	1	2	0	1	0	0	380
← x_8	$-M$	9	0	0	1	0	0	0	–1	1	9
$\Delta_j = \vec{C}_Б \cdot \vec{A}_j - c_j = F_j - c_j \geq 0$		0	– 8	-10	0	5	0	0	0	0	
		$-9M$	0	0	$-M$	0	0	0	M	0	

Оцінки першого плану не задовольняють умову оптимальності, і тому він є неоптимальним. Виконуємо перехід до наступного опорного плану:

Базис	$C_б$	План	8	10	0	-5	0	0	0	$-M$	θ
			x_1	x_2 ↑	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
← x_5	0	414	2	3	0	2	1	0	4	-4	138
x_6	0	371	3	2	0	2	0	1	1	-1	185.5
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	–
Δj	–	0	-8	-10	0	5	0	0	0	0	

Базис	$C_б$	План	8	10	0	-5	0	0	0	$-M$	θ
			x_1 ↑	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_2	10	138	2/3	1	0	2/3	1/3	0	4/3	-4/3	207
← x_6	0	93	5/3	0	0	2/3	-2/3	1	-5/3	5/3	57
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	–
Δ_j	–	1380	-4/3	0	0	35/3	10/3	0	40/3	-40/3	

Базис	$C_б$	План	8	10	0	-5	0	0	0	$-M$	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	
x_2	10	100	0	1	0	2/5	3/5	-2/5	2	-2	
x_1	8	57	1	0	0	2/5	-2/5	3/5	-1	1	
x_3	0	9	0	0	1	0	0	0	-1	1	
Δj		1456	0	0	0	61/5	14/5	4/5	12	-12	

Оптимальним планом задачі є вектор:

$X^* = (57;\ 100;\ 9;\ 0;\ 0;\ 0;\ 0)$, $\max F = 8\cdot 57 + 10\cdot 100 + 0\cdot 9 - 5\cdot 0 = 1456.$

Завдання 1.4 Записати двоїсту задачу до поставленої задачі лінійного програмування. Розв'язати одну із задач графічно або симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі.

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція Z максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак «≤». Тому перше обмеження моделі помножимо на (–1). При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \le -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу:

$$F = -y_1 + 5y_2 \to \min;$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 \ge -5, \\ -y_1 + 3x_2 \ge 2, \end{cases}$$
$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

1.
$$Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, 4}.$$

2. Векторна форма запису системи обмежень має вигляд

$$\vec{A}_1 x_1 + \vec{A}_2 x_2 + \vec{A}_3 x_3 + \vec{A}_4 x_4 = \vec{A}_0,$$

де $\vec{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

У системі векторів для утворення початкового одиничного базису відсутній вектор $\vec{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тому використаємо штучну змінну в першому обмеженні.

3. Розширена задача лінійного програмування буде така:

$$Z = -5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}.$$

У цій задачі x_4 та x_5 - базисні змінні, а x_1, x_2, x_3 - вільні. Нехай $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, тоді $x_4 = 5$; $x_5 = 1$.
Перший опорний план задачі:

$$x_0 = (0; 0; 0; 5; 1), \; Z_0 = -M.$$

4. Подальше розв'язування прямої задачі подано у вигляді симплекс-таблиці:

Базис	$C_{баз}$	План	–5	2	0	0	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$\leftarrow x_5$ x_4	$-M$ 0	1 5	1 2	1 3	–1 0	0 1	1 0	1 5/3
$Z_j - C_j \geq 0$		0 $-M$	5 –M	–2 –M	0 M	0 0	0 0	
x_2 $\leftarrow x_4$	2 0	1 2	1 –1	1 0	–1 3	0 1	1 –3	— 2/3
$Z_j - C_j \geq 0$		2	7	0	–2	0	2 + M	
x_2 x_3	2 0	5/3 2/3	2/3 –1/3	1 0	0 1	1/3 1/3	0 –1	
$Z_j - C_j \geq 0$		10/3	19/3	0	0	2/3	0 + M	

З останньої симплекс-таблиці бачимо, що оптимальний план прямої задачі

$$X^* = \left(0; \; \frac{5}{3}; \; \frac{2}{3}; \; 0\right), \; Z_{\max} = \frac{10}{3}.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна записати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$\min F = \max Z = \frac{10}{3},$$
$$Y^* = \vec{c}_{баз} D^{-1},$$

де $\vec{c}_{баз} = (2; \; 0)$ та міститься в стовпчику «$C_{баз}$» останньої симплекс-таблиці;

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

він також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних «x_5» та «x_4», які утворювали початковий базис.

Отже,

$$Y^* = (2;\ 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0;\ 2/3),$$

$$\min F = -1 \times 0 \ + \ 5 \times \frac{2}{3} \ = \ \frac{10}{3}.$$

Застосовуючи до розв’язування прямої задачі симплекс-метод, ми знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв’язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 2.1 Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування.

Варіанти завдань

1.	$Z = x_1 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_4 = 24, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,4}\right).$	2.	$Z = 6x_1 + 10x_2 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 \le 5, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.
3.	$Z = x_1 + x_2 \to \min;$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 8, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.	4.	$Z = x_1 + x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,4}\right).$
5.	$Z = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 36, \\ x_2 \le 13, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.	6.	$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + 4x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.
7.	$Z = 2x_1 + 5x_2 \to \max;$ $\begin{cases} x_2 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.	8.	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.
9.	$Z = x_1 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,5}\right).$	10.	$Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_2 + x_4 + x_5 = 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,5}\right).$

11.	$Z = x_1 - x_2 - x_4 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 8, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,4}\right).$	12.	$Z = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_6 = 1, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,6}\right).$
13.	$Z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,3}\right).$	14.	$Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 - x_3 \le -1, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,3}\right).$
15.	$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ 2x_1 - x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.	16.	$Z = 6x_1 + 5x_2 \to \min;$ $\begin{cases} x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 18, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.
17.	$Z = x_1 + 2x_2 - 2x_3 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le 5, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,3}\right).$	18.	$Z = 2x_1 - x_2 - 2x_3 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 5, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,3}\right).$
19.	$Z = -2x_1 + 5x_2 - x_3 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 \ge -6, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,3}\right).$	20.	$Z = -5x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + x_3 \le 4, \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 \ge 2, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ x_j$ - цілі $\left(j = \overline{1,3}\right).$
21.	$Z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 9, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.	22.	$Z = 2x_1 + x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \ge 10, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.
23.	$Z = 8x_1 + 6x_2 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.	24.	$Z = 8x_1 + 6x_2 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 -$ цілі.

25.	$Z = x_1 + x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі}.$	26.	$Z = 5x_1 - 3x_2 \to \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -6, \\ x_1 - x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі}.$
27.	$Z = x_1 + 5x_2 \to \max;$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 3, \\ 5x_1 + 4x_2 \le 20, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі}.$	28.	$Z = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_2 \le 3, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі}.$
29.	$Z = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі}.$	30.	$Z = 5x_1 - 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 8, \\ 2x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі}.$

Завдання 2.2 Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, якщо відомі запаси вантажу в пунктах відправлення $A=(a_i,\ldots,a_i,\ldots,a_m)$, заявки на вантажі пунктів призначення $B=(b_j,\ldots,b_j,\ldots,b_n)$ і матриця тарифів перевезень $C=\|C_{ij}\|$ $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ одиниці вантажу з i-го пункту відправлення у j-ий пункт призначення.

Варіанти завдань

1.	$A=(28,42,30)$; $B=(48,18,34)$; $C=\begin{pmatrix}10 & 15 & 14\\ 20 & 18 & 12\\ 17 & 24 & 16\end{pmatrix}$.	2.	$A=(17,7,12,3)$; $B=(8,13,18)$; $C=\begin{pmatrix}33 & 25 & 23\\ 12 & 26 & 23\\ 10 & 30 & 20\\ 45 & 26 & 50\end{pmatrix}$.
3.	$A=(120,40,70)$; $B=(50,75,45,60)$; $C=\begin{pmatrix}7 & 15 & 12 & 8\\ 14 & 9 & 10 & 1\\ 17 & 16 & 10 & 9\end{pmatrix}$.	4.	$A=(15,25,20)$; $B=(10,22,28)$; $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 6 & 3 & 5\\ 3 & 1 & 4\end{pmatrix}$.
5.	$A=(30,40,20)$; $B=(10,25,32,13,10)$; $C=\begin{pmatrix}10 & 8 & 12 & 7 & 11\\ 9 & 14 & 10 & 7 & 6\\ 12 & 15 & 9 & 14 & 10\end{pmatrix}$.	6.	$A=(100,120,120)$; $B=(40,50,70,90,90)$; $C=\begin{pmatrix}4 & 1 & 2 & 6 & 9\\ 6 & 4 & 3 & 5 & 7\\ 5 & 2 & 6 & 4 & 8\end{pmatrix}$.
7.	$A=(100,150,50)$; $B=(75,80,60,85)$; $C=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 3 & 10 & 20 & 1\end{pmatrix}$.	8.	$A=(50,40,20)$; $B=(30,25,35,20)$; $C=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 3 & 2 & 4 & 4\end{pmatrix}$.
9.	$A=(800,250,350)$; $B=(120,210,350,240,480)$; $C=\begin{pmatrix}18 & 13 & 11 & 15 & 14\\ 10 & 22 & 18 & 14 & 13\\ 12 & 16 & 14 & 18 & 14\end{pmatrix}$.	10.	$A=(10,15,10,25)$; $B=(10,20,15,15)$; $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 2 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

11.	$A=(20,15,10,25)$; $B=(20,15,15,10,10)$; $C=\begin{pmatrix}3&1&1&3&5\\1&2&3&4&3\\1&2&2&&3\\2&4&5&3&0\end{pmatrix}$.	12.	$A=(45,38,23,84)$; $B=(70,65,55)$; $C=\begin{pmatrix}15&6&12\\4&6&8\\24&21&5\\12&9&12\end{pmatrix}$.
13.	$A=(50,40,20)$; $B=(30,25,35,20)$; $C=\begin{pmatrix}3&2&4&1\\2&3&1&5\\3&2&7&4\end{pmatrix}$.	14.	$A=(30,50,20)$; $B=(15,15,40,30)$; $C=\begin{pmatrix}1&8&2&3\\4&7&5&1\\5&3&4&1\end{pmatrix}$.
15.	$A=(30,20,40,50)$; $B=(35,20,55,30)$; $C=\begin{pmatrix}2&4&1&3\\5&6&6&4\\3&7&9&5\\1&2&2&7\end{pmatrix}$.	16.	$A=(60,65,70)$; $B=(40,60,70,25)$; $C=\begin{pmatrix}3&4&3&2\\2&1&2&3\\5&4&1&5\end{pmatrix}$.
17.	$A=(15,10,15)$; $B=(12,8,20)$; $C=\begin{pmatrix}4&1&3\\2&0&1\\3&5&6\end{pmatrix}$.	18.	$A=(160,140,60)$; $B=(80,80,60,80)$; $C=\begin{pmatrix}5&4&3&4\\3&2&5&5\\1&6&3&2\end{pmatrix}$.
19.	$A=(80,140,70)$; $B=(80,50,50,70)$; $C=\begin{pmatrix}4&2&3&1\\6&3&5&6\\3&2&6&3\end{pmatrix}$.	20.	$A=(180,190,170)$; $B=(45,45,100,160)$; $C=\begin{pmatrix}6&7&3&2\\5&1&4&3\\3&2&6&2\end{pmatrix}$.
21.	$A=(100,150,50)$; $B=(75,80,60,85)$; $C=\begin{pmatrix}6&7&3&5\\1&2&5&6\\8&10&20&1\end{pmatrix}$.	22.	$A=(110,190,90)$; $B=(80,60,170,80)$; $C=\begin{pmatrix}8&1&9&7\\4&6&2&12\\3&5&8&9\end{pmatrix}$.

23.	$A=(175,125,140)$; $B=(80,110,60,40)$; $C=\begin{pmatrix}9 & 7 & 5 & 3\\ 1 & 2 & 4 & 6\\ 8 & 10 & 12 & 1\end{pmatrix}$.	24.	$A=(510,90,120)$; $B=(270,140,200,110)$; $C=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7 & 3\\ 5 & 6 & 8 & 9\\ 7 & 2 & 4 & 8\end{pmatrix}$.
25.	$A=(115,175,130)$; $B=(70,220,40,30,60)$; $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix}$.	26.	$A=(30,40,20)$; $B=(20,30,30,10)$; $C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 5 & 1\\ 4 & 3 & 2 & 6\end{pmatrix}$.
27.	$A=(10,15,25)$; $B=(5,10,20,15)$; $C=\begin{pmatrix}8 & 3 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 6 & 7\\ 1 & 9 & 4 & 3\end{pmatrix}$.	28.	$A=(60,80,100)$; $B=(40,60,80,60)$; $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$
29.	$A=(120,40,70)$; $B=(50,75,45,60)$; $C=\begin{pmatrix}7 & 15 & 12 & 8\\ 14 & 9 & 10 & 1\\ 17 & 16 & 10 & 9\end{pmatrix}$.	30.	$A=(180,90,170)$; $B=(45,45,100,160)$; $C=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3 & 2\\ 5 & 1 & 4 & 3\\ 3 & 2 & 6 & 2\end{pmatrix}$.

Завдання 2.3 За методом Лагранжа знайти умовний екстремум функції.

Варіанти завдань

1.	$F = 2x_1^2 + x_2^2;$ $2x_1 + 3x_2 = 5.$	2.	$F = x_1^2 - x_2^2;$ $3x_1 + 4x_2 = 12.$
3.	$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2;$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8.$	4.	$F = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2;$ $x_1 + 3x_2 = 6.$
5.	$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1;$ $x_1^2 + x_2^2 = 4.$	6.	$F = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2;$ $x_1 + x_2 + x_3 = 8.$
7.	$F = 3x_1^2 + 2x_2^2;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$	8.	$F = x_2 - x_1 - 2x_1^2;$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$
9.	$F = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6, \\ x_2 + x_2 = 4. \end{cases}$	10.	$F = 2x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3;$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$
11.	$F = 2x_1^2 + x_2^2;$ $2x_1 + 3x_2 = 5.$	12.	$F = x_1^2 - x_2^2,$ $3x_1 + 4x_2 = 12.$
13.	$F = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 3)^2;$ $2x_1 - x_2 = 5.$	14.	$F = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2;$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 8.$
15.	$F = x_1^2 + 2x_1 + x_2^2 - 5x_2;$ $x_1 + 3x_2 = 6.$	16.	$F = 2x_1^2 + 5x_1 + x_2^2 + 3x_2;$ $x_1 + 5x_2 = 12.$
17.	$F = 4x_1 + 2x_1^2 + x_2 + 2x_2^2;$ $3x_1 + 4x_2 = 12.$	18.	$F = 2x_1x_2 + x_2^2;$ $2x_1 + 4x_2 = 8.$
19.	$F = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 + 1;$ $x_1^2 + x_2^2 = 4.$	20.	$F = 2(x_1 - 1)^2 + 3(x_2 - 3)^2;$ $x_1 + x_2 = 5.$

21.	$F = x_1^2 - x_2^2;$ $x_1 - x_2 = 4.$	22.	$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 5)^2;$ $-x_1 + 2x_2 = -5.$
23.	$F = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2;$ $x_1 + x_2 + x_3 = 8.$	24.	$F = x_1 x_2 x_3;$ $x_1 + x_2 + x_3 = 6.$
25.	$F = 3x_1^2 + 5x_2 + 12x_3^2;$ $3x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 18.$	26.	$F = 5x_1^2 + 3x_2^2 + 15x_3^2;$ $4x_1 + 7x_2 + x_3 = 14.$
27.	$F = x_1^2 + 2x_2 - 3;$ $x_1 + 2x_2 - 4 = 0.$	28.	$F = 3x_1^2 + 2x_2^2;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$
29.	$F = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2;$ $x_1 + 2x_2 + x_3 = 16.$	30.	$F = 3x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_1 x_3;$ $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4.$

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 2.1 Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування.

Приклад 1.

$$Z = x_1 - x_2 \to \max; \quad (1)$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \end{cases} \quad (2)$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1,4}), \quad (3)$$

$$x_j \text{ - цілі } (j = \overline{1,4}). \quad (4)$$

Розв'язання. Для визначення оптимального плану задачі (1) – (4) спочатку знаходимо оптимальний план задачі (1) – (3) (табл. 1):

Таблиця 1

Базис	$C_б$	План	1	-1	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	0	1	1	-2	1	0
x_4	0	3	1	3	0	1
$\Delta_j = Z_j - C_j \geq 0$		0	-1	1	0	0
x_1	1	1	1	-2	1	0
x_4	0	2	0	5	-1	10
$\Delta_j = Z_j - C_j \geq 0$		1	0	-1	1	0
x_1	1	$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$
x_2	-1	$\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\Delta_j = Z_j - C_j \geq 0$		$\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$

Як видно з таблиці 1, знайдений оптимальний план $X = \left(\frac{9}{5}; \frac{2}{5}; 0; 0\right)$ задачі (1) – (3) не є оптимальним планом задачі (1) – (4), оскільки дві змінні x_1 та x_2 мають нецілочислові значення. Дробова частина x_1 дорівнює $\frac{4}{5}$, а змінної x_2 рівна $\frac{2}{5}$. Тому для змінної x_1 $\left(\frac{4}{5} > \frac{2}{5}\right)$ складаємо додаткове обмеження. Із останньої симплекс-таблиці маємо:

$$x_1 + \left\{\frac{3}{5}\right\} x_3 + \left\{\frac{2}{5}\right\} x_4 = \frac{9}{5}.$$

Таким чином, до системи обмежень задачі (1) – (3) додаємо нерівність

$$f(1)x_1 + f\left(\frac{3}{5}\right)x_3 + f\left(\frac{2}{5}\right)x_4 \geq f\left(\frac{9}{5}\right);$$
$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 \geq \frac{4}{5};$$
$$3x_3 + 2x_4 \geq 4.$$

Таким чином, обмеження задачі матимуть вигляд

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = \frac{9}{5}, \\ x_2 - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{2}{5}, \\ 3x_3 + 2x_4 \geq 4. \end{cases}$$

Віднімемо додаткову змінну $x_5 \geq 0$ в останній нерівності, і помножимо одержану рівність на (–1). Для розв'язання отриманої задачі потрібно застосувати двоїстий симплекс-метод (табл. 2, табл. 3).

Таблиця 2

Базис	$C_б$	План	1	-1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	$\frac{9}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	0
x_4	-1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
x_5	0	-4	0	0	-3	-2	1
$\Delta_j \geq 0$		$\frac{7}{5}$	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0

Таблиця 3

Базис	$C_б$	План	1	-1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	0	0	0	$\frac{1}{5}$
x_2	-1	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$
x_4	0	2	0	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
$\Delta_j \geq 0$		1	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{10}$

Із таблиці 3 видно, що вихідна задача цілочислового програмування має оптимальний план $X^* = (1; 0; 0; 2)$, при якому $Z_{\max} = 1$.

Приклад 2.

$$Z = 350x_1 + 150x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} 25x_1 + 10x_2 \le 100, \\ 40x_1 + 20x_2 \le 190, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_1, x_2 - \text{цілі}.$$

Розв'язання. Нехай x_1 і x_2 - кількість комплектів устаткування відповідно типу А і В.

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисловості. Остання симплексна таблиця набере вигляду:

Базис	$C_б$	План	350	150	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$
$\Delta_j = Z_j - C_j \ge 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження виду $\sum_{j=1}^{n}\{a_{ij}\}x_j \ge \{b_j\}$:

$$\{1\}x_1 + \{0\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \ge \left\{7\frac{1}{2}\right\}.$$

Оскільки $\left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$, $\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $\left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$, то додаткове обмеження набирає вигляду

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \ge \frac{1}{2}.$$

Зведемо його до канонічної форми та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 \ge \frac{1}{2}.$$

Приєднавши здобуте обмеження до останньої симплексної таблиці з умовно-оптимальним планом, дістанемо:

Базис	$C_б$	План	350	150	0	0	0	$-M$
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	350	1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$	0	0
x_2	150	$7\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{4}$	0	0
x_6	$-M$	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$	-1	1
$Z_j - C_j \geq 0$		1475	0	0	10	$2\frac{1}{2}$	0	0
		$-\frac{1}{2}M$	0	0	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{4}M$	M	0

Розв’язуючи наведену задачу, остаточно знаходимо цілочисловий оптимальний план: $X^*(x_1 = 2;\ x_2 = 5)$, $Z_{\max} = 1450$.

Завдання 2.2 Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, якщо відомі запаси вантажу в пунктах відправлення $A=(a_i,\ldots,a_i,\ldots,a_m)$, заявки на вантажі пунктів призначення $B=(b_j,\ldots,b_j,\ldots,b_n)$ і матриця тарифів перевезень $C=\|C_{ij}\|$ $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ одиниці вантажу з i-го пункту відправлення у j-ий пункт призначення.

Приклад 1.

$$A=(10;5;5);$$

$$B=(4;8;8);$$

$$C=\begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Процес розв'язування транспортної задачі складається з трьох основних етапів:

1) побудова початкового опорного плану;
2) перевірка оптимального плану;
3) перерозподіл вантажів для поліпшення плану.

За даними задачі складаємо таблицю 1.

Таблиця 1.

Споживчі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	4	5	1	10
A_2	3	2	0	5
A_3	5	4	2	5
Потреби	4	8	8	20

Для побудови опорного плану перевезень найбільш простим і зручним у застосуванні є метод північно-західного кута. Згідно з цим методом розподіл продукції споживачам виконується в порядку розміщення їх у таблиці, яку починають заповнювати з лівого верхнього кута, рухаючись далі за рядком праворуч або за стовпцем донизу.

Опорний план має вигляд:

$x_{11}=\min\{a_1;b_1\}=\min\{10;4\}=4$, (в A_1 лишилось 6 од. Вантажу)

$x_{12}=\min\{a_1-x_{11};b_2\}=\min\{6;8\}=6$, (записи в A_1 вичерпані).

Потреби B_2 ще не задовільні, тому

$x_{22}=\min\{a_2;b_2-x_{12}\}=\min\{5;2\}=2$,

Постачальник A_2 має тепер лише 3 од. Вантажу, які відправляють до пункту B_3 :

$x_{23}=\min\{a_2-x_{22};b_3\}=\min\{3;8\}=3$.

Записи A_3 складають 5 од. Вантажу, що забезпечує потреби B_3.

$x_{33} = \min\{a_3; b_3 - x_{23}\} = \min\{5;5\} = 5$.
Маємо план (таблиця 2):

Таблиця 2.

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	4 **4**	5 **6**	1	10
A_2	3	2 **2**	0 **3**	5
A_3	5	4	2 **5**	5
Потреби	4	8	8	20

Знайдений план не вироджений, тому що кількість ненульових перевезень дорівнює $m + n - 1$.

Оцінимо оптимальність плану методом потенціалів, в основу якого покладено знаходження спеціальних числових показників, приписаних кожному постачальнику і споживачу продукції за певним правилом, а саме: кожному постачальнику A_i приписуємо число u_i (i=1,…,m), а кожному споживачу - число v_j (j=1,…,n) так, щоб для всіх заповнених клітинок таблиці мати рівність

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Введені таким чином числа u_i та v_j називають потенціалами.

Визначивши потенціали, знаходять їх суму $c'_{ij} = u_i + v_j$ для незаповнених клітинок таблиці. Критерій оптимальності стверджує, що оптимальним буде план, для якого $c'_{ij} \le c_{ij}$ ($\Delta_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} \ge 0$). У протилежному випадку план можна поліпшити, заповнюючи клітинку з від'ємною характеристикою ($\Delta_{ij} < 0$). Для заповнення такої клітинки необхідно змінити обсяги перевезень, записаних у тих клітинках таблиці, які з вибраною клітинкою пов'язані циклом.

Циклом називається ламана лінія, одна з вершин якої розміщується у незаповненій клітинці, а інші - в заповнених; причому у кожній з вершин перетинаються тільки дві ланки, одна з яких знаходиться у рядку, а друга - у стовпці.

Кожна вершина циклу (відповідна клітинка таблиці) позначається так: Незаповнена клітинка - знаком "+", а решта - по черзі знаками "-" і "+". Вибирається найменша поставка з тих, що містяться у клітинках, позначених

знаком “-”. Здобуту поставку переміщують за циклом, додаючи її значення до поставок у клітинках з “+” і віднімаючи з поставок у клітинках з “-”.

Продовжуємо розв’язування задачі. Знайдемо потенціали u_i та v_j як розв’язок системи рівнянь

$$u_1 + v_1 = 4,$$
$$u_1 + v_2 = 5,$$
$$u_2 + v_2 = 2,$$
$$u_2 + v_3 = 0,$$
$$u_3 + v_3 = 2.$$

Нехай $u_1 = 0$, тоді $v_1 = 4,\ v_2 = 5,\ u_2 = -3,\ v_3 = 3,\ u_3 = -1.$

Таблиця 3

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	4 **4**	5 **6** «-»	1 «+»	0
A_2	3	2 **2** «+»	0 **3** «-»	-3
A_3	5	4	2 **5**	-1
v_j	4	5	3	

Знайдемо суму потенціалів для незаповнених клітинок:

$$c'_{13} = u_1 + v_3 = 3, \quad \Delta_{13} = 1 - 3 = -2,$$
$$c'_{21} = u_2 + v_1 = 1, \quad \Delta_{21} = 3 - 1 = 2,$$
$$c'_{31} = u_3 + v_1 = 3, \quad \Delta_{31} = 5 - 3 = 2,$$
$$c'_{32} = u_3 + v_2 = 4, \quad \Delta_{32} = 4 - 4 = 0.$$

Оскільки $\Delta_{13} < 0$, то план можна поліпшити заповнивши клітинку (1,3). Будуємо для клітинки (1,3) цикл як показано у таблиці 3 і перерозподіляємо за цим циклом 3 од. вантажу (min{3;6}=3). Результати заносимо до таблиці 4.

Таблиця 4

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	4 **4**	5 **3** «-»	1 **3** «+»	0
A_2	3	2 **5**	0	-3
A_3	5	4 «+»	2 **5** «-»	1
v_j	4	5	3	

Маємо новий план. Перевіримо його оптимальність.

Знайдемо потенціали і занесемо їх до таблиці 4. Для незаповнених клітинок маємо:

$$c'_{21} = 4 - 3 = 1, \quad \Delta_{21} = 3 - 1 = 2,$$
$$c'_{23} = 1 - 3 = -2, \quad \Delta_{23} = 0 + 2 = 2,$$
$$c'_{31} = 4 + 1 = 5, \quad \Delta_{31} = 5 - 5 = 0,$$
$$c'_{32} = 5 + 1 = 6, \quad \Delta_{32} = 4 - 6 = -2.$$

Клітинка (3,2) має від'ємну характеристику, цикл для неї зображено в таблиці 3.5.4. Перерозподіляємо за циклом 3 одиниці вантажу і заносимо результати до таблиці 5.

Таблиця 5

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	4 **4**	5	1 **6**	0
A_2	3	2 **5**	0	-1
A_3	5	4 **3**	2 **2**	1
v_j	4	3	1	

Перевіримо оптимальність плану:

$$c'_{12} = 3 + 0 = 3, \quad \Delta_{12} = 3 - 3 = 0,$$
$$c'_{21} = 4 - 1 = 3, \quad \Delta_{21} = 3 - 3 = 0,$$
$$c'_{23} = 1 - 1 = 0, \quad \Delta_{23} = 0 - 0 = 0,$$
$$c'_{31} = 4 + 1 = 5, \quad \Delta_{31} = 5 - 5 = 0.$$

План оптимальний, йому відповідають сумарні витрати на перевезення:

$$F = 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 48.$$

Приклад 2. Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Розв'язання. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i-ї фабрики до j-го замовника $(i = \overline{1,\ 3};\ \ j = \overline{1,\ 4})$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає ось у чому: уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$Z = 4 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 2 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{22} + x_{23} +$$
$$+ 2 \cdot x_{24} + 2 \cdot x_{31} + x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 2 \cdot x_{34} \to \min.$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} +$$
$$+ 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 150, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80. \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{23} = 40, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 60, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}; \quad j = \overline{1, 4}.$$

Розв'язування задачі надамо в таблицях, які назвемо транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості.

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 110	4	2 2 «+»	5 «–» 40	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 60 «–»	2 «+» 0	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум. од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$. Для подальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку $(2, 4)$. Тепер перший план транспортної задачі є

невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

(1, 2): $u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4$;
(1, 3): $u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2$;
(2, 1): $u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5$;
(2, 2): $u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3$;
(3, 1): $u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2$;
(3, 3): $u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4$.

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку $(1, 3)_3$, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки (1, 3), та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку (1, 3) переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщуються в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщуються в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщуються в клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку $\min\{60;\ 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка (1, 3) — 40 од. продукції, (2, 3) — (60 – 40) = 20 од., (2, 4) – (0 + 40) = 40 од. Клітинка (1, 4) , звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати $(n + m - 1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 110 «–»	4	2 «+» 40	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 «–» 20	2 «+» 40	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 1 «+»	1 40	4	2 «–» 40	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому $Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки (3, 1)). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану транспортної задачі і дістанемо таку таблицю:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$A_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$A_3 = 80$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Тому $Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720$ ум. од.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість виробництва та перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

Завдання 2.3 За методом Лагранжа знайти умовний екстремум функції.

Приклад 1.

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2;$$

при обмеженнях

$$x_1^2 + x_2^2 \le 52.$$

Розв'язання. Область припустимих розв'язків є обмеженою та замкненою (рис. 1). Тому в цій області функція $Z = f(X)$ досягає глобального екстремуму.

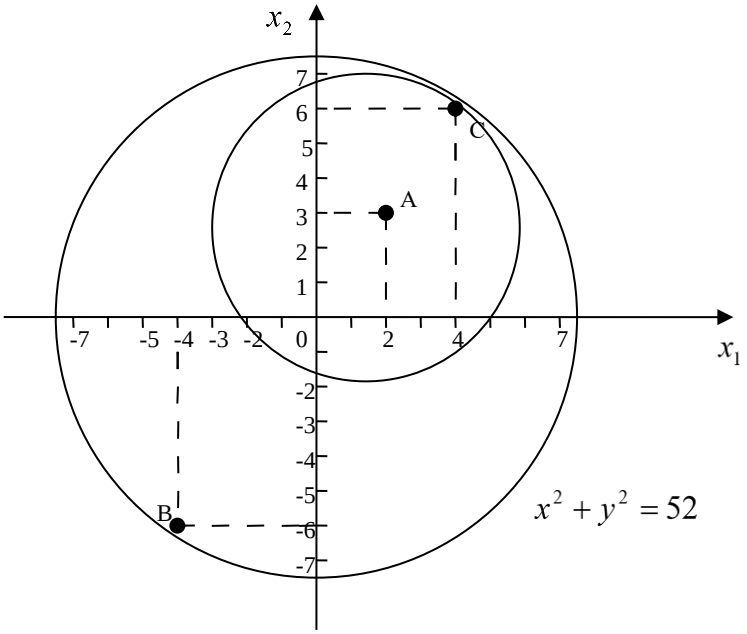

Рис. 1

Знайдемо стаціонарні точки для безумовного екстремуму з рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = 2\ ,\ x_2 = 3.$$

Перевіримо, що точка (2; 3) задовольняє обмеження. Дійсно,

$$2^2 + 3^2 = 13, \quad Z_A = (2 - 2)^2 + (3 - 3)^2\ , \ Z_A = 0.$$

Побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = Z(x_1, x_2) + \lambda(b - \varphi(x_1, x_2)) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(52 - x_1^2 - x_2^2)\ .$$

Знаходимо стаціонарні точки з рівнянь

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) - 2\lambda x_1 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) - 2\lambda x_2 = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 52 - x_1^{\,2} - x_2^{\,2} = 0.$$

Тобто отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими x_1 ; x_2 ; λ :

$$\begin{cases} 2(x_1 - 2) - 2\lambda x_1 = 0, \\ 2(x_2 - 2) - 2\lambda x_2 = 0, \\ 52 - x_1^{\,2} - x_2^{\,2} = 0. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на $x_2 \neq 0$, а друге – на $x_1 \neq 0$:

$$\begin{cases} 2(x_1 - 2)x_2 - 2\lambda x_1 x_2 = 0, \\ 2(x_2 - 2)x_1 - 2\lambda x_1 x_2 = 0, \\ 52 - x_1^{\,2} - x_2^{\,2} = 0. \end{cases}$$

З першого рівняння віднімемо друге, одержимо:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 0, \\ 52 - x_1^{\,2} - x_2^{\,2} = 0, \end{cases}$$

звідки

$$x_1 = \frac{2}{3}x_2, \quad 52 - \frac{4}{9}x_1^2 - x_2^2.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_2, \\ \frac{13}{9}x_2^{\,2} = 52, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_2, \\ x_2^{\,2} = 36, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 6, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -4, \\ x_2 = -6. \end{cases}$$

Одержали дві стаціонарні точки B(-4;-6) і C(4; 6). Значення цільової функції в точках B і C дорівнюють Z_B = 117, Z_C = 13, причому точки B і C належать границі області. Таким чином, в точці B(-4; -6) досягається глобальний максимум, в точці A – глобальний мінімум, в точці C – умовний локальний мінімум.

Приклад 2. Акціонерне товариство з обмеженою відповідальністю відвело 1200 га ріллі під основні рослинницькі культури - озиму пшеницю та цукрові буряки. Техніко-економічні показники вирощування цих культур відбиває таблиця:

Показник	Площа, га, відведена	
	під озиму пшеницю, x_1	під цукровий буряк, x_2
Урожайність, т/га	4	35
Ціна, грн./т	800	300
Собівартість, грн./т	$y_1 = 12{,}5x_1^2 - 200x_1 + 1200$	$y_2 = 12{,}5x_2^2 - 150x_2 + 650$

Знайти оптимальну площу посіву озимої пшениці та цукрових буряків.

Розв'язання. Нехай x_1 — площа ріллі, відведена під сотні га озимої пшениці; x_2 — площа ріллі, відведена під цукрові буряки, сотні га.

Зауважимо, що собівартість однієї тони пшениці та цукрових буряків залежить від відповідної площі посіву.

Запишемо економіко-математичну модель. За критерій оптимальності візьмемо максимізацію валового прибутку:

$$f = 4\left(800 - 12{,}5x_1^2 + 200x_1 - 1200\right)x_1 + 35\left(300 - 12{,}5x_2^2 + 150x_2 - 650\right)x_2 =$$
$$= 4\left(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right)$$

за умов

$$x_1 + x_2 = 12.$$

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L\left(x_1, x_2, \lambda_1\right) = 4\left(-12{,}5x_1^3 + 200x_1^2 - 400x_1\right) + 35\left(-12{,}5x_2^3 + 150x_2^2 - 350x_2\right) + \lambda_1\left(12 - x_1 - x_2\right) = 0.$$

Візьмемо частинні похідні і прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 4\left(-37{,}5x_1^2 + 400x_1 - 400\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 35\left(-37{,}5x_2 + 300x_2 - 350\right) - \lambda_1 = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 12 - x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Із цієї системи визначимо сідлову точку. З першої та другої рівностей знайдемо вирази для λ_1 і прирівняємо їх:

$$4\left(-37,5x_1^2+400x_1-400\right)=35\left(-37,5x_2+300x_2-350\right),\ \text{або}$$
$$-150x_1^2+1600x_1-1600=-1312,5x_2^2+10500x_2-12250. \qquad (*)$$

Із останнього рівняння цієї системи маємо: $x_1=12-x_2$.

Підставивши значення x_1 у (*), дістанемо:

$$-150\left(12-x_2\right)^2+1600\left(12-x_2\right)^2-1600=-1312,5_2^2+10500x_2-12250,\ \text{або}$$
$$1162_2^2-8500x_2+11450=0.$$

Розв'язавши це квадратне рівняння, дістанемо

$$x_2^{(1)}\approx 1,78 \qquad (178\ \text{га}); \qquad x_2^{(2)}\approx 5,53 \qquad (553\ \text{га}).$$

Відповідно дістанемо: $x_1^{(1)}\approx 10,22$ (1022 га); $x_1^{(2)}\approx 6,47$ (647 га).

Тобто сідловими точками є такі:

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=10,22 \\ x_2^{(1)}=1,78 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{(2)}=6,47 \\ x_2^{(2)}=5,53 \end{cases}$$

Обчислимо значення цільової функції у цих точках:

$$f\left(x_1=10,22;x_2=1,78\right)=4\left(800-1305,61+2044-1200\right)1022+$$
$$+35\left(300-39,615+267-650\right)178=-236247;$$

$$f\left(x_1=6,47;x_2=5,53\right)=4\left(800-523,26+1294-1200\right)647+$$
$$+35\left(300-382,26+829,5-650\right)553=4\ 625\ 863.$$

Отже, цільова функція набуває максимального значення, якщо озима пшениця вирощується на площі 647 га, а цукровий буряк - на площі 553 га.

Бібліографічний список

1. Стасенко О.М. Тексти лекцій для студентів спеціальностей 051 «Економіка» та 076 «підприємництво, торгівля та біржова діяльність». – ХНУБА, 2018.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1985.
3. Ашманов С. А. Линейное программирование. — М.: Наука, 1981.
4. Белман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
5. Белман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.
6. Вагнер Г. Основы исследования операций. — Т. 1—3. — М.: Мир, 1972.
7. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964.
8. Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972.
9. Вильямс Н. Н. Параметрическое программирование в экономике. — М.: Статистика, 1976.
10. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). — М.: Физматгиз, 1961.
11. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. — М.: Советское радио, 1966.
12. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969.
13. Гуревич Т. Ф., Лущук В. О. Сборник задач по математическому программированию. — М.: Колос, 1977.
14. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и приложения. — М.: Прогресс, 1966.
15. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник. — К.: ІЗМН, 1997.
16. Зайченко Ю. П. Исследование операций. — К.: Вища шк., 1988.
17. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация. — К.: Вища шк., 1991.
18. Збірник задач з курсу «Математичне програмування» / Укл. С. І. Наконечний, В. В. Вітлінський та ін. — К.: КНЕУ, 1998. — Ч. 2.
19. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. — М.: Наука, 1967.
20. Ермольев Ю. М., Ястремский А. И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. — М.: Наука, 1979.
21. Еромольев Ю. М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976.
22. Калихман И. Л. Линейная алгебра и программирование. — М.: Высш. шк., 1967.
23. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. — М.: Высш. шк., 1975.

24. Калихман И. Л., Войтенко М. А. Динамическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1973.
25. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.
26. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Математическое оптимальное программирование в экономике. — М.: Знание, 1968.
27. Кузнецов Ю. Н., Козубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. — М.: Высш. шк.,1976.
28. Кюнци Г. П., Крелле В. Нелинейное программирование. — М.: Сов. радио, 1965.
29. Линейное и нелинейное программирование / Под ред. И. Н. Ляшенко. — К.: Высш. шк., 1975.
30. Михалевич В. С., Гупал А. М., Норкин В. И. Методы выпуклой оптимизации. — М.: Наука, 1987.
31. Михалевич В. С., Ермольев Ю. М. Пакет прикладных программ не дифференцируемой и стохастической оптимизации // Исслед. операций и АСУ. — 1986. — Вып. 27. — С. 3—38.
32. Муртаф Б. Современное линейное программирование. Теория и практика. — М.: Мир, 1984.
33. Наконечний С. І., Гвоздецька Л. В. Збірник задач з курсу «Математичне програмування» 1: Навч. посібник. — К.: ІСОД, 1996.
34. Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.
35. Романюк Т. П., Терещенко Т. О., Присенко Г. В., Городкова І. М. Математичне програмування: Навч. посібник. — К.: ІЗМН, 1996.
36. Степанюк В. В. Методи математичного програмування. — К: Вища шк., 1997.
37. Таха Х. Введение в исследование операций. — М.: Мир, 1985. — Т. 1, 2.
38. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. — М.: Мир, 1967.
39. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г. Линейное программирование, теория, методы, приложение. — М.: Наука, 1969.
40. Ястремский А. И. Стохастические модели математической экономики. — К., 1983.
41. Ястремский А. И. О соотношениях двойственности в условиях оптимальности в линейных задачах стохастического программирования // Кибернетика. — 1987. — № 1. — С. 102—107.

ЗМІСТ

Вступ ……..... 3
Програма навчальної дисципліни…… 3
Змістовий модуль 1 ……... 5
Варіанти індивідуальних домашніх завдань ……..... 5
Завдання 1.1 ……..... 5
Завдання 1.2 ……..... 8
Завдання 1.3 ……..... 10
Завдання 1.4 ……..... 13
Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань ...……..... 15
Завдання 1.1 ……..... 15
Завдання 1.2 ……..... 17
Завдання 1.3 ……..... 20
Завдання 1.4 ……..... 22
Змістовий модуль 2 ……... 25
Варіанти індивідуальних домашніх завдань ……..... 25
Завдання 2.1 ……..... 25
Завдання 2.2 ……..... 28
Завдання 2.3 ……..... 31
Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань ...……..... 33
Завдання 2.1 ……..... 33
Завдання 2.2 ……... 37
Завдання 2.3 ……..... 45
Бібліографічний список ...……...…… 49

Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу економіко-математичні методи та моделі (оптимізаційні методи та моделі) для студентів спеціальностей 051 «Економіка» та 076 «Підприємництво, торгівля та біржова діяльність»

Укладач: Стасенко Олександр Миколайович

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

За редакцією автора

План 2019р., поз. 91.19
Підп. до друку 11.09.2018
Надруковано на різографі.
Тираж 50 прим.

Формат 60х84 1/16.
Обл. -вид. арк. 2,5
Умов. друк. арк. 2,3
Зам. №5359.

Папір друк. № 2.
Безкоштовно.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та віддруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури