Міністерство освіти і науки України
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 051

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

з дисципліни „Вища математика”

на теми: „ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРИ”,

„АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ ”, „ВСТУП ДО АНАЛІЗУ”,

„ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ”

для студентів заочної форми здобуття освіти

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 4 від 14.12.2018

Харків 2019

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни „Вища математика” на теми: „Лінійна та векторна алгебри”, „Аналітична геометрія”, „Вступ до аналізу”, „Диференціальне числення функції однієї змінної” для студентів з спеціальності 051 «Економіка» заочної форми здобуття освіти / Укладачі: Р.В. Посилаєва, О.В. Бабаєва.– Харків, ХНУБА, 2019. – 87с.

Рецензент В.О. Гаєвська

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Дисципліна „Вища математика” є фундаментом математичної освіти бакалавра, що має важливе значення для успішного вивчення загальнотеоретичних і спеціальних дисциплін передбачених навчальним планом зі спеціальності «Економіка».

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над вивченням навчального матеріалу, яка передбачає: вивчення матеріалу за підручниками, розв’язування задач, виконання контрольних робіт, самоперевірку знань.

Мета даного видання – надання допомоги студентам заочної форми навчання в організації самостійної роботи під час вивчення таких тем з дисципліни „Вища математика”, як: „Лінійна та векторна алгебри”, „Аналітична геометрія”, „Вступ до аналізу”.

Видання містить програму навчальної дисципліни, основні поняття теоретичного змісту відповідних розділів, достатню кількість розв'язаних прикладів, а також варіанти індивідуальних завдань для самостійного виконання. Зміст, повнота і рівень складності запропонованих прикладів і завдань, відповідають рівню вимог до математичної підготовки студентів економічних спеціальностей.

Кожна контрольна робота повинна виконуватись в окремому зошиті, на обкладинці якої студенту слід розбірливо написати своє прізвище, ініціали, шифр, номер контрольної роботи і назву дисципліни.

Розв’язання завдань необхідно проводити в тій же послідовності, яка наводиться в умовах задач. При цьому умова завдання повинна бути повністю переписана перед її розв’язанням.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

1 семестр

1 модуль

Змістовий модуль 1. „ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ”.

Тема 1. Матриці. Визначники n–го порядку, їх властивості. Методи обчислення визначників.

Тема 2. Правило Крамера для розв’язання системи лінійних рівнянь. Знаходження розв’язків систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Тема 3. Вектори та дії з ними. Проекція вектора на вісь. Координати вектора. Розподіл відрізку у даному відношенні. Скалярний, векторний та змішаний добутки векторів. Їх властивості.

Тема 4. Рівняння лінії. Різні види рівнянь прямої. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, рівняння пучка прямих, точка перетину прямих.

Тема 5. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їхні властивості. Загальне рівняння кривої другого порядку.

Тема 6. Рівняння поверхні. Рівняння площини. Дослідження загального рівняння площини. Кут між площинами. Пряма лінія у просторі.

Змістовий модуль 2. „ВСТУП ДО АНАЛІЗУ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ”.

Тема 1. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв’язок між ними. Границя функції.

Тема 2. Перша та друга особливі границі. Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції.

Тема 3. Похідна функцій. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання функції. Таблиця похідних. Похідна оберненої, неявної, параметрично заданої функції. Диференціал функції.

Тема 4. Похідні та диференціали вищих порядків. Дотична, нормаль та асимптоти кривої. Диференціал дуги та кривина кривої.

Тема 5. Правило Лопіталя. Формули Тейлора. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Розкриття невизначеностей.

Тема 6. Монотонність, екстремуми функції. Опуклість, вгнутість, точки перегину. Асимптоти, загальна схема побудови графіка функцій.

Контрольна робота №1

1 ЛІНІЙНА І ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

1.1 Визначники. Методи обчислення визначників

Визначником (детермінантом) називається вираз, складений за певним законом з n^2 елементів (чисел, функцій, векторів тощо) квадратної матриці

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Визначником n-го порядку, що відповідає даній матриці, називається алгебраїчна сума $n!$ доданків виду $\pm a_{1\alpha_1}\ a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}$, кожен з яких є добутком n елементів матриці А, взятих з кожного рядка і стовпця по одному. Знак добутку "+" або "$-$" беруть залежно від того, парне чи непарне число інверсій (змін порядку) матиме перестановка $\alpha_1, \alpha_{2,} \dots, \alpha_n$, яку утворюють номери стовпчиків, якщо номери рядків розташовуються у порядку їх зростання. Визначники позначаються таким чином:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n1}\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Елементи a_{ij} $(i = 1, \dots n; j = 1, \dots n)$ називають елементами визначника Δ. Для зручності вони позначаються буквою a з двома індексами, причому індекс i позначає номер рядка (горизонталі), індекс j – номер стовпця (вертикалі), на перетині яких розташований елемент a_{ij}.

Згідно з означенням, запис визначник другого порядку має такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} a_{11}\ a_{12} \\ a_{21}\ a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}, \qquad (1.1)$$

а запис визначника третього порядку – такий:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{23}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{31} \qquad (1.2)$$

Для складання виразу (1.2) можна використати одну з наведених далі схем.

Зауважимо, що кожний доданок алгебраїчної суми в правій частині останньої формули являє собою добуток елементів визначника, взятих по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Цьому добутку приписується відповідний знак. Щоб запам'ятати, які добутки слід брати зі знаком «плюс», які – зі знаком «мінус», можна користуватися правилом, схематичне зображення якого має таким вигляд:

схема 1 (правило трикутників)

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix};$$

схема 2 (правило діагоналей)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

Нехай визначник має n рядків і n стовпців. *Мінором* M_{ij} називається визначник (n – 1)-го порядку, отриманий з даного визначника шляхом викреслювання i-го рядка і j-го стовпця, на перетині яких розташований даний елемент.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника Δ називається мінор M_{ij} даного елемента, який береться із знаком $(-1)^{i+j}$. Позначається так: A_{ij} .

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, де $i=1,2,\ldots, n$; $j=1,2,\ldots,n$; M_{ij} – мінор елемента a_{ij} .

Ще одним способом обчислення визначника є *розкладання визначника за елементами k-го ($k \in [1; n]$) ряду (стовпця).*

Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого його рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in} = \tag{1.3}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{nj}A_{nj}; \quad i \in [1,n], \quad j \in [1,n].$$

Розв’язання прикладів

Приклад 1.1. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

Розв’язання. Згідно з означенням (1.2):

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 60+0-5-0-0+32=87.$$

Приклад 1.2. Обчислити визначник четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 2 \\ 4 & 0 & -3 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

розклавши його за елементами третього рядка.

Розв'язання. Обчислимо визначник методом розкладу його за елементами третього рядка:

$$\Delta = 4 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + (-3) \cdot A_{33} + 5A_{34} =$$

$$= 4(-1)^{3+1} \cdot M_{31} + (-3) \cdot (-1)^{3+3} M_{33} + 5(-1)^{3+1} M_{34} =$$

$$= 4 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -7 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 3 \cdot 21 - 5(-17) = 66.$$

1.2 Матриці

Матрицею називають систему елементів (зокрема, чисел), розміщених у певному порядку і утворюючих таблицю.

Наприклад, якщо матриця А складається з mn елементів, розміщених в m рядків і n стовпців, то вона позначається таким символом

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ a_{mn} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

при цьому кажуть, то матриця A розміру $m \times n$.

Елемент в i -му рядку j -му стовпці матриці A позначають a_{ij}.

Короткий запис даної матриці маєвигляд:

$$A = (a_{ij}), \quad (i = 1,2,\cdots,m; \quad j = 1,2,\cdots,n).$$

Якщо кількість рядків матриці дорівнює кількості її стовпців, то матриця називається *квадратною*.

Якщо такий визначник є відмінним від нуля, то матриця називається *неособливою*, або *невиродженою*. Якщо визначник дорівнює нулю, то матриця називається *особливою*, або *виродженою*.

Сумою матриць одного й того самого порядку $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$, називається матриця $C = A + B$; $C = (c_{ij})$, будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць A і B: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1,2,\cdots,m; \quad j = 1,2,\cdots n)$.

Добутком матриці $A=\left(a_{ij}\right)$ *на деяке число* α називається така матриця *C*, кожен елемент якої c_{ij} утворюється множенням відповідних елементів матриці *A* на α, $c_{ij}=\alpha a_{ij}$ $\left(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots n\right)$.

Очевидно, що для суми матриць і добутку матриць на число виконуються рівності:

1) $A+B=B+A$; 2) $\alpha A=A\alpha$; 3) $\alpha\left(A+B\right)=\alpha A+\alpha B$; 4) $\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$, 5) $\alpha\left(\beta A\right)=\left(\alpha\beta\right)A$.

Добутком матриці $A=\left(a_{ij}\right)$ розміру $m\times p$ на матрицю $B=\left(b_{ij}\right)$ розміру $p\times n$ називається така матриця $C=AB$ розміру $m\times n$, $C=\left(c_{ij}\right)$, кожний елемент можна знайти за формулою:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\ .$$

Кожний елемент матриці *C* утворюється як сума добутків відповідних елементів *i*-го рядка матриці *A* на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці *B*, тобто за такою схемою:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \vdots & b_{1j} & \vdots \\ \vdots & b_{2j} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & b_{pj} & \vdots \end{pmatrix}$$

Зазначимо, що в результаті множення одержується матриця розміру $m\times n$.

З означення випливає, що добуток матриць є *некомутативним*: $AB\neq BA$.

Матриця A^{-1} називається *оберненою матрицею до квадратної невиродженої матриці A*, якщо виконується таке співвідношення: $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Алгоритм відшукання оберненої матриці

1. Обчислюють визначник матриці А.
2. Складають матрицю алгебраїчних доповнень елементів даної матриці.
3. Міняють місцями рядки утвореної матриці на відповідні стовпці *(транспонують матрицю)*.
4. Кожний елемент транспонованої матриці ділять на визначник даної матриці.

У результаті виконання таких дій можна отримати формулу знаходження оберненої матриці

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю A розміром $m\times n$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і введемо ще одне важливе поняття.

Елементарними перетвореннями матриці A називаються такі її перетворення:

1) заміна місцями двох рядків або двох стовпців матриці;

2) множення рядка або стовпця матриці на довільне відмінне від нуля число;

3) додавання елементів одного рядка або стовпця до відповідних елементів іншого рядка або стовпця, попередньо помножених на деяке число.

Розв'язання прикладів

Приклад 1.3. Обчислити матрицю C=A+B, де

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 6 & -7 & 10 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обидві матриці A і B , мають розмір 3×4, тому за означенням можна утворити їх суму, тобто матрицю C.

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 5+0 & -8+1 & 0+2 & 2-1 \\ 4+5 & 3+6 & 1-7 & 2+10 \\ -1+1 & 2-3 & -7+4 & 3+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & -7 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & -6 & 12 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4. Обчислити матрицю $C=\alpha A$, де $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha=-2$.

Розв'язання.

$$C=\alpha A=\begin{pmatrix} -2\cdot 2 & -2\cdot 1 & -2\cdot(-1) \\ -2\cdot 3 & -2\cdot 1 & -2\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.5. Для матриць

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 13 & 2 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

знайти матриці $A+B$, C^2, AB, BA.

Розв'язання:

1) $$A+B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & 13 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 5\\ 7 & -1 & 6\end{pmatrix};$$

2) $$C^2=CC=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot2-1(-1) & 1\cdot2+2\cdot1-1\cdot1 & 1(-1)+2\cdot0-1\cdot3\\ 2\cdot1+1\cdot2+0(-1) & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot1 & 2(-1)+1\cdot0+0\cdot3\\ -1\cdot1+1\cdot2+3(-1) & -1\cdot2+1\cdot1+3\cdot1 & -1(-1)+1\cdot0+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -4\\ 4 & 5 & -2\\ -2 & 2 & 10\end{pmatrix};$$

3) $$AB=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & 13 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+2-3 & 2-2-2 & 0+4-4\\ 2+0+9 & 1+0+6 & 0+0+12\\ 8-3+6 & 4+3+4 & 0-6+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}3 & -2 & 0\\ 11 & 7 & 12\\ 11 & 11 & 2\end{pmatrix};$$

4) $$BA=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+1+0 & 4+0+0 & -2+3+0\\ 2-1+8 & 2+0-6 & -1-3+4\\ 8-3+16 & 6+0-12 & -3+6+8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}5 & 4 & 1\\ 9 & -4 & 0\\ 24 & -6 & 11\end{pmatrix}.$$

Помічаємо, що $AB\neq BA$.

Приклад 1.6. Обчислити матрицю, обернену до матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначник:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 4 & -3\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4+6+12-(18+16-1)=14-33=-19.$$

Так як $\Delta\neq0$, то обернена матриця існує.

Обчислимо всі алгебраїчні доповнення:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-3,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4 & -3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-5,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-1,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=11,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=4,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}=13,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-10$$

Обернену матрицю обчислити за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=-\frac{1}{19}\begin{pmatrix}-3 & -5 & -2\\ -1 & 11 & -7\\ 4 & 13 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{19} & \frac{5}{19} & \frac{2}{19}\\ \frac{1}{19} & -\frac{11}{19} & \frac{7}{19}\\ -\frac{4}{19} & -\frac{13}{19} & \frac{10}{19}\end{pmatrix}.$$

1.3 Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_n,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\qquad(1.4)$$

де відомі a_{ij} – коефіцієнти, b_i – вільні члени, x_j – невідомі, $i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$.

Розв’язати систему означає, що треба знайти упорядковану сукупність чисел $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots,\alpha_n$ таким чином, щоб у результаті заміні $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n$ на ці числа система перетворилась на тотожність.

Систему [2.4] можна записати також і в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}.\qquad(1.5)$$

Позначимо $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$, $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$.

Згідно з нашим позначенням систему (1.5) можна записати у вигляді AX = B.

Система називається *однорідною*, якщо числа $b_1,b_2,\ldots,b_m$, що містяться в правих частинах, дорівнюють нулю.

Далі розглянемо системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

або

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.7}$$

Тобто, система складається з n лінійних рівнянь, що має n невідомих.

Серед існуючих методів розв'язання такої системи є метод розв'язання за правилом Крамера та матричний метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Правило Крамера для розв'язання системи *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими. Система n лінійних рівнянь з n невідомими має один і лише один розв'язок, якщо головний визначник (детермінант) матриці А не дорівнює нулю: $x_i = \dfrac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, i = \overline{1,n}$, де Δ – головний визначник матриці А; Δx_i – визначник, який одержується з Δ шляхом заміни коефіцієнтів невідомого, що визначається, на стовпець вільних членів.

Наприклад, для $n = 3$ система лінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

або

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta x_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}.$$

Матричний метод розв'язання систем n лінійних рівнянь з n невідомими. Будемо вважати, що матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ невироджена (її визначник не дорівнює нулю). Тоді вона має обернену матрицю A^{-1}, яка є єдиною і розв'язок системи матиме вигляд $X = A^{-1} \cdot B$.

Наприклад, для $n = 3$ система лінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

або AX = B, де $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

$A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ – обернена матриця до матриці A; Δ – визначник матриці A; A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Тоді розв'язок системи матиме вигляд $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ або

$X = A^{-1}B$.

Розв'язання прикладів

Приклад 1.7. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} -3x - 3y + z = -10, \\ 4x + 5y - 5z = -3, \\ -5x - y + 5z = 8. \end{cases}$

а) за правилом Крамера;

б) за допомогою оберненої матриці.

Виконати перевірку.

Розв'язання:

а) Для розв'язання системи за правилом Крамера треба обчислити визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -5 \\ -5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 5 \cdot 5 - 3 \cdot (-5) \cdot (-5) + 4 \cdot (-1) \cdot 1 -$$

$$-(1 \cdot 5 \cdot (-5) - 3 \cdot 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-5) \cdot (-1)) = -54.$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-10 & -3 & 1\\ -3 & 5 & -5\\ 8 & -1 & 5\end{vmatrix}=-10\cdot\begin{vmatrix}5 & -5\\ -1 & 5\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 8 & 5\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 5\\ 8 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-200+75-37=-162;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-3 & -10 & 1\\ 4 & -3 & -5\\ -5 & 8 & 5\end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 8 & 5\end{vmatrix}+10\cdot\begin{vmatrix}4 & -5\\ -5 & 5\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}4 & -3\\ -5 & 8\end{vmatrix}=$$

$$=-75-50+17=-108;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-3 & -3 & -10\\ 4 & 5 & -3\\ -5 & -1 & 8\end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix}5 & -3\\ -1 & 8\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}4 & -3\\ -5 & 8\end{vmatrix}-10\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ -5 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=111+51-210=-270.$$

За формулами Крамера одержуємо

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-162}{-54}=3,\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-108}{-54}=2,\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-270}{-54}=5.$$

б) Для розв’язання системи лінійних рівнянь методом оберненої матриці розв’язок системи потрібно відшукувати за формулою $X=A^{-1}\cdot B,$ де

$$A=\begin{pmatrix}-3 & -3 & 1\\ 4 & 5 & -5\\ -5 & -1 & 5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-10\\ -3\\ 8\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

Обчислимо обернену матрицю системи $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}5 & -5\\ -1 & 5\end{vmatrix}=20,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & -5\\ -5 & 5\end{vmatrix}=5,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ -5 & -1\end{vmatrix}=21,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=14,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -5 & 5\end{vmatrix}=-10,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -5 & -1\end{vmatrix}=12,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 5 & -5\end{vmatrix}=10,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-11,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}-3 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3.$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}20 & 14 & 10\\ 5 & -10 & -11\\ 21 & 12 & -3\end{pmatrix}$$

Отже,

$$X=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}20 & 14 & 10\\ 5 & -10 & -11\\ 21 & 12 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-10\\ -3\\ 8\end{pmatrix}=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-200-42+80\\ -50+30-88\\ -210-36-24\end{pmatrix}=-\frac{1}{54}\begin{pmatrix}-162\\ -108\\ -270\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 5\end{pmatrix}.$$

За розв'язання системи лінійних рівнянь першим і другим способами отримано однакові результати.

Перевірка: $\begin{cases}-3\cdot 3-3\cdot 2+5=-10,\\ 4\cdot 3+5\cdot 2-5\cdot 5=-3,\\ -5\cdot 3-2+5\cdot 5=8.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-10=-10,\\ -3=-3,\\ 8=8.\end{cases}$

Зауваження. Якщо виконується перевірка СЛАР, обов'язково треба перевіряти всі рівняння.

Відповідь. $x_1=3,\quad x_2=2,\quad x_3=5.$

1.4 Вектори, лінійні операції над векторами

Вектором називається напрямлений відрізок. Позначати вектори будемо через $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... Якщо, скажімо, точка *A* — початок вектора, а точка *B* — його кінець, то маємо $\vec{AB}$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається *нульовим вектором*.

Вектор вважається заданим, якщо є відомими його довжина $|\vec{AB}|$, $|\vec{a}|$ і напрям щодо деякої осі.

Два вектори: $\vec{a}$ і $\vec{b}$, називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вважаються *рівними,* якщо вони є колінеарними, однаково напрямленими та мають однакові довжини.

З останнього випливає, що за паралельного перенесення вектора отримуємо новий вектор, що дорівнює попередньому, тому вектори в аналітичній геометрії називаються вільними.

Нехай у просторі задано деяку вісь *l* і вектор $\vec{AB}$. Проведемо через точки *A* і *B* площини, перпендикулярно до осі *l* (рис. 1.1). Позначимо точки перетину цих площин з віссю *l* відповідно до A' і B'.

Проекцією вектора $\vec{AB}$ *на вісь l* називається довжина $A'B'$ напрямленого відрізка $\vec{A'B'}$ на осі *l*. Слід зазначити, що $A'B'=|\vec{A'B'}|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ збігається з напрямом *l* і $A'B'=-|\vec{A'B'}|$, якщо напрям $\vec{A'B'}$ протилежний напряму *l*. Проекція вектора $\vec{AB}$ на вісь *l* позначається через $пр_l\vec{AB}$. З рисунку 1.1 випливає формула знаходження проекції вектора на вісь *l*: $пр_l\vec{AB}=\left|\vec{AB}\right|\cos\varphi$,

де φ — кут між вектором і віссю.

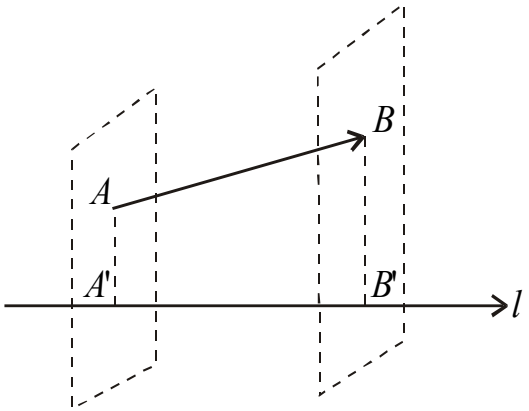

Рис. 1.1

Якщо розглянути прямокутну декартову систему координат і точки початку вектора: $\vec{AB}$ A (x_1, y_1, z_1), і його кінця B (x_2, y_2, z_2), то проекції вектора $\vec{AB}$ на кожну з осей можна записати в такому вигляді:

$$Ox:\ a_x = x_2 - x_1,\quad Oy:\ a_y = y_2 - y_1,\quad Oz:\ a_z = z_2 - z_1.$$

Довжина вектора задається формулою

$$|a| = |\vec{AB}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{1.8}$$

Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називається одиничним, або ортом і позначається через $\vec{a^\circ}$. Будь-який вектор можна записати у вигляді добутку його модуля на одиничний вектор: $\bar{a} = |\bar{a}| \cdot \overline{a^\circ}$. При цьому розділяються дві характеристики вектора – модуль, який дорівнює чисельному значенню, та орт, який визначає його напрям у просторі. Орти декартових координат позначаються через $\vec{i}$, $\vec{j}$ та $\vec{k}$. Тоді будь-який вектор можна записати у вигляді

$$a = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}. \tag{1.9}$$

Якщо через α, β, γ позначити кути між вектором a і відповідними осями системи координат, то їх косинуси можна знайти за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|a|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|a|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|a|} \tag{1.10}$$

(у подальшому називатимемо їх *напрямними косинусами вектора* a).

Піднісши кожну з формул (2.10) до квадрата і скориставшись (1.8), одержимо:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

отже, орт $\vec{a^\circ} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$.

Дії щодо векторів виконуються за певними правилами.

1. *Додавання*: $a + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$.

2. *Множення вектора на число* $\alpha \in R$: $\alpha a = (\alpha a_x, \alpha a_y, \alpha a_z)$.

За проведення лінійних операцій щодо векторів виконуються властивості:

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)\, a$.
4. $(\alpha + \beta)\, a = \alpha a + \beta a$.
5. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$.

Скалярним добутком двох ненульових векторів a *і* b називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів даних векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами є невизначеним і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю. Отже,

$$a \cdot b = |a|\,|b| \cos\varphi, \tag{1.11}$$

де φ — кут між векторами.

Використовуючи означення проекції вектора, скалярний добуток можна записати такому вигляді: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано їх координатами $\vec{a}(a_x; a_y; a_z)$, $\vec{b}(b_x; b_y; b_z)$, то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

За допомогою скалярного добутку можна обчислити :

1) косинус кута між двома ненульовими векторами:

$$\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}};$$

2) проекцію одного вектора на напрям іншого:

$$np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$

3) необхідною і достатньою умовою перпендикулярності векторів a і b є рівність: $a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.

Векторним добутком вектора a *на вектор* b називається вектор $c = a \times b$, якщо:

1) *довжина вектора* $|c| = |a||b|\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

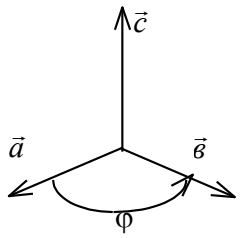

Рис. 1.2

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний* до кожного з векторів a і b;

3) *вектор* c *спрямований* так, що якщо дивитись з його кінця на площину, в якій лежать вектори a і b, то поворот вектора a до вектора b відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Існують певні властивості векторного добутку:

1) $\vec{a}\times\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}\neq 0$ і $\vec{b}\neq 0$ є колінеарними векторами.

2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$.

3) $\left(\lambda\vec{a}\times\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

4) $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

Якщо вектори $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ і $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, то

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k} \qquad (1.12)$$

Мішаним добутком векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

Існують певні властивості мішаного добутку:

1) знаки дій «точка» і «хрест» можна поміняти місцями, а саме

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c};$$

3) у результаті переставленні будь-яких двох співмножників знак мішаного добутку змінюється на протилежний, а в результаті циклічному переставленні всіх трьох – не змінюється, тобто

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a};$$

3) якщо два з трьох векторів рівні між собою або паралельні, то мішаний добуток дорівнює нулю.

Якщо вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ задані їх проекціями $\vec{a}\left(a_x;a_y;a_z\right)$, $\vec{b}\left(b_x;b_y;b_z\right)$, $\vec{c}\left(c_x;c_y;c_z\right)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}. \qquad (1.13)$$

Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку.

Геометричним змістом мішаного добутку є об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ (рис. 1.3).

$$V=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (1.14)$$

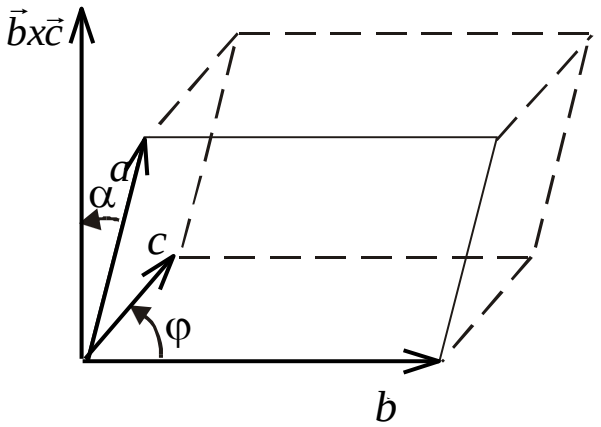

Рис. 1.3

Розв’язання прикладів

Приклад 1.8. Обчислити довжину вектора $\vec{a}$ ={6; 3; −2} і його напрямні косинуси.

Розв’язання. Використовуючи формули

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{\alpha}\right|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

одержимо:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7;\ \cos\alpha = \frac{6}{7};\ \cos\beta = \frac{3}{7};\ \cos\gamma = -\frac{2}{7}.$$

Відповідь. $\left|\vec{a}\right| = 7, \cos\alpha = \frac{6}{7};\ \cos\beta = \frac{3}{7};\ \cos\gamma = -\frac{2}{7}.$

Приклад 1.9. Дано вектори $\vec{AC}$={–5; 3; –1}, $\vec{BD}$={–6; –9; 3}. Довести, що вектори $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$ є взаємно перпендикулярними.

Розв’язання. Обчислимо скалярний добуток векторів $\vec{AC}$і $\vec{BD}$.

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD} = (-5)\cdot(-6) + 3\cdot(-9) + (-1)\cdot 3 = 0.$$

Отже, вектори $\vec{AC}$, $\vec{BD}$ є взаємно перпендикулярними.

Приклад 1.10. Дано три точки *A* (1, 1, 1), *B* (2, 2, 1) і *C* (2, 1, 2). Знайти кут φ = ∠ *BAC*.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\vec{AB}$= (1, 1, 0), $\vec{AC}$= (1, 0, 1). Згідно з формулою маємо:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0}\cdot\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}, \text{ отже, } \varphi = 60°.$$

Відповідь. φ = 60°.

Приклад 1.11. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$= (5, 2, 7), $\vec{b}$ = (1, 2, 4) як на сторонах.

Розв'язання. Знайдемо векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 2 & 7\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}5 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}5 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-6\vec{i}-14\vec{j}+8\vec{k}.$$

Знайдемо площу паралелограма: S=$|\vec{c}|=\sqrt{6^2+14^2+8^2}=2\sqrt{74}$ (кв. од.)

Відповідь: S=$2\sqrt{74}$ кв. од.

Приклад 1.12. Обчислити мішаний добуток $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, якщо $\vec{a}$ ={1; –1;3}, $\vec{b}$ ={–2;2;1}, $\vec{c}$ ={3–2;1;4}.

Розв'язання. Згідно з формулою обчислення мішаного добутку трьох векторів маємо:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ -2 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=7.$$

Відповідь: $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ =7.

Приклад 1.13. Установити, чи компланарним є вектори:

1) $\vec{a}$ ={2; –3;1}, $\vec{b}$ ={1; –1;3}, $\vec{c}$ ={1;9; –11},

2) $\vec{a}$ ={3; –2;1}, $\vec{b}$ ={2;1;2}, $\vec{c}$ ={3; –1; –2}.

Розв'язання:

1) $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 9 & -11\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -9 & -11\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -9\end{vmatrix}=0.$$

Отже, вектори є компланарними, оскільки їх мішаний добуток дорівнює нулю.

2) $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-26.$$

У даному випадку, вектори є некомпланарними, оскільки їх мішаний добуток відмінний від нуля.

Відповідь: 1) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є компланарними, 2) вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є некомпланарними.

Приклад 1.14 Обчислити об’єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

Розв’язання. Відомо, що об’єм тетраедра V дорівнює шостій частині об’єму паралелепіпеда V. Отже, достатньо обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$.

Знайдемо вектори $\vec{AB}$={3;6;3}, $\vec{AC}$={1;3;-2}, $\vec{AD}$={2;2;2}. Обчислимо, їх мішаний добуток

$$\vec{AB}\vec{AC}\vec{AD}=\begin{vmatrix}3 & 6 & 3\\ 1 & 3 & -3\\ 2 & 2 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 2\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-18,$$

звідки, $V_n=|-18|=18$ куб. од. Далі знайдемо об’єм тетраедра:

$$V_{тетр}=\frac{1}{6}V_n=\frac{1}{6}\cdot 18=3 \text{ куб. од.}$$

Відповідь. $V_{тетр.}=3$ куб. од.

2 АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

2.1 Пряма на площині

Є кілька типів рівнянь прямої на площині. Залежно від умови задачі, для її розв’язання зручно скористатись тим чи іншим типом рівняння, а саме:

1) *Загальним рівнянням прямої на площині:*

$$Ax+By+C=0 \tag{2.1}$$

(у прямокутній декартовій системі координат пряма (3.1) є перпендикулярною до вектора $n=(A;B)$, який називається *нормальним вектором* прямої).

2) *Рівнянням прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *перпендикулярно до вектора* $n=(A;B)$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0. \tag{2.2}$$

3) *Рівнянням прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *паралельно до напрямного вектора* $s=(l;m)$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}. \tag{2.3}$$

4) *Рівнянням прямої, яка проходить через точки* $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{2.4}$$

Зауваження. Якщо $x_1=x_2$, то рівняння прямої має вигляд $x=x_1$; аналогічно якщо $y_1=y_2$ то рівняння прямої має вигляд $y=y_1$.

5) *Рівнянням прямої у відрізках*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \qquad (2.5)$$

де a і b – довжини відрізків, які пряма відтинає на осях координат.

6) *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом (рис.2.1)*

$$y=kx+b \qquad (2.6)$$

де $k=\mathrm{tg}\alpha$ – *кутовий коефіцієнт.*

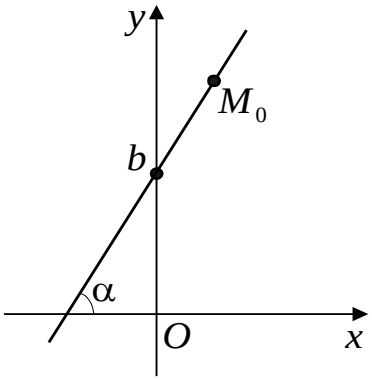

Рис. 2.1

7) *Рівнянням прямої, яка проходить через точку* $M_0(x_0;y_0)$ *і має кутовий коефіцієнт* k *(рис.2.1)*

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (2.7)$$

Умова паралельності двох прямих: $A_1x+B_1y+C_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2=0$, має вигляд $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$ (якщо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$,то прямі співпадають).

Умова перпендикулярності двох прямих: $A_1A_2+B_1B_2=0$.

Якщо дві прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y=k_1x+b_1$ і $y=k_2x+b_2$, то умова перпендикулярності прямих: $k_1k_2=-1$; умова паралельності прямих: $k_1=k_2$.

Відстань від заданої точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямої $Ax+By+C=0$ обчислюється за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}\ . \qquad (2.8)$$

Кут між двома прямими обчислюється за допомогою формул

$$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}, \qquad (2.9)$$

якщо рівняння прямих задано у вигляді $y=kx+b$, або

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}\ , \qquad (2.10)$$

якщо рівняння прямих задано у вигляді $Ax+By+C=0$ (рис. 2.2).

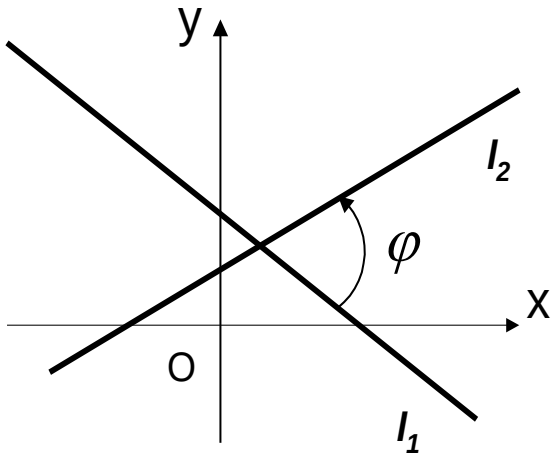

Рис. 2.2

Поділ відрізка у заданому відношенні. Число λ називається відношенням, у якому точка *M* поділяє відрізок M_1M_2 (рис. 2.3), якщо $\lambda=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}$.

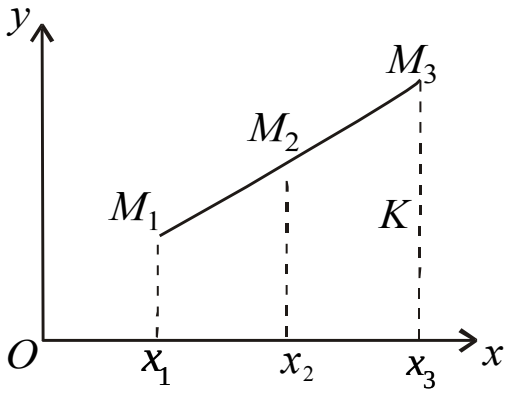

Рис.2.3

Нехай задано число λ і координати точок $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, то координати точки *M* (*x, y*) обчислюються за формулами:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \qquad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \tag{2.11}$$

Якщо точка *M* (*x*, *y*) — середина відрізка M_1 M_2, то λ = 1 і формули (2.11), мають вигляд

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \qquad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{2.12}$$

Площа трикутника. Нехай задано координати *A* (x_1, y_1), *B* (x_2, y_2), *C* (x_3, y_3) вершин деякого трикутника (рис. 2.4).

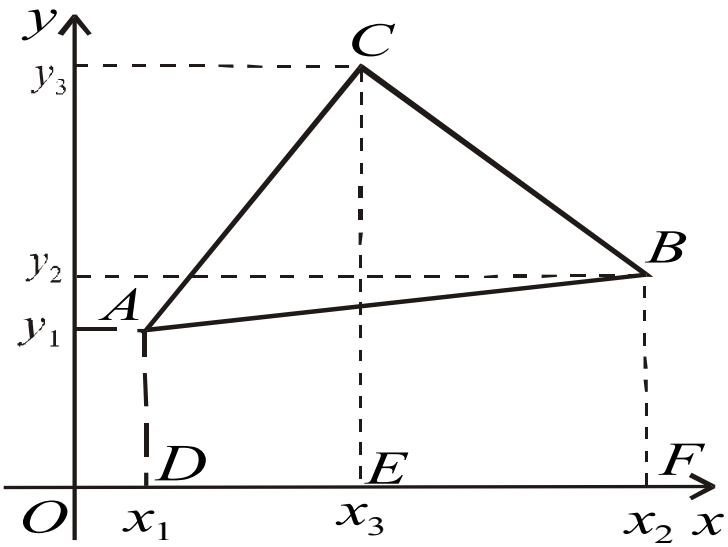

Рис. 2.4

Площа трикутника обчислюється за формулою

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \qquad (2.13)$$

Розв'язання прикладів

Приклад 2.1. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3)$ перпендикулярно вектору $n=(4;5)$.

Розв'язання. Використаємо рівняння (2.2):

$$4(x-2)+5(y-(-3))=0,\ 4x-8+5y+15=0, \text{ або } 4x+5y+7=0.$$

Приклад 2.2. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(1;-4)$ паралельно вектору $s=-3;2$.

Розв'язання. Використаємо рівняння (2.3):

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-(-4)}{2},\ \frac{x-1}{-3}-\frac{y+4}{2}=0,\ \frac{2(x-1)-(-3)(y+4)}{-3\cdot 2}=0,$$

$$2(x-1)+3(y+4)=0,\ 2x-2+3y+12=0, \text{ або } 2x+3y+10=0.$$

Приклад 2.3. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві точки $M_1(-3;4)$ і $M_2(1;2)$.

Розв'язання. Рівняння прямої має вигляд (3.4)

$$\frac{x-(-3)}{1-(-3)}=\frac{y-4}{2-4},\ \frac{x+3}{4}=\frac{y-4}{-2},\ \frac{x+3}{4}-\frac{y-4}{-2}=0,$$

або

$$x+2y-5=0.$$

Приклад 2.4. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;5)$ перпендикулярно до прямої $4x+3y-2=0$.

Розв'язання. Шукана пряма є перпендикулярнаою до заданої прямої, а тому паралельною до її нормального вектора $n=(4;3)$. Підставимо координати точки M_0 та вектора n до рівняння (3.3):

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-5}{3},\ \frac{3(x-2)-4(y-5)}{12}=0,\ 3x-6-4y+20=0,$$

остаточно матимемо $3x-4y+14=0$.

Приклад 2.5. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-3;2)$ і паралельною до прямої $2x+5y+7=0$.

Розв'язання. Шукана пряма перпендикулярною до нормального вектора заданої прямої $n=(2;5)$. Використаємо рівняння (2.2):

$$2(x-(-3))+5(y-2)=0, \text{ або } 2x+5y-4=0.$$

Приклад 2.6. Вершини трикутника мають координати: $A(4;3)$, $B(1;8)$, $C(8;4)$. Записати рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини *A* до сторони *BC*.

Розв'язання. Висота *AK* проходить через точку *A* перпендикулярно до вектора $n=\overline{BC}=(8-1;4-8)=(7;-4)$. Тому її рівняння має вигляд (3.2):

$$7(x-4)-4(y-3)=0, \text{ або } 7x-4y-16=0.$$

Приклад 2.7. Записати точку перетину медіан трикутника, якщо відомі координати його вершин: $A(-1;7)$, $B(-5;1)$, $C(9;-5)$.

Розв'язання. Три медіани трикутника перетинаються в одній точці. Напишемо рівняння двох будь-яких медіан, наприклад CM і BN. Для цього спочатку обчислимо координати точки М – середини сторони АВ:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-1+(-5)}{2}=-3,\ y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{7+1}{2}=4.$$

Отже, $M(-3;4)$. Рівняння медіани СМ має вигляд (2.4):

$$\frac{x-9}{-3-9}=\frac{y-(-5)}{4-(-5)},$$

$$\frac{3(x-9)-(-4)(y+5)}{-36}=0,\ 3x-27+4y+20=0.$$

Таким чином, рівняння прямої СМ має вигляд: $3x+4y-7=0$.

Аналогічно визначаємо координати точки N – середини сторони АС і записуємо рівняння прямої BN:

$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{-1+9}{2}=4,\ y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{7+(-5)}{2}=1,\ \ N(4;1);$$

$$\frac{x-(-5)}{4-(-5)}=\frac{y-1}{1-1},\ \frac{x+5}{9}=\frac{y-1}{0}.$$

Згідно з зауваженням до формули (2.4), рівняння медіани BN має вигляд $y-1=0$. Координати точки перетину визначимо, розв'язавши таку систему

рівнянь:

$$\begin{cases} y-1=0 \\ 3x+4y-7=0, \end{cases} \quad \begin{cases} x=1, \\ y=1. \end{cases}$$

Отже, точка перетину медіан має такі координати: $O(1;1)$.

Приклад 2.8. Визначити кут між прямими:

а) $5x-y+7=0$ і $3x+2y-3=0$;

б) $y=3x+2$ і $y=\frac{1}{2}x-5$.

Розв'язання:

а) Використаємо формулу (2.10): $A_1=5,\ B_1=-1,\ A_2=3,\ B_2=2$;

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot 3+(-1)\cdot 2}{\sqrt{5^2+(-1)^2}\sqrt{3^2+2^2}}=\frac{15-2}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}}=\frac{13}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}=45^\circ.$$

б) Використаємо формулу (2.9): $k_1=3,\ k_2=\frac{1}{2}$;

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{1}{2}\cdot 3}=\frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}}=-1.$$

За відомим значенням $\operatorname{tg}\varphi=-1$ знаходимо $\varphi=135^\circ$.

Приклад .9. Знайти відстань від точки $P\ -2;3$ до прямої $3x-4y-2=0$.

Розв'язання. Використаємо формулу (2.8):

$$d=\frac{|3\cdot(-2)-4\cdot 3-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-6-12-2|}{5}=4.$$

2.2 Криві другого порядку

Колом називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (центра) (рис. 2.5).

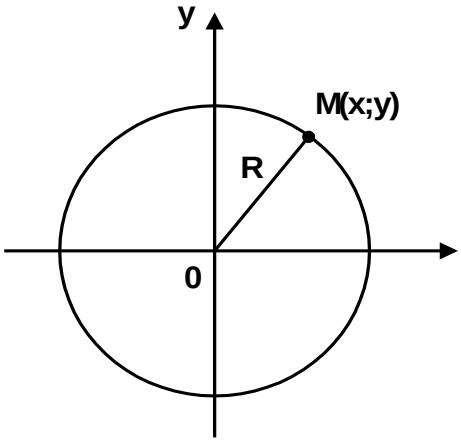

Рис.2.5 а)

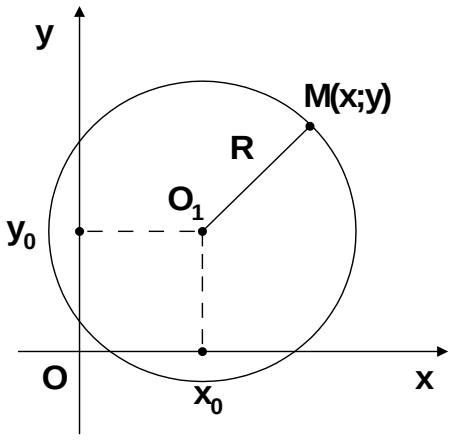

Рис. 2.5 б)

Якщо центр кола точка $O\left(0;0\right)$, а радіус кола – R, тоді його рівняння має вигляд (рис.2.5 а):

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2.14)$$

Рівняння кола з центром у точці $O_1\left(x_0;y_0\right)$ і радіусом R має вигляд (рис. 2.3 б):

$$\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2. \qquad (2.15)$$

Еліпсом називається геометричне місце точок на площині, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою.

Канонічне рівняння еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$ (2.16)

Точки $A_1\left(a;0\right),\ A_2\left(-a;0\right),\ B_1\left(0;b\right),\ B_2\left(0;-b\right)$ - вершинами еліпса, $MF_1=r_1,\ MF_2=r_2$ – фокальними радіусами (рис. 2.6).

а) $r_1+r_2=2a$;

$A_1A_2=2a$ – велика вісь;

$B_1B_2=2b$ – мала вісь;

$OA_1=a$ – велика піввісь;

$OB_1=b$ – мала піввісь;

$F_1F_2=2c$ - відстань між фокусами $F_1(c;\ 0)$ і $F_2(-c;\ 0)$;

$c^2=a^2-b^2$;

$\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ – ексцентриситет ($\varepsilon<1$, бо $c<a$).

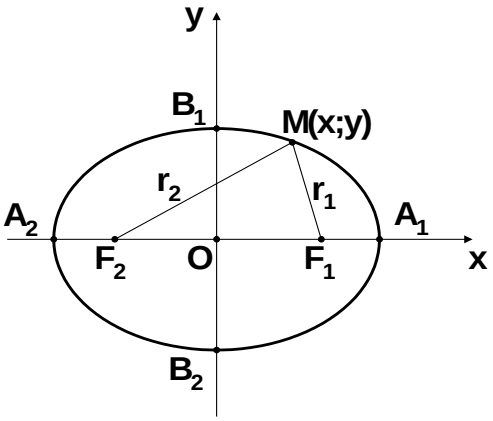

Рис. 2.6, а

б) $r_1+r_2=2b$;

$A_1A_2=2a$ – мала вісь;

$B_1B_2=2b$ – велика вісь;

$OA_1=a$ – мала піввісь;

$OB_1=b$ – велика піввісь;

$F_1F_2=2c$ - відстань між фокусами $F_1(0;\ c)$ і $F_2(0;\ -c)$;

$c^2=b^2-a^2$;

$\varepsilon=\dfrac{c}{b}$ – ексцентриситет ($\varepsilon<1$, бо $c<b$).

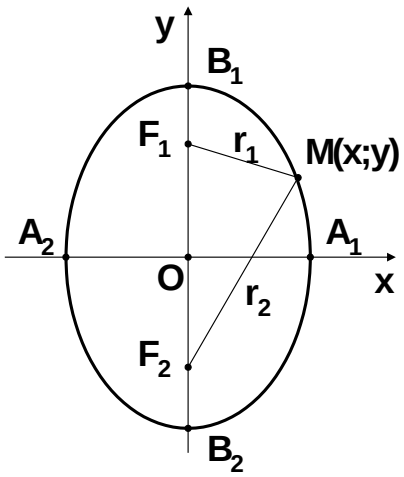

Рис. 2.6, б

Зазначимо, що фокуси еліпса завжди знаходяться на його великій осі. Якщо $a=b$, то одержимо $x^2+y^2=a^2$ – рівняння кола.

Гіперболою називається геометричне місце точок на площині, різниця відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величиною сталою (рис. 2.7 а,б).

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2.17)$$

або

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1. \qquad (2.18)$$

а) Для гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$:

$r_1-r_2=\pm 2a$;

точки $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ – вершини;

$A_1A_2=2a$ – дійсна вісь;

$B_1B_2=2b$ – уявна вісь;

$OA_1=a$ – дійсна піввісь;

$OB_1=b$ – уявна піввісь;

$F_1F_2=2c$ - відстань між фокусами

$F_1(c;\ 0)$ і $F_2(-c;\ 0)$;

$c^2=a^2+b^2$;

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ – ексцентриситет ($\varepsilon>1$, бо $c>a$).

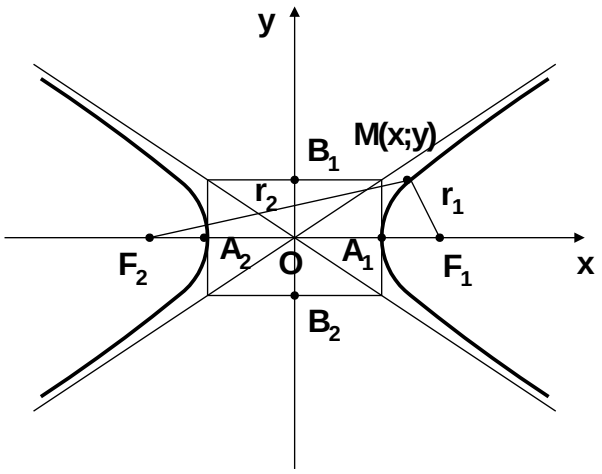

Рис.2.7 а)

б) Для гіперболи $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

$r_1-r_2=\pm 2b$;

точки $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ - вершини;

$B_1B_2=2b$ – дійсна вісь;

$A_1A_2=2a$ – уявна вісь;

$OB_1=b$ – дійсна піввісь;

$OA_1=a$ – уявна піввісь;

$F_1F_2=2c$ - відстань між фокусами

$F_1(0;\ c)$ і $F_2(0;\ -c)$;

$c^2=a^2+b^2$;

$\varepsilon=\frac{c}{b}$ – ексцентриситет ($\varepsilon>1$, бо $c>b$).

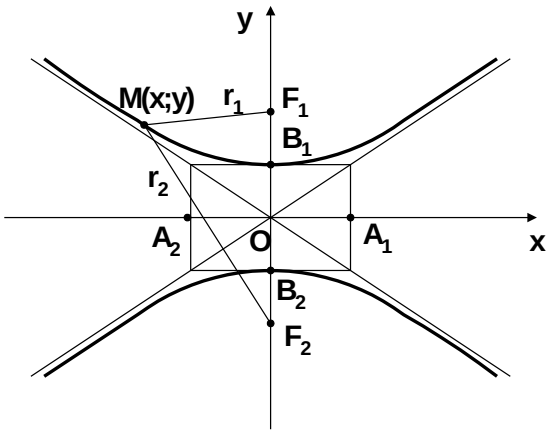

Рис. 2.7 б)

Рівняння асимптот гіперболи має вигляд $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Слід зазначити, що фокуси гіперболи завжди знаходяться на її дійсній осі.

Гіперболу, в якої піввісі рівні: $a=b$, називають рівнобічною і її рівняння $x^2-y^2=a^2$ або $y^2-x^2=a^2$.

Параболою називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи має вигляд

$$y^2=\pm 2px \tag{2.19}$$

або

$$x^2=\pm 2py, \tag{2.20}$$

де p – відстань від фокуса до директриси.

Точка $O(0;0)$ – вершина параболи, $MF=r$ – фокальний радіус, d – відстань від точки $M(x;y)$ до директриси (рис. 2.8).

За означенням параболи $r=d$.

Для парабол $y^2=\pm 2px$ рівняння директрис має вигляд $x=\mp\frac{p}{2}$, координати фокуса $F\left(\pm\frac{p}{2};0\right)$ (рис. 2.8, а, б).

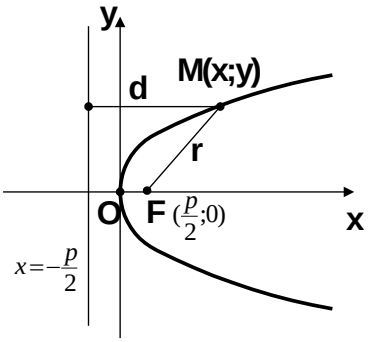

Рис.2.8, а

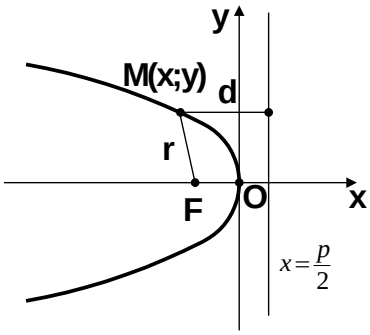

Рис. 2.8, б

Для парабол $x^2=\pm 2py$ рівняння директрис має вигляд $y=\mp\frac{p}{2}$, координати фокуса $F\left(0;\pm\frac{p}{2}\right)$ (рис.2.8, в, г).

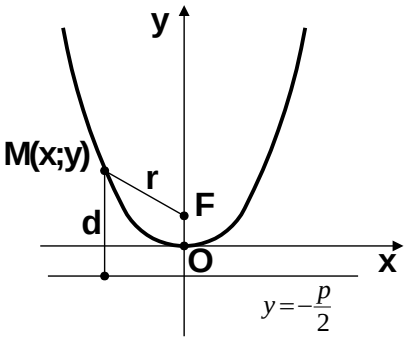

Рис. 2.8, в

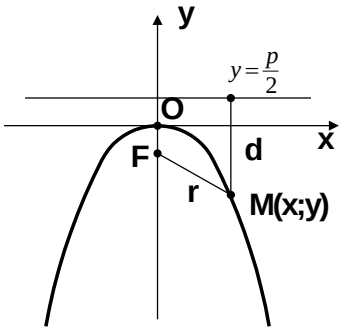

Рис. 2.8, г

Фокус параболи завжди знаходиться на її осі симетрії.

Розв'язання прикладів

Приклад 2.10. Скласти рівняння кола, якщо точки $A(3;2)$ і $B(-1;6)$ є кінцями одного з його діаметрів.

Розв'язання. За умовою, *AB* – діаметр кола. Це означає, що його центр знаходиться на середині відрізка *AB*. За формулами ділення відрізка навпіл,

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3-1}{2} = 1; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2+6}{2} = 4,$$

тобто точка $C(1;4)$ є центром кола. Отже, зрозуміло, що рівняння кола треба шукати у вигляді $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$. Підставляючи до даного рівняння координати точки *A* або точки *B* (кожна з них належить колу) замість змінних координат і враховуючи, що $x_0 = 1$, $y_0 = 4$, матимемо: $(3-1)^2 + (2-4)^2 = R^2$, звідки $R^2 = 8$.

Отже, рівняння шуканого кола має вигляд $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 8$.

Приклад 2.11. Визначити координати центра і радіус кола $x^2 + y^2 - 8x - 10y - 8 = 0$.

Розв'язання. Запишемо дане рівняння у вигляді

$$x^2 - 8x + y^2 - 10y = 8.$$

Доповнивши двочлени $x^2 - 8x$ і $y^2 - 10y$ до повних квадратів, одержимо:

$$x^2 - 2\cdot 4x + 4^2 + y^2 - 2\cdot 5y + 5^2 = 8 + 4^2 + 5^2$$

або

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 = 49,$$

звідки $a = 4$, $b = 5$, $R = 7$, тобто центром кола є точка (4;5), а радіус *R* дорівнює *7*.

Приклад 2.12. Побудувати гіперболу $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$. Визначити фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот та директрис.

Розв'язання. Приведемо рівняння кривої до канонічного вигляду:

$$9x^2 - 16y^2 = 144 \,|\, :\boldsymbol{144}$$

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1;$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Таким чином, $a^2 = 16$, $b^2 = 9$; $a = 4$, $b = 3$ - піввісі гіперболи.

Обчислимо відстань фокусів від центра симетрії:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Фокуси гіперболи – $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.

Ексцентриситет – $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1.$

Рівняння асимптот – $y=\pm\frac{3}{4}x$.

Рівняння директрис $-x=\pm\frac{4}{\left(\frac{5}{4}\right)}$; $x=\pm\frac{16}{5}$.

Побудуємо гіперболу (рис 2.9).

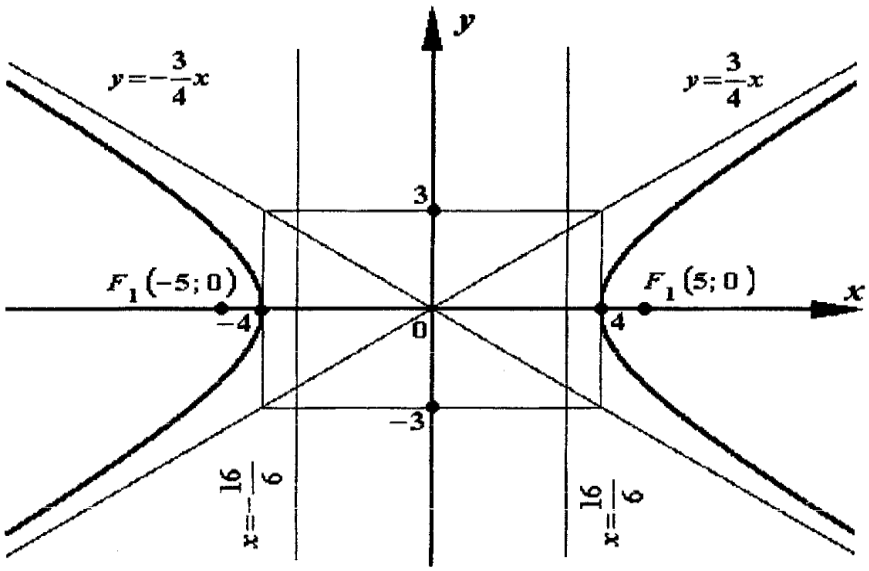

Рис.2.9

Приклад 2.13. Побудувати параболу $x^2-6x+2y+7=0$. Визначити координати фокуса та рівняння директриси.

Розв'язання. Визначимо вершину параболи, перетворивши рівняння $x^2-6x+2y+7=0$ до вигляду $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$.

$x^2-6x=-2y-7$; $(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2)-3^2=-2y-7$;

$(x-3)^2=-2y-7+9$; $(x-3)^2=-2(y-1)$.

З даного рівняння $x_0=3$, $y_0=1$, $C\ (3;1)$ – вершина параболи.

Знайдемо точки перетину параболи з осями Ox і Oy:

$y=0$; $x^2-6x+7=0$; $x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-28}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{2}}{2}=3\pm\sqrt{2}$;

$x=0$; $2y+7=0$; $y=-3{,}5$.

Знайдемо координати фокуса. З рівняння $(x-3)^2=-2(y-1)$ маємо:

$2p=-2$, $\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$.

Координати фокуса є такими $F\left(x_0;y_0+\frac{p}{2}\right)$, тобто $F(3;1-0{,}5)$, $F(3;0{,}5)$.

Рівняння директриси: $y=y_0-\frac{p}{2}$, тобто $y=1+0{,}5$; $\mathbf{y=1{,}5}$.

Побудуємо параболу (рис 2.10).

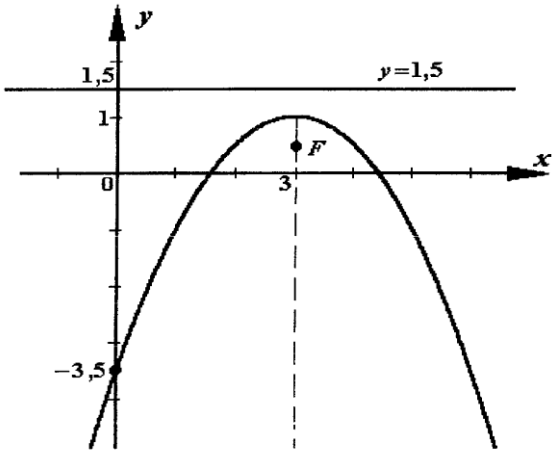

Рис. 2.10

Приклад 2.14. Лінію на площині задано загальним рівнянням $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$. Привести рівняння до канонічного виду і побудувати цю лінію на площині.

Розв'язання. Згрупуємо доданки рівняння з відповідними змінними:

$$4x^2+9y^2-40x+54y+145=0;\ \left(4x^2-40x\right)+\left(9y^2+54y\right)+145=0;$$

$$4\left(x^2-10x\right)+9\left(y^2+6y\right)+145=0;$$

$$4\left(x^2-2\cdot x\cdot 5\right)+9\left(y^2+2\cdot y\cdot 3\right)+145=0;$$

$$4\left(x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2-5^2\right)+9\left(y^2+2\cdot y\cdot 3+3^2-3^2\right)+145=0;$$

$$4\left(\left(x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2\right)-5^2\right)+9\left(\left(y^2+2\cdot y\cdot 3+3^2\right)-3^2\right)+145=0;$$

$$4\left((x-5)^2-25\right)+9\left((y+3)^2-9\right)+145=0;$$

$$4(x-5)^2-100+9(y+3)^2-81+145=0;$$

$$4(x-5)^2+9(y+3)^2=36.$$

Поділивши обидві частини рівняння на 36, отримаємо рівняння еліпса

$$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$$

з центром у точці $O_1(5;-3)$ і півосями є $a=3$ і $b=2$ (рис.2.11).

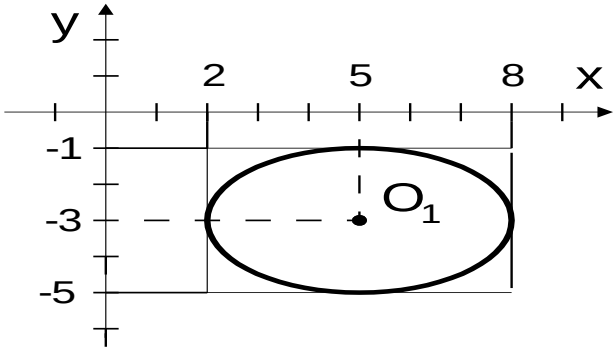

Рис. 2.11

2.3 Аналітична геометрія у просторі

Рівняння $F(x;y;z)=0$ визначає деяку поверхню в просторі, тобто геометричне місце точок, координати яких задовольняють цьому рівнянню. Рівняння $F(x;y;z)=0$ називається рівнянням поверхні, а x, y, z – змінними координатами.

Найпростішою поверхнею у просторі є площина.

Площина у просторі відносно прямокутної системи координат може бути задана різними способами і має такі форми запису рівняння:

1. *Загальне рівняння площини:*

$$Ax+By+Cz=0. \qquad (2.21)$$

Коефіцієнти *A, B* і *C* є координатами нормального вектора площини (вектора, перпендикулярного до будь-якої прямої, що належить площині), тобто $\vec{n}(A;B;C)$ (рис. 2.10).

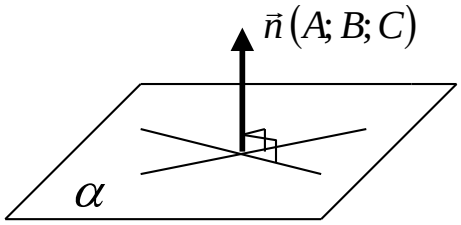

Рис. 2.10

2. *Рівняння площини , яка проходить через задану точку P (x_0; y_0; z_0) в заданому напрямі* ($n=\{A;B;C\}\perp\alpha$):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (2.22)$$

3. *Рівняння площини у відрізках на осях*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1; \qquad (2.23)$$

де *a,* b і *c* – довжини відрізків, які площина відтинає на осях координат.

4. *Рівняння площини, яка проходить через три задані точки* $M_1(x_1; y_1;z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ і $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (2.24)$$

Умова паралельності двох площин: $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ має вигляд $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$.

Умова перпендикулярності двох площин: $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Відстань від заданої точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до площини $Ax+By+Cz=0$ обчислюється за формулою

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ . \qquad (2.25)$$

Кут між двома площинами $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\pm\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}\ . \qquad (2.26)$$

Лінія в просторі визначається як перетин двох поверхонь. Якщо дві поверхні визначаються рівняннями відповідно $F(x;y;z)=0$ і $Q(x;y;z)=0$, то система рівнянь $\begin{cases}F(x;y;z)=0,\\ Q(x;y;z)=0\end{cases}$ визначає лінію, тобто геометричне місце точок, координати яких задовольняють даним рівнянням.

Існує декілька способів задання рівняння прямої у просторі.

1. *Загальне рівняння прямої у просторі* задаються таким чином:

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_{21}y+C_2z+D_2=0\end{cases}; \qquad (2.27)$$

2. К*анонічне рівняння прямої* ($M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – довільна точка, яка належить прямій, $\vec{s}\,(m;n;\ p)$ – напрямний вектор прямої)

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ ; \qquad (2.28)$$

3. *Параметричні рівняння прямої* задаються таким чином:

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt\end{cases} \qquad (2.29)$$

4. *Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки:* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, задаються таким чином:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ . \qquad (2.30)$$

Умова паралельності двох прямих має вигляд $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$.

Умова перпендикулярності двох прямих має вигляд $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Кут між двома прямими обчислюється за формулою

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}\ , \qquad (2.31)$$

де $\vec{s}_1\,(m_1;n_1;\ p_1)$ і $\vec{s}_2\,(m_2;n_2;\ p_2)$ – напрямні вектори цих прямих.

Якщо пряма $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ є паралельною до площини $Ax+By+Cz=0$, то $\vec{s}(m;n;p)\perp\vec{n}(A;B;C)$ і *умова паралельності прямої та площини*:

$$Am+Bn+Cp=0.$$

Якщо дані пряма і площина є перпендикулярними між собою, то $\vec{s}(m;n;p)\parallel\vec{n}(A;B;C)$ і *умова перпендикулярності прямої та площини*:

$$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}.$$

Кут між прямою і площиною обчислюється за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ . \qquad (2.32)$$

Розв'язання прикладів

Приклад 2.15. Точка P (2; -1; -1) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини .

Розв'язання. За умовою точка P належить шуканій площині, тому її рівняння відшукуватимемо у вигляді $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Відомо також, що $OP\perp\alpha$. Отже, вектор $\overline{OP}$ можна вважати нормальним вектором $n=\{A;B;C\}$ площини α. Оскільки $\overline{OP}=n=\{2;-1;-1\}$, так як координати точки O (0; 0; 0), підставляючи його координати і координати точки P до рівняння площини, одержимо $2(x-2)-(y+1)-(z+1)=0$ або $2x-y-z-6=0$. Це і є шукане рівняння.

Приклад 2.16. Скласти рівняння площини (α), що проходить через точку M(2; -1;1) перпендикулярно до площин (α_1): $y=0$ і (α_2): $2x-z+1=0$.

Розв'язання. Точка M належить шуканій площині, тому рівняння площини (α) матиме вигляд $A(x-2)+B(y+1)+C(z-1)=0$, де $\vec{n}(A;B;C)$ – її нормальний вектор.

З умови перпендикулярності площин випливає перпендикулярність їх нормальних векторів: $\begin{cases}\alpha\perp\alpha_1 & \Rightarrow\ \vec{n}\perp\vec{n_1}(0;1;0);\\ \alpha\perp\alpha_2 & \Rightarrow\ \vec{n}\perp\vec{n_2}(2;0;-1)\end{cases}\ \Rightarrow\ \vec{n}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}.$

$$\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{k},\ \text{тобто}\ \vec{n}=\overline{(A;B;C)}=\overline{(-1;0;-2)}.$$

Таким чином, (α): $-1(x-2)+-2(z-1)=0$ або (α): $x+2z-4=0$.

Приклад 2.17. Обчислити відстань d від точки $M_0(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через три точки: $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

Розв'язання. Складаємо рівняння площини, яка проходить через три точки: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1+1 & 3-1 \\ 4-1 & -5+1 & -2-1 \end{vmatrix}=0$ або $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0.$

Розкривши визначник по елементам першого рядка, одержимо:

$$2(x-1)-3(y+1)+6(z-1)=0 \text{ або } 2x-3y+6z-11=0.$$

Далі, використовуючи формулу обчислення відстані від точки до площини і враховуючи, що $x_0=-1$, $y_0=1$, $z_0=-2$, $A=2$, $B=-3$, $C=6$, $D=-11$, матимемо:

$$d=\frac{|2\cdot(-1)-3\cdot 1+6\cdot(-2)-11|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{28}{7}=4.$$

Приклад 2.18. Скласти рівняння площини, що проходить через точки M_1 (1, – 1, 0), M_2 (2, 1, – 3), M_3 (– 1, 0, 1).

Розв'язання. Запишемо рівняння площин, які проходять, скажімо, через точку M_1.

$$A(x-1)+B(y+1)+Cz=0.$$

Вектори $\overrightarrow{M_1M_2}$ і $\overrightarrow{M_1M_3}$ лежать у шуканій площині, тому їх векторний добуток буде перпендикулярним до шуканої площини. Координати векторного добутку вважатимемо координатами вектора:

$$\vec{N}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\vec{i}+5\vec{j}+5\vec{k}.$$

Таким чином, A = 5; B = 5; C = 5, а отже, шукане рівняння набуває вигляду

$$5(x-1)+5(y+1)+5z=0,$$

або вигляду $x+y+z=0$ після виконаного перетворення.

Приклад 2.19. Через точку M (– 5, 16, 12) провести дві площини: одна з яких проходить через вісь Ox, друга – через вісь Oy. Знайти кут між даними площинами.

Розв'язання. Рівняння площини, що проходить через вісь Ox має вигляд: $B_1y+C_1z=0$, рівняння площини, що проходить через вісь Oy має вигляд: $A_2x+C_2z=0$. З умови проходження їх через точку M маємо:

$$3y-4z=0 \text{ і } 12x+5z=0,$$

звідки

$$\cos\varphi=\frac{-20}{\sqrt{9+16}\cdot\sqrt{144+25}}=-\frac{4}{13},\quad \varphi=\pi-\arccos\frac{4}{13}.$$

Приклад 2.20. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-3;4)$ паралельно прямим $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}$ і $\frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}$.

Розв'язання. Згідно з рівняння площини, яка проходить через задану точку $M_0(2;-3;4)$ в заданому напрямі $(n=\{A;B;C\}\perp\alpha)$ запишемо у вигляді

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0.$$

Через те, що $\vec{n}=(A;B;C)\perp\vec{s}_1=(1;2;8)$ і $\vec{n}=(A;B;C)\perp\vec{s}_2=(4;0;2)$, то

$\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 8\\ 4 & 0 & 2\end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k}$, то рівняння шуканої площини набуває вигляду $4(x-2)+30(y+3)+8(z-4)=0$, або $2x+15y-4z+57=0$.

Зауважимо, що нормальним вектором шуканої прямої можна було б вважати і вектор $\vec{n}_1=(2;15;-4)$, який є паралельним до вектора $\vec{n}=(4;30;-8)$.

Приклад 2.21. Знайти кут між прямою $\begin{cases}x-y-8=0,\\ 2x+z-14=0\end{cases}$ і площиною $4x-2y-2z+7=0$.

Розв'язання. За формулою знаходження кута між площиною та прямою у просторі знаходимо:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Оскільки нормальний вектор площини $\vec{n}=(A;B;C)=(4;-2;-2)$ і напрямний вектор прямої $\vec{n}=\vec{s}_1\times\vec{s}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k}$, то

$$\sin\varphi=\frac{|4\cdot(-1)-2\cdot(-1)-2\cdot 2|}{\sqrt{16+4+4}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}}=\frac{1}{2}.$$

Отже, кут $\varphi=30^\circ$.

Індивідуальні завдання
11.01 – 11.30

Дано матриці A, B, C, D. Обчислити матриці 5A-3B, A·B, A·C, D·C.

11.1. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11.2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11.3. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -7 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & -7 & -4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11.4. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -4 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11.5. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11.6. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11.7. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11.8. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 10 \\ 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

11.9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

11.10. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

11.11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

11.12. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

11.13. $A=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 1 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

11.14. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 8 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

11.15. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

11.16. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 6 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11.17. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

11.18. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 7 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 8 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

11.19. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & -8 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

11.20. $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 24 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -3 & 10 & 11 \\ 1 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

11.21. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 7 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 10 & -3 & 5 \\ 11 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11.22. $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -8 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -1 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

11.23. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 15 \\ -7 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 10 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

11.24. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 12 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11.25. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

11.26. $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 13 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

11.27. $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

11.28. $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 13 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 11 & 1 \\ 1 & 3 & -8 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

11.29. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -15 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & -7 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

11.30. $A=\begin{pmatrix} 13 & 2 & 4 \\ 5 & 12 & 4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -9 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix} -2 & 10 & 11 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

12.01 – 12.30

Розв'язати систему лінійних рівнянь

1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.

Зробіть перевірку.

12.01 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

12.02 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

12.03 $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

12.04 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 = -2. \end{cases}$

12.05 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$

12.06 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -17. \end{cases}$

12.07 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

12.08 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2, \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

12.09 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9, \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

12.10 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4, \\ x_1 \quad + \quad 3x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

12.11 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

12.12 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

12.13 $\begin{cases} 3x_1 \quad + 5x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

12.14 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

12.15 $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

12.16 $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 14, \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$

12.17 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 9, \\ x_1 - 3x_2 - 16x_3 = 14, \\ x_2 - 10x_3 = 13. \end{cases}$

12.18 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

12.19 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

12.20 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7, \\ x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$

12.21 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 5, \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 12, \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 7. \end{cases}$

12.22 $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 8, \\ 2x_1 + 5x_3 = 9, \\ x_2 - 10x_3 = -16. \end{cases}$

12.23 $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1, \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

12.24 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7, \\ 2x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$

12.25 $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 15x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

12.26 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

12.27 $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

12.28 $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

12.29 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 14, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$

12.30 $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

13.01 – 13.30

Дано три вектори: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (наведено в таблиці 1.1).

1) Обчислити орти заданих векторів.
2) Перевірити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ щодо їх перпендикулярності.
3) Перевірити вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ щодо їх колінеарності.
4) Перевірити вектори щодо їх компланарності.
5) Знайти кут між векторами $\vec{b}$ та $\vec{c}$
6) Обчислити площу паралелограма, який побудовано на векторах $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{q}=\vec{c}-2\vec{b}$.
7) Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{p}, \vec{q}, \ \vec{r}=2\vec{a}-\vec{c}$

Таблиця 1.1 – Координати векторів $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

13.01.	$\vec{a}=(2,3,1), \vec{b}=(-1,0,-1), \vec{c}=(2,2,2)$	13.02.	$\vec{a}=(2,3,1), \vec{b}=(2,3,4), \vec{c}=(3,1,-9)$
13.03.	$\vec{a}=(1,5,2), \vec{b}=(-1,1,-1), \vec{c}=(1,2,1)$	13.04.	$\vec{a}=(1,-1,-3), \vec{b}=(3,2,1), \vec{c}=(2,3,4)$
13.05.	$\vec{a}=(3,3,1), \vec{b}=(1,-2,1), \vec{c}=(1,1,1)$	13.06.	$\vec{a}=(3,1,-1), \vec{b}=(-2,-1,0), \vec{c}=(5,2,-1)$
13.07.	$\vec{a}=(4,3,1), \vec{b}=(1,-2,1), \vec{c}=(-2,2,2)$	13.08.	$\vec{a}=(4,3,1), \vec{b}=(6,7,4), \vec{c}=(2,0,-1)$
13.09.	$\vec{a}=(3,2,1), \vec{b}=(3,-3,1), \vec{c}=(1,2,3)$	13.10.	$\vec{a}=(3,7,2), \vec{b}=(-2,0,-1), \ \vec{c}=(2,2,1)$
13.11.	$\vec{a}=(1,-2,6), \vec{b}=(1,0,1), \vec{c}=(2,-6,7)$	13.13.	$\vec{a}=(6,3,4), \vec{b}=(-1,-2,0), \vec{c}=(2,1,1)$
13.13.	$\vec{a}=(7,3,4), \vec{b}=(-1,-2,-1), \vec{c}=(4,2,4)$	13.14.	$\vec{a}=(2,3,2), \vec{b}=(4,7,5), \vec{c}=(-3,1,1)$
13.15.	$\vec{a}=(5,3,4), \vec{b}=(-1,0,-1), \vec{c}=(4,2,-4)$	13.16.	$\vec{a}=(3,10,5), \vec{b}=(-2,-2,-3), \vec{c}=(2,4,3)$
13.17.	$\vec{a}=(-2,-4,-3), \vec{b}=(4,3,1), \vec{c}=(6,7,4)$	13.18.	$\vec{a}=(3,1,-1), \vec{b}=(1,0,-1), \vec{c}=(8,3,-2)$
13.19.	$\vec{a}=(1,2,3), \vec{b}=(-2,3,0), \vec{c}=(2,1,-6)$	13.20.	$\vec{a}=(3,-2,3), \ \vec{b}=(-1,2,1), \vec{c}=(4,2,0)$
13.21.	$\vec{a}=(2,3,2), \vec{b}=(4,6,4), \vec{c}=(2,-1,3)$	13.22.	$\vec{a}=(4,0,3), \vec{b}=(1,-2,4), \vec{c}=(1,-1,2)$
13.23.	$\vec{a}=(5,-3,2), \vec{b}=(-4,1,5), \vec{c}=(0,2,4)$	13.24.	$\vec{a}=(2,3,0), \vec{b}=(2,-1,1), \vec{c}=(-2,-2,1)$
13.25.	$\vec{a}=(1,1,-2), \vec{b}=(-2,-5,3),$ $\vec{c}=(-1,0,2)$	13.26.	$\vec{a}=(-3,1,0), \ \vec{b}=(1,6,5),$ $\vec{c}=(1,1,0)$
13.27.	$\vec{a}=(1,3,7), \ \vec{b}=(-1,3,5),$ $\vec{c}=(-6,0,2)$	13.28.	$\vec{a}=(-4,-3,0), \ \vec{b}=(3,2,-1),$ $\vec{c}=(-3,2,2)$

14.01 – 14.30

Задано координати вершин трикутника ABC: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ (табл. 1.2). Методами аналітичної геометрії виконати такі дії:

1) скласти рівняння сторони AB;
2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C;
3) обчислити довжину висоти, проведеної з вершини B;
4) обчислити площу трикутника;
5) визначити внутрішній кут трикутника при вершині A.

Таблиця 1.2 – Координати вершин трикутника *ABC*

Номер варіанта	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
14.01	–2	1	2	–2	6	1
14.02	–3	–11	5	4	–3	10
14.03	5	–7	5	7	–7	2
14.04	9	–4	–3	5	–3	1
14.05	8	7	–1	7	–7	–1
14.06	15	9	8	9	–1	–3
14.07	1	–9	1	2	–11	7
14.08	4	2	–5	14	–14	2
14.09	–3	–1	12	7	–9	7
14.10	9	9	–5	9	0	–3
14.11	–9	3	–9	–5	6	–5
14.12	–7	–3	–7	1	5	6
14.13	6	–6	–2	9	–2	0
14.14	–2	8	3	–4	8	8
14.15	–1	–1	8	11	–8	–1
14.16	–7	12	–7	1	5	–4
14.17	1	3	7	3	4	7
14.18	–6	13	–14	7	–6	–8
14.19	2	10	–7	–2	7	–2
14.20	–5	–1	–1	–1	4	11
14.21	–5	12	7	–4	7	12
14.22	8	–3	14	5	–1	–3
14.23	–1	2	5	–6	11	2
14.24	0	0	12	–9	0	7
14.25	8	7	13	5	–3	–7
14.26	12	7	–9	7	–3	–1
14.27	2	3	5	3	1	7
14.28	–1	1	–14	7	–5	–8
14.29	2	11	–7	–2	2	–2
14.30	–5	–2	–1	–1	7	11

15.01 – 15.30

Привести рівняння лінії (табл. 1.3) до канонічної форми, побудувати цю лінію і в залежності від отриманого результату визначити:

1) координати центра кола і його радіус;

2) координати фокусів, довжини осей і ексцентриситет еліпса;

3) координати фокусів, довжини осей і ексцентриситет гіперболи та записати рівняння її асимптот;

4) координати вершини і фокусу параболи, величину параметра та записати рівняння її директриси.

Таблиця 1.3 – Рівняння лінії

Номер варіанта	Рівняння	Номер варіанта	Рівняння
15.01	$x^2+y^2+4y-5=0$	15.16	$-x^2+3y^2+6x-12y=0$
15.02	$4x^2-8x+y+7=0$	15.17	$x^2+y^2-6x-8y+9=0$
15.03	$9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$	15.18	$2y^2+x-8y+3=0$
15.04	$4x^2-y^2-8x-6y-25=0$	15.19	$x^2-4y^2-2x-8y+13=0$
15.05	$x^2-6x-4y+29=0$	15.20	$x^2+y^2-14x-8y+40=0$
15.06	$x^2+y^2+2x-6y+1=0$	15.21	$2y^2+x-4y-8=0$
15.07	$x^2-4y^2+6x+16y-11=0$	15.22	$-3x^2+y^2-6x-4y-11=0$
15.08	$9x^2+4y^2+18x+16y-11=0$	15.23	$9x^2+25y^2-18x+100y-116=0$
15.09	$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$	15.24	$x^2-4y^2-8y+12=0$
15.10	$y^2-2x+8y+10=0$	15.25	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$
15.11	$7x^2-2y^2+28x+14=0$	15.26	$2y^2+x-4y-8=0$
15.12	$2y^2+x+4y+6=0$	15.27	$9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
15.13	$5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$	15.28	$4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$
15.14	$4x^2-9y^2-8x-36y-68=0$	15.29	$16x^2+25y^2+64x-50y-311=0$
15.15	$x^2-10x-4y-3=0$	15.30	$x^2+y^2-2x+6y-6=0$

16.01 – 16.30

Задано піраміду, координати вершин якої A_1, A_2, A_3, A_4.

Потрібно:

1) скласти рівняння сторони A_1A_2 ;

2) скласти рівняння прямої, що проходить через вершину A_4 паралельно до ребра A_1A_2 ;

3) скласти рівняння площини, що проходить через вершину A_4 паралельно до грані $A_1 A_2 A_3$;

4) записати рівняння висоти, яка опущена з вершини A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$;

5) визначити кут між ребром $A_1 A_3$ і гранню $A_1 A_2 A_3$.

Таблиця 1.4 – Координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$

Номер варіанта	A_1	A_2	A_3	A_4
15.01	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
16.02	(1;2;3)	(2;0;0)	(3;2;5)	(4;0;0)
16.03	(6;1;5)	(5;1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
16.04	(3;6;7)	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)
16.05	(7;9;6)	(4;5;7)	(9;4;4)	(7;5;3)
16.06	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(0;2;7)	(1;5;0)
16.07	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
16.08	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
16.09	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
16.10	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
16.11	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)
16.12	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;9)
16.13	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
16.14	(3;9;8)	(0;7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)
16.15	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
16.16	(1;2;6)	(4;2;0)	(4;6;6)	(6;1;1)
16.17	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
16.18	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
16.19	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
16.20	(1;-2;l)	(0;0;4)	(1;4;2)	(2;0;0)
16.21	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
16.22	(0;4;-1)	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)
16.23	(8;5;8)	(3;3;9)	(6:9; I)	(1;7;3)
16.24	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
16.25	(6;4;8)	(3;5;4)	(5:8:3)	(1;9;9)
16.26	(8:6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
16.27	(6;9;2)	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)
16.28	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
16.29	(5;8;2)	(3;5;10)	(3;8;4)	(5:5;4)
16.30	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)

Контрольна робота №2

1 ГРАНИЦІ

Означення. Число A називається границею функції $f(x)$ при x, що прямує до x_0, якщо для будь-якого як завгодно малого додатного ε існує таке мале $\delta > 0$, що, як тільки $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це записується так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

Основні теореми про границі

Теорема 1 Границя суми двох або більшого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі границь цих функцій за умови, що вони існують:

$$\lim_{x \to x_0}(f_1(x) \pm f_2(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Теорема 2 Границя добутку двох або більшого числа функцій дорівнює добутку границь цих функцій за умови, що вони існують:

$$\lim_{x \to x_0}(f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Наслідок. Постійний множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \to x_0} C \cdot f_1(x) = C \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x).$$

Теорема 3 Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню границь цих функцій за умови, що вони існують і границя знаменника не дорівнює нулю:

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)} \quad (f_2(x) \neq 0) \cdot$$

Перша визначна границя: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

У відношеннях під знаком границі можна замінювати одну нескінченно малу величину на еквівалентну ($\alpha, \beta -$ еквівалентні нескінченно малі величини при $x \to x_0$, для яких $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$).

При $x \to 0$: $\sin x \sim x$, $tgx \sim x$, $\arcsin x \sim x$, $arctgx \sim x$,

При $x \to 0$ $\sin x \sim x$, $tg\, x \sim x$, $arsin\, x \sim x$, $arctg\, x \sim x$, $ln(1+x) \sim x$, $e^x - 1 \sim x$.

Зауважимо, що у випадках, коли чисельник або знаменник (або і чисельник, і знаменник) являють собою суму (або різницю) нескінченно малих функцій, то за обчислення границі, взагалі кажучи, не можна замінювати окремі додатки на еквівалентні функції. Така заміна може призвести до неправильного результату.

Друга визначна границя: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ або $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Її наслідки:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k$; **3)** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx} = e^{km}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{k}{x}} = e^k$; **4)** $\lim\limits_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{m}{x}} = e^{km}$.

Розв'язання прикладів

Приклад 1.1. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 2x)\cdot ctg^2\sqrt{x}}{x}$.

Розв'язання. $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 2x)\cdot ctg^2\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\cos x-\cos 2x)}{x tg^2\sqrt{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)$.

Оскільки границя знаменника дорівнює нулю, то теоремою про границю відношення функцій скористатися не можна. Для розкриття невизначеності треба виконати тригонометричні перетворення.

Скористаємося формулою $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2}}{x tg\sqrt{x}\cdot tg\sqrt{x}}=2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x}{2}\cdot\frac{x}{2}}{x\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Приклад 1.2. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\left(\frac{x^2}{3}\right)}{\sin^2 3x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg\left(\frac{x^2}{3}\right)}{\sin^2 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{3}}{(3x)^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{9x^2}=\frac{1}{27}$.

Приклад 1.3. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{3x}$.

Розв'язання . $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{3x}=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+3}{2x-5}-1\right)^{3x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{2x-5}\right)^{\frac{2x-5}{8}\cdot 3x\cdot\frac{8}{2x-5}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8}{2x-5}\right)^{\frac{2x-5}{8}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x\cdot 8}{2x-5}}=e^{\frac{24}{2}}=e^{12}.$$

Приклад 1.4. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\sin^2\left(\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{3}{tg2x}}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2\left(\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{3}{tg2x}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left(1+\sin^2\left(\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}\cdot\frac{3\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}{tg2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\sin^2\left(\sqrt{x}\right)\right)^{\frac{1}{\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}}\right)^{\frac{3\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}{tg2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}{tg2x}}=e^{3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2x}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

У даному випадку було використано еквівалентність: $\sin\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$, $tg2x\sim 2x$.

Приклад 1.5. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+3)-\ln(x+1)\right)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(x+3)-\ln(x+1)\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x+3}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\ln\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x.$$

Обчислимо окремо границю:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x+1}-1\right)^x=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2x}{x+1}}=e^2.$$

Таким чином, $\ln\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^x=\ln e^2=2.$

Приклад 1.6. Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{x}{2x-2}}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 1}(5-4x)^{\frac{x}{2x-2}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 1}(1+4-4x)^{\frac{x}{2x-2}}=$

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+4(1-x)\right)^{\frac{x}{2x-2}}=\lim_{x\to 1}\left(1+4(1-x)\right)^{\frac{-x}{2(1-x)}}=\lim_{x\to 1}\left(\left(1+4(1-x)\right)^{\frac{1}{1-x}}\right)^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-x}{2}}=e^{-2}.$$

2 НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ

Означення. Функція $f(x)$ неперервна при $x=x_0$, якщо вона визначена при $x=x_0$ і в деякому околі цієї точки; та коли малому приросту x відповідає нескінченно малий приріст функції $f(x)$.

Усі елементарні функції є неперервними в області їх визначення. Точки, де функція невизначена, являються точками розриву функції. Такі точки бувають:

точками розриву першого роду, точками усувного розриву та точками розриву другого роду. Для визначення характеру точки розриву можна скористатися таким означенням неперервності функції. Якщо функція $f(x)$ визначена при $x = x_0$ та в деякому околі цієї точки і якщо $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, то вона неперервна при $x = x_0$.

Розв'язання прикладів

Приклад 2.1. Дослідити щодо неперервності функцію $y = \dfrac{5x}{3-x}$.

Розв'язання. Дана функція є невизначеною в тих точках, в яких знаменник дорівнює нулю, тобто якщо $3 - x = 0$. Точка $x = 3$є точкою розриву. Перевіримо характер розриву. Для цього обчислимо лівосторонню та правосторонню границі.

Обчислимо лівосторонню границю:

$$\lim_{x \to 3-0} \frac{5x}{3-x} = \left\{ \begin{matrix} якщо x < 3,\ то (3-x) > 0,\ і,\ коли x \to 3, \\ (3-x) \to +0,\ а\ 5x \to 15 \end{matrix} \right\} = \frac{15}{+0} = +\infty;$$

Правостороння границя:

$$\lim_{x \to 3+0} \frac{5x}{3-x} = \left\{ \begin{matrix} якщо x > 3,\ то (3-x) < 0,\ і,\ коли x \to 3, \\ (3-x) \to -0, а\ 5x \to 15 \end{matrix} \right\} = \frac{15}{-0} = -\infty;$$

Таким чином, точка $x = 3$ є точкою розриву другого роду.

Приклад 2.2. Дослідити щодо неперервності функцію $y = \dfrac{\sin 5x}{4x}$.

Розв'язання. Дана функція має точку розриву $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0-0} \frac{\sin 5x}{4x} = \lim_{x \to -0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{\sin 5x}{4x} = \lim_{x \to +0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{\sin 5x}{4x} = \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{\sin 5x}{4x}$, але $f(0)$ невизначена.

Значить, $x = 0$ – точка усувного розриву.

Приклад 2.3. Визначити точки розриву функції

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & якщо\ 0 \le x < -1, \\ x^2, & якщо\ 0 \le x < -1, \\ 6 - x, & якщо\ 0 \le x < -1, \end{cases}$$

якщо такі існують.

Розв'язання. На кожному з інтервалів функція є неперервною. Розрив може існувати тільки при $x = -1$ або при $x = 2$. Перевіримо неперервність у цих точках:

а) при $x=-1$ $\lim\limits_{x\to -1-0} y = \lim\limits_{x\to -1-0} 2x = -2;$

$$\lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1+0} x^2 = 1.$$

Обчислені границі не співпадають, а це означає, що при $x=-1$ функція має розрив. Так як границі скінчені, то маємо точку розриву першого роду;

б) при $x=2$ $\lim\limits_{x\to 2-0} y = \lim\limits_{x\to 2-0} 2x = 4;$ $\lim\limits_{x\to 2+0} y = \lim\limits_{x\to 2+0} x^2 = 4,$ $f(2) = x^2\big|_{x=2} = 4.$

У цьому випадку обчислені лівостороння та правостороння границі співпадають і дорівнюють значенню функції в точці: $\lim\limits_{x\to 2-0} y = \lim\limits_{x\to 2+0} y = f(2) = 4,$ тому в точці $x=2$ функція є неперервною.

3 ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на деякому проміжку (a; b). Візьмемо значення $x\in(a;b)$ і надамо аргументу приросту $\Delta x = x_1 - x$. Тоді функція набуде приросту $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Розглянемо відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx і перейдемо до границі при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}. \qquad (3.1)$$

Якщо границя (3.1) існує і є скінченною, то вона називається *похідною функції* $y=f(x)$ *за змінною x* і позначається таким чином:

$$y',\ \ y'_x,\ \ \frac{dy}{dx},\ \ f'(x),\ \ \frac{df(x)}{dx}.$$

Операція знаходження похідної називається *диференціюванням* даної функції.

Геометричний зміст похідної. Якщо пряма l є дотичною до графіка функції $y=f(x)$ в точці $M_0(x_0;\, y_0)$, то $k_{дот} = tg\alpha = f'(x_0) = y'(x_0)$. Рівняння дотичної до графіка функції $y=f(x)$ в точці дотику $(x_0;\, y_0)$ має вигляд

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

Основні правила диференціювання (*u, v, z* – диференційовані функції від x, *C*– стала).

1	$(C)' = 0$	4	$(Cu)' = Cu'$
2	$(u + v - z)' = u' + v' - z'$	5	$(u\cdot v)' = u'v + uv'$
3	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},\ v\neq 0$	6	*Якщо* $y=f(u(x))$, *то* $y'_x = f'_u\cdot u'_x$

Похідна оберненої функції. Нехай задано дві взаємно обернені диференційовані функції $y = f(x)$ та $x=\varphi(y)$ $\left(f\left(\varphi(y)\right)=y\right)$.

Теорема 3.1. Похідна x'_y оберненої функції $x=\varphi(y)$ по змінній y дорівнює оберненій величині похідної y'_x від прямої функції $y=f(x)$: $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.

Таблиця похідних

	$y=f(x)$		$y=f(u(x))$
1	$x'=1$	1*a*	
2	$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$ $n = 1/2$: $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $n = -1$: $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$	2*a*	$\left(u^n\right)'=nu^{n-1}u'$ $n = 1/2$: $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ $n = -1$: $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
3	$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$	3*a*	$\left(a^u\right)'=a^u\ln a\cdot u'$
4	$\left(e^x\right)'=e^x$	4*a*	$\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$
5	$\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$	5*a*	$\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$
6	$\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$	6*a*	$\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$
7	$\left(\sin x\right)'=\cos x$	7*a*	$\left(\sin u\right)'=\cos u\cdot u'$
8	$\left(\cos x\right)'=-\sin x$	8*a*	$\left(\cos u\right)'=-\sin u\cdot u'$
9	$\left(tgx\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	9*a*	$\left(tgu\right)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
10	$\left(ctgx\right)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	10*a*	$\left(ctgu\right)'=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
11	$\left(arctgx\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$	11*a*	$\left(arctgu\right)'=\dfrac{u'}{1+u^2}$
12	$\left(arcctgx\right)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$	12*a*	$\left(arcctgu\right)'=-\dfrac{u'}{1+u^2}$
13	$\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	13*a*	$\left(\arcsin u\right)'=\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14	$\left(\arccos x\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14*a*	$\left(\arccos u\right)'=-\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Правила та формули, наведені в таблиці похідних, слід запам'ятати і використовувати для знаходження похідних функцій.

Зауваження 1. Диференціювання слід починати із застосування відповідних правил і лише після цього використовувати формули диференціювання основних елементарних функцій (див. таблицю похідних).

Зауваження 2. Слід мати на увазі, що необов'язково диференціювати задану функцію відразу. Можна попередньо виконати її тотожні перетворення, якщо це доцільно, тобто якщо це приведе, до спрощення диференціювання, а потім продиференціювати.

Зауваження 3. Не рекомендується захоплюватись спрощенням виразів, одержаних внаслідок диференціювання, бо основна мета полягає в опануванні техніки диференціювання, а не в перевірці вміння виконувати тотожні перетворення.

Похідна неявної функції. Нехай рівняння $F(x; y) = 0$ визначає y як неявну функцію від x. Надалі будемо вважати, що така функція є диференційованою.

Продиференціювавши обидві частини рівняння $F(x; y) = 0$ відносно x, одержимо рівняння першого степеню відносно y', з якого можна легко визначити y', тобто похідну неявної функції.

Диференціювання функцій, заданих параметрично. Якщо функцію аргумента x задано параметричними рівняннями $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, то її похідна буде дорівнювати частці від ділення похідних кожної складової:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Логарифмічне диференціювання. Знаходження похідних від функцій, які допускають операцію логарифмування (добуток, частка, піднесення до степеню і добування кореня) значно спрощується, якщо такі функції попередньо прологарифмувати, а потім знайти їх похідні. Нагадаємо, що відношення $\frac{f'(x)}{f(x)} = (\ln f(x))'$ називається *логарифмічною похідною* функції *y=f(x),* а її знаходження носить назву логарифмічного диференціювання. Спосіб *логарифмічного диференціювання* полягає в тому, що спочатку знаходять логарифмічну похідну функції, а потім похідну самої функції за формулою

$$f'(x) = (\ln|f(x)|)' \cdot f(x).$$

Логарифмічну похідну будемо знаходити формально, маючи, однак, на увазі, що формула має сенс лише за умови, що $y > 0$.

Спосіб логарифмічного диференціювання зручно застосовувати для знаходження похідних складних, особливо показникових і показниково-

степеневих функцій, для яких безпосереднє обчислення похідної з використанням правил диференціювання є трудомістким.

Формула для знаходження похідної степенево-показникової функції має вигляд: $(u^v)' = vu^{v-1} + u^v v' \cdot \ln u$, де $u=u(x)$, $v=v(x)$.-

У даному випадку доречно згадати формули логарифмування:

$$\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2, \quad (0 < a \neq 1,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0);$$

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2, \quad (0 < a \neq 1,\ x_1 > 0;\ x_2 > 0);$$

$$\log_a x^p = p \cdot \log_a x, \quad (0 < a \neq 1,\ x > 0,\ p \in R).$$

3.1 Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається *похідною першого порядку* і являє собою деяку нову функцію. Можливі випадки, коли така функція також має похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається похідною *другого порядку від функції* $y = f(x)$ і позначається

$$y'',\ \ f''(x),\ \ \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Похідна від похідної другого порядку $(y'')'$ називається *похідною третього порядку* і позначається $y''',\ f'''(x),\ \dfrac{d^3x}{dx^3}$.

Похідна від похідної (n – 1)-го порядку $\left(y^{(n-1)}\right)'$ називається *похідною n-го порядку* і позначається $y^{(n)},\ f^{(n)}(x),\ \dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Таким чином, $y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)',\ \ n = 1,\ 2,\ \ldots$

Розв’язання прикладів

Приклад 3.1. Обчислити похідну від функції $y = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1.$

Розв’язання. Використовуючи послідовно правила (2), (4), (1) і формулу (2), одержимо $y' = (3x^4)' + (2x^3)' - (3x^2)' + (5x)' - 1' =$

$$= 3(x^4)' + 2(x^3)' - 3(x^2)' + 5(x)' - 0 =$$

$$= 3 \cdot 4x^3 + 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 5 = 12x^3 + 6x^2 - 6x + 5.$$

Приклад 3.2. Обчислити похідну від функції $f(x) = 3e^{-2x} + 4\lg x$

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила (2), (4) та формули (4*a*) і (6), одержимо: $f'(x) = 3\cdot(-2)\cdot e^{-2x} + \frac{4}{\ln 10}\cdot\frac{1}{x} = -6\cdot e^{-2x} + \frac{4}{x\ln 10}$.

Приклад 3.3. Обчислити похідну від функції $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила (5), (1) і формулу (2) одержимо $f'(x) = \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)' = \frac{(1+x^2)'(1-x^2)-(1+x^2)(1-x^2)'}{(1+x^2)^2} =$

$$= \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}.$$

Приклад 3.4. Обчислити похідну функції $y = \ln tg\frac{x}{2}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу (5*a*), одержимо

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

Приклад 3.5. Обчислити похідну функції $y = \frac{x}{\sin x}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно правило (5), і формули (1) і (7), одержимо: $y' = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$.

Приклад 3.6. Обчислити похідну функції $y = x\sqrt{x}\arcsin x$.

Розв'язання. Скористаємося тим, що $x\sqrt{x} = x^{3/2}$. Тоді

$$y' = \left(x\sqrt{x}\arcsin x\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\arcsin x\right)' =$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\arcsin x + x^{\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}\arcsin x + \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Приклад 3.7. Обчислити похідну функції $y = (2x^3+4)^6$.

Розв'язання. Позначимо через $u = 2x^3+4$, тоді $y = u^6$ і за правилом 6 таблиці похідних, одержуємо:

$$y' = (u^6)'_u \cdot u'_x = 6u^5 \cdot (2x^3+4)' = 6(2x^3+4)^5 \cdot 6x^2 = 36x^2(2x^3+4)^5.$$

Приклад 3.8. Обчислити похідну функції $x^2 + \sin y - e^{xy} = 0$.

Розв'язання. Диференціюємо рівняння по x:

$$2x + \cos y \cdot y' - e^{xy}(y + xy') = 0,$$

звідки

$$y' = \frac{ye^{xy} - 2x}{\cos y - xe^{xy}}.$$

Приклад 3.9. Обчислити похідну функції $\begin{cases} x = t^3 + 2t^2 - 1, \\ y = t^2 + t + 1. \end{cases}$

Розв'язання. Обчислимо похідні $\begin{cases} x'_t = 3t^2 + 4t, \\ y'_t = 2t + 1, \end{cases}$ тому $y' = \dfrac{2t+1}{3t^2+4t}$.

Приклад 3.10. Обчислити похідну функції $f(x) = (x^2 + 3x)^{x\cos x}$.

Розв'язання. За отриманою вище формулою маємо:

$$u = x^2 + 3x;\ v = x\cos x.$$

Похідні даних функцій матимуть вигляд: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x\sin x$. Остаточно

$$f'(x) = x\cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x\cos x - 1} \cdot (2x + 3) + \cdot (x^2 + 3x)^{x\cos x}(\cos x - x\sin x)\ln \cdot (x^2 + 3x).$$

Приклад 3.11. Знайти похідну функції $y = \dfrac{(x+1)^5 \cdot \sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[6]{(x-6)^3}}$.

Розв'язання. Спочатку прологарифмуємо задану функцію відповідно до основи e: $\ln y = \ln \dfrac{(x+1)^5 \cdot \sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[6]{(x-6)^3}}$.

Застосовуючи формули логарифмування, одержуємо:

$$\ln y = 5\ln(x+1) + \frac{1}{3}\ln(x-3) - \frac{3}{4}\ln(x-6).$$

Далі продиференціюємо обидві частини рівності, враховуючи, що y є функцією від x: $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{5}{x+1} + \dfrac{1}{3(x-3)} - \dfrac{3}{4(x-6)}$.

Із одержаного рівняння знаходимо y' і замінюємо функцію y на її вираз через x:

$$y' = \frac{(x+1)^5 \cdot \sqrt[3]{x-3}}{\sqrt[6]{(x-6)^3}} \cdot \left(\frac{5}{x+1} + \frac{1}{3(x-3)} - \frac{3}{4(x-6)} \right).$$

Приклад 3.12. Обчислити похідну другого порядку y″, якщо $y = x\sqrt{x}$.

Розв'язання. Скористаємося тим, що $x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$. Тоді

$$y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}; \quad y'' = (y')' = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{3}{4}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}.$$

Приклад 3.13. Обчислити похідну другого порядку y″, якщо $y = e^{kx}$.

Розв'язання. $y' = \left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}; \quad y'' = (y')' = \left(ke^{kx}\right)' = k^2e^{kx}$.

4 ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ ЗА ПРАВИЛОМ ЛОПІТАЛЯ

Зазначимо, що крім елементарних способів надто ефективним способом знаходження границі функції в зазначених особливих випадках є правило Лопіталя, відповідно до якого, якщо функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ диференційовані в околах точки x_0 і $\varphi(x) \neq 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$ або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ і $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = \infty$, тобто частка являє собою в точці $x = x_0$ невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ за умови, що існує (скінченна чи нескінченна) границя відношення похідних.

Суть цього правила полягає в тому, що границя відношення двох нескінченно малих або нескінченно великих величин дорівнює границі відношення їх похідних, якщо остання існує (скінченна чи нескінченна).

Слід зазначити, що це правило також застосовується у випадку, коли $x_0 = \infty$.

Корисно запам'ятати:

1. Правило Лопіталя безпосередньо використовується лише для розкриття невизначеностей двох типів: $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$.

2. Якщо відношення похідних $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ являє собою невизначеність одного і того самого типу, то правило Лопіталя застосовується повторно доти, доки не буде усунено невизначеність.

3. Переконання в існуванні потрібних похідних і границь одержується в ході обчислень.

4. Границя відношення функцій може існувати тоді, коли відношення похідних не прямує ні до жодної границі.

Зауважимо, що в деяких випадках правило Лопіталя корисно комбінувати з елементарними способами, які використовуються для знаходження границь

функцій.

Наприклад, невизначеності вигляду $0\cdot\infty$ і $\infty-\infty$ можна звести до невизначеностей вигляду $\frac{0}{0}$ і $\frac{\infty}{\infty}$ за допомогою алгебраїчних перетворень, а невизначеності вигляду 1^{∞}, ∞^0 і 0^0 можна звести до попередніх за допомогою попереднього логарифмування або тотожності $\left[f(x)\right]^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$.

Розв'язання прикладів

Обчислити границі за правилом Лопіталя.

Приклад 4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$.

Розв'язання. При $x\to 0$ чисельник і знаменник дробу прямує до нуля, тобто маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, обчислимо границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1}=\frac{0}{1}=0.$

Приклад 4.2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

Розв'язання. Переконаємося, що має місце невизначеність вигляду $\infty-\infty$. Правило Лопіталя в даному випадку застосовувати неможна, тому виконаємо спочатку алгебраїчні перетворення: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$.

Після підстановки граничного значення x маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$ За правилом Лопіталя обчислимо границю

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}$.

Приклад 4.3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)$.

Розв'язання. Після елементарних перетворень функції обчислимо границю

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{-2}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot(-2x3)}{-2x^{-3}}=e^{+\infty}=\infty.$$

5 ПОВНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

Асимптоти графіка функції. Пряма називається асимптотою кривої $y=f(x)$, якщо відстань від точки $M(x;f(x))$, ка лежить на кривій, до даної прямої прямує до нуля при $x\to\infty$ (при $x\to-\infty$).

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$, або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, то пряма $x=x_0$ називається вертикальною асимптотою.

Отже, якщо крива має вертикальні асимптоти, то вона проходить через точки розриву функції.

Асимптоти, рівняння яких записуються у вигляді $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(y-kx)$, називаються похилими асимптотами. При цьому обидві границі повинні існувати (бути нескінченними). Якщо хоча б одна із границь не існує, то крива похилих асимптот не має.

Зауважимо, що асимптота (наприклад, гіперболи) не має з нею спільних точок, тобто не перетинає гіперболи. В загальному випадку асимптота кривої $y=f(x)$ може перетинатися з цією кривою як у скінченній, так і в нескінченній множині точок.

Зазначимо також, що при $k=0$ одержимо горизонтальну асимптоту $y=b$.

Дослідження функції за допомогою похідної. Правило знаходження інтервалів монотонності та екстремумів функції. Для знаходження інтервалів зростання та спадання функції, треба дослідити знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$ за умови, що $x_2>x_1$. Якщо різниця $f(x_2)-f(x_1)$ на певному інтервалі є додатною, то функція на такому інтервалі є зростаючою, якщо ж різниця $f(x_2)-f(x_1)$ є від'ємною, то функція є спадаючою. Зрозуміло, що встановити безпосередньо знак різниці $f(x_2)-f(x_1)$ не завжди легко, а тому під час дослідження функції щодо монотонності доречно користуватися достатньою умовою зростання та спадання функції: якщо $f'(x)>0$ $[f'(x)<0]$ для всіх $x\in(a;b)$, то на інтервалі $(a;b)$ функція зростає (спадає).

Для знаходження інтервалів монотонності потрібно:

1) визначити область визначення функції;
2) обчислити похідну функції;
3) обчислити корені рівняння $f'(x)=0$ і точки, в яких похідна $f'(x)$ не існує (критичні точки);
4) розташувати отримані точки на числовій осі в порядку зростання;
5) визначити знак $f'(x)$ на кожному з одержаних інтервалів (для цього треба похідну розкласти на співмножники, якщо це можливо, або обчислити $f'(x)$ у будь-якій точці інтервалу і визначити її знак) і тим самим визначити інтервали спадання і зростання функції;

6) з'ясувати, які з критичних точок є екстремумами (рис 5.1).

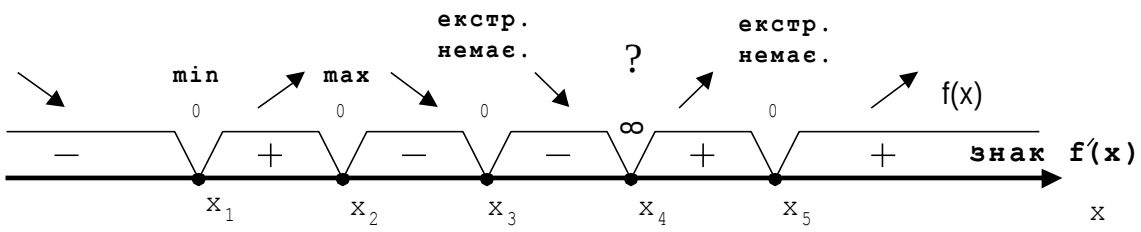

Рис. 5.1

Зауваження. В точці x_4 функція має мінімум за умови, що функція $f(x)$ в даній точці визначена, якщо ж функція $f(x)$ в точці x_4 не визначена, то екстремуму в даній точці не існує.

Напрямок опуклості функції. Точки перегину.

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку (a,b). Кажуть, що функція $f(x)$ є *опуклою вниз* (*опуклою вгору*) функцією на проміжку (a,b), якщо для будь-яких двох точок M і $\overline{M}$, які належать графіку $f(x)$, дуга, яка з'єднує ці точки, лежить під (над) хордою $M\overline{M}$.

Твердження. Нехай функція $f(x)$ визначена і двічі диференційована на проміжку (a,b). Для того, щоб функція $f(x)$ була опуклою вниз (вгору) на проміжку (a,b) необхідно і достатньо, щоб $f''(x)\geq 0$ $\left(f''(x)\leq 0\right)$ на (a,b).

Означення. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку (a,b), $x_0\in(a,b)$. Точка $(x_0, f(x_0))$ називається *точкою перегину* для функції $f(x)$, якщо в ній змінюється напрямок опуклості функції.

Необхідна умова для існування точки перегину. Нехай функція $f(x)$ визначена на проміжку (a,b), $x_0\in(a,b)$ — точка перегину функції. Тоді обов'язково виконується одна з наступних умов:

1) у точці $x_0\in(a,b)$, похідна другого порядку функції $f(x)$ не існує;

2) у точці $x_0\in(a,b)$, похідна другого порядку функції $f(x)$ дорівнює нулю ($f''(x_0)=0$).

Таким чином, точки, які є *підозрілими щодо існування в них перегину*, — це точки, в яких похідна другого порядку не існує або дорівнює нулю. В таких точках перегин може існувати, але може й не існувати. Потрібно перевірити достатні умови для існування перегину в точках.

Перша достатня для існування умова точки перегину. Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі (a,b) і двічі диференційована на даному інтервалі скрізь, за винятком, хіба що, точки $x_0\in(a,b)$. Якщо існують такі лівий і правий півоколи точки x_0, в кожному з яких $f''(x)$ зберігає знак, то:

1) функція $f(x)$ має перегин в точці x_0, якщо $f''(x)$ має значення з різними знаками в відповідних півоколах;

2) функція $f(x)$ не має перегину в точці x_0, якщо $f''(x)$ праворуч і ліворуч від x_0 має значення з однаковими знаками.

Друга достатня умова для існування точки перегину. Нехай функція $f(x)$ визначена і двічі диференційована на інтервалі (a,b) і виконується умови:

1) $f''(x_0)=0$;

2) у точці x_0 існує похідна третього порядку ($f'''(x_0)\neq 0$), а отже, $f(x)$ має перегин в точці x_0.

Для того, щоб знайти точки перегину, потрібно:

1. Знайти область визначення функції $f(x)$.
2. Обчислити $f'(x)$, $f''(x)$.
3. Розв'язати рівняння $f''(x)$= 0, тобто обчислити такі значення x, за яких похідна другого порядку не існує або дорівнює нулю. Серед обчислених значень обрати лише ті, які належать до області визначення функції, — це точки, підозрілі щодо існування в них перегину (для наочності має сенс зобразити область визначення функції й точки, підозрілі щодо існування в них перегину, на числовій осі). Ці точки поділять область визначення на частини.
4. На кожній з частин області визначення функції, отриманих на кроці 3, визначити знак другої похідної $f''(x)$.
5. Для кожної точки, підозрілої щодо існування в ній перегину, проаналізувати знаки похідної другого порядку ліворуч і праворуч від неї: якщо друга похідна змінює знак при переході через точку, то аналізована точка є точкою перегину, інакше перегин не існує.

Дослідження функції і побудова графіка. Для побудови графіка функції доцільно:

1. Знайти область визначення функції і з'ясувати характер її поведінки (обчислити границі) на межах області визначення, а також, при $x\to\pm\infty$.
2. З'ясувати, якою є функція: парною, непарною чи має загальний вигляд.
3. З'ясувати, чи є функція періодичною.
4. Визначити точки перетину функції з осями координат.
5. Визначити точки розриву функції і з'ясувати характер розривів.
6. Знайти асимптоти функції.
7. Обчислити $f'(x)$. Використовуючи похідну, визначити проміжки монотонності функції і точки екстремуму.
8. Обчислити $f''(x)$. Використовуючи похідну другого порядку, визначити проміжки опуклості вгору (вниз) функції і точки перегину.

Означення. Функція $f(x)$, областю визначення якої є множина E, називається *парною*, якщо одночасно виконуються наступні умови:

1) множина E є симетричною відносно осі *OY*;
2) для будь-якого аргументу $x\in E$ має місце рівність $y(-x)=y(x)$.

Зауваження. Графік парної функції є симетричним відносно осі *OY*, тому для спрощення роботи з дослідження функції для побудови її графіка можна

досліджувати функцію лише для додатних значень аргументу. Це дасть можливість побудувати частину графіка, яка має бути розташованою в правій координатній півплощині, а потім відобразити її симетрично відносно осі *OY* для отримання повного графіка.

Означення. Функція $f(x)$, областю визначення якої є множина E, називається *непарною*, якщо одночасно виконуються наступні умови:

1) множина E є симетричною відносно початку координат;
2) для будь-якого аргументу $x \in E$ має місце рівність $y(-x) = -y(x)$.

Зауваження. Графік непарної функції є симетричним відносно початку координат – точки (0,0), тому для спрощення роботи з дослідження функції для побудови її графіка можна розглядати її лише для додатних аргументів. Це дасть можливість побудувати частину графіка, яка має бути розташованою в правій координатній півплощині, а потім відобразити її симетрично відносно точки (0,0) для отримання повного графіка.

Означення. Нехай функцію $f(x)$ визначено на множині E. Число $T \neq 0$ називається *періодом* функції $f(x)$, якщо для будь-якого значення аргументу $x \in E$, значення $x \pm T$ також належать області визначення функції і при цьому

$$f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

Числа $\pm nT$, де $n \in N$, також будуть періодами $f(x)$. Сама функція $f(x)$ в такому випадку називається *періодичною*.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ є періодичною, а T – її найменший додатний період, то для побудови графіка з найменшими обчислювальними витратами має сенс досліджувати функцію на будь-якому проміжку області визначення, довжина якого дорівнює T. Побудувавши графік на такому проміжку, за допомогою паралельних переносів вздовж осі *OX* у додатному і від'ємному напрямках на відстані nT, де $n \in N$, отримаємо повний графік функції.

Приклад 5.1. Побудувати графік функції $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

Розв'язання:

1. Знайдемо область визначення функції:

$$\sqrt[3]{x^2 - 1} \neq 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 1 \neq 0 \;\Rightarrow\; x \neq \pm 1, \text{ тобто } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty).$$

2. Область визначення функції є симетричною відносно точки (0,0), крім того,

$$y(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2 - 1}} = -y(x),$$

тобто функція є непарною, її графік є симетричним відносно початку координат. Внаслідок цього будемо досліджувати функцію тільки в правій координатній півплощині.

3. Функція не є періодичною.
4. Точками перетину функції з віссю *OX* є:

$$y=0 \;\Rightarrow\; \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0 \;\Rightarrow\; x=0,$$

з віссю ОУ:

$$x=0 \;\Rightarrow\; y=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0.$$

5. Точками розриву функції є $x=\pm 1$. В силу непарності функції визначимо характер розриву тільки для точки $x=1$: $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=+\infty$, звідки відразу випливає, що, по-перше, в точці $x=1$ існує розрив другого роду, а по-друге, що пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою. Для зручності побудови графіка обчислимо також другу однобічну границю: $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=-\infty$.

6. Залишилося з'ясувати питання щодо похилих асимптот. Розглянемо тільки праву похилу асимптоту $y=k_1x+b_1$. Для цього обчислимо коефіцієнти

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}=0; \qquad b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}-0\cdot x\right)=\infty.$$

Таким чином, права похила асимптота, а внаслідок симетричності графіка функції і ліва – не існують.

7. Обчислимо похідну функції

$$y'=\left(\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\right)'=\frac{\sqrt[3]{x^2-1}-x\cdot\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{2}{3}}}=\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}.$$

Визначимо проміжки монотонності й точки екстремуму функції, для чого визначимо значення аргументу, за яких похідна y' дорівнює нулю або не існує (це точки, підозрілі щодо існування в них екстремуму). Розглянемо функцію тільки в додатній півплощині.

Похідна існує в усіх точках області визначення функції, тому залишилося обчислити тільки нулі похідної:

$$y'=0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}=0 \;\Rightarrow\; x=\pm\sqrt{3}.$$

Із результатів проведених досліджень зображених на рисунку 5.2, випливає, що точка $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$ є точкою локального мінімуму.

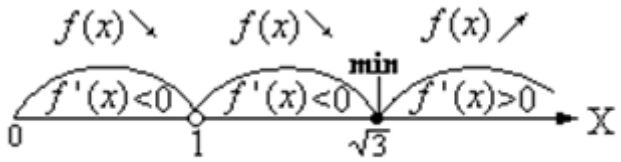

Рис. 5.2

8. Обчислимо другу похідну

$$y''=\left(\frac{x^2-3}{3\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}}\right)'=\frac{1}{3}\cdot\frac{2x\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^4}-\left(x^2-3\right)\cdot\frac{4}{3}\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 2x}{\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^8}}=\frac{2x\left(9-x^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}.$$

Похідна другого порядку існує скрізь на області визначення функції, тому підозрілими на перегин будуть лише точки, в яких $y''=0$:

$$y''=\frac{2x\left(9-x^2\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-1\right)^7}}=0 \quad\Rightarrow\quad x=0,\ x=\pm 3.$$

Результати дослідження напрямків опуклості функції і точок перегину зображено на рисунку 5.3

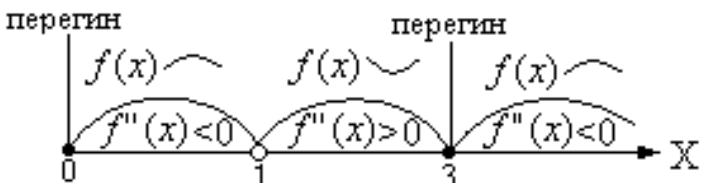

Рис. 5.3

Усі результати проведених досліджень зручно звести до однієї таблиці (табл. 5.1).

Таблиця 5.1 – Дослідження функції на проміжку $(0,\infty)$

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},3)$	3	$(3,\infty)$
y	0	–	$\pm\infty$	+	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}$	+	1.5	+
y'		–	не існує	–	0	+		+
y		↘		↘		↗		↗
y''	0	–	не існує	+		+	0	–
y		⌒		⌣		⌣		⌒
	перегин		розрив		min		перегин	

Користуючись результатами дослідження, поступово побудуємо графік функції. Розглянемо спочатку тільки додатну координатну півплощину, для чого нанесемо характерні точки графіка — точки перетину з осями координат, точки екстремуму, перегину, а також асимптоти. Область визначення функції в правій півплощині характерними точками розділилася на чотири проміжки: $(0,1),(1,\sqrt{3}),(\sqrt{3},3),(3,\infty)$. Розглянемо проміжок $(0,1)$. На цьому інтервалі

функція набуває від'ємних значень, тому графік буде розташовуватись в нижній координатній півплощині; починаючи з точки (0,0), яка належить графіку, функція починає спадати. Оскільки результат попереднього дослідження говорить про те, що при необмеженому наближенні аргументу x до одиниці зліва, функція прямує до $-\infty$ (пункт 5 дослідження), не перетинаючи вертикальну асимптоту та враховуючи, що функція є опуклою вгору на $(0,1)$, одержуємо потрібний графік, який зображено на рисунку 5.4.

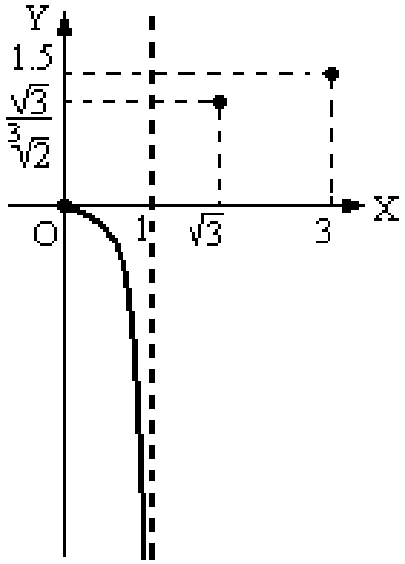

Рис. 5.4

Розглянемо проміжок $(1,\sqrt{3})$. На даному інтервалі функція набуває додатних значень, тому графік буде розташовуватись у верхній координатній півплощині (область розташування графіка на рисунку 5.5,а є зафарбованою); функція спадає від $+\infty$ (в пункті 5 дослідження встановлено, що $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}=+\infty$) до точки локального мінімуму $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$, будучи опуклою вниз, що відповідає зображенню на рисунку 5.5,б.

Ураховуючи додатність функції на проміжку $(\sqrt{3},3)$, її монотонне зростання від точки $\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)$ до точки $(3;1{,}5)$, яке відбувається за опуклості функції вниз, одержуємо чергову частину графіка, що відповідає інтервалу $(\sqrt{3},3)$ (рис.5.5,в).

При переході графіка функції через точку перегину $(\sqrt{3},3)$, функція змінює напрямок опуклості, залишаючись додатною й монотонно зростаючою (рис.5.5,г).

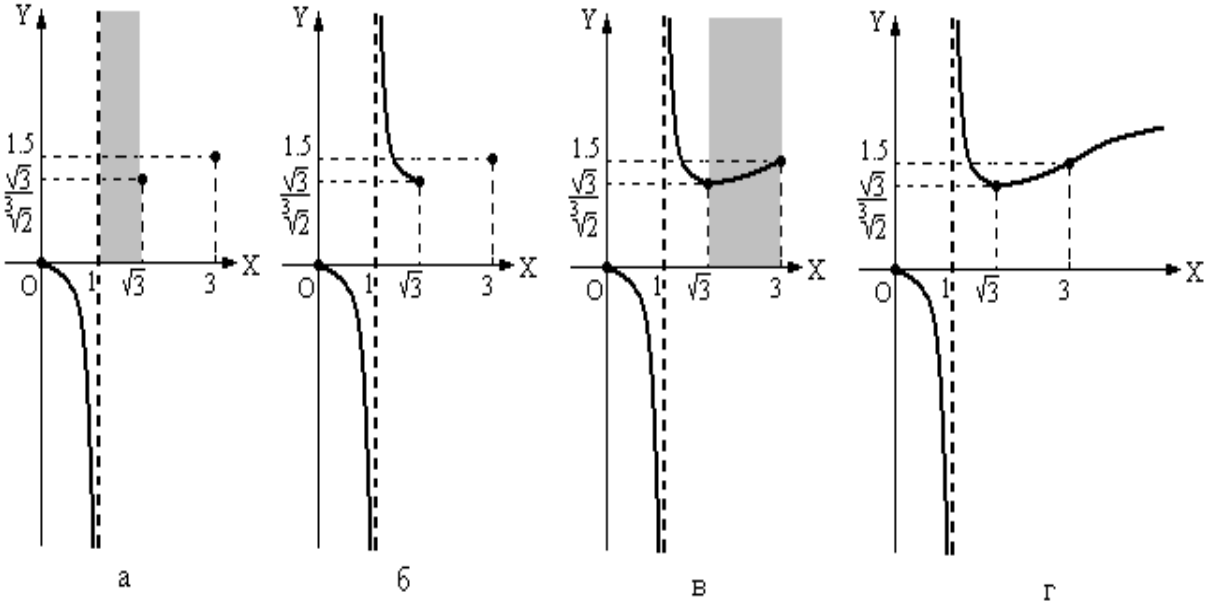

Рис. 5.5

Графік функції є симетричним відносно початку координат. Отже, одержуємо потрібний графік, який зображено на рисунку 5.6.

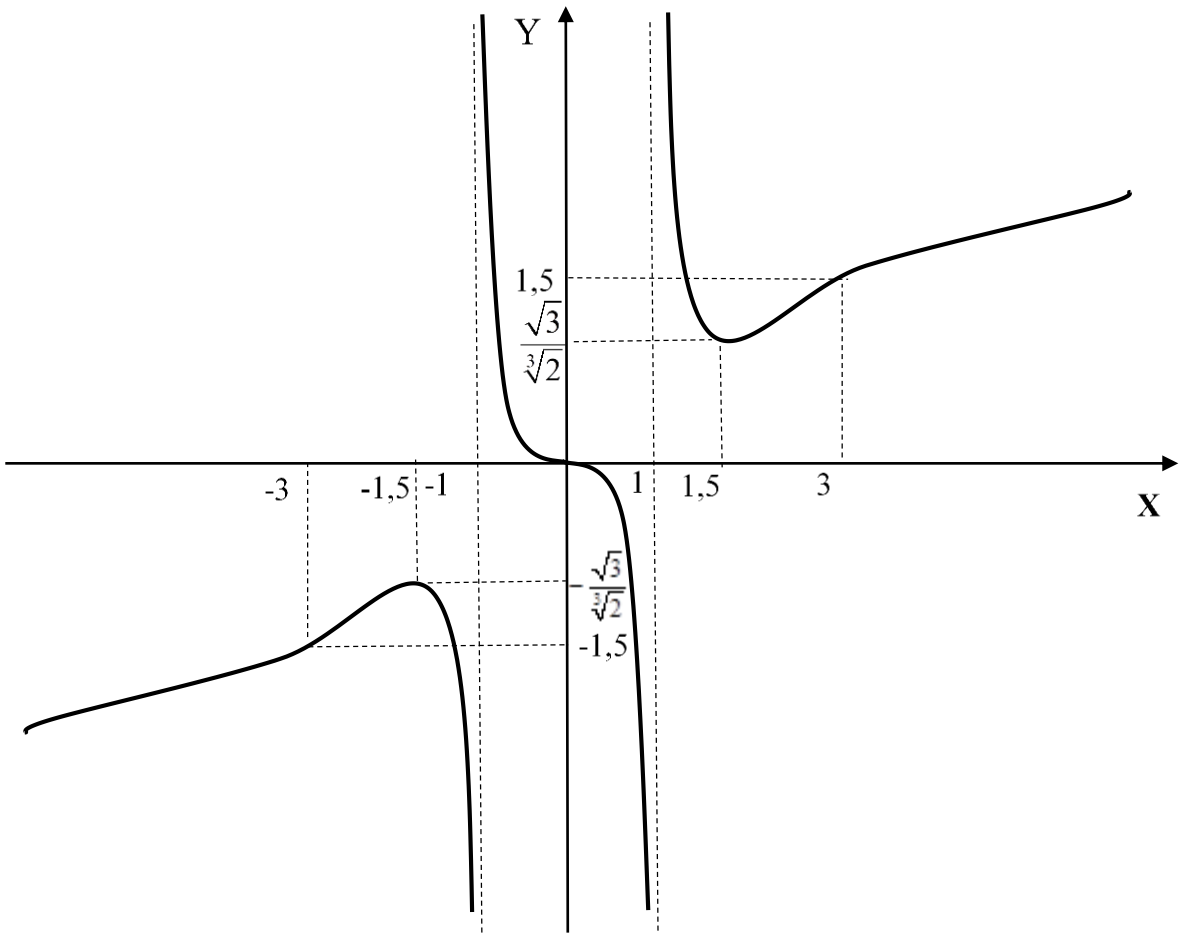

Рис. 5.6

Індивідуальні завдання
21.01 – 21.30

Обчислити границі, не використовуючи правило Лопіталя.

21.01. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x-1}{3-x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x^2+4x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{\sin 4x}$.

21.02. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-x-1}{3x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+4x-12}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\cdot tgx}$.

21.03. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2-1}{x+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2+2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2+7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x^2}{x^2}\right)^{2x^2-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{\sin 6x}$.

21.04. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+6x-1}{x^3-x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{6-x}}{x^2+4x-12}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-2}\right)^{5x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{4x}-1}{\arcsin x}$.

21.05. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x^2-2x}{x^2+x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+x-20}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2+x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+3}{7x-2}\right)^{4x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)}{arctg\dfrac{x}{3}}$.

21.06. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x-1}{5-6x^3+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{6-x}}{x^2+2x-8}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+7}\right)^{3-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-4^x}{arctgx}$.

21.07. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1-x^2}{3-x+2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-16}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2+4x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-4}\right)^{3x^2+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 6x}{\ln(1+2x)}$.

21.08. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-x+2}{x-x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2+x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7+2x}{6+2x}\right)^{3x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1-x)}{\sin 2x}$.

21.09. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-6x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x+4}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x^2+x-12}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}\right)^{2x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\ln(1-6x)}$.

21.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{3-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+2}}{x^2+x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+6}\right)^{x+2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{\sin 5x}$.

21.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x-1}{x+1-3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{x^2-x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-3}\right)^{6x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\cdot\sin x}$.

21.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+2}{x-3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+6x-7}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^2-7x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+2}{6x-1}\right)^{5x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1-x)}{1-\cos 2x}$.

21.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x+1}{x+3x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-3x-18}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{1-x}}{x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+6}{x-2}\right)^{4x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\arcsin x}{1-\cos 4x}$.

21.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x-1}{3x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{\sqrt{x+5}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{4x+5}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+2x)}{\sin 6x}$.

21.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+x+2}{x^3-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{4-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{\sqrt{x+3}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+8}{3x-1}\right)^{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\log_2(1-6x)}$.

21.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^2+2}{7x^2-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+5x-24}{9-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+5x+4}{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+8}{7x-3}\right)^{5x+2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{\arcsin 8x}$.

21.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{5-6x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{1-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+8}\right)^{5x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\ln(1-4x)}$.

21.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x^3+x}{3x^3-6x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+7x-30}{9-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{\sqrt{x+2}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-8}\right)^{3x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot arctg 5x}$.

21.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+1}{x-5x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{4-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2+x-12}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+3}{10x-8}\right)^{x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+6x)}{\arcsin 12x}$.

21.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{1+x+x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x-4}{1-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2+x-20}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x+3}\right)^{4x-8}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-1}{x\cdot\sin 5x}$.

21.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x+1}{1-x-5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2+2x-35}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+1}\right)^{6x-3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-6x)}{\sin 7x}$.

21.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-x^3+x^2+1}{6x-3x^2+7x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+x-42}{x^2-36}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{6}}{x^2-x-20}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-2x}{6-2x}\right)^{x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(1-2x)}{arctg8x}$.

21.23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{5-x+3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x-14}{4-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x^2+3x-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{5-x}\right)^{7-x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\cdot arctg2x}$.

21.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-x^3}{6+5x+3x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-x-20}{25-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x^2+3x-10}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8+5x}{5x-4}\right)^{2x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg12x}{\log_3(1-12x)}$.

21.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x-1}{5-x+5x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-5x-24}{64-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x^2-4x-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3-6x}{5-6x}\right)^{2x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\ln(1-2x)}{1-\cos 3x}$.

21.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x-x^2}{4+3x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-6x-7}{x^2-49}$; в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2+x-56}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+1}{7x-8}\right)^{5x+1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot arctg6x}{\cos 2x-1}$.

21.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+1}{5-2x^2-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x+2}{4-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{\sqrt{x+2}-\sqrt{6-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+8}\right)^{7x-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\ln(1-4x)}$.

21.28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-x^3+x}{3x^3-6x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+7x-30}{9-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+6x-16}{\sqrt{x+2}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-8}\right)^{3x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot arctg5x}$.

21.29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-6x+1}{x-5x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+7x+10}{4-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x^2+x-12}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x+3}{10x-8}\right)^{x-1}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\lg(1+6x)}{\arcsin 12x}$.

21.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x^2-x-1}{1+x+x^2-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+3x-4}{1-x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2+x-20}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-1}{7x+3}\right)^{4x-8}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 7x-1}{x\cdot\sin 5x}$.

22.01-22.30

Дослідити функцію *f (x)* на неперервність, установити тип точок розриву, якщо такі є, схематично побудувати графік.

22.01. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0;\\ x^2-1, & 0<x\le 1;\\ 4x-2, & x>1.\end{cases}$ 22.02. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le -1;\\ 2x+1, & -1<x<0;\\ -x^2+2, & x\ge 0.\end{cases}$

22.03. $f(x)=\begin{cases} 3x+1, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 4-x, & x>1.\end{cases}$ 22.04. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x<4;\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$

22.05. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 2;\\ x+1, & x>2.\end{cases}$ 22.06. $f(x)=\begin{cases} -2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$

22.07. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x<1;\\ x, & x\ge 1.\end{cases}$ 22.08. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le 0;\\ tgx, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4};\\ 2, & x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$

22.09. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0;\\ -(x-1)^2, & 0<x<2;\\ x-3, & x\ge 2.\end{cases}$ 22.10. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1;\\ (x+1)^2, & -1<x\le 1;\\ x, & x>1.\end{cases}$

22.11. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

22.12. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \pi; \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$

22.13. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

22.14. $f(x)=\begin{cases} 3, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 0; \\ x+1, & x>0. \end{cases}$

22.15. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0; \\ 2x^2+1, & 0<x\le 1; \\ 4, & x>1. \end{cases}$

22.16. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le -1; \\ 2, & -1<x\le 1; \\ 3x+1, & x>1. \end{cases}$

22.17. $f(x)=\begin{cases} 4x-3, & x<1; \\ x^2, & 1\le x\le 2; \\ 5, & x>2. \end{cases}$

22.18. $f(x)=\begin{cases} -x-1, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

22.19. $f(x)=\begin{cases} 4, & x\le -2; \\ x^2, & -2<x<2; \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$

22.20. $f(x)=\begin{cases} 3x-2, & x\le 0; \\ 4, & 0<x<2; \\ 2x, & x\ge 2. \end{cases}$

22.21. $f(x)=\begin{cases} x-3, & x\le 2; \\ -1, & 2<x<3; \\ x^2-5, & x\ge 3. \end{cases}$

22.22. $f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0; \\ x^2, & 0\le x\le 1; \\ 2, & x>1. \end{cases}$

22.23. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ 2-x, & x\ge 1. \end{cases}$

22.24. $f(x)=\begin{cases} 1-x^2, & x\le 0; \\ \cos x, & 0<x<\dfrac{\pi}{2}; \\ 2, & x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

22.25. $f(x)=\begin{cases} -x^2, & x\le -1; \\ x, & -1<x<1; \\ 2, & x\ge 1. \end{cases}$

22.26. $f(x)=\begin{cases} 2, & x\le 0; \\ x^2+2, & 0<x\le 1; \\ 3-x, & x>1. \end{cases}$

22.27. $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x+1, & x\ge 1. \end{cases}$

22.28. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0; \\ tgx, & 0<x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 1, & x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

22.29. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

22.30. $f(x)=\begin{cases} -(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^2, & -1<x\le 1; \\ x, & x>1. \end{cases}$

23.01 -23.30

Знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ першого порядку від заданих функцій.

23.01

1. $y=5^{x^2\sin^3 x}+\left(\sin\dfrac{x}{4}\right)^{\sqrt{2}}$
2. $y=\sqrt[4]{3x+x\sqrt[5]{x^2}}$
3. $y=\ln arctg\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
4. $y=(x^3+1)^{tg^2\frac{x}{2}}$
5. $y\sin x-\cos(x-y)=0$
6. $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1} \\ y=\dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$

23.02

1. $y=\dfrac{e^{-3\sqrt{x}}}{1+e^{4x^2}}$
2. $y=\ln\sin 3x+x^2\arcsin^5 2x$
3. $y=\sqrt[5]{(1-x^2)^2}$
4. $y=\left(\sin\dfrac{x}{4}\right)^{tg^3\frac{2}{x}}$
5. $arctgy=x+y^2$
6. $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t \end{cases}$

23.03

1. $y=\dfrac{\sqrt{5x^3+1}}{4+5x^3}$
2. $y=(1+ctg^3 5x)e^{\frac{x}{3}}$
4. $y=\cos^x(3x+1)$
5. $x^2\sin y-\cos y+\cos 2y=0$

3. $y = \ln^2 \cos\frac{2}{x^2+1}$

6. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

23.04

1. $y = \frac{\sqrt{1-\sin^3 2x}}{1+\cos 4x}$

4. $y = (\ln tgx)^{\sin^2 x}$

2. $y = e^{tg^5 \frac{x}{3}} - 2arctg\sqrt{x}$

5. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

3. $y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln\sqrt{1+x^2}$

6. $\begin{cases} x = \ln(t^3+2) \\ y = \frac{t}{t^3+2} \end{cases}$

23.05

1. $y = x^2 tg^5 3x + \arcsin^2 \frac{x}{5}$

4. $y = (arctg\sqrt{3x+1})^{x^3+1}$

2. $y = \ln\frac{ctg^3 \frac{x}{3}}{1+\cos^2 x}$

5. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

3. $y = 10^{1-\sin^4 3x}$

6. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$

23.06

1. $y = \ln(9x^3 + \sqrt[3]{x^5+1})$

4. $y = (x^3-1)^{\cos\sqrt{x}}$

2. $y = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} + \ln tg^3 \frac{x}{7}$

5. $x^2 \ln(1+y^3) + y\ln(1+x^3) = 0$

3. $y = (1+\sin_3 3x)e^{arctg^2 5x}$

6. $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3} \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3} \end{cases}$

23.07

1. $y = \sin^4(3x-1)e^{-x^3}$

4. $y = \left(\frac{x^3}{1+x^2}\right)^x$

2. $y = \sqrt[4]{(1+\cos^5 7x)^3}$

5. $(y^3 - x^3)^2 - x^2 y + y - x = 0$

3. $y = 3tg\frac{x}{5} + 3^{tg^5 x}$

6. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

23.08

1. $y = \ln\left(\sin^3 4x + arctg\frac{x}{4}\right)$

2. $y = \sqrt[5]{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$

3. $y = e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}} \arcsin^2 \ln x$

4. $y = (arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2+1)}$

5. $(x^2+1)^2 + (y^2+1)^2 - xy = 0$

6. $\begin{cases} x = 3t - \sin 3t^2 \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$

23.09

1. $y = \sqrt[7]{\frac{3x+2}{1-4x}}$

2. $y = ctg^5 x ctg 5x$

3. $y = \ln\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}$

4. $y = (\ln^2 x)^{\cos 3x}$

5. $x^2 + y^2 + \arcsin y + y arctg 2x = 0$

6. $\begin{cases} x = \frac{4-t}{1+t} \\ y = \frac{t^3}{2-t^3} \end{cases}$

23.10

1. $y = \ln^5(2x+7) - \sqrt[3]{\sin^2 3x}$

2. $y = \sqrt{xe^{2x} + 2x^3}$

3. $y = 3^{ctg\frac{1}{x}} - \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $y = (x^3+2)^{\sqrt{tgx}}$

5. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln y = 2$

6. $\begin{cases} x = \ln(t^5+3) \\ y = \frac{t^2}{t^5+3} \end{cases}$

23.11

1. $y = tg^5 3x - e^{-\frac{1}{x^2}}$

2. $y = \arcsin(x^3+5)$

3. $y = x^3 \ln(x^2+5) + \frac{1}{\cos^4 \frac{x}{5}}$

4. $y = (x^5+5)^{\cos 2x}$

5. $x^3 y^2 + \sin y + (x-y)^2 = 0$

6. $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}$

23.12

1. $y=\ln\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x^2}$

2. $y=x^3e^{-\frac{1}{x^2}}+e^{\sin^3 x}$

3. $y=\frac{2x^3-1}{\sqrt{\cos\frac{x}{3}}}$

4. $y=\sin^2 x^{x^2-1}$

5. $(y^2+x)^3+(x^2-3y)^3=0$

6. $\begin{cases} x=t+\frac{1}{2}\cos 2t \\ y=\sin^3 2t \end{cases}$

23.13

1. $y=5^{ctg^2(5x+3)}$

2. $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}e^{-3x}$

3. $y=\left(\frac{4}{3x^2}-\frac{1}{9x}\right)\sqrt{4x+x^2}$

4. $y=(\ln 3x)^{arctg\frac{3}{x}}$

5. $\sqrt[3]{\frac{x^2}{2}}+\sqrt[3]{\frac{y^2}{2}}=5$

6. $\begin{cases} x=t^3-3\pi \\ y=t^3-6arctgt \end{cases}$

23.14

1. $y=\sqrt{3}arctg^2 x+\frac{1}{x}+tg\sqrt{x}$

2. $y=x^2e^{-x^2}-5^{1-\ln^2 3x}$

3. $y=3arctg\ln^3\frac{1}{x}$

4. $y=\ln(\cos(7x))^{\sin\frac{x}{2}}$

5. $y-\cos^3 y+\sin^3 x=0$

6. $\begin{cases} x=\arccos t(t^3+1) \\ y=\arcsin 5t \end{cases}$

23.15

1. $y=2^{\arcsin 2x}+\left(1-\arccos\frac{x}{3}\right)^3$

2. $y=e^x\cos 3x+\sqrt[7]{2x+\sqrt[5]{x^3}}$

3. $y=\frac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

4. $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$

5. $\ln y+\frac{x^2}{y}=3$

6. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t+t\cos t \end{cases}$

23.16

1. $y = 5\sin^2\frac{x}{3}ctgx$

2. $y = \ln\frac{\cos^4 x}{\sqrt{\sin 2x}}$

3. $y = 5^{\arcsin\sqrt{x}} - 2arctg\frac{x}{2}$

4. $y = (x^2 + e^x)^{tg^3 x}$

5. $xe^y + y^2 = 10$

6. $\begin{cases} x = \frac{1}{t} - t \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$

23.17

1. $y = \sqrt[5]{(3 - \sqrt{x\sin x})^3}$

2. $y = 3\cos^2\frac{x^2}{\ln x} + ctge^{x^2+4}$

3. $y = 5arctg(x^2 \ln x)$

4. $y = (1 - \sqrt{x})^{\cos\frac{1}{x}}$

5. $y^3 + \sqrt[3]{x} = \arcsin y$

6. $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sqrt{tgt} \end{cases}$

23.18

1. $y = \frac{1}{3}\arcsin(\cos^3\frac{x}{5})$

2. $y = 5^{tg\frac{x}{2}} \ln x$

3. $y = \frac{e^{5x}}{1 + e^{3x}}$

4. $y = \ln^3 x^{x^7}$

5. $\sin(x + \sqrt{y}) = y^2 + 1$

6. $\begin{cases} x = t\sin t \\ y = \frac{t}{\cos t} \end{cases}$

23.19

1. $y = 2^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} + 3tg^3\frac{x}{5}$

2. $y = e^{5x}\cos^2 3x + 7$

3. $y = arctg^4(x\ln x)$

4. $y = (1 + 2^x)^{x^2+2}$

5. $2^{x+y} = x + 10y$

6. $\begin{cases} x = 3e^{5t} \\ y = 5\ln t \end{cases}$

23.20

1. $y = 5\sin 3^{\ln x} + 2$

2. $y = (2x+3)e^{5x} + \dfrac{\ln x}{x}$

3. $y = (\ln 2)^{\sin x} - ctg^3 \dfrac{x}{2}$

4. $y = (3+\ln^2 x)^{\sin^5 x}$

5. $4x - y^4 = \cos(xy^2)$

6. $\begin{cases} x = 3t^2 + 1 \\ y = arctg\sqrt{t} \end{cases}$

23.21

1. $y = 2^{\sqrt{\cos(3x+5)}} + \ln ctg\sqrt[3]{x}$

2. $y = \dfrac{x^5}{\cos^2 7x} - (\cos 5^{\sqrt{tgx}})^3$

3. $y = \sqrt[5]{\sin 10x}\, e^{arctg\frac{1}{x}}$

4. $y = (x^7 + x)^{\sqrt{\ln x}}$

5. $x + tgy = 2^x + y^2$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{1+3t} \\ y = t^2 \sin t \end{cases}$

23.22

1. $y = \dfrac{x}{\ln^2 x} + x^5 5^{\cos\frac{x}{2}}$

2. $y = (arctg\sqrt{\ln x})^{\sqrt{3}}$

3. $y = 3\arcsin^4 3x + \sqrt[3]{\ln^2 tg\dfrac{x}{7}}$

4. $y = (2x + \cos 3x)^{\frac{1}{x}}$

5. $\arccos y + xy^2 = 1$

6. $\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = t^2 + ctg\sqrt{t} \end{cases}$

23.23

1. $y = \sqrt[5]{1 + xe^{\sqrt{x}}}$

2. $y = (2x+3)^5 + 5^{2x+3}$

3. $y = \dfrac{2^x}{tg^3 x} + 1$

4. $y = (e^{5x} + \cos\sqrt{x})^{\log_5 x}$

5. $arctg\dfrac{x}{y} + \sin(xy) = y^3$

6. $\begin{cases} x = te^t \\ y = \arcsin t + \sin t \end{cases}$

23.24

1. $y = \ln(x - \sqrt[3]{x}) - x^3 \ln x$

2. $y = \cos 3^{x^2} + \left(x^3 + \dfrac{3}{x}\right)^5$

4. $y = (1 + \sin^8 7x)^{\frac{2}{x}}$

5. $arctgy = 2x + \sqrt{y}$

3. $y = tg\frac{x^2}{x^3+1} + 5$

6. $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{\sin t} \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$

23.25

1. $y = e^{\frac{x}{2}} arctg^2 x$

4. $y = (3^x + \ln x)^{\sqrt[3]{x^2}}$

2. $y = tg \ln^4 x + 10\sqrt{\cos\frac{x}{5}}$

5. $arctg y = x \sin y$

3. $y = \frac{3^{ctgx}}{\sqrt{2x^3+1}} + (x^3 + e^{3x})^7$

6. $\begin{cases} x = 2t \sin t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}$

23.26

1. $y = x^2 (\arcsin 3x)^3$

4. $y = (tg 7x - x^7)^{\ln^5 x}$

2. $y = 7\log_2(e^{\frac{x}{2}} + 1) + 7^{\ln x}$

5. $y^3 + xy = 1$

3. $y = \frac{arctg 3x}{1+9x^2} - 3\sqrt{\cos 2x}$

6. $\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$

23.27

1. $y = \sqrt[6]{x + (\sin\ln x)^3}$

4. $y = ctg(x+1)^{\sqrt{3x^2+2}}$

2. $y = \frac{e^{3x}}{2x+5} - x\ln(1+x^2)$

5. $\sqrt{x - y^3} = 2\sin^3 x$

3. $y = 3\arcsin^4(\sqrt{x} - 2)^5$

6. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t + 1 \\ y = 2tgt - 3 \end{cases}$

23.28

1. $y = \sin(x + \sqrt[3]{\cos 2x})$

4. $y = (3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$

2. $y = 3\log_7(3^{\ln x} + 5) + \frac{3x}{\ln x}$

5. $tg(xy0 = 3\cos(x\sqrt{y})$

3. $y = x^2 arctg x^2 - 2^x$

6. $\begin{cases} x = \sqrt{1+2t} \\ y = 3t^2 \cos^2 \sqrt{t} \end{cases}$

23.29

1. $y = (2 + \ln 5)^{tgx} + \sqrt{\frac{x}{\sin x}}$

4. $y = \left(1 + \sin\frac{2}{x}\right)^{e^{2x}}$

2. $y=\sqrt[3]{arctg\frac{x}{2}}-\log_2(5^x-1)$

3. $y=xe^{7x}+(x+e^{7x})^3$

5. $(x^2+y^2)+\cos\frac{x+y}{x}=5$

6. $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=3t^3\ln t \end{cases}$

23.30

1. $y=x\log_5(x^3+1)+(\ln 3)^{\cos 2x}$

2. $y=\frac{x}{(x^3+1)^2}-arctg^3\sin 7x$

3. $y=2^{\ln(1+tg^3\frac{x}{4})}$

4. $y=(3+\cos\sqrt{x})^{\ln^2 x}$

5. $\sqrt{\sin y}+\cos^2(xy^2)=0$

6. $\begin{cases} x=t^3+5\sin t \\ y=t\cos 3t \end{cases}$

24.01 – 24.30

Знайти похідні $\frac{dy}{dx}$ та $\frac{d^2y}{dx^2}$ наступних функцій.

24.01. а) $y=x\sqrt{1+x^2}$; б) $\begin{cases} y=\cos 2t, \\ x=\sin 2t. \end{cases}$

24.02. а) $y=(1+x^2)\cdot\lg(5x+2)$; б) $\begin{cases} y=e^t\cos t, \\ x=e^t\sin t. \end{cases}$

24.03. а) $y=2^{3x+5}\cdot\cos x$; б) $\begin{cases} y=t+\sin t, \\ x=2-\cos t. \end{cases}$

24.04. а) $y=\sin(x+1)\cdot\cos 2x$; б) $\begin{cases} y=\frac{1}{t}, \\ x=\frac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

24.05. а) $y=(2x^3-3)\cdot\ln(1+x)$; б) $\begin{cases} y=\sin t, \\ x=\frac{1}{\cos t}. \end{cases}$

24.06. а) $y=x^2\cdot\log^3(x+5)$; б) $\begin{cases} y=\sqrt{t}, \\ x=\sqrt{1-t}. \end{cases}$

24.07. а) $y = x \cdot \cos x^2$; б) $\begin{cases} y = \sqrt{t-1}, \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{t-1}}. \end{cases}$

24.08. а) $y = x^2 \cdot \cos(5x-3)$; б) $\begin{cases} y = t^2 - 1, \\ x = \ln t. \end{cases}$

24.09. а) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; б) $\begin{cases} y = t^2 + t, \\ x = t^2 - t. \end{cases}$

24.10. а) $y = (1+x^2) \cdot arctgx$; б) $\begin{cases} y = t^3 - 3t, \\ x = t^2 - 2t. \end{cases}$

24.11. а) $y = (4x+3) \cdot 2^{-x}$; б) $\begin{cases} y = \sin x, \\ x = \ln\cos x. \end{cases}$

24.12. а) $y = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$; б) $\begin{cases} y = t - \sin t, \\ x = 2 + \cos t. \end{cases}$

24.13. а) $y = \dfrac{\sin 2x}{x}$; б) $\begin{cases} y = \cos t, \\ x = \ln\sin t. \end{cases}$

24.14. а) $y = (2x^3+1)\cos x$; б) $\begin{cases} y = \cos t + t\sin t, \\ x = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

24.15. а) $y = (3x-7) \cdot 3^{-x}$; б) $\begin{cases} y = e^t, \\ x = e^{2t+1}. \end{cases}$

24.16. а) $y = \dfrac{\ln x}{x}$; б) $\begin{cases} y = sht, \\ x = cht. \end{cases}$

24.17. а) $y = e^x \cos x$; б) $\begin{cases} y = \sin 2x, \\ x = \cos 2x. \end{cases}$

24.18. а) $y = x \cdot \ln(1-3x)$; б) $\begin{cases} y = \sin t - t\cos t, \\ x = \cos t - t\sin t. \end{cases}$

24.19. а) $y = \dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$; б) $\begin{cases} y = \ln t, \\ x = t^2 - t. \end{cases}$

24.20. а) $y = x \cdot \ln^3 x$; б) $\begin{cases} y = \ln(arctgt), \\ x = \dfrac{1}{1+t^2}. \end{cases}$

24.21. а) $y=2^{1-x}\cdot x^2$; б) $\begin{cases} y=t^2+4t-1, \\ x=3t^3+t. \end{cases}$

24.22. а) $y=\dfrac{\cos 3x}{x}$; б) $\begin{cases} y=\ln tgt, \\ x=ctgt. \end{cases}$

24.23. а) $y=\dfrac{tg5x}{2x}$; б) $\begin{cases} y=t(1-\cos t), \\ x=t\sin t. \end{cases}$

24.24. а) $y=x^2\cdot\ln(2x+1)$; б) $\begin{cases} y=2\cos t, \\ x=2\sin t. \end{cases}$

24.25. а) $y=\dfrac{\sin 5x}{x}$; б) $\begin{cases} y=\sin^2 t, \\ x=\sin 2t. \end{cases}$

24.26. а) $y=e^{5x}(3x-1)$; б) $\begin{cases} y=t^3+3t+1, \\ x=t^3-3t+1. \end{cases}$

25.01 - 25.30

Знайти границі функцій за правилом Лопіталя.

25.01

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{\sin(x-2)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{3x}}{\sin x}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}arctgx\right)^x$

25.02

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x^2}$

25.03

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-x}{x-\sin x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)tg\dfrac{\pi}{2}x\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$

25.04

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx-\dfrac{1}{1-\sin x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$

25.05

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+2\ln x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\left[\sin(2x-1)tg\pi x\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{\frac{1}{x}}$

25.06

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\frac{\pi}{2}x}$

25.07

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}{\cos x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(tg\dfrac{\pi}{4}x\right)^{tg\frac{\pi}{2}x}$

25.08

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x^2)}{x^2\sin x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4x}{x-2}-\dfrac{1}{4-x^2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2}-arctgx\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

25.09

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$

2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)tgx\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\frac{3}{\ln(2x-2)}}$

25.10

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{2x+1}+1}{\sqrt{2+x}+x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{3}{x}}-1\right)\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$

25.11

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-arctgx}{\ln(1+x^2)}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln^2 x}}$

25.12

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-e^{2x}\right)ctgx$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$

25.13

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}tgx}{1+\cos 4x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)ctg4x$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{3x}}$

25.14

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{\ln x-x+1}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{ctg^2 x}$

25.15

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{ctgx}{x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

25.16

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt[4]{x^3}}$

2. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)tg\dfrac{x}{2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(x)^{\frac{1}{\ln(e^{3x}-1)}}$

25.17

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to +0}x^{\frac{5}{1+2\ln x}}$

25.18

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{1}{\ln\frac{x}{2}}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{1}{\sin x}}$

25.19

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x-\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(xctg3x)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 3x}}$

25.20

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{1-\cos x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left((1-e^{5x})ctgx\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}(\ln x)^{\sin\frac{x-1}{2}}$

25.21

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{2arctgx^2-\pi}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\cos x)ctgx\right]$

3. $\lim\limits_{x\to +0}\left[\ln(x+e)\right]^{\frac{1}{x}}$

25.22

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-4\sin^2\frac{\pi}{6}x}{1-x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-ctg^2x\right)$

3. $\lim\limits_{x\to +0}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$

25.23

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{3x^4}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{tgx}}$

25.24

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-tg^2x}$

2. $\lim\limits_{x\to 1+0}[\ln x\ln(x-1)]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^x$

25.25

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}-arctgx\right)}$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

25.26

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+xtgx}-2}{x^2-x}$

2. $\lim\limits_{x\to +0}(x^2\ln x)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{2}{x^2-1}}$

25.27

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{\ln^2 x}$

25.28

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x+\sin^2 x}{\sin 2x-x^3}$

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(tg\dfrac{\pi}{2x}\right)^{\frac{3}{x-2}}$

25.29

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln 4x}{\ln\sin 5x}$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[(\pi-2arctgx)\ln x\right]$

3. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{1+5\ln x}}$

25.30

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x-\ln(1+2x)}{x^2}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{2xtgx}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{5}{x^2-4}}$

26.01 - 26.30

Провести повне дослідження функцій та побудувати їх графік.

26.01	$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$	26.11	$y=\dfrac{x^3-x+1}{x-1}$	26.21	$y=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x+4}$
26.02	$y=\dfrac{2}{x^2+2x}$	26.12	$y=\dfrac{4x^2}{3+x^2}$	26.22	$y=\dfrac{x^3-27x+54}{x^3}$
26.03	$y=\dfrac{12x}{9+x^2}$	26.13	$y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$	26.23	$y=\dfrac{(x-2)^2}{x^3-1}$
26.04	$y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$	26.14	$y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$	26.24	$y=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$
26.05.	$y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$	26.15	$y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2}$	26.25	$y=\dfrac{2}{x^2+x+1}$
26.06	$y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$	26.16	$y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$	26.26	$y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$
26.07	$y=\dfrac{1}{x^4-1}$	26.17	$y=\dfrac{-8x}{x^2+4}$	26.27	$y=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$
26.08	$y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$	26.18	$y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$	26.28	$y=\dfrac{4x}{(1+x)^2}$
26.09	$y=\dfrac{3x-2}{x^3}$	26.19	$y=\dfrac{8(x-1)}{(x+1)^2}$	26.29	$y=\dfrac{1-2x^3}{x^2}$
26.10	$y=\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2$	26.20	$y=\dfrac{4}{x^2+2x-3}$	26.30	$y=\dfrac{4}{3+2x-x^2}$

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.

2 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

3 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. шк., 2001.

4 Стасенко О.М. Математика для економістів (вища математика): Тексти лекцій. – Х.: ХНУБА, 2016. – 185с.

5 Стасенко О.М. Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математика для економістів(вища математика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка» – Харків: ХНУБА, 2016. - 186 с.

6 Стасенко О.М. Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Математика для економістів» для студентів спеціальності 051 «Економіка» – Харків: ХНУБА, 2016. - 69 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни „Вища математика” на теми: „Лінійна та векторна алгебри”, „Аналітична геометрія”, „Вступ до аналізу”, „Диференціальне числення функції однієї змінної” для студентів з спеціальності 051 «Економіка» заочної форми здобуття освіти

Укладачі: Посилаєва Раїса Вікторівна
Бабаєва Олена Вікторівна

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор В.І. Пуцик

План 2019р., поз 311. Формат 60х84 1/16. . Папір друк. №2.
Підп. до друку 25.01.19 Обл.-вид. арк. 3,8. Безкоштовно.
Надруковано на різографі. Умов. друк. арк. 4,0.
Тираж 50 прим. Зам. № 5587.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури