Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 051

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів заочної форми здобуття освіти

для студентів спеціальності 051 «Економіка»

Харків 2020

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 051

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт

з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів заочної форми здобуття освіти

для студентів спеціальності 051 «Економіка»

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 2 від 28.02.2020

Харків 2020

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів заочної форми здобуття освіти для студентів спеціальностей 051 «Економіка»/ Укладач Р.В. Посилаєва– Харків: ХНУБА, 2020. – 43 с.

Рецензент О.В. Бабаєва

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Основною формою навчання студента-заочника є самостійна робота над вивченням навчального матеріалу, яка передбачає: вивчення матеріалу за підручниками, розв’язування задач, виконання контрольних робіт, самоперевірку знань.

Методичні вказівки призначаються для надання допомоги студентам в організації індивідуальної роботи з курсу «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)».

Видання містить програму навчальної дисципліни, розв'язання прикладів, а також варіанти контрольних робіт. Зміст, повнота і рівень складності запропонованих прикладів і завдань, відповідають рівню вимог до математичної підготовки студентів економічних спеціальностей.

Кожна контрольна робота повинна виконуватись в окремому зошиті, на обкладинці якої студенту слід розбірливо написати своє прізвище, ініціали, шифр, номер контрольної роботи і назву дисципліни.

Розв’язання завдань необхідно проводити в тій же послідовності, яка наводиться в умовах задач. При цьому умова завдання повинна бути повністю переписана перед її розв’язанням.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Змістовий модуль 1. Лінійне програмування. Спеціальні задачі лінійного програмування

Тема 1. Предмет математичного програмування. Загальна задача математичного програмування. Основні класи задач математичного програмування. Постановка задачі лінійного програмування (ЛП). Основні форми задачі ЛП: загальна, стандартна (симетрична), канонічна.

Тема 2. Види запису задачі лінійного програмування (ЛП). Геометрична інтерпретація задачі ЛП. Графічний метод розв’язування задач ЛП.

Тема 3. Основні властивості розв’язків задачі ЛП: опуклість множини допустимих розв’язків (ДР), існування базисних (опорних) і оптимального планів. Симплексний метод розв’язування задач ЛП.

Тема 4. Знаходження початкового опорного плану. Метод штучного базису (М - метод).

Тема 5. Двоїста задача ЛП. Теореми двоїстості. Економічна інтерпретація двоїстих задач. Двоїстий симплекс-метод.

Тема 6. Знаходження розв’язку однієї з пари симетричних взаємо двоїстих задач за відомим розв’язком іншої задачі. Двоїсті оцінки та дефіцитність ресурсів у околі оптимального плану задачі ЛП.

Тема 7. Аналіз розв’язків лінійних економіко математичних моделей. Аналіз коефіцієнтів технологічної матриці до базисних і вільних змінних.

Тема 8. Оцінка рентабельності продукції, яка виробляється, і нової продукції. Аналіз обмежень дефіцитних і недефіцитних ресурсів. Аналіз коефіцієнтів цільової функції.

Змістовий модуль 2. Динамічне програмування. Нелінійне, опукле та стохастичне програмування.

Тема 9. Цілочислове лінійне програмування. Постановка задачі цілочислового лінійного програмування. Частково і повністю цілочислові задачі лінійного програмування. Приклади економічних задач, що зводяться до задач цілочислового лінійного програмування. Метод Гоморі.

Тема 10. Транспортна задача. Економічне і математичне формулювання транспортної задачі. Замкнена і відкрита моделі транспортної задачі. Основні методи побудови початкового опорного плану.

Тема 11. Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі. Економічний зміст потенціалів.

Тема 12. Динамічне програмування**.** Загальна постановка задачі динамічного програмування. Принцип оптимальності. Функціональні рівняння Беллмана.

Тема 13. Економічні задачі, які розв'язуються методом динамічного програмування: задача розподілу ресурсів.

Тема 14. Нелінійне програмування. Постановка задач, їх економічна сутність. Класичний метод оптимізації задач нелінійного програмування на базі використання множників Лагранжа.

Тема 15. Опукле програмування. Деякі з основних методів розв'язування задач опуклого програмування. Необхідні та достатні умови існування вузлової точки. Теорема Куна-Таккера. Методи аналізу оптимального плану задачі НЛП.

Тема 16. Стохастичне програмування**.** Загальна постановка задачі стохастичного програмування, її особливості щодо оперативного управління та перспективного планування.

Тема 17. Класифікація задач стохастичного програмування. Методи розв'язування задач стохастичного програмування (непрямі, прямі), приклади їх реалізації.

Контрольна робота
Індивідуальні завдання

11.01-11.30. Розв'язати завдання графічним методом.

11.01 Знайти мінімум цільової функції $Z=-2x_1+5x_2$
за умов

$$\begin{cases} 7x_1+2x_2 \ge 14 \\ 5x_1+6x_2 \le 30 \\ 3x_1+8x_2 \ge 24 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.02. Знайти максимум цільової функції $Z = -8+8x_1+4x_2$
за умов

$$\begin{cases} 6x_1+2x_2 \le 96 \\ 2x_1+8x_2 \le 104 \\ 5x_1+6x_2 \le 106 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.03. Знайти мінімум цільової функції $Z=12x_1+4x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1+x_2 \ge 2 \\ x_2-x_1 \ge 0 \\ x_1 \ge 0{,}5 \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.04. Знайти максимум цільової функції $Z=2x_1-5x_2$
за умов

$$\begin{cases} 4x_1+3x_2 \ge 12 \\ 3x_1+4x_2 \le 24 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.05. Знайти мінімум цільової функції $Z=-2x_1+5x_2$
за умов

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2 \le 56 \\ 6x_1+5x_2 \le 84 \\ 6x_1+2x_2 \le 66 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.06. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 14 \\ -5x_1+3x_2 \le 15 \\ 4x_1+6x_2 \ge 24 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.07. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + 2x_2$ за умов

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.08. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + 4x_2$ за умов

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.09. Знайти максимум цільової функції $Z = 2x_1 + x_2$ за умов

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.10. Знайти мінімум цільової функції $Z = x_1 - 2x_2$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.11. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + 5x_2$ за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.12. Знайти мінімум цільової функції $Z = 2x_1 + 2x_2$ за умов

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -6 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.13. Знайти мінімум цільової функції $Z = x_1 + x_2$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \ge 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.14. Знайти мінімум цільової функції $Z = x_1+4x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 2 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

11.15. Знайти максимум цільової функції $Z = 21x_1 + 3x_2$
за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

11.16. Знайти мінімум цільової функції $Z = x_1 - x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 0 \leq x_1 \leq 4 \\ 1 \leq x_2 \leq 4 \end{cases}$$

11.17. Знайти максимум цільової функції $Z = 3x_1 - 4x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 6 \\ x_1 - 2x_2 \geq 0 \\ 0 \leq x_1 \leq 6 \\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

11.18. Знайти мінімум цільової функції $Z = -2x_1 + x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1 - 8x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ 3x_1 + 10x_2 \leq 30 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

11.19. Знайти максимум цільової функції $Z = 14x_1 + 8x_2$
за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

11.20. Знайти максимум цільової функції $Z = 2x_1 + 7x_2$
за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \leq 14 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

11.21. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + 2x_2$
за умов

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 9x_1 + 4x_2 \le 56 \\ 3x_1 + 5x_2 \ge 4 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.22. Знайти мінімум цільової функції $Z = -2x_1 + 2x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.23. Знайти максимум цільової функції $Z = 5x_1 + 3x_2$
за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.24. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + 3x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \\ 2x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.25. Знайти максимум цільової функції $Z = 2x_1 + 3x_2$
за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.26. Знайти максимум цільової функції $Z = 2x_1 - x_2$
за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$

11.27. Знайти максимум цільової функції $Z = -x_1 + 3x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

11.28. Знайти мінімум цільової функції $Z = 2x_1 + x_2$
за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 16 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + 3x_2 \geq 9 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

11.29. Знайти максимум цільової функції $Z = 4x_1 + 2x_2$
за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ 2x_1 - x_2 \leq 10 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$

11.30. Знайти максимум цільової функції $Z = -x_1 + x_2$
за умов

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ 0 \leq x_1 \leq 10 \\ 1 \leq x_2 \leq 10 \end{cases}$$

12.01-12.30.

1. Розв’язати завдання симплексним методом.
2. Побудувати для вихідної задачі двоїсту і знайти її розв’язок.

12.01. Знайти максимум цільової функції $Z = 6x_1 + 10x_2$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2, \\ -2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.02. Знайти мінімум цільової функції $Z = 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - x_5 - x_6$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.03. Знайти мінімум цільової функції $Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6$

за умов

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_4 + x_6 = 4, \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 3, \\ 2x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.04. Знайти максимум цільової функції $Z = 6x_2 + 3x_3 - x_4$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 10, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.05. Знайти мінімум цільової функції $Z = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5 = 9, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.06. Знайти максимум цільової функції $Z = -3x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_5$
за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 \qquad + x_4 \qquad + x_6 = 3, \\ \qquad\quad 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad = 4, \\ -2x_1 - \ x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 = 2, \\ \quad x_1 - 2x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.07. Знайти максимум цільової функції $Z = -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 - x_5$ за умов

$$\begin{cases} 3x_1 - \ x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad\qquad = 1, \\ \qquad\quad 2x_2 \qquad + x_4 - x_5 \qquad = 1, \\ -5x_1 \qquad\qquad\qquad + x_5 + x_6 = 1, \\ -x_1 + \ x_2 + \ x_3 \qquad\qquad\qquad = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.08. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + 4x_2$ за умов
за умов

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 \qquad + x_4 + x_5 \qquad = 5, \\ -3x_1 + \ x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 = 0, \\ \qquad\quad 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad = 4, \\ -4x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.09. Знайти максимум цільової функції $Z = -x_1 - 6x_2 - 2x_3 + x_5$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 \qquad + x_4 + x_5 \qquad = 5, \\ \ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \qquad = 6, \\ \qquad 2x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad = 4, \\ 2x_1 - \ x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.10. Знайти мінімум цільової функції $Z = 3x_1 - 2x_2 - 9x_3 + x_5$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 \quad -x_3 + x_4 + x_5 \quad = 5, \\ -2x_1 \quad -x_3 \quad + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 - x_2 \quad + x_4 \quad = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \quad = 1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.11. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + 5x_2$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \quad + x_4 + x_5 \quad = 5, \\ -2x_1 - x_2 \quad + x_5 + x_6 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \quad = 1, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 \quad = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.12. Знайти мінімум цільової функції $Z = -x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 \quad + x_5 \quad = 15, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \quad = 6, \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 \quad = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \quad - 2x_5 + x_6 = 4, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.13. Знайти мінімум цільової функції $Z = 3x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_6$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 \quad + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 \quad - x_3 + x_4 \quad = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad = 1, \\ 3x_1 - x_2 \quad - x_6 = 0, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.14. Знайти мінімум цільової функції $Z = -5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 + x_6$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1+2x_2 \qquad +x_4 \qquad +x_6=3, \\ -2x_1-\ x_2 \qquad +x_4+x_5 \qquad =2, \\ \quad x_1-2x_2 \qquad\qquad +x_5 \qquad =2, \\ \qquad\quad 2x_2+x_3 \qquad\qquad +x_6=4, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,6}. \end{cases}$$

12.15. Знайти максимум цільової функції $Z = 11x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5$ за умов

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad +x_4+x_5 \qquad =5, \\ -x_1-2x_2 \qquad\qquad +x_5+x_6=2, \\ 2x_1+ \qquad x_3+x_4 \qquad\qquad =4, \\ 3x_1-\ x_2+2x_3+x_4 \qquad\qquad =5, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,6}. \end{cases}$$

12.16. Знайти максимум цільової функції $Z = -5x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 \qquad -x_3+x_4 \qquad\qquad =2, \\ 2x_1-x_2 \qquad +x_4+x_5 \qquad =5, \\ -x_1+x_2+x_3 \qquad\qquad =1, \\ -2x_1-x_2 \qquad\qquad +x_5+x_6=2, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,6}. \end{cases}$$

12.17. Знайти максимум цільової функції $Z = -x_1 + 8x_2 + 3x_3 - x_5$ за умов

$$\begin{cases} -x_1 \qquad +2x_3+\ x_4 \qquad\qquad =4, \\ \qquad 2x_2+\ x_3 \qquad +x_5 \qquad =4, \\ -x_1-3x_2 \qquad +2x_4 \qquad +x_6=4, \\ \quad x_1+\ x_2 \qquad\qquad +x_5 \qquad =3, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,6}. \end{cases}$$

12.18. Знайти мінімум цільової функції $Z = -2x_1 - 6x_2 + x_4$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.19. Знайти максимум цільової функції $Z = 10x_1 + 6x_2$

за умов

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_6 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + x_5 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.20. Знайти мінімум цільової функції $Z = -x_1 - 12x_2$

за умов

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 2x_5 + x_6 = 4, \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.21. Знайти мінімум цільової функції $Z = -4x_1 - 10x_5$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 8, \\ -x_1 + x_3 + x_5 = 1, \\ -2x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.22. Знайти максимум цільової функції $Z = -2x_1 + 12x_2 + 4x_3 - 2x_4 + x_5$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_2 + x_4 - x_5 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.23. Знайти максимум цільової функції $Z = -x_1 + 3x_2 + 12x_3 - x_4$

за умов

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 9, \\ 3x_1 + 2x_4 + x_5 = 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.24. Знайти максимум цільової функції $Z = -4x_1 + 13x_2 + 3x_3 - x_4$

за умов

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 12, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.25. Знайти максимум цільової функції $Z = -x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 7x_5$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_5 + x_6 = 2, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_5 = 2, \\ 2x_1 + x_3 - x_6 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

12.26. Знайти максимум цільової функції $Z = -9x_1 - 10x_2$

за умов

$$\begin{cases} -7x_1+3x_2+x_3 \qquad\qquad +2x_6=1, \\ -4x_1+2x_2+x_3 \qquad\qquad + \ x_6=1, \\ \qquad 2x_2+x_3+x_4 \qquad\qquad =4, \\ 2x_1- \ x_2 \qquad +x_4+x_5 \qquad =5, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,6}. \end{cases}$$

12.27. Знайти максимум цільової функції $Z = -3x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6$

за умов

$$\begin{cases} -2x_1- \ x_2+x_3 \qquad\qquad +x_6=2, \\ 3x_1- \ x_2 \qquad\qquad -x_6=0, \\ 2x_1 \qquad\qquad +x_4-x_5 \qquad =2, \\ 2x_1-3x_2+x_3 \qquad -x_5 \qquad =1, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,6}. \end{cases}$$

12.28. Знайти мінімум цільової функції $Z = 2x_1 - 7x_2 - 2x_3 + x_5$

за умов

$$\begin{cases} -x_1+ \ x_2+ \ x_3 \qquad\qquad =1, \\ 3x_1- \ x_2-2x_3+x_4 \qquad =1, \\ \qquad 3x_2 \qquad +x_4-x_5 \qquad =1, \\ -5x_1 \qquad\qquad +x_5+x_6=1, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,6}. \end{cases}$$

12.29. Знайти максимум цільової функції $Z = x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_5$

за умов

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 \qquad =6, \\ \qquad 2x_2+x_3+x_4 \qquad =4, \\ 2x_1+ \ x_2 \qquad +x_4+x_5 \qquad =5, \\ -2x_1- \ x_2 \qquad +x_5+x_6=2, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,6}. \end{cases}$$

12.30. Знайти максимум цільової функції $Z = -x_1 + x_3 - 4x_4 + x_5 + x_6$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_4 + x_5 + x_6 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

13.01-132.30 Розв`язати задачі

Фірма має 4 магазини роздрібної торгівлі, розташовані в різних районах міста (*А*, *В*, *С*, *Д*), постачання в яких здійснюються з двох складів (I і II). У зв'язку із збільшеним купівельним попитом фірма планує розширити площі магазинів, що дозволить завозити більше продукції із складів. Щоб задовольнити потреби магазинів, передбачається будівництво складу III. Керівництво фірми розглядає два варіанта його розміщення. У таблиці надано транспортні витрати, які відповідають перевезенню продукції з двох існуючих складів, два варіанта розміщення нового складу, передбачувані потреби магазинів в продукції і місткість складів.

Оцінити дві транспортні моделі і вирішити, який Варіант розміщення нового складу вигідніший. Розв’язати обидві транспортні завдачі методом потенціалів, побудувавши початковий ДБР методом північно-західного кута для першого варіанту розміщення складу III, і методом мінімального елементу для другого варіанту.

13.01.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	3	30
II	1	2	2	1	50
III (Варіант 1)	2	2	1	2	70
III (Варіант 2)	3	1	2	1	70
Потреба магазину	25	25	40	60	

13.02.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	1	3	60

II	2	4	3	1	30
III (Варіант 1)	3	1	4	2	60
III (Варіант 2)	3	3	2	2	60
Потреба магазину	35	25	55	35	

13.03.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	5	5	4	3	70
II	2	4	3	4	40
III (Варіант 1)	2	4	4	3	40
III (Варіант 2)	4	5	2	2	40
Потреба магазину	30	40	50	30	

13.04.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	3	4	40
II	5	5	4	3	70
III (Варіант 1)	2	4	4	3	40
III (Варіант 2)	4	3	2	3	40
Потреба магазину	45	25	30	50	

13.05.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу

I	4	3	2	2	50
II	5	2	3	1	50
III (Варіант 1)	1	3	5	2	50
III (Варіант 2)	4	2	2	4	50
Потреба магазину	40	30	30	50	

13.06.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	1	3	2	50
II	3	1	4	2	40
III (Варіант 1)	3	3	2	5	60
III (Варіант 2)	4	5	2	2	60
Потреба магазину	45	25	30	50	

13.07.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	3	5	4	45
II	1	2	5	2	60
III (Варіант 1)	2	3	1	4	45
III (Варіант 2)	3	2	2	3	45
Потреба магазину	40	20	30	60	

13.08.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу

I	2	3	4	1	60
II	4	2	5	3	20
III (Варіант 1)	5	1	3	4	70
III (Варіант 2)	4	2	4	3	70
Потреба магазину	40	30	45	35	

13.09.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	4	1	40
II	2	1	3	4	70
III (Варіант 1)	2	2	4	4	40
III (Варіант 2)	3	4	2	3	40
Потреба магазину	30	40	50	30	

13.10.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	3	1	60
II	2	2	3	1	40
III (Варіант 1)	1	2	1	2	50
III (Варіант 2)	3	1	2	1	50
Потреба магазину	20	55	20	55	

13.11.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	1	3	60
II	1	3	4	1	50
III (Варіант 1)	2	4	5	3	40
III (Варіант 2)	5	1	3	3	40
Потреба магазину	45	25	45	35	

13.12.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	1	50
II	2	2	1	2	70
III (Варіант 1)	1	2	1	3	30
III (Варіант 2)	2	3	1	2	30
Потреба магазину	40	25	60	25	

13.13.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	4	3	3	5	70
II	2	2	3	4	30
III (Варіант 1)	2	3	2	5	50
III (Варіант 2)	3	4	3	2	50
Потреба магазину	25	50	50	25	

13.14.

Магазин	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу

Торгівельний склад					
I	1	3	2	2	45
II	2	2	1	3	60
III (Варіант 1)	1	2	3	1	45
III (Варіант 2)	2	1	2	2	45
Потреба магазину	30	20	60	40	

13.15.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	3	30
II	2	1	1	4	50
III (Варіант 1)	2	1	3	1	70
III (Варіант 2)	4	2	1	2	70
Потреба магазину	25	40	60	25	

13.16.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	4	2	60
II	3	3	2	4	40
III (Варіант 1)	2	4	2	4	50
III (Варіант 2)	4	3	2	3	50
Потреба магазину	30	40	30	50	

13.17.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	3	3	2	50
II	3	4	2	5	40
III (Варіант 1)	2	3	1	4	60
III (Варіант 2)	3	2	4	2	60
Потреба магазину	35	55	30	30	

13.18.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	2	2	3	55
II	2	3	3	4	40
III (Варіант 1)	2	2	3	3	55
III (Варіант 2)	3	4	2	1	55
Потреба магазину	40	30	65	15	

13.19.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	4	4	2	30
II	3	4	5	5	70
III (Варіант 1)	4	3	2	4	50
III (Варіант 2)	3	2	5	3	50
Потреба магазину	30	45	35	40	

13.20.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	1	45
II	1	3	2	2	50
III (Варіант 1)	3	1	2	3	55
III (Варіант 2)	2	2	1	3	55
Потреба магазину	50	30	40	30	

13.21.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	1	3	4	70
II	2	2	3	3	35
III (Варіант 1)	3	1	2	4	45
III (Варіант 2)	1	4	3	2	45
Потреба магазину	35	25	45	45	

13.22.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	1	2	50
II	3	2	3	1	60
III (Варіант 1)	2	2	3	1	40
III (Варіант 2)	1	3	1	3	40
Потреба магазину	55	20	55	20	

13.23.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	2	2	3	60
II	1	4	1	3	55
III (Варіант 1)	3	1	2	1	40
III (Варіант 2)	1	2	3	2	40
Потреба магазину	65	20	20	50	

13.24.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	1	3	60
II	1	3	2	2	45
III (Варіант 1)	1	2	3	1	45
III (Варіант 2)	2	1	2	2	45
Потреба магазину	20	30	60	40	

13.25.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	4	4	2	30
II	3	4	5	5	70
III (Варіант 1)	4	3	2	4	50
III (Варіант 2)	4	2	5	1	50
Потреба магазину	30	45	35	40	

13.26.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	1	4	1	3	55
II	1	2	2	3	60
III (Варіант 1)	3	1	2	1	40
III (Варіант 2)	2	2	1	3	40
Потреба магазину	50	20	65	20	

13.27.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	3	5	3	4	50
II	2	3	2	5	80
III (Варіант 1)	4	3	4	3	20
III (Варіант 2)	2	3	3	5	20
Потреба магазину	55	30	35	30	

13. 28.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	2	4	5	45
II	3	3	5	4	45
III (Варіант 1)	1	2	5	4	60
III (Варіант 2)	4	3	2	3	60
Потреба магазину	20	40	60	30	

13.29.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	5	2	3	2	50
II	4	3	2	2	50
III (Варіант 1)	5	3	3	4	50
III (Варіант 2)	4	2	4	5	50
Потреба магазину	30	40	50	30	

13.30.

Магазин / Торгівельний склад	*А*	*В*	*С*	*Д*	Місткість складу
I	2	4	3	2	70
II	4	2	3	3	35
III (Варіант 1)	4	2	3	1	45
III (Варіант 2)	2	3	4	2	45
Потреба магазину	40	30	30	50	

Зразок виконання завдань

Приклад 1. Знайти максимум цільової функції $Z(X) = 3x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 4, \\ -2x_1 + 2x_2 \ge 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання. Оскільки за умовою $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$, то область допустимих розв'язків буде розташована у першому квадраті. Будуємо прямі:

$$12x_1 + 4x_2 = 12,$$
$$3x_1 + 4x_2 = 4,$$
$$-2x_1 + 2x_2 = 1$$

та визначаємо півплощини, для яких задовольняються відповідні обмеження (на рис. 1 показані стрілками). Зробимо рисунок області допустимих розв'язків.

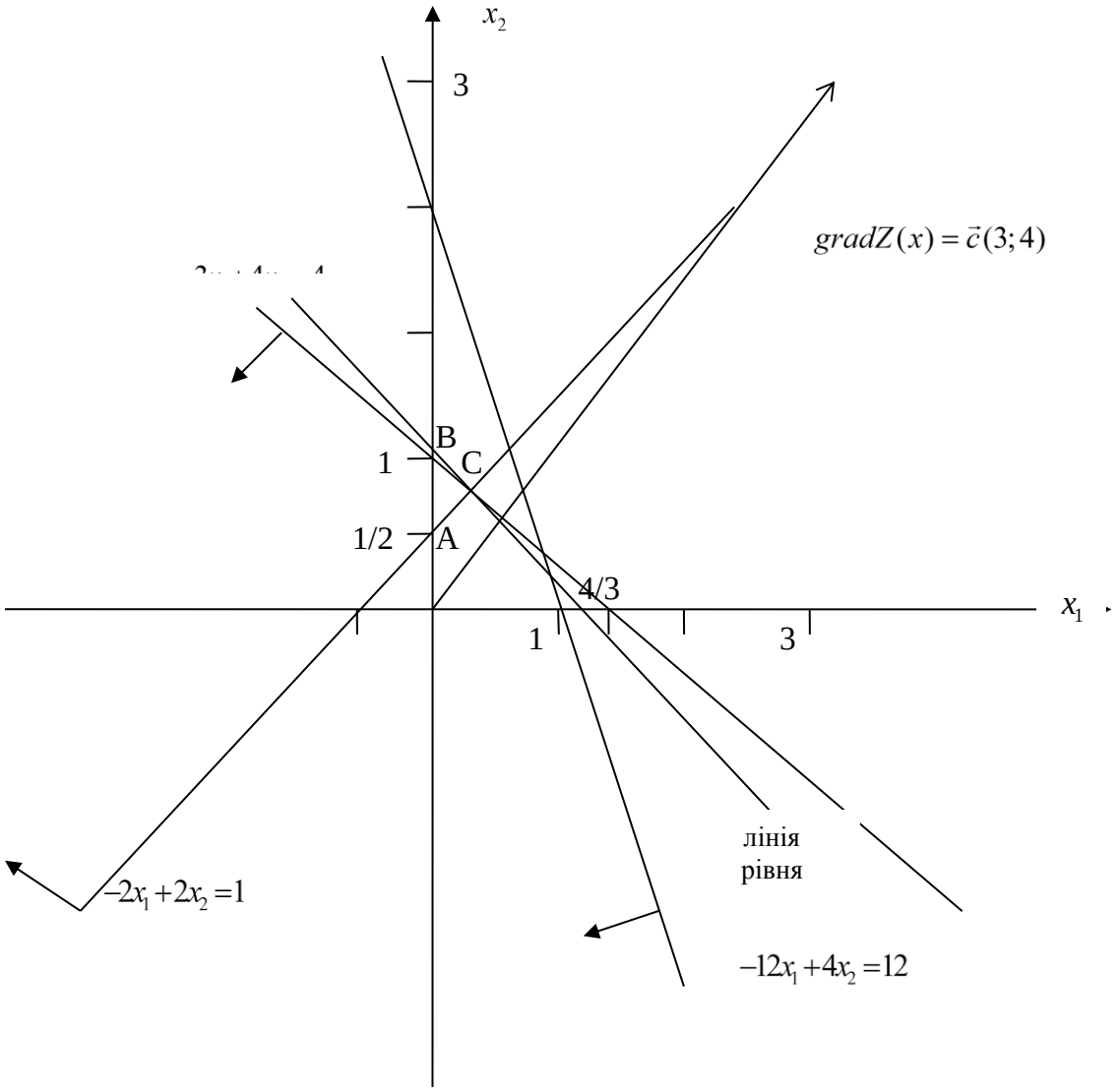

Рис.1

Трикутник ABC є областю допустимих розв'язків (ОДР).

4 Для нашої задачі $c_1 = 3,\ c_2 = 4$ (коефіцієнти при x_1 *та* x_2 цільової функції Z(X)). Будуємо точку з координатами (3;4) та вектор $\vec{c}$, початковою точкою якого є початок координат.

5 Лінія рівня $3x_1 + 4x_2 = h$ перпендикулярна вектору $\vec{c}$.

6 Пересуваємо лінію рівня в напрямку вектора $\vec{c}$. Бачимо, що остання точка, в якій лінія рівня торкається ОДР, є точка С. Тобто координати точки С визначають оптимальний розв'язок.

7 Обчислюємо координати точки С як точки перетину двох прямих

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 4, \\ -2x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

Знаходимо $x_1 = \dfrac{2}{7}, \quad x_2 = \dfrac{11}{14}.$

Точка $(\frac{2}{7}; \frac{11}{14})$ є точкою максимуму цільової функції, причому

$$max\ Z(X) = \ Z_{\max} = 3 \cdot \frac{2}{7} + 4 \cdot \frac{11}{14} = 4, \quad Z_{\max} = 4.$$

Приклад 2. Знайти максимум цільової функції $Z(X) = 10x_1 + x_2$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 120, \\ x_1 + 8x_2 + x_4 = 280, \\ 7x_1 + 4x_2 + x_5 = 240, \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Розв'язати завдання симплексним методом.

Розв'язання.

1 Цільова функція має вигляд

$$Z(X) = 10x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5.$$

2 Побудуємо симплекс-таблицю (табл.1)

Таблиця 1

номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
				10	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_3	0	120	2	4	1	0	0
	x_4	0	280	1	8	0	1	0
	x_5	0	240	7	4	0	0	1
	$\Delta_j = z_j - c_j$		0	-10	-1	0	0	0

Серед від'ємних оцінок Δ_j вибираємо максимальну за модулем. Такою оцінкою є $\Delta_1 = -10$ (оскільки $\max\{|-10|;|-1|\} = 10$), тобто стовпець A_1 є розв'язувальним**.** Це означає, що в базисні змінні треба ввести змінну x_1.

3 Для визначення, яку змінну треба вивести із базисних, обчислимо відношення коефіцієнтів стовпця A_0 відповідно до додатних коефіцієнтів стовпця A_1(який відповідає змінній x_1). Такі відношення називають симплексними. Серед усіх симплексних відношень знайдемо мінімальне $\min\left\{\frac{120}{2};\frac{280}{1};\frac{240}{7}\right\} = \frac{240}{7}$. Це означає, що змінну x_5, яка відповідає такому відношенню, треба вивести з базисних, а відповідний рядок називається розв'язувальним. Отже, число 7, яке знаходиться на перетину розв'язувальних стовпця та рядка, є розв'язувальним елементом.

4 Будуємо наступну симплекс – таблицю (табл.2)

Таблиця 2

Номер ітерації	БЗ	$C_Б$	A_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
				10	1	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	x_3	0	360/7	0	20/7	1	0	-2/7
	x_4	0	1720/7	0	52/7	0	1	-1/7
	x_1	0	240/7	1	4/7	0	0	1/7
	$\Delta_j = z_j - c_j$		2400/7	0	33/7	0	0	10/7

5 Оскільки всі оцінки Δ_j невід'ємні, то опорний розв'язок $(x_1 = \frac{240}{7}; x_2 = 0; x_3 = \frac{360}{7}; x_4 = \frac{1720}{7}; x_5 = 0)$ є оптимальним, і йому відповідає максимальне значення цільової функції $max\, Z(X) = \frac{2400}{7}$.

Приклад 3. Знайти мінімум функції $Z = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$ за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Розв'язання. Запишемо дану задачу у формі основної задачі: знайти максимум функції

$$Z' = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,6}).$$

У системі рівнянь останньої задачі розглянемо вектори з коефіцієнтів при невідомих:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Серед векторів $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ тільки два одиничних $(A_4 \ i \ A_5)$. Тому в ліву частину третього рівняння системи обмежень задачі додамо додаткову невід'ємну змінну x_7 і розглянемо розширену задачу, що полягає у знаходженні максимуму функції

$$Z' = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 - Mx_7$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ (j = \overline{1,7}).$$

Розширена задача має опорний план $X = (0; 0; 0; 24; 22; 0; 10)$, визначений системою трьох одиничних векторів: $A_4; A_5; A_7$.

Складаємо таблицю I ітерації, що містить п'ять рядків (табл. 3).

Таблиця3

i	Б	C_σ	A_0	2	-3	6	1	0	0	$-M$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
2	A_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	A_7	$-M$	10	1	-1	2	0	0	-1	1
4			24	0	4	-8	0	0	0	0
5			-10	-1	1	-2	0	0	1	0

Для заповнення 4-го і 5-го рядків знаходимо Z_0 і значення $\Delta_j (j = \overline{1,7})$:

$$Z_0' = 24 - 10M;\ \Delta_1 = 0 - M;\ \Delta_2 = 4 + M;\ \Delta_3 = -8 - 2M;\ \Delta_4 = 0;$$
$$\Delta_5 = 0;\ \Delta_6 = 0 + M;\ \Delta_7 = 0.$$

Значення Z_0' і Δ_j складаються з двох доданків, один з яких містить M, а другий – ні. Для зручності ітераційного процесу число, що стоїть при M, записуємо в 5-й рядок, а доданок, який не містить M,– у 4-й рядок.

У 5-му рядку таблиці 5.3 в стовпцях векторів A_1 і A_3 є два від'ємних числа (-1 і -2). Наявність цих чисел свідчить про те, що даний опорний план розширеної задачі не є оптимальним. Переходимо до нового опорного плану розширеної задачі. У базис вводимо вектор A_3. Щоб визначити вектор, що виключається з базису, знаходимо $\min\left\{\frac{22}{4};\frac{10}{2}\right\} = \frac{10}{2}$. Отже, вектор A_7 виключаємо з базису. Цей вектор немає сенсу вводити ні в один із подальших базисів, тому надалі стовпець даного вектора не заповнюється.

Складаємо таблицю II ітерації (табл. 4). Вона містить тільки чотири рядки, оскільки штучний вектор із базису виключений.

Таблиця 4

i	Базис	C_σ	A_0	2	-3	6	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	1	34	3	0	0	1	0	-1
2	A_5	0	2	-1	4	0	0	1	2
3	A_3	6	5	1/2	-1/2	1	0	0	1/2
4			64	4	0	0	0	0	-4

Отримуємо новий опорний план задачі $X = (0; 0; 5; 34; 2; 0)$ цієї таблиці. Перевіримо його на оптимальність. Для цього розглянемо елементи 4-го рядка. У цьому рядку в стовпці вектора A_6 є від'ємне число (-4). Отже, даний опорний план не є оптимальним і може бути покращений шляхом введення в базис вектора A_6.З базису виключається вектор A_5. Складаємо таблицю III ітерації (табл. 5).

Таблиця 5

i	Базис	C_σ	A_0	2	-3	6	1	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	A_6	0	1	-1/2	2	0	0	1/2	1
3	A_3	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

У 4-му рядку таблиці 5.5 серед чисел Δ_j немає невід'ємних. Це означає, що знайдений новий опорний план початкової задачі $X^* = (0; 0; 11/2; 35; 0; 1)$ є оптимальним і йому відповідає $Z'_{\max} = 68$. Отже, оптимальний розв'язок початкової задачі має вигляд $X_{опт.} = \left(0; 0; \frac{11}{2}; 35\right)$, при цьому $\max Z'(X_{опт}) = 68$, а $\min Z(X_{опт}) = -68$.

Приклад 4. Для задачі $Z = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0,$$

скласти двоїсту задачу і знайти її розв'язок.

Розв'язання. Двоїстою задачею до вихідної буде задача:

$$F = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3 \to \min$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \ge 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge -1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2 \ge 0.$$

Для знаходження розв'язку двоїстої задачі знаходимо розв'язок вихідної задачі методом штучного базису (табл. 6)

Таблиця 6

i	Базис	C_σ	P_0	1	2	-1	0	0	-M
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	12	-1	4	-2	1	0	0
2	A_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	A_6	-M	4	2	-1	2	0	0	1
4			0	-1	-2	1	0	0	0
5			-4	-2	1	-2	0	0	0
1	A_4	0	14	0	7/2	-1	1	0	1/2
2	A_5	0	15	0	3/2	1	0	1	-1/2
3	A_1	1	2	1	-1/2	1	0	0	1/2
4			2	0	-5/2	2	0	0	1/2
1	A_2	2	4	0	1	-2/7	2/7	0	1/7
2	A_5	0	9	0	0	10/7	-3/7	1	-5/7
3	A_1	1	4	1	0	6/7	1/7	0	4/7
4			12	0	0	9/7	5/7	0	6/7

I сп. Розв'язком вихідної задачі буде $X_{opt} = (4; 4; 0)$. Оптимальний план X_{opt}=(4;4;0) визначається базисом, утвореним векторами A_1, A_2, A_5 значить

$C_\sigma = (1,2,0)$ та $D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Обернена матриця D^{-1} матиме вигляд

$D^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$. Тоді $Y_{opt} = C_\sigma \cdot D^{-1} = (1,2,0)\cdot\frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & -5 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{7}; 0; \frac{6}{7}\right)$.

II сп. Розв'язком вихідної задачі буде $X_{opt} = (4; 4; 0)$. Оскільки вектори P_4, P_5, P_6 утворювали базис вихідної задачі, то числа, які стоять в останньому рядочку відповідних стовпчиків, утворюють план двоїстої задачі. $Y_{opt} = \left(\frac{5}{7}; 0; \frac{6}{7}\right)$.

$$Z_{\max}(X_{opt}) = F_{\min}(Y_{opt}) = 12.$$

Приклад 5. Розв'язати транспортну задачу методом потенціалів, якщо відомі запаси вантажу в пунктах відправлення $A = (10;5;5)$, заявки на вантажі пунктів призначення $B = (4;8;8)$ і матриця тарифів перевезень $C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\left(i = \overline{1,3}; j = \overline{1,3}\right)$ одиниці вантажу з i-го пункту відправлення у j-ий пункт призначення.

Розв'язання. Процес розв'язування транспортної задачі складається з трьох основних етапів:

1) побудова початкового опорного плану;
2) перевірка оптимального плану;
3) перерозподіл вантажів для поліпшення плану.

За даними задачі складаємо таблицю 7.

Таблиця 7.

Споживчі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	4	5	1	10
A_2	3	2	0	5
A_3	5	4	2	5
Потреби	4	8	8	20

Для побудови опорного плану перевезень найбільш простим і зручним у застосуванні є метод північно-західного кута. Згідно з цим методом розподіл продукції споживачам виконується в порядку розміщення їх у таблиці, яку починають заповнювати з лівого верхнього кута, рухаючись далі за рядком праворуч або за стовпцем донизу.

Опорний план має вигляд:

$x_{11} = \min\{a_1; b_1\} = \min\{10;4\} = 4$, (в A_1 лишилось 6 од. Вантажу)

$x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}; b_2\} = \min\{6;8\} = 6$, (записи в A_1 вичерпані).
Потреби B_2 ще не задовільні, тому
$x_{22} = \min\{a_2; b_2 - x_{12}\} = \min\{5;2\} = 2$,
Постачальник A_2 має тепер лише 3 од. Вантажу, які відправляють до пункту B_3 :
$x_{23} = \min\{a_2 - x_{22}; b_3\} = \min\{3;8\} = 3$.
Записи A_3 складають 5 од. Вантажу, що забезпечує потреби B_3.
$x_{33} = \min\{a_3; b_3 - x_{23}\} = \min\{5;5\} = 5$.
Маємо план (таблиця 8):

Таблиця 8.

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	Запаси
A_1	4 **4**	5 **6**	1	10
A_2	3	2 **2**	0 **3**	5
A_3	5	4	2 **5**	5
Потреби	4	8	8	20

Знайдений план не вироджений, тому що кількість ненульових перевезень дорівнює $m+n-1$.

Оцінимо оптимальність плану методом потенціалів, в основу якого покладено знаходження спеціальних числових показників, приписаних кожному постачальнику і споживачу продукції за певним правилом, а саме: кожному постачальнику A_i приписуємо число u_i (i=1,…,m), а кожному споживачу - число v_j (j=1,…,n) так, щоб для всіх заповнених клітинок таблиці мати рівність

$$u_i + v_j = c_{ij}\ .$$

Введені таким чином числа u_i та v_j називають потенціалами.

Визначивши потенціали, знаходять їх суму $c'_{ij} = u_i + v_j$ для незаповнених клітинок таблиці. Критерій оптимальності стверджує, що оптимальним буде план, для якого $c'_{ij} \le c_{ij}$ ($\Delta_{ij} = c_{ij} - c'_{ij} \ge 0$). У протилежному випадку план можна поліпшити, заповнюючи клітинку з від'ємною характеристикою ($\Delta_{ij} < 0$). Для заповнення такої клітинки необхідно змінити обсяги перевезень, записаних у тих клітинках таблиці, які з вибраною клітинкою пов'язані циклом.

Циклом називається ламана лінія, одна з вершин якої розміщується у незаповненій клітинці, а інші - в заповнених; причому у кожній з вершин перетинаються тільки дві ланки, одна з яких знаходиться у рядку, а друга - у стовпці.

Кожна вершина циклу (відповідна клітинка таблиці) позначається так: Незаповнена клітинка - знаком “+”, а решта - по черзі знаками “-” і “+”. Вибирається найменша поставка з тих, що містяться у клітинках, позначених знаком “-”. Здобуту поставку переміщують за циклом, додаючи її значення до поставок у клітинках з “+” і віднімаючи з поставок у клітинках з “-”.

Продовжуємо розв’язування задачі. Знайдемо потенціали u_i та v_j як розв’язок системи рівнянь

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 4, \\ u_1 + v_2 &= 5, \\ u_2 + v_2 &= 2, \\ u_2 + v_3 &= 0, \\ u_3 + v_3 &= 2. \end{aligned}$$

Нехай $u_1 = 0$, тоді $v_1 = 4,\ v_2 = 5,\ u_2 = -3,\ v_3 = 3,\ u_3 = -1.$

Таблиця 10

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	4 **4**	5 **6** «-»	1 «+»	0
A_2	3	2 **2** «+»	0 **3** «-»	-3
A_3	5	4	2 **5**	-1
v_j	4	5	3	

Знайдемо суму потенціалів для незаповнених клітинок:

$$\begin{aligned} c'_{13} &= u_1 + v_3 = 3, & \Delta_{13} &= 1 - 3 = -2, \\ c'_{21} &= u_2 + v_1 = 1, & \Delta_{21} &= 3 - 1 = 2, \\ c'_{31} &= u_3 + v_1 = 3, & \Delta_{31} &= 5 - 3 = 2, \\ c'_{32} &= u_3 + v_2 = 4, & \Delta_{32} &= 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Оскільки $\Delta_{13} < 0$, то план можна поліпшити заповнивши клітинку (1,3). Будуємо для клітинки (1,3) цикл як показано у таблиці 3 і перерозподіляємо за цим циклом 3 од. вантажу (min{3;6}=3). Результати заносимо до таблиці 11.

Таблиця 11

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	4 **4**	5 **3** «-»	1 **3** «+»	0
A_2	3	2 **5**	0	-3
A_3	5	4 «+»	2 **5** «-»	1
v_j	4	5	3	

Маємо новий план. Перевіримо його оптимальність.

Знайдемо потенціали і занесемо їх до таблиці 11. Для незаповнених клітинок маємо:

$$c'_{21} = 4 - 3 = 1, \quad \Delta_{21} = 3 - 1 = 2,$$
$$c'_{23} = 1 - 3 = -2, \quad \Delta_{23} = 0 + 2 = 2,$$
$$c'_{31} = 4 + 1 = 5, \quad \Delta_{31} = 5 - 5 = 0,$$
$$c'_{32} = 5 + 1 = 6, \quad \Delta_{32} = 4 - 6 = -2.$$

Клітинка (3,2) має від'ємну характеристику, цикл для неї зображено в таблиці 10, 11. Перерозподіляємо за циклом 3 одиниці вантажу і заносимо результати до таблиці 12.

Таблиця 12

Споживачі / Постачальники	B_1	B_2	B_3	u_i
A_1	4 **4**	5	1 **6**	0
A_2	3	2 **5**	0	-1
A_3	5	4 **3**	2 **2**	1
v_j	4	3	1	

Перевіримо оптимальність плану:

$$c'_{12}=3+0=3, \quad \Delta_{12}=3-3=0,$$
$$c'_{21}=4-1=3, \quad \Delta_{21}=3-3=0,$$
$$c'_{23}=1-1=0, \quad \Delta_{23}=0-0=0,$$
$$c'_{31}=4+1=5, \quad \Delta_{31}=5-5=0.$$

План оптимальний, йому відповідають сумарні витрати на перевезення:

$$F=4\cdot 4+6\cdot 1+5\cdot 2+3\cdot 4+2\cdot 2=48.$$

Приклад 6. Компанія контролює три фабрики A_1, A_2, A_3, здатні виготовляти 150, 60 та 80 тис. од. продукції щотижня. Компанія уклала договір із чотирма замовниками B_1, B_2, B_3, B_4, яким потрібно щотижня відповідно 110, 40, 60 та 80 тис. од. продукції. Вартість виробництва та транспортування 1000 од. продукції замовникам з кожної фабрики наведено в таблиці.

Фабрика	Вартість виробництва і транспортування 1000 од. продукції за замовниками			
	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	4	2	5
A_2	5	3	1	2
A_3	2	1	4	2

Визначити для кожної фабрики оптимальний план перевезення продукції до замовників, що мінімізує загальну вартість виробництва і транспортних послуг.

Розв'язання. Нехай x_{ij} — кількість продукції, що перевозиться з i-ї фабрики до j-го замовника $(i=\overline{1,\ 3};\ j=\overline{1,\ 4})$. Оскільки транспортна задача за умовою є збалансованою, закритою $\left(\sum_{i=1}^{3}a_i=\sum_{j=1}^{4}b_j=290\right)$, то математична модель задачі матиме вигляд

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Економічний зміст записаних обмежень полягає ось у чому: уся вироблена на фабриках продукція має вивозитися до замовників повністю.

Аналогічні обмеження можна записати відносно замовників: продукція, що надходить до споживача, має повністю задовольняти його попит. Математично це записується так:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

Загальні витрати, пов'язані з виробництвом і транспортуванням продукції, складаються як добуток обсягу перевезеної продукції та питомої вартості перевезень за відповідним маршрутом і за умовою задачі мають бути мінімальними. Тому

$$Z = 4 \cdot x_{11} + 4 \cdot x_{12} + 2 \cdot x_{13} + 5 \cdot x_{14} + 5 \cdot x_{21} + 3 \cdot x_{22} + x_{23} + \\ + 2 \cdot x_{24} + 2 \cdot x_{31} + x_{32} + 4 \cdot x_{33} + 2 \cdot x_{34} \to \min.$$

У цілому математичну модель поставленої задачі можна записати так:

$$Z = 4x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 5x_{21} + 3x_{22} + x_{23} + 2x_{24} + \\ + 2x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 2x_{34} \to \min;$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=150, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=60, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=80. \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=110, \\ x_{12}+x_{22}+x_{23}=40, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=60, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=80. \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=\overline{1,3}; \quad j=\overline{1,4}.$$

Розв'язування задачі надамо в таблицях, які назвемо транспортними. Перший опорний план задачі побудуємо методом мінімальної вартості.

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 110	4	2 2 «+»	5 «–» 40	$u_1 = 5$
$A_2 = 60$	5	3	1 60 «–»	2 «+» 0	$u_2 = 2$
$A_3 = 80$	2	1 40	4	2 40	$u_3 = 2$
v_j	$v_1 = -1$	$v_2 = -1$	$v_3 = -1$	$v_4 = 0$	

Тому $Z = 4 \cdot 110 + 5 \cdot 40 + 1 \cdot 60 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 820$ ум. од.

Перший опорний план транспортної задачі вироджений, оскільки кількість заповнених клітинок у таблиці дорівнює п'яти, а $(m + n - 1) = 3 + 4 - 1 = 6$. Для подальшого розв'язування задачі необхідно в одну з порожніх клітинок записати «нульове перевезення» так, щоб не порушити опорності плану, тобто можна зайняти будь-яку вільну клітинку, яка не утворює замкненого циклу. Наприклад, заповнимо клітинку $(2, 4)$. Тепер перший план транспортної задачі є

невиродженим, і його можна перевірити на оптимальність за допомогою методу потенціалів.

На основі першої умови оптимальності $u_i + v_j = c_{ij}$ складемо систему рівнянь для визначення потенціалів плану:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 4, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_3 = 1, \\ u_2 + v_4 = 2, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 2. \end{cases}$$

Записана система рівнянь є невизначеною, і один з її розв'язків дістанемо, якщо, наприклад, $v_4 = 0$. Тоді всі інші потенціали однозначно визначаються: $u_1 = 5$, $u_2 = 2$, $u_3 = 2$, $v_1 = -1$, $v_2 = -1$, $v_3 = -1$.

Далі згідно з алгоритмом методу потенціалів перевіряємо виконання другої умови оптимальності $u_i + v_j \le c_{ij}$ (для порожніх клітинок таблиці):

(1, 2): $u_1 + v_2 = 5 + (-1) = 4 = 4$;
(1, 3): $u_1 + v_3 = 5 + (-1) = 4 > 2$;
(2, 1): $u_2 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 5$;
(2, 2): $u_2 + v_2 = 2 + (-1) = 1 < 3$;
(3, 1): $u_3 + v_1 = 2 + (-1) = 1 < 2$;
(3, 3): $u_3 + v_3 = 2 + (-1) = 1 < 4$.

Умова оптимальності не виконується для клітинки A_1B_3. Порушення $\Delta_{13} = (u_1 + v_3) - c_{13} = 4 - 2 = 2$ записуємо в лівому нижньому кутку відповідної клітинки.

Перший опорний план транспортної задачі є неоптимальним. Тому від нього необхідно перейти до другого плану, змінивши співвідношення заповнених і порожніх клітинок таблиці.

Потрібно заповнити клітинку $(1, 3)_3$, в якій є єдине порушення умови оптимальності. Ставимо в ній знак «+». Для визначення клітинки, що звільняється, будуємо цикл, починаючи з клітинки (1, 3), та позначаємо вершини циклу почергово знаками «–» і «+». Тепер необхідно перемістити продукцію в межах побудованого циклу. Для цього у вільну клітинку (1, 3) переносимо менше з чисел x_{ij}, які розміщуються в клітинках зі знаком «–». Одночасно це саме число x_{ij} додаємо до відповідних чисел, що розміщуються в клітинках зі знаком «+», та віднімаємо від чисел, що розміщуються в клітинках, позначених знаком «–».

У даному випадку $\min\{60;\ 40\} = 40$, тобто $\min x_{ij} = 40$. Виконавши перерозподіл продукції згідно із записаними правилами, дістанемо такі нові значення: клітинка (1, 3) — 40 од. продукції, (2, 3) — (60 – 40) = 20 од., (2, 4) – (0 + 40) = 40 од. Клітинка (1, 4) , звільняється і в новій таблиці буде порожньою. Усі інші заповнені клітинки першої таблиці, які не входили до циклу, переписують у другу таблицю без змін. Кількість заповнених клітинок у новій таблиці також має відповідати умові невиродженості, тобто дорівнювати $(n + m - 1)$.

Отже, другий опорний план транспортної задачі матиме такий вигляд:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 110 «–»	4	2 «+» 40	5	$u_1 = 0$
$A_2 = 60$	5	3	1 «–» 20	2 «+» 40	$u_2 = -1$
$A_3 = 80$	2 1 «+»	1 40	4	2 «–» 40	$u_3 = -1$
v_j	$v_1 = 4$	$v_2 = -2$	$v_3 = 2$	$v_4 = 3$	

Тому $Z_2 = 4 \cdot 110 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 40 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 40 = 740$ ум. од.

Новий план знову перевіряємо на оптимальність, тобто повторюємо описані раніше дії. Другий план транспортної задачі також неоптимальний (порушення для клітинки (3, 1)). За допомогою побудованого циклу виконаємо перехід до третього опорного плану транспортної задачі і дістанемо таку таблицю:

A_j	B_j				u_i
	$B_1 = 110$	$B_2 = 40$	$B_3 = 60$	$B_4 = 80$	
$A_1 = 150$	4 90	4	2 60	5	$u_1 = 2$
$A_2 = 60$	5	3	1	2 60	$u_2 = 0$
$A_3 = 80$	2 20	1 40	4	2 20	$u_3 = 0$
v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 0$	$v_4 = 2$	

Тому $Z_3 = 4 \cdot 90 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 40 + 2 \cdot 20 = 720$ ум. од.

Перевірка останнього плану на оптимальність за допомогою методу потенціалів показує, що він оптимальний. Тому

$$X^* = \begin{pmatrix} 90 & 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 60 \\ 20 & 40 & 0 & 20 \end{pmatrix};$$

За оптимальним планом перевезень перший замовник отримує 90 тис. од. продукції з першої фабрики та 20 тис. од. — з третьої. Другий споживач задовольняє свій попит за рахунок виробництва та перевезення 40 тис. од. продукції з третьої фабрики і т. д. При цьому загальна вартість виробництва та перевезення всієї продукції є найменшою і становить 720 ум. од.

Бібліографічний список

1. Стасенко О.М. Тексти лекцій для студентів спеціальностей 051 «Економіка» та 076 «підприємництво, торгівля та біржова діяльність». – ХНУБА, 2018.
2. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1985.
3. Ашманов С. А. Линейное программирование. — М.: Наука, 1981.
4. Белман Р. Динамическое программирование. — М.: Изд-во иностранной литературы, 1960.
5. Белман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. — М.: Наука, 1965.
6. Вагнер Г. Основы исследования операций. — Т. 1—3. — М.: Мир, 1972.
7. Вентцель Е. С. Элементы динамического программирования. — М.: Наука, 1964.
8. Вентцель Е. С. Исследование операций. — М.: Советское радио, 1972.
9. Вильямс Н. Н. Параметрическое программирование в экономике. — М.: Статистика, 1976.
10. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). — М.: Физматгиз, 1961.
11. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Новые направления в линейном программировании. — М.: Советское радио, 1966.
12. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. — М.: Наука, 1969.
13. Гуревич Т. Ф., Лущук В. О. Сборник задач по математическому программированию. — М.: Колос, 1977.
14. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и приложения. — М.: Прогресс, 1966.
15. Жлуктенко В. І., Наконечний С. І. Теорія ймовірностей і математична статистика: Навч. посібник. — К.: ІЗМН, 1997.
16. Зайченко Ю. П. Исследование операций. — К.: Вища шк., 1988.
17. Зайченко Ю. П. Исследование операций. Нечеткая оптимизация. — К.: Вища шк., 1991.
18. Збірник задач з курсу «Математичне програмування» / Укл. С. І. Наконечний, В. В. Вітлінський та ін. — К.: КНЕУ, 1998. — Ч. 2.
19. Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И. Линейное и выпуклое программирование. — М.: Наука, 1967.
20. Михайленко С. В., Свищева Е. В. Учебное пособие для самостоятельного изучения дисциплины «Оптимизационные методы и модели» — НУА, 2012.
21. Еромольев Ю. М. Методы стохастического программирования. — М.: Наука, 1976.
22. Калихман И. Л. Линейная алгебра и программирование. — М.: Высш. шк., 1967.

ЗМІСТ

Вступ ……..... 3
Програма навчальної дисципліни…… 3
Контрольна робота…… 5
Зразок виконання завдань……..... 28
Бібліографічний список ...……...……. 42

Навчальне видання

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни «Економіко-математичні методи та моделі(оптимізаційні методи та моделі)» для студентів заочної форми здобуття освіти для студентів спеціальностей 051 «Економіка»/ Укладач Р.В.– Харків: ХНУБА, 2020. – 43 с.

Укладач: Посилаєва Раїса Вікторівна

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

Редактор

План 2020р., поз. Формат 60х84 1/16 Папір друк. № 2
Підп. до друку Обл. -вид. арк. 1,2 Безкоштовно
Надруковано на різографі Умов. друк. арк.
Тираж 50 прим Зам. №

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та віддруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури