Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.О. Аршава

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ (ЕКОНОМЕТРИКА)

Тексти лекцій

Харків 2018

Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.О. Аршава

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ (ЕКОНОМЕТРИКА)

Рекомендовано
науково-методичною радою університету
в якості текстів лекцій
для студентів спеціальності 051 „Економіка”

Харків 2018

А – 89

УДК 330.4+ 519.862.6

Рецензенти:

А.А. Янцевич, доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри математичних методів в економіці Харківського національного університету ім. В.Н. Каразіна

А.П.Харченко, к. фіз-мат.н., доцент, кафедра вищої математики Харківського національного університету будівництва та архітектури (ХНУБА)

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
протокол № 1 від 30.08.2018
Затверджено науково-методичною радою університету,
протокол № 1 від 13.09.2018

Автор: О.О. Аршава

А-89Аршава О.О. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика): Тексти лекцій. – Х.: ХНУБА, 2018. – 52 с.

Викладено теоретичні та практичні основи таких розділів економетрики: парна лінійна економетрична модель, множинна лінійна регресія, мультиколінерність, узагальнена лінійна регресійна модель, гетероскедастичність, автокореляція та моделі часових рядів.

Запропоновано питання для самоперевірки.

Видання розроблено відповідно до діючої програми з „Економіко-математичні методи та моделі (економетрика)” для студентів спеціальності 051 «Економіка».

Призначається для студентів закладів вищої освіти.

Іл.: 9; бібліогр.: 18 назв.

© О.О. Аршава, 2018

ЛЕКЦІЯ 1
1. Парна лінійна економетрична модель

1.1 Сутність регресійного аналізу

Можна вказати два варіанта взаємозв'язків між двома змінними *X* і *Y*. У першому випадку обидві змінні вважаються рівноцінними у тому сенсі , що вони не поділяються на первинну і вторинну (незалежну і залежну) змінну. Головним у цьому разі є питання взаємозв'язку між цими змінними. Наприклад, між ціною товару й об'ємом попиту на нього, між врожаєм картоплі та врожаєм пшениці, між інтенсивністю руху транспорту і числом аварій. При дослідженні сили лінійної залежності між такими змінними використовують кореляційний аналіз, основною мірою якого є коефіцієнт кореляції.

Другий варіант взаємозв'язків виділяє одну з величин як залежну, а іншу – як незалежну. У цьому випадку зміна другої з них може служити причиною для зміни першої. Наприклад, зростання доходу веде до збільшення споживання; зростання ціни – до зниження попиту; зниження відсоткової ставки збільшує інвестиції; збільшення обмінного курсу валюти зменшує об'єм чистого експорту і т.п. Але така залежність не є однозначною у тому сенсі, що кожному конкретному значенні пояснювальної змінної (набору пояснювальних змінних) може відповідати не одне , а множина значень з деякої області. Говорячи іншим чином, кожному конкретному значенню пояснювальної змінної відповідає деякий ймовірнісний розподіл залежної змінної. У зв'язку з цим аналізують, як пояснювальна змінна впливає на залежну змінну в середньому. Залежність такого типу, яка виражається співвідношенням $M(Y|x) = f(x)$, називається функцією регресії *Y* на *X*. При цьому *X* називається незалежною змінною (фактором), *Y* – залежною змінною (результативною ознакою).

У разі, коли розглядається залежність між двома випадковими величинами, кажуть, що мають справу з парною регресією.

Залежність між багатьма змінними, яка задається функцією

$$M(Y|x_1, x_2, ..., x_p) = f(x_1, x_2, ..., x_p),$$

називається множинною регресією.

Для відображення того факту, що реальні значення залежної змінної не завжди співпадають з її умовними математичними сподіваннями і можуть бути різними при одному й тому ж значенні пояснювальної змінної, фактична залежність повинна бути доповнена деяким доданком ε, який є випадковою величиною і вказує на стохастичну сутність залежності. З цього випливає, що зв'язок між залежною і пояснювальною змінними виражається співвідношеннями

$$Y = M(Y|x) + \varepsilon,$$

$$Y = M(Y|x_1, x_2, ..., x_p) + \varepsilon,$$

які називаються регресійними моделями (рівняннями).

Причинами присутності в регресійних моделях випадкового фактора є:

а) не включення до моделі всіх пояснювальних змінних;

б) невірний вибір функціональної форми моделі;

в) помилки вимірювань;

г) обмеженість статистичних даних.

Цей список може бути продовжений.

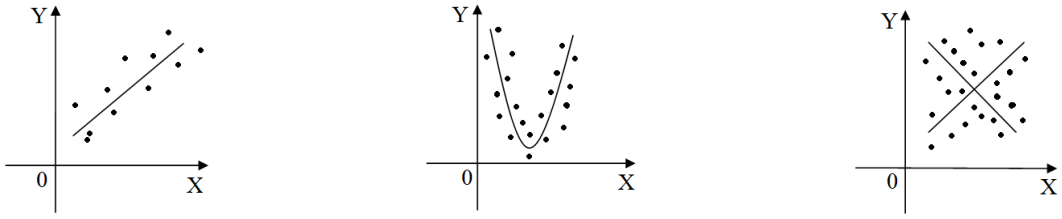
Розв'язання задачі побудови якісного рівняння регресії, яке відповідає емпіричним даним, є достатньо складним і багатоступеневим процесом. Його можна розбити на три етапи:

1) вибір формули рівняння регресії

2) визначення параметрів обраного рівняння;

3) аналіз якості рівняння і перевірка адекватності рівняння емпіричним даним.

Вибір формули зв'язку змінних називається специфікацією рівняння регресії. У випадку парної регресії вибір формули здійснюється за графічним зображенням реальних статистичних даних у вигляді точок у декартовій системі координат, яке називається кореляційним полем.



а) б) в)

Рис. 1.1

На рисунку 1.1 зображені такі ситуації:

а) взаємозв'язок між X і Y близький до лінійного $Y = b_0 + b_1 x$;

б) взаємозв'язок між X і Y описується квадратичною функцією;

в) явна залежність між X і Y відсутня.

1.2 Парна лінійна регресія

Якщо функція регресії лінійна, то йдеться про лінійну регресію. Модель лінійної регресії є найбільш поширеним видом залежності між економічними показниками.

Лінійна регресія являє собою лінійну функцію між умовним математичним сподіванням $M(Y|X = x_i)$ залежної змінної Y і однією з пояснювальних змінних X (x_i – значення незалежної змінної в i-тому спостереженні, $i = 1, 2, 3, ..., n$)

$$M(Y|X = x_i) = b_0 + b_1 x_i . \qquad (1.1)$$

Для відображення того, що кожне індивідуальне значення y_i відхиляється від відповідного умовного математичного сподівання, необхідно ввести в співвідношення (1.1)випадковий доданок ε_i

$$y_i = M(Y|X = x_i) + \varepsilon_i = b_0 + b_1 x_i + \varepsilon_i . \qquad (1.2)$$

Співвідношення (1.2) називається теоретичною лінійною регресійною моделлю; b_0 і b_1 є теоретичними параметрами регресії; ε_i - збуренням.

Отже, індивідуальні значення y_i подані у вигляді суми двох компонент – систематичної – $b_0 + b_1 x_i$ і випадкової – (ε_i).

Узагалі теоретичну лінійну регресійну модель будемо подавати у вигляді

$$Y = b_0 + b_1 X + \varepsilon \qquad (1.3)$$

Для знаходження значень теоретичних коефіцієнтів регресії необхідно знати всі значення змінних X і Y генеральної сукупності, що практично неможливо.

Таким чином, задачі лінійного регресійного аналізу полягають у тому, щоб за допомогою статистичних даних $(x_i; y_i)$, $i = 1, 2, ..., n$ для змінних X і Y

а) одержати найкращі оцінки невідомих параметрів b_0 і b_1;

б) перевірити статистичні гіпотези про параметри моделі;

в) перевірити адекватність моделі даним спостережень.

Отже, за вибіркою обмеженого об'єму можна побудувати так зване емпіричне рівняння регресії

$$\hat{y}_i = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_i , \qquad (1.4)$$

де $\hat{y}_i$– оцінка умовного математичного сподівання $M(Y|X = x_i)$; $\hat{b}_0$ і $\hat{b}_1$ – оцінки невідомих параметрів b_0 і b_1.

Найбільш поширеним для оцінки параметрів регресії є метод найменших квадратів (МНК). Сутність його полягає у тому, що оцінки $\hat{b}_0$ і $\hat{b}_1$ знаходять виходячи з того, щоб сума квадратів відхилень реальних значень результативної ознаки від теоретичних значень була мінімальною, тобто

$$\Theta(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \to \min ,$$

де $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_i$ - відхилення.

Мінімум функції двох змінних $\Theta(b_0, b_1)$ досягається за необхідною умовою, коли частинні похідні дорівнюють нулю

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Theta}{\partial \hat{b}_0} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_i) = 0 \\ \dfrac{\partial \Theta}{\partial \hat{b}_1} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 x_i) x_i = 0 \end{cases}, \quad \text{або} \quad \begin{cases} n\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \sum x_i = \sum y_i \\ \hat{b}_0 \sum x_i + \hat{b}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases} \qquad (1.5)$$

Система лінійних рівнянь (1.5) називається нормальною. Розв'язок системи дає

$$b_1 = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2};$$
$$b_0 = \overline{y} - \hat{b}_1 \overline{x}. \qquad (1.6)$$

Тут $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum x_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum x_i^2, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum y_i$.

1.3 Припущення методу найменших квадратів. Класична лінійна модель

Регресійний аналіз дозволяє знайти оцінки коефіцієнтів регресії. Але, являючись лише оцінками, вони не дозволяють зробити висновок, наскільки точно емпіричне рівняння регресії відповідає рівнянню для цієї генеральної сукупності, наскільки близькі оцінки $\hat{b}_0$ і $\hat{b}_1$ коефіцієнтів до своїх теоретичних прототипів b_0 і b_1, наскільки близьке оцінене значення $\hat{y}_i$ до умовного математичного сподівання $M(Y|X = x_i)$, наскільки надійні знайдені оцінки.

Як випливає із співвідношення (1.2), значення y_i залежить від значень x_i і випадкових збурень ε_i. Отже, зміна Y є випадковою величиною, безпосередньо пов'язаною з ε_i. Це означає, що доки не буде визначена ймовірнісна поведінка ε_i, доти не можна бути впевненим в якості оцінок. Якість побудованої регресії істотно залежить від властивостей збурення. Доведено, що для одержання за МНК найкращих результатів необхідно, щоб виконувався ряд припущень відносно випадкового збурення ε_i, а саме:

1) математичне сподівання збурення ε_i дорівнює нулю: $M(\varepsilon_i) = 0$ для усіх спостережень.

2) Дисперсія збурень ε_i є сталою:

$$D(\varepsilon_i) = \sigma^2 \text{ для будь-яких спостережень } i.$$

Це припущення означає, що в кожному конкретному спостереженні випадкове збурення може бути більшим або меншим, але не повинно бути апріорної причини, яка збільшує збурення.

Якщо виконується дане припущення, то кажуть, що модель є гомоскедастичною. У разі невиконання цієї умови кажуть, що модель є гетероскедастичною.

Оскільки $D(\varepsilon_i) = M(\varepsilon_i - M(\varepsilon_i))^2 = M(\varepsilon_i^2)$, то дану умову можна записати таким чином: $M(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$.

3) Випадкові збурення ε_i і ε_j є статистично незалежними одне від одного для $i \neq j$

$$\sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} = \operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases}$$

Якщо дана умова виконується, то кажуть, що відсутня автокореляція. Це припущення може бути записане ще й таким чином: $M(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0 \ (i \neq j)$.

4) Збурення повинні бути незалежні від пояснювальних змінних

$$\sigma_{\varepsilon_i x_i} = \mathrm{cov}(\varepsilon_i x_i) = M(\varepsilon_i x_i) = 0 .$$

Це припущення виконується автоматично, якщо пояснювальна змінна не є випадковою.

5) Модель є лінійною відносно параметрів.

У разі виконання умов 1) – 5) оцінки, одержані за МНК, будуть незміщені, обґрунтовані й ефективні (теорема Гауса-Маркова).

Поряд з питаннями 1) – 5) класичних лінійних регресійних моделей припускають також, що пояснювальні змінні не випадкові й збурення розподілені за нормальним законом.

1.4 Аналіз точності оцінок коефіцієнтів регресії

Оцінки b_0 і b_1 є випадковими величинами. Їх математичні сподівання дорівнюють відповідно $M(\hat{b}_0) = b_0$, $M(\hat{b}_1) = b_1$. При цьому оцінки тим надійніші, чим менше їх розсіювання навколо b_0 і b_1, тобто чим менші дисперсії $\sigma^2_{\hat{b}_0}$ і $\sigma^2_{\hat{b}_1}$ за оцінками $\hat{b}_0$ і $\hat{b}_1$. Надійність оцінок тісно пов'язана з дисперсією збурень σ^2. Дійсно

$$\sigma^2_{b_0} = \frac{\sigma^2 \sum x_i^2}{n \sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}; \tag{1.7}$$

$$\sigma^2_{b_1} = \frac{\sigma^2}{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}. \tag{1.8}$$

Легко побачити, що чим більший фактор випадковості, тим менша точність оцінок.

У формулах (1.7) і (1.8) для розрахунку дисперсії параметрів b_0 і b_1 наявна дисперсія збурення – σ^2. Саме значення дисперсії σ^2 не може бути визначене тому, що випадкову величину ε не можна спостерігати. Цю дисперсію заміняють на її оцінку

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}. \tag{1.9}$$

Таким чином, і для параметрів b_0 і b_1 дійсна дисперсія замінюється на свою оцінку

$$\hat{\sigma}^2_{b_0} = \frac{\hat{\sigma}^2 \sum x_i^2}{n \sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}; \tag{1.10}$$

$$\hat{\sigma}^2_{b_1} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum \left(x_i - \bar{x}\right)^2}. \tag{1.11}$$

Корінь квадратний з оцінки збурення, тобто

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum e_i^2}{n-2}} \tag{1.12}$$

називають стандартною похибкою регресії.

Величини $\hat{\sigma}_{\hat{b}_0} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{b}_0}}$, $\hat{\sigma}_{\hat{b}_1} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{b}_1}}$ називають стандартними похибками параметрів регресії.

1.5 Перевірка гіпотез відносно коефіцієнтів лінійного рівняння регресії

Емпіричне рівняння регресії визначається на основі скінченного числа статистичних даних. При проведенні статистичного аналізу перед дослідником виникає необхідність порівняння емпіричних коефіцієнтів $\hat{b}_0$ і $\hat{b}_1$ з деякими теоретично очікуваними значеннями b_0^0 і b_1^0 цих коефіцієнтів. Даний аналіз проводиться за схемою статистичної перевірки гіпотез.

Для перевірки гіпотез

$$H_0 : \hat{b}_1 = b_1^0,$$
$$H_1 : \hat{b}_1 \neq b_1^0$$

користуються статистикою

$$t = \frac{\hat{b}_1 - b_1^0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}}, \tag{1.13}$$

яка при справедливості гіпотези H_0 має розподіл Стьюдента з числом ступенів свободи $\upsilon = n - 2$, де $n-$ об'єм вибірки. Отже, H_0 відхиляється, якщо

$$\left|t_{\hat{O}}\right| = \left|\frac{\hat{b}_1 - b_1^0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}}\right| \geq t_{\frac{\alpha}{2}, n-2}, \tag{1.14}$$

де $\alpha-$ рівень значущості. При виконанні (1.14) нульова гіпотеза H_0 сприймається.

Найбільш важливою на початковому етапі статистичного аналізу побудованої моделі є задача встановлення присутності лінійного зв'язку між X і Y. Ця проблема може бути розв'язана за тією ж схемою:

$$H_0 : \hat{b}_1 = 0;$$
$$H_1 : \hat{b}_1 \neq 0.$$

Гіпотеза в такій постановці називається гіпотезою про статистичну значущість параметра регресії. При цьому, якщо H_0 сприймається, то є сенс припускати, що величина Y не залежить від X. У цьому разі кажуть, що коефіцієнт b_1 статистично незначущий (дуже близький до нуля). У разі відхилення гіпотези H_0 коефіцієнт b_1 буде статистично значущим, тобто існує лінійний зв'язок між X і Y.

За аналогічною схемою на основі t- статистики (1.13) перевіряється гіпотеза про статистичну значущість коефіцієнта b_0

$$t = \frac{\hat{b}_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_0}}.$$

Для парної регресії більш важливим є аналіз статистичної значущості коефіцієнта b_1, оскільки саме він відповідає за вплив пояснювальної змінної X на результативну ознаку Y.

1.6 Інтервальні оцінки коефіцієнтів лінійного рівняння регресії

Для знаходження $100(1-\alpha)\%$ -х довірчих інтервалів коефіцієнтів $\hat{b}_0$ і $\hat{b}_1$ використовують статистики

$$t_{b_0} = \frac{\hat{b}_0 - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_0}} \quad \text{та} \quad t_{b_1} = \frac{\hat{b}_1 - b_1}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}}, \tag{1.15}$$

які мають розподіл Стьюдента з числом ступенів свободи $\upsilon = n-2$. За допомогою таблиць критичних точок розподілу Стьюдента за довірчою ймовірністю $\gamma = 1-\alpha$ і числом свободи υ знаходять критичне значення $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$, яке задовольняє умову

$$P\left(|t| = t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = 1-\alpha \tag{1.16}$$

Підставляючи в (1.16) замість t - статистики (1.15), одержимо:

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2},n-2} < \frac{\hat{b}_0 - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_0}} < t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = 1-\alpha;$$

$$P\left(-t_{\frac{\alpha}{2},n-2} < \frac{\hat{b}_1 - b_1}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_1}} < t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = 1-\alpha.$$

Після перетворень виразів у дужках будемо мати:

$$P\left(\hat{b}_0 - \hat{\sigma}_{\hat{b}_0} \cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2} < b_0 < \hat{b}_0 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_0} \cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = 1-\alpha;$$

$$P\left(\hat{b}_1 - \hat{\sigma}_{\hat{b}_1} \cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2} < b_1 < \hat{b}_1 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_1} \cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = 1-\alpha.$$

Ці співвідношення визначають такі довірчі інтервали:

$$\left(\hat{b}_0 - \hat{\sigma}_{\hat{b}_0} \cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2} < b_0 < \hat{b}_0 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_0} \cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right), \tag{1.17}$$

$$\left(\hat{b}_1 - \hat{\sigma}_{\hat{b}_1} \cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2} < b_1 < \hat{b}_1 + \hat{\sigma}_{\hat{b}_1} \cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right), \tag{1.18}$$

які з надійністю $(1-\alpha)$ накривають невідомі параметри b_0 і b_1.

1.7 Перевірка моделі на адекватність

Після того, як визначені невідомі параметри лінійної регресійної моделі, необхідно оцінити щільність зв’язку між залежною та незалежною величинами Y та X відповідно. Критерієм, який допомагає кількісно оцінити зв'язок між двома показниками, є коефіцієнт кореляції. Він розраховується за такою формулою:

$$r_{yx} = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\sigma_x \sigma_y}, \qquad (1.19)$$

де

$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$ – середнє квадратичне відхилення ознаки X,

$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}$ – середнє квадратичне відхилення ознаки Y.

Як відомо, лінійний коефіцієнт кореляції знаходиться в межах: $-1 \le r_{xy} \le 1$.

Додатне значення коефіцієнта кореляції свідчить про прямий зв'язок між показниками, а від'ємне – про зворотній. Коли коефіцієнт кореляції прямує за абсолютною величиною до одиниці, це свідчить про наявність сильного зв'язку.

У протилежному випадку коли коефіцієнт кореляції прямує до нуля, лінійного зв'язку не існує.

Слід зауважити, що величина лінійного коефіцієнта оцінює тісноту зв'язку ознак в її лінійній формі. Отже, якщо абсолютна величина коефіцієнта кореляції близька до нуля, то це вказує на відсутність зв'язку між ознаками. При іншій специфікації моделі зв'язок між ознаками може бути достатньо тісний.

Для перевірки значущості коефіцієнта кореляції використовують статистику

$$t = \frac{r_{yx}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1 - r_{yx}^2}}, \qquad (1.20)$$

яка розподілена за законом Стьюдента з ($n-2$)ступенями свободи. За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента за заданим рівнем значущості α і числом ступенів свободи $n-2$ знаходять критичну точку $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$.

Якщо $|t_\Phi| = \left|\frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{yx}^2}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$, то нульова гіпотеза $H_0 : \rho_{yx} = 0$ (ρ_{yx}– коефіцієнт кореляції всієї генеральної сукупності) сприймається. Якщо $|t_\Phi| = \left|\frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{yx}^2}}\right| \ge t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$, то $H_0 : \rho_{yx} = 0$ відхиляється, а приймається альтернативна гіпотеза $H_1 : \rho_{yx} \ne 0$.

Відхилення гіпотези $H_0 : \rho_{yx} = 0$ означає, що коефіцієнт кореляції статистично значущій, отже Y і X – корельовано, тобто між ними існує лінійна залежність.

Ще однією мірою того, наскільки добре регресія описує дану систему спостережень, є коефіцієнт детермінації

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2}. \qquad (1.21)$$

З'ясуємо сутність коефіцієнта детермінації.

Можна довести, що має місце рівність

$$\sum (y_i - \overline{y})^2 = \sum (\hat{y}_i - \overline{y})^2 + \sum (y_i - \hat{y}_i), \qquad (1.22)$$

Тобто загальна сума квадратів відхилень складається із суми квадратів відхилень, які можна пояснити, відходячи з регресійної прямої і залишкової суми квадратів відхилень, яку не можна пояснити регресійним рівнянням (за базу порівняння береться арифметичне $\hat{y} = \bar{y}$).

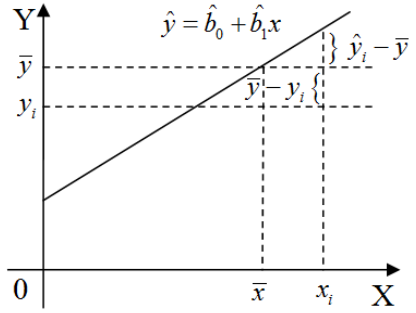


Рис. 1.2

Поділивши обидві частини рівності (1.22)на її ліву частину, одержимо:

$$1 = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \hat{y})^2} + \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}.$$

Якщо позначити $R^2 = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$, то будемо мати співвідношення (1.21). Отже, коефіцієнт детермінації визначає долю розсіювання залежної змінної, яку можна пояснити регресією. Дріб $\frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$ визначає долю розсіювання залежної змінної, яку не можна пояснити регресією.

Відповідно до приведених міркувань $0 \le R^2 \le 1$.
Чим тісніший лінійний зв'язок між X і Y, тим ближче коефіцієнт детермінації R^2 до одиниці. Чим слабкіший такий зв'язок, тим R^2 ближчий до нуля.

Отже, модель адекватна, якщо коефіцієнт детермінації близький до одиниці. Але як бути, якщо коефіцієнт детермінації має нечітко виражене граничне значення, наприклад, 0,5; 0,45; 0,44 та ін. У таких випадках важко зробити однозначний висновок про наявність зв’язку, тобто про адекватність моделі. Потрібен інший критерій, який би однозначно відповідав на запитання про адекватність побудованої моделі. Найпростішим з таких є критерій Фішера.

Цей критерій будується на статистиці, яка в разі виконання нульової гіпотези $H_0 : b_1 = 0$ (випадок відсутності лінійного функціонального зв’язку між X і Y) має такий вигляд:

$$F = \frac{\dfrac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{1}}{\dfrac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n-2}{1} \qquad (1.23)$$

і має розподіл Фішера з $\upsilon_1 = 1$, $\upsilon_2 = n - 2$ ступенями свободи.

За таблицею розподілу Фішера за заданим рівнем значущості α і числом ступенів свободи $\upsilon_1 = 1$, $\upsilon_2 = n - 2$ знаходять критичну точку $F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$. Потім за формулою (1.23) обчислюють фактичне значення F_Φ статистики Фішера.

Якщо $F_{\Phi} > F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$, то гіпотеза $H_0 : b_1 = 0$ відхиляється, а отже побудована модель адекватна статистичним даним. У протилежному випадку ($F_{\Phi} < F_{\alpha,\upsilon_1,\upsilon_2}$) гіпотеза $H_0 : b_1 = 0$ не відхиляється, тобто модель не можна вважати адекватною.

Слід зазначити, що для парної регресії перевірка нульової гіпотези $H_0 : b_1 = 0$ з використанням статистики Фішера тотожна перевірці цієї гіпотези за допомогою статистики Стьюдента.

Таким чином, коефіцієнт детермінації R^2 є мірою того, наскільки знайдена пряма регресії дає кращий результат для пояснення поведінки залежної змінної Y ніж горизонтальна пряма $Y = \overline{y}$.

Коефіцієнт детермінації R^2 пов'язаний з коефіцієнтом кореляції r_{yx} таким співвідношенням:

$$R^2 = r_{yx}^2 . \tag{1.24}$$

1.8 Прогнозування за моделями лінійної регресії

Однією з центральних задач економетричного моделювання є прогнозування значень залежної змінної при деяких значеннях (прогнозних) пояснювальних змінних. При цьому ми можемо отримати два типи прогнозів: точкові та інтервальні.

Точковий прогноз дає значення залежної змінної для відповідного прогнозованого значення незалежної змінної x_{n+1} з побудованої моделі $\hat{y}_{n+1} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{n+1}$.

При цьому дійсне значення Y для прогнозованого періоду повинно дорівнювати $y_{n+1} = b_0 + b_1 x_{n+1} + \varepsilon_{n+1}$, де ε_{n+1} – значення випадкової величини, яка не спостерігалася в ($n+1$) періоді.

Отже, прогнозоване значення $\hat{y}_{n+1}$ є оцінкою дійсного значення y_{n+1}. Таким чином, за побудованою моделлю легко можна знаходити будь-яке прогнозоване значення. Зазначимо, що таке прогнозне значення буде точковим.

Використовуючи точковий прогноз, можна знайти довірчий інтервал (інтервальний прогноз) для дійсного значення залежної змінної, тобто побудувати інтервал, який з певною ймовірністю покриває дійсне значення залежної змінної.

Для побудови довірчого інтервалу використовують статистику

$$t = \frac{y_{n+1} - \hat{y}_{n+1}}{\hat{\sigma}\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_{n+1} - \overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i - \overline{x}\right)^2}}},$$

яка розподілена за законом Стьюдента з ($n-2$) ступенями свободи. За таблицею розподілу Стьюдента за рівнем значущості α і числом ступенів свободи ($n-2$) знаходять критичну точку $t_{\frac{\alpha}{2},n-2}$, яка задовольняє умові

$$P\left(|t| = t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = 1-\alpha ,$$

або з урахуванням (1.23)

$$P\left(\left|\frac{y_{n+1}-\hat{y}_{n+1}}{\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_{n+1}-\overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}}\right| = t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\right) = 1-\alpha .$$

Після алгебраїчних перетворень одержимо

$$P\left(\hat{b}_0+\hat{b}_1x_{n+1}-\cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_{n+1}-\overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}} < b_0+b_1x_{n+1} < \hat{b}_0+\hat{b}_1x_{n+1}+\cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_{n+1}-\overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}\right) = 1-\alpha$$

Таким чином, довірчий інтервал для індивідуального значення залежної змінної матиме такий вигляд:

$$\left(\hat{b}_0+\hat{b}_1x_{n+1}-\cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_{n+1}-\overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}};\hat{b}_0+\hat{b}_1x_{n+1}+\cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{\left(x_{n+1}-\overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}\right) \qquad (1.26)$$

На практиці більше застосовують інтервали довіри для умовного математичного сподівання залежної змінної y_{n+1}, тобто інтервали довіри для $M(y_{n+1}) = b_0 + b_1x_{n+1}$, тому що немає великого сенсу прогнозувати точне значення y_{n+1}, беручи випадковий характер ε_{n+1}.

У цьому разі використовують статистику

$$t = \frac{y_{n+1}-\hat{y}_{n+1}}{\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(x_{n+1}-\overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}} \square\ t(n-2) .$$

Довірчий інтервал для умовного математичного сподівання результативної ознаки буде мати наступний вигляд:

$$\left(\hat{b}_0+\hat{b}_1x_{n+1}-\cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(x_{n+1}-\overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}};\hat{b}_0+\hat{b}_1x_{n+1}+\cdot t_{\frac{\alpha}{2},n-2}\hat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{\left(x_{n+1}-\overline{x}\right)^2}{\sum\left(x_i-\overline{x}\right)^2}}\right). \qquad (1.27)$$

Слід зазначити, що довірчий інтервал для індивідуального значення результативної ознаки ширший, ніж довірчий інтервал для умовного математичного сподівання. Найбільш вузькими побудовані інтервали будуть при $x_{n+1} = \overline{x}$. По мірі віддалення x_{n+1} від середнього значення довірчі інтервали розширюються.

1.9 Коефіцієнт еластичності

В економетричних задачах для оцінки впливу на показник будь-якого фактора часто використовують коефіцієнт еластичності

$$\mathrm{E} = f'(x)\cdot\frac{x}{y} . \qquad (1.28)$$

Для лінійної регресії $\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1x$ коефіцієнт еластичності буде таким:

$$\mathrm{E} = \hat{b}_1 \cdot \frac{x}{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x}. \qquad (1.29)$$

Оскільки він для лінійної функції не є сталою величиною, а залежить від відповідного значення x, то, звичайно, розраховується середній показник еластичності за формулою

$$\overline{\mathrm{E}} = b_1 \cdot \frac{\overline{x}}{\overline{y}}. \qquad (1.30)$$

Середній коефіцієнт еластичності $\overline{\mathrm{E}}$ показує, на скільки відсотків у середньому за сукупністю зміниться показник при зміні фактора x на 1% від свого середнього значення.

Питання для самоперевірки

1 Поясніть сутність методу найменших квадратів для оцінок параметрів парних економетричних моделей.

2 Назвіть припущення методу найменших квадратів.

3 Які причини присутності випадкового збурення у регресійних моделях?

4 Яка модель зветься гетероскедаксичною?

5 Які властивості мають оцінки параметрів моделі?

6 Чому треба перевіряти статистичну значущість оцінок параметрів моделі?

7 Поясніть сутність критерію Стьюдента.

8 Як знаходяться довірчі інтервали для оцінок параметрів?

9 Що таке адекватна модель?

10 Назвіть методи визначення адекватності.

11 Поясніть сутність критерію Фішера.

12 Що таке коефіцієнт еластичності?

ЛЕКЦІЯ 2-3
2. Множинна лінійна регресія

2.1. Визначення параметрів рівняння регресії

На будь-який економічний показник частіш за все впливає не один, а декілька факторів. Наприклад, попит на деяке благо визначається не тільки ціною даного блага, але й цінами, які заміщають блага, доходами споживачів і багатьма іншими факторами. У цьому випадку замість парної регресії $M(Y|x) = f(x)$ використовують множинну регресію

$$M(Y|x_1, x_2, ..., x_p) = f(x_1, x_2, ..., x_p).$$

Рівняння множинної регресії можна подати у вигляді:

$$Y = f(b, x) + \varepsilon,$$

де $X = (x_1, x_2, ..., x_p)$ – вектор незалежних змінних (факторів); b – вектор параметрів, які необхідно оцінити; ε – випадкова величина (збурення); Y– залежна змінна (результативна ознака).

Найбільш простою і застосовуваною є модель множинної лінійної регресії.

Теоретичне лінійне рівняння регресії має такий вигляд:

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + ... + b_p X_p + \varepsilon, \qquad (2.1)$$

або дія індивідуальних спостережень i, $i = \overline{1, n}$,

$$y_i = b_0 + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + ... + b_p X_{ip} + \varepsilon_i, \qquad (2.2)$$

де $b_0, b_1, ..., b_p$ – невідомі параметри, x_{ij} – значення змінної X_j в i-тому спостереженні.

Необхідно оцінити параметри регресії. Для цього припустимо, що є n спостережень вектора пояснювальних X і залежної змінної Y:

$$(x_{i_2}, x_{i_2}, ..., x_{i_p}, y_i), \ \ i = \overline{1, n}.$$

Для того, щоб однозначно можна було розв'язати задачу оцінки параметрів $b_0, b_1 ..., b_p$ повинна виконуватися нерівність $n \geq \rho + 1$.

Найбільш поширеним методом оцінки параметрів рівняння множинної лінійної регресії є метод найменших квадратів(МНК).За цим методом оцінки параметрів будуть найкращими, якщо будуть виконуватися такі припущення відносно збурення ε:

1^0.Математичне сподівання збурення ε_i дорівнює нулю для цих спостережень:

$$M(\varepsilon_i) = 0, i = \overline{1,4}.$$

2^0. Гомоскедастичність. Дисперсія випадкових збурень ε_i є сталою:

$$D(\varepsilon_i) = D(\varepsilon_j) = \delta^2$$

для будь-яких спостережень i, j.

3^0. Відсутність автокореляції. Випадкові збурення ε_i і ε_j є незалежними одне від одного для всіх $i \neq j$.

$$\sigma_{\varepsilon_i \varepsilon_j} = \cos(\varepsilon_i; \varepsilon_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \sigma^2, & i = j \end{cases}.$$

4^0. Збурення повинне бути незалежним від пояснювальних змінних

$$\sigma_{\varepsilon_i x_i} = 0.$$

5^0. Модель є лінійною відносно параметрів.

6^0. Відсутність мультиколінеарності. Між пояснювальними змінними відсутня строга лінійна залежність.

7^0. Збурення $\varepsilon_i, i = \overline{1,4}$ розподілені за нормальним законом.

Припущення 7^0 важливе для перевірки статистичних гіпотез і побудови інтервальних оцінок.

Множинна лінійна модель (2.1), яка задовольняє умовам $1^0 - 7^0$, називається класичною лінійною нормальною регресійною моделлю.

Класичну лінійну регресійну модель зручно подати у матричному вигляді. Для цього впровадимо такі матриці:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \; X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}; \; b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}; \; \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix};$$

$$K_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_2} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_1\varepsilon_n} \\ \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_1} & \sigma^2_{\varepsilon_2} & \cdots & \sigma_{\varepsilon_2\varepsilon_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\varepsilon_n\varepsilon_1} & \sigma_{\varepsilon_n\varepsilon_2} & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon_n} \end{pmatrix}.$$

Тут Y – матриця-стовпчик спостережень результативної ознаки; X – матриця, в якій i-й стовпчик є значення спостережень фактора X_i; b – матриця параметрів моделі; ε – матриця збурень; K_ε – коваріційна матриця збурень, діагональні елементи якої є дисперсії, а позадіагональні – коваріації збурень.

Тоді класична лінійна нормальна модель набуде такого вигляду

$$\begin{cases} Y = Xb + \varepsilon \\ 1) \quad X - \textit{детермінована матриця}, \; rangX = p + 1 < n, \\ 2) \quad M(\varepsilon) = 0, \\ 3) \quad K_\varepsilon = \sigma^2 \cdot I, \; I - \textit{одинична матриця} \\ 4) \quad \varepsilon \approx N(0, \sigma^2 \cdot I), \; \textit{тобто} \; \varepsilon - \textit{нормально розподілений} \\ \qquad \textit{вектор з математичним сподіванням, яке} \\ \qquad \textit{дорівнює нулю і коваріаційною матрицею} \\ \qquad \sigma^2 \cdot I. \end{cases} \tag{2.3}$$

Як і у випадку парної регресії, істинні значення параметрів b_j за вибіркою одержати неможливо. Отже, замість теоретичного рівняння (2.3) оцінюють емпіричне рівняння:

$$\hat{Y} = X\hat{b}, \tag{2.4}$$

де

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_p \end{pmatrix} \text{ матриця оцінок теоретичних значень } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Згідно з МНК оцінки $\hat{b}$ знаходять за умови

$$\Theta(\hat{b}) = \sum e_i^2 = e'e \to \min,$$

де $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = Y - \hat{Y}$ - матриця залишків.

Необхідною умовою існування мінімуму функції $\Theta(\hat{b})$ є рівність нулю градієнтного вектора $\frac{\partial\Theta(\hat{b})}{\partial\hat{b}}$. Отже, повинна задовольнятись наступна рівність:

$$\frac{\partial\Theta(\hat{b})}{\partial\hat{b}} = -2X'Y + 2X'X\hat{b} = 0,$$

(X' – транспонована до матриці X),

або

$$X'X\hat{b} = X'Y \tag{2.5}$$

Система (2.5) є системою нормальних рівнянь. Розв'язуючи цю систему, одержимо МНК- оцінку $\hat{b}$ вектора b

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'Y. \tag{2.6}$$

Вектор $\hat{b}$ складається з $p+1$ елемента $\hat{b}_i$, $i = 0,1,2,...,p$, які є оцінками коефіцієнтів емпіричного рівняння. У відповідності з цим емпіричний коефіцієнт $\hat{b}_i$ можна інтерпретувати таким чином. Зміна величини i-того фактора на одиницю за інших рівних умов викличе зміну оціненої величини $\hat{y}_i$ на кількість одиниць, яка дорівнює значенню $\hat{b}_i$.

2.2. Оцінка дисперсії збурень

Дисперсія збурень σ^2 є важливою характеристикою регресійної моделі. Її величина повинна бути якомога меншою. Оскільки збурення ε є неспостережуваною величиною, то знаходять МНК – оцінювач $\hat{\sigma}^2$ дисперсії σ^2

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{e'e}{n-p-1} \quad , \tag{2.7}$$

або

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{Y'Y - \hat{b}'X'Y}{n-p-1} \ . \tag{2.8}$$

Корінь квадратний $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ називається стандартною похибкою оцінки регресії.

2.3. Коваріаційна матриця оцінених коефіцієнтів регресії

Із формули (2.6) випливає, що вектор $\hat{b}$ є випадковим вектором. Для характеристики випадкових величин $\hat{b}_i \quad (i = 0,1,2,...,p)$, крім величин математичного сподівання, застосовують також дисперсії $\sigma^2_{\hat{b}_i}$ і коваріації $\sigma_{b_i b_j}\,(i \neq j)$. Істинні значення цих параметрів класичної лінійної моделі утворюють коваріаційну матрицю $K_{\hat{b}}$

$$K_{\hat{b}} = \sigma^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\hat{b}_1} & \sigma_{\hat{b}_1\hat{b}_2} & \cdots & \sigma_{\hat{b}_1\hat{b}_p} \\ \sigma_{\hat{b}_2\hat{b}_1} & \sigma^2_{\hat{b}_2} & \cdots & \sigma_{\hat{b}_2\hat{b}_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{\hat{b}_p\hat{b}_1} & \sigma_{\hat{b}_p\hat{b}_2} & \cdots & \sigma^2_{\hat{b}_p} \end{pmatrix} . \tag{2.9}$$

Дана коваріаційна матриця невідома, її треба оцінити. Її оцінкою є матриця

$$\hat{K}_{\hat{b}} = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}^2_{\hat{b}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{b}_1\hat{b}_2} & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{b}_1\hat{b}_p} \\ \hat{\sigma}_{\hat{b}_2\hat{b}_1} & \hat{\sigma}^2_{\hat{b}_2} & \cdots & \hat{\sigma}_{\hat{b}_2\hat{b}_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{\sigma}_{\hat{b}_p\hat{b}_1} & \hat{\sigma}_{\hat{b}_p\hat{b}_2} & \cdots & \hat{\sigma}^2_{\hat{b}_p} \end{pmatrix} .$$

На головній діагоналі оціненої коваріаційної матриці розташовані оцінки дисперсій регресійних коефіцієнтів, поза діагоналлю – оцінки коваріацій.

Корінь квадратний

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}_i} = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{b}_i}} = \hat{\sigma}\sqrt{(X'X)^{-1}_{ii}} \ , \tag{2.10}$$

де $(X'X)_{ii}^{-1}$ - i-й діагональний елемент матриці $(X'X)^{-1}$, називається стандартною похибкою коефіцієнта регресії.

2.4. Статистичні властивості оцінок параметрів

Лінійність по Y

Оцінка $\hat{b}$ є лінійною функцією вектора-стовпчика Y.

Незміщенність

Оцінка $\hat{b}$ є незміщеною, тобто $M(\hat{b}) = b$.

Ефективність

Має місце теорема Гаусса-Маркова.

Оцінка методу найменших квадратів є найбільш ефективною в класі лінійних незміщених оцінок.

Згадані вище властивості оцінювача $\hat{b}$ у класичній лінійній регресійній моделі не потребують виконання передумови відносно нормального розподілу збурень.

Нормальний розподіл $\hat{b}$

У класичній лінійній моделі з нормальним розподілом збурень ε оцінка $\hat{b}$ має нормальний розподіл

$$\hat{b} \sim N(b, K_{\hat{b}}). \tag{2.11}$$

При цьому $K_{\hat{b}}$ є істинною коваріаційною матрицею для $\hat{b}$.

Обгрунтованість

Якщо припустити, що гранична матриця

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(X'X)$$

існує, є кінцевою і невиродженою, то оцінювач $\hat{b}$ в класичній лінійній моделі є обгрунтованим, тобто

$$\lim_{n\to\infty} P(\left|b - \hat{b}\right| > \varepsilon) = 0$$

для будь-якого скільки завгодно малого наперед заданого $\varepsilon > 0$.

2.5. Інтервальні оцінки коефіцієнтів теоретичного рівняння регресії

Після визначення точкових оцінок $\hat{b}_i$ коефіцієнтів b_i $(i = 0,1,2,...,p)$ теоретичного рівняння регресії розраховують інтервальні оцінки вказаних коефіцієнтів. Для побудови інтервальної оцінки b_i використовують t-статистику

$$t = \frac{\hat{b}_i - b_i}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}}, \qquad (2.12)$$

яка має розподіл Стьюдента із числом ступенів свободи $\upsilon = n - p - 1$ (n - об'єм вибірки, p - кількість факторів).

За таблицею розподілу Стьюдента за даним рівнем значущості α і числом ступенів свободи υ знаходять критичну точку $t_{\alpha/2, n-p-1}$, яка задовольняє умові

$$P\left(|t| < t_{\alpha/2, n-p-1}\right) = 1 - \alpha,$$

або

$$P\left(\left|\frac{\hat{b}_i - b_i}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}}\right| < t_{\alpha/2, n-p-1}\right) = 1 - \alpha.$$

Після перетворень одержимо

$$P\left(\hat{b}_i - t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_i} < b_i < \hat{b}_i + t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_i}\right) = 1 - \alpha.$$

Отже, довірчий інтервал, який накриває з надійністю $(1-\alpha)$ невідоме значення параметра b_i, визначається нерівністю

$$\hat{b}_i - t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_i} < b_i < \hat{b}_i + t_{\alpha/2, n-p-1} \cdot \hat{\sigma}_{\hat{b}_i}. \qquad (2.13)$$

Нагадаємо, що $\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}$ розраховується за формулою (2.10).

2.6. Перевірка статистичної значущості коефіцієнтів рівняння регресії

Статистична значущість коефіцієнтів множинної лінійної регресії перевіряється на основі t-статистики

$$t = \frac{\hat{b}_i}{\hat{\sigma}_{\hat{b}_i}}, \qquad (2.14)$$

яка має розподіл Стьюдента з числом ступенів свободи $\upsilon = n - m - 1$. За заданим рівнем значущості α фактичне значення t_{Φ} статистики (2.14) порівнюється з критичним значенням $t_{\alpha/2, n-p-1}$ статистики Ст'юдента. Якщо $|t_{\Phi}| > t_{\alpha/2, n-p-1}$, то коефіцієнт b_i буде статистично значущим.

У протилежному випадку $|t_{\Phi}| \le t_{\alpha/2, n-p-1}$ коефіцієнт b_i буде статистично незначущим. Це означає, що фактор X_i лінійно не пов'язаний з результативною ознакою Y. Його присутність серед пояснювальних змінних не виправдана із статистичної точки зору. Отже, після з'ясування того, що

коефіцієнт статистично незначущий пропонується виключити з рівняння регресії змінну X_i.

Практично перевірка значущості коефіцієнтів замінюється простим порівняльним аналізом.

Якщо $2 < |t_{\Phi}| < 3$, то коефіцієнт є значущим.

Якщо $|t_{\Phi}| > 3$, то коефіцієнт є сильно значущим.

2.7. Адекватність класичної регресійної моделі. Коефіцієнт детермінації

Після перевірки значущості кожного коефіцієнта регресії перевіряється якість рівняння в цілому. Для цього, як і у випадку парної регресії, використовують коефіцієнт детермінації, який розраховується за формулою

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}. \qquad (2.15)$$

Чим ближче цей коефіцієнт до одиниці, тим більше рівняння регресії пояснює поведінку Y. Отже, природне бажання – побудувати регресію з найбільшим R^2.

Для множинної регресії коефіцієнт детермінації як критерій адекватності має один недолік. Цей недолік полягає в тому, що при включенні додаткового регресора в рівняння R^2 ніколи не зменшується, а в більшості випадків збільшується. Якщо якість різних варіантів регресійного рівняння оцінити лише за допомогою R^2, то рівняння з відносно великою кількістю факторів, як правило, буде давати кращі результати, ніж з відносно малою їх кількістю. Однак з кожним додатковим фактором втрачається один ступінь свободи і цей недолік не враховується, коли R^2 виступає як критерій вибору.

Число ступенів свободи для класичної регресійної моделі визначається як n-p-1. Якщо в регресійне рівняння вводять додатковий фактор, то число n-p-1 зменшується на одиницю. Застосовують t- і F- тести, а також при побудові довірчих і прогнозних інтервалів бажано мати якомога більшу кількість ступенів свободи. Тому в статистичному відношенні наявність додаткового фактора є не завжди бажаною.

У зв'язку з цим впроваджується так званий скоригований коефіцієнт детермінації $\overline{R}^2$, який враховує поправку на число ступенів свободи

$$\overline{R}^2 = 1 - (1 - R^2) \cdot \frac{n-1}{n-p-1}. \qquad (2.16)$$

Із зростанням p скоригований коефіцієнт детермінації $\overline{R}^2$ зростає повільніше ніж R^2.

Доведено, що $\overline{R}^2$ збільшується при включенні нової пояснювальної змінної тоді і тільки тоді, коли t- статистика для цієї змінної за модулем більша

за одиницю. Отже, включення в модель нових пояснювальних змінних виконується до тих пір, доки зростає скоригований коефіцієнт детермінації.

Слід зазначити, що $\overline{R}^2 \leq 1$, але може набувати і від'ємних значень.

Із двох варіантів рівнянь, які різняться величиною скоригованого коефіцієнта детермінації, але мають однакові добрі інші критерії якості, має перевагу варіант з більшим значенням скоригованого коефіцієнта детермінації.

2.8. Аналіз статистичної значущості коефіцієнта детермінації

Після оцінки індивідуальної статистичної значущості кожного з коефіцієнтів регресії аналізується сукупна значущість коефіцієнтів. Такий аналіз виконується на основі перевірки гіпотези про одночасну рівність нулю всіх коефіцієнтів регресії

$$H_0: \ в_1 = в_2 = \ldots = в_p = 0.$$

Якщо дана гіпотеза не відхиляється, то вплив усіх змінних $X_1, X_2, \ldots, X_p$ моделі на результативну ознаку статистично неістотний, а загальна якість рівняння невисока.

Для перевірки даної гіпотези використовують наступну статистику:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - p - 1}{p}, \tag{2.17}$$

яка, в разі виконання нульової гіпотези, розподілена за законом Фішера з $\nu_1 = p$, $\nu_2 = n - p - 1$ ступенями свободи. За таблицею розподілу Фішера за заданим рівнем значущості α і ступенями свободи ν_1 і ν_2 знаходять критичне значення F_{α,ν_1,ν_2}. Нульова гіпотеза відхиляється, якщо $F_{\text{Ф}} > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$, де $F_{\text{Ф}}$ – фактичне значення F-статистики, яка знайдена за формулою (2.16). Це рівносильне тому, що сукупний вплив усіх змінних $X_1, X_2, \ldots, X_p$ на залежну зміну є істотним.

2.9. Прогнозування за багатофакторною регресійною моделлю

Якщо побудована регресійна модель адекватна, її можна використовувати для прогнозу залежної змінної.

Нехай

$$x_{n+1} = (1, x_{1,n+1}, x_{2,n+1}, \ldots, x_{p,n+1})'$$

є прогнозованим значенням факторів. Тоді прогнозованим значенням $\hat{y}_{n+1}$ результативної ознаки буде

$$\hat{y}_{n+1} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{1,n+1} + \ldots + \hat{b}_p x_{p,n+1} \tag{2.18}$$

або в матричній формі

$$\hat{y}_{n+1} = x'_{n+1} \cdot \hat{b}. \tag{2.19}$$

Це точковий прогноз.

Інтервальний прогноз, як і в випадку простої лінійної регресії, можна отримати для індивідуального значення незалежної змінної Y та для математичного сподівання Y.

Для побудови довірчого інтервалу індивідуального значення y_{n+1}, яке асоціюється з вектором X_{n+1} використовують статистику

$$t = \frac{\hat{y}_{n+1} - y_{n+1}}{\hat{\sigma} \cdot \left[1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1} x_{n+1}\right]^{1/2}} . \tag{2.20}$$

Ця статистика розподілена за законом Стьюдента з (n-p-1) ступенями свободи.

Отже, застосовуючи загальну схему побудови довірчих інтервалів, одержимо інтервальний прогноз для індивідуального значення результативної ознаки

$$\begin{gathered} \hat{y}_{n+1} - t_{\alpha/2,n-p-1} \cdot \hat{\sigma}\left[1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1} x_{n+1}\right]^{1/2} < y_{n+1} < \\ \hat{y}_{n+1} + t_{\alpha/2,n-p-1} \cdot \hat{\sigma}\left[1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1} x_{n+1}\right]^{1/2}, \end{gathered} \tag{2.21}$$

де $t_{\alpha/2,n-p-1}$– табличне значення статистики (2.19), а $\hat{\sigma}$ обчислюється за формулою (2.7) або (2.8).

Побудова інтервального прогнозу для математичного сподівання $M(y_{n+1})$ результативної ознаки y_{n+1} базується на статистиці

$$t = \frac{x'_{n+1}\hat{b} - x'_{n+1}b}{\hat{\sigma} \cdot \left[x'_{n+1}(X'X)^{-1} x_{n+1}\right]^{1/2}}, \tag{2.22}$$

яка має розподіл Стьюдента з (n- p-1) ступенями свободи.

За таблицею розподілу Ст'юдента за рівнем значущості α і числом ступенів свободи (n- p-1) знаходять критичну точку $t_{\alpha/2,n-p-1}$, яка задовольняє умову

$$P\left(\left|\frac{x'_{n+1}\hat{b} - x'_{n+1}b}{\hat{\sigma}\left[x'_{n+1}(X'X)^{-1}x_{n+1}\right]^{1/2}}\right| < t_{\alpha/2,n-p-1}\right) = 1 - \alpha .$$

Виходячи з цього, інтервал довіри математичного сподівання результативної ознаки y_{n+1} буде мати таки:й вигляд:

$$\begin{gathered} x'_{n+1}\hat{b} - t_{\alpha/2,n-p-1} \cdot \hat{\sigma}\left[1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1} x_{n+1}\right]^{1/2} < M(y_{n+1}) < \\ x'_{n+1}\hat{b} + t_{\alpha/2,n-p-1} \cdot \hat{\sigma}\left[1 + x'_{n+1}(X'X)^{-1} x_{n+1}\right]^{1/2}. \end{gathered} \tag{2.23}$$

2.10. Множинна лінійна регресія в стандартизованому вигляді

На практиці іноді крім звичайних оцінених регресійних коефіцієнтів, ініціюються й інтерпретуються стандартизовані регресійні коефіцієнти. Вони відомі також під назвою “бета-коефіцієнти”.

Для цього величини результативної ознаки і факторів стандартизуються

$$y_i^* = \frac{y_i - \overline{Y}}{\sigma_y}; \qquad x_{ij}^* = \frac{x_{ij} - \overline{X}_j}{\sigma_j}, \qquad j = \overline{1,p} \quad , \; i = \overline{1,n},$$

де

σ_j – середньоквадратичне відхилення фактора X_j;

σ_y – середньоквадратичне відхилення результативної ознаки Y;

x_{ij} – i-те значення j-го фактора;

$\overline{Y}$, $\overline{X}_j$ – середнє значення відповідно результативної ознаки і j-того фактора.

У стандартизованому масштабі емпірічне рівняння для i-того спостереження набуває вигляду

$$y_i^* = \hat{\beta}_1 x_{i1}^* + \hat{\beta}_2 x_{i2}^* + \ldots + \hat{\beta}_p x_{ip}^* \;, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.24}$$

Слід зазначити, що в стандартизованому масштабі регресійне рівняння не містить вільного члена.

До рівняння множинної регресії у стандартизованому вигляді можна застосувати МНК. Система нормальних рівнянь буде записана у вигляді :

$$\begin{aligned} r_{yx_1} &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 r_{x_2x_1} + \hat{\beta}_3 r_{x_3x_1} + \ldots + \hat{\beta}_p r_{x_px_1}, \\ r_{yx_2} &= \hat{\beta}_1 r_{x_2x_1} + \hat{\beta}_2 + \hat{\beta}_3 r_{x_3x_2} + \ldots + \hat{\beta}_p r_{x_px_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{yx_p} &= \hat{\beta}_1 r_{x_px_1} + \hat{\beta}_2 r_{x_px_2} + \ldots + \hat{\beta}_p, \end{aligned} \tag{2.25}$$

де

r_{yx_i} , $i = \overline{1,p}$ – коефіцієнт корекції результативної ознаки Y і фактора X_i;

$r_{x_ix_j}$ – коефіцієнт корекції між факторами X_i і X_j .

Розв’язуючи її методом визначників, знаходять параметри $\hat{\beta}_i$ стандартизовані коефіцієнти регресії (бета-коефіцієнти).

Зв’язок між оцінками параметрів моделі на основі стандартизованих і нестандартизованих змінних запишеться у вигляді:

$$\hat{b}_i = \hat{\beta}_i \frac{\sigma_y}{\sigma_i} \quad , \; i = \overline{1,p}, \tag{2.26}$$

$$\hat{b}_0 = \overline{Y} - \hat{b}_1 \overline{X}_1 - \hat{b}_2 \overline{X}_2 - \ldots - \hat{b}_p \overline{X}_p .$$

Коефіцієнт детермінації у випадку стандартизованої моделі обчислюють за такою формулою:

$$R^2 = \hat{\beta}_1 r_{yx_1} + \hat{\beta}_2 r_{yx_2} + ... + \hat{\beta}_p r_{yx_p} . \qquad (2.27)$$

Стандартизовані коефіцієнти регресії показують на скільки сігм зміниться в середньому результативна ознака, якщо відповідний фактор X_i зміниться на одну сігму при незмінному рівні інших факторів.

Стандартизовані параметри – безрозмірні величини. Завдяки тому, що всі стандартні фактори і показник безрозмірні величини, коефіцієнти лінійної регресії в стандартизованому масштабі показують порівняльний вклад кожного з факторів у показник.

Якщо через *R* позначити кореляційну матрицю факторів

$$R = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & \cdots & r_{x_1x_p} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & \cdots & r_{x_2x_p} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ r_{x_px_1} & r_{x_px_2} & \cdots & r_{x_px_p} \end{pmatrix},$$

через r_y – матрицю - стовпчик коефіцієнтів кореляції показника з факторами

$$r_y = \begin{pmatrix} r_{yx_1} \\ r_{yx_2} \\ \vdots \\ r_{yx_p} \end{pmatrix},$$

через $\hat{\beta}$ – матрицю-стовпчик оцінок стандартизованих параметрів регресії

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_p \end{pmatrix},$$

то систему нормальних рівнянь (2.24) можна записати у матричному вигляді

$$R \cdot \hat{\beta} = r_y ,$$

а її розв’язок буде таким:

$$\hat{\beta} = R^{-1} \cdot r_y \qquad (2.28)$$

2.11. Коефіцієнти еластичності

При інтерпретації регресійних коефіцієнтів беруть до уваги одиниці виміру результативної ознаки й факторів. Для виявлення ступеня впливу фактора на результативну ознаку без врахування одиниць виміру, крім стандартизованих коефіцієнтів, можуть бути використані коефіцієнти еластичності.

Середні коефіцієнти еластичності для лінійної регресії розраховуються за формулою

$$\overline{Э}_{yx_j} = \hat{b}_j \frac{\overline{x}_j}{\overline{y}} \ . \qquad (2.29)$$

Середній коефіцієнт еластичності $\overline{Э}_{yx_j}$ (2.28) показує на скільки відсотків у середньому зміниться результативна ознака при зміні фактора X_j на 1% від його середнього значення. Середні показники еластичності можна порівняти між собою й відповідно ранжувати фактори за силою їх впливу на результативну ознаку.

Поряд із середніми показниками еластичності використовують частинні коефіцієнти еластичності, які знаходяться таким чином:

$$\overline{Э}_{yx_j} = \hat{b}_j \frac{x_j}{\hat{y}_{x_j \cdot x_1 x_2 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_p}} . \qquad (2.30)$$

Тут

$\hat{y}_{x_j \cdot x_1 x_2 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_p}$ – частинне рівняння регресії.

$$\hat{y}_{x_j \cdot x_1 x_2 \ldots x_{j-1} x_{j+1} \ldots x_p} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 \overline{X}_1 + \hat{b}_2 \overline{X}_2 + \ldots + \hat{b}_j \overline{X}_j + \ldots + \hat{b}_p \overline{X}_p .$$

Частинний коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків зміниться показник, якщо один з факторів зміниться на один відсоток при незмінних значеннях інших факторів.

Питання для самоперевірки

1 Що таке класична лінійна економетрична модель?
2 Яку матрицю називають матрицею факторів?
3 Охарактеризуйте поняття гомоскедастичності.
4 Як одержати оцінки параметрів?
5 Які властивості мають оцінки параметрів?
6 Сформулюйте гіпотезу про значущість параметра b_i.
7 Для чого застосовують коефіцієнт детермінації?
8 Як перевірити гіпотезу про адекватність лінійної моделі?
9 Сформулюйте задачу точкового прогнозування.
10 Сформулюйте задачу інтервального прогнозування.

ЛЕКЦІЯ 4
3. Мультиколінерність

3.1. Поняття мультиколінеарності

Одним із припущень класичної лінійної економетричної моделі є припущення про лінійну незалежність факторів $X_1, X_2, ..., X_p$, що означає лінійну незалежність стовпчиків матриці X або, що матриця $(X'X)^{-1}$ має повний

ранг (p+1). Якщо це припущення порушується, тобто коли один з стовпчиків матриці X є лінійною комбінацією інших стовпчиків, то кажуть, що має місце повна мультиколінеарність.У цій ситуації неможливо побудувати МНК - оцінку параметрів моделі, оскільки матриця $(X'X)^{-1}$ не існує, а отже, матриця $\hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y$ не існує.

Якщо існує повна мультиколінеарність, то в матриці X можна виділити максимально лінійно незалежну систему стовпчиків, а інші стовпчики вилучити. Після цього провести нову регресію.

Практично повна мультиколінеарність зустрічається виключно рідко. Більш правдоподібною є ситуація, коли матриця X має повний ранг, але між факторами $X_1, X_2, ..., X_p$ існує висока ступінь кореляції, тобто, якщо матриця $X'X$ близька до виродженої, то кажуть, що присутня неповна мультиколінеарність.

У цьому разі розрахунки, в принципі, можуть бути виконані, але мультиколінеарність залишиться непоміченою. Це приведе до таких негативних наслідків:

1. Великі дисперсії й коваріації оцінювачів регресійних коефіцієнтів.
2. Довірчі інтервали для регресійних коефіцієнтів і результативної ознаки збільшуються.
3. Тестування гіпотез стає проблематичним: тестові статистики (наприклад, t-статистика) частіше потрапляють в область, в якій нульова гіпотеза може бути не відхилена, навіть, якщо вона хибна.

3.2. Ознаки мультиколінеарності

Існує декілька ознак, за якими можна виявити наявність мультиколінеарності.

1. Високе значення коефіцієнта детермінації R^2 і статистична незначущість деяких параметрів регресії.
2. Висока парна кореляція між малозначущими змінними.

Але дана ознака буде надійною лише у випадку двох пояснювальних змінних. При більшій їх кількості більш доцільнішим є використання частинних коефіцієнтів кореляції.

3. Великі частинні коефіцієнти кореляції.

Частинні коефіцієнти кореляції визначають силу лінійної залежності між двома змінними без урахування впливу на них інших змінних.

При вивченні багатомірних зв’язків парні коефіцієнти кореляції можуть давати невірну уяву про характер зв’язку між двома змінними. Наприклад, між двома змінними X і Y може бути великий додатний коефіцієнт кореляції не тому, що одна з них стимулює зміну іншої, а тому що обидві ці змінні змінюються в одному напрямку під впливом інших змінних, як врахованих в моделі, так і, можливо, не врахованих. У зв’язку з цим необхідно вимірювати дійсну силу лінійного зв’язку між двома змінними, яка вільна від впливу інших

факторів. Коефіцієнт кореляції між двома змінними, очищений від впливу інших змінних, називається частинним коефіцієнтом кореляції.

Частинний коефіцієнт кореляції між змінними X_i і Y_i $(1 \le i,\ j \le p)$ вільний від впливу інших (p-2) пояснювальних змінних позначається таким чином:

$$r_{ij|1.2...(i-1)(i+1)(j-1)(j+1)...p}.$$

Його можна обчислити за формулою:

$$r_{ij|1.2...(i-1)(i+1)(j-1)(j+1)...p} = -\frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ij}c_{jj}}}, \qquad (3.1)$$

де c_{ij} – елементи матриці C, оберненої до кореляційної матриці R, $C = R^{-1}$.

4.Сильна допоміжна регресія.

Для аналізу будується рівняння регресії кожної з пояснювальних змінних X_j, j=1,p з усіма іншими факторами. Обчислюються відповідні коефіцієнти детермінації R_j^2 і розраховується їх статистична значущість на основі F-статистики:

$$F_j = \frac{R_j^2}{1 - R_j^2} \cdot \frac{n - p}{p - 1} \qquad (3.2)$$

Тут n – число спостережень, p – число пояснювальних змінних. Статистика F має розподіл Фішера з $\nu_1 = p - 1$, $\nu_2 = n - p$ ступенями свободи.

F - тест перевіряє гіпотезу

$$H_0: \quad R_j^2 = 0$$

проти гіпотези

$$H_1: \quad R_j^2 > 0$$

Розраховані значення F_j порівнюються з табличним значенням F_{α,ν_1,ν_2}, знайденим за таблицею розподілу Фішера з ν_1 і ν_2 степенями свободи й рівнем значущості α. Якщо $F_j > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$, то нуль-гіпотеза відхиляється і вважається, що фактор X_j є лінійною комбінацією інших факторів; якщо ж $F_j > F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$, то сприймається H_0 - гіпотеза і вважається, що фактор X_j не є мультиколінеарним.

5. Величина визначника матриці $X'X$.

Чим ближче визначник цієї матриці до нуля, тим більший ступінь мультиколінеарності між факторами.

6. Величина визначника кореляційної матриці R.

Чим ближче до нуля визначник матриці R, тим певніше можна стверджувати, що між пояснювальними змінними існує мультиколінеарність.

7. Найменше власне число матриці $X'X$.

$$\lambda_{\min_i}(X'X) = \min_i(\lambda_i) = \lambda'_l. \qquad (3.3)$$

Чим менше λ'_l, тим сильніша мультиколінеарність.

8. Міра обумовленості матриці $X'X$.

$$\frac{\lambda_{\max\limits_i}(X'X)}{\lambda_{\min\limits_i}(X'X)}, \qquad \lambda_{\max\limits_i} = \max_i(\lambda_i) = \lambda'_k \tag{3.4}$$

Чим ближче $\frac{\lambda'_k}{\lambda'_l}$ до нескінченності, тим сильніша мультиколінеарність.

9. Зовнішні ознаки мультиколінеарності для побудованої моделі:

а) деякі серед оцінок $\widehat{b}_i$ мають невірні, з точки зору економічної теорії, знаки або невиправдано великі значення за абсолютною величиною;

б) невеликі зміни в послідовності даних (включення або виключення невеликої кількості рядків матриці X) призводить до суттєвої зміни оцінок коефіцієнтів моделі, навіть до зміни знаків;

в) більшість, або всі коефіцієнти регресії – незначущі, але модель в цілому – адекватна.

Усі ці ознаки мультиколінеарності мають один спільний недолік: ні одна з них чітко не розмежовує випадки, коли мультиколінеарність істотна, а коли можна нею знехтувати.

Найповніше дослідити явище мультиколінеарності можна за допомогою алгоритму Феррара - Глобера.

3.3. Алгоритм Феррара - Глобера

Даний алгоритм включає три види статистичних критеріїв, згідно з якими перевіряється мультиколінеарність усього масиву незалежних змінних (χ^2-критерій); кожної незалежної змінної з рештою змінних (F-критерій); кожної пари незалежних змінних (t-критерій).

Алгоритм включає такі кроки:

1.Стандартизація факторних змінних

$$x^*_{ij} = \frac{x_{ij} - \overline{X}_j}{\sqrt{\sigma^2_{x_j} \cdot n}} \quad , \quad j = \overline{1,p}, \quad i = \overline{1,n}, \tag{3.5}$$

де n – число спостережень, $\overline{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$, $\sigma^2_{x_j} = \overline{X^2_j} - \overline{X_j}^2$, $\overline{X^2_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^2_{ij}$.

2. Знаходження кореляційної матриці

$$R = X^{*\prime} \cdot X^*, \tag{3.6}$$

де $X^* = (x^*_{ij})_{n\times p}$ – матриця стандартизованих змінних, $X^{*\prime}$– матриця, транспонована до матриці X^*.

3. Проведення критерію χ^2.

Фактичне значення критерію χ^2 визначається за формулою

$$\chi^2 = -(n - 1 - \frac{1}{6}(2p+5)\ln|R|, \tag{3.7}$$

де p – число факторів, $|R| = det\ R$.

Значення цього критерію порівнюється з табличним при $\nu = \frac{1}{2}p(p-1)$ ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $\chi^2 > \chi^2_{\alpha,\nu}$, то в масиві пояснювальних змінних існує мультиколінеарність.

4. Визначення оберненої матриці

$$C = R^{-1} = (X^{*\prime} X^*)^{-1}. \tag{3.8}$$

5. Здійснення критерію Фішера

Фактичні значення F-критерію для кожного фактора розраховуються за формулою

$$F_j = (c_{jj} - 1)\frac{n-p}{p-1}, \tag{3.9}$$

де c_{jj} – діагональні елементи матриці C. Фактичні значення критеріїв порівнюються з табличним при $\nu_1 = p$-1 і $\nu_2 = n$-p ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $F_j > F_{\alpha,\nu 1,\nu 2}$, то фактор X_j мультиколінеарний із іншими.

6. Знаходження частинних коефіцієнтів кореляції

$$r_{ij} = -\frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ij} \cdot c_{jj}}}.$$

7. Проведення t-критерію Стьюдента.

Фактичні значення порівнюють з табличними при $\nu = n$-p ступенях свободи і рівні значущості α. Якщо $|t_{ij}| > t_{\alpha/2,\nu}$, то між змінними X_i і X_j існує мультиколінеарність.

3.4. Засоби вилучення мультиколінеарності

Єдиного методу вилучення мультиколінеарності не існує. Це пов'язано з тим, що причини і наслідки мультиколінеарності неоднозначні й в більшості випадків залежать від результатів вибірки. Наведемо декілька методів вилучення мультиколінеарності.

1. Вилучення змінної

Якщо існує висока мультиколінеарність, то найлегше відкинути одну із залежних змінних. Але вилучення змінної з моделі може призвести до помилки специфікації. Отже, в прикладних економетричних моделях бажано не відкидати пояснювальні змінні до тих пір, поки мультиколінеарність не стане серйозною проблемою.

Перевага при вилученні віддається не тій змінній, яка більш пов'язана з результативною ознакою, а тій, яка достатньо тісно пов'язана з результатом і має найбільш тісний зв'язок з іншими змінними.

2. Збільшення кількості спостережень

Оскільки мультиколінеарність змінюється в кожній вибірці, то можливо, що в іншій моделі з такими ж змінними мультиколінеарність буде іншою. Іноді просте збільшення спостережень пом'якшує проблему мультиколінеарності.

3. Зміна специфікації моделі

У деяких випадках проблема мультиколінеарності може бути розв'язана, якщо змінити специфікацію моделі, форму моделі або залучити пояснювальні змінні, які не були враховані раніше, але які істотно впливають на результативну ознаку.

4. Перетворення змінних

Цей спосіб полягає в заміні факторів або їх відхиленнями від середнього, або їх стандартизованими величинами. Можливі й інші перетворення.

Питання для самоперевірки

1 Що означає термін "мультиколінеарність"?
2 У чому полягає різниця між повною і неповною мультиколінеарністю?
3 Які основні наслідки мультиколінеарності?
4 Які ознаки мультиколінеарності?
5 Що таке частинний коефіцієнт кореляції?
6 Як знайти частинний коефіцієнт кореляції?
7 Які критерії включає алгоритм Феррара - Глобера?
8 Із яких кроків складається алгоритм Феррара - Глобера?
9 Які засоби вилучення мультиколінеарності?
10 У чому полягає сутність методу головних компонентів?

ЛЕКЦІЯ 5

4. Узагальнена лінійна регресійна модель

4.1. Поняття узагальненої лінійної регресійної моделі

Модель

$$\begin{cases} Y = Xb + \varepsilon \\ 1)\ \ X - \text{детермінована матриця}, rangX = p + 1 < n \\ 2)\ \ M(\varepsilon) = 0 \\ 3)\ \ K_\varepsilon = \sigma^2 \cdot K_0 \end{cases} \tag{4.1}$$

де K_0 – симетрична додатньо-визначена матриця, яку називають узагальненою лінійною регресійною моделлю.

Узагальнена модель відрізняється від класичної тільки умовою 3). Припускається, що матриця K_0 відома. Невідомими величинами є вектор коефіцієнтів і параметр σ^2. На відміну від класичної моделі параметр σ^2 взагалі не є дисперсією збурення.

Припущення відносно того, що матриця K_0 відома - нереалістичне, але в деяких випадках, які буде розглянуто пізніше, можна відмовитися від цього припущення.

Отже, для узагальненої класичної лінійної моделі коваріаційна матриця збурень K_ε , на відміну від класичної моделі, не є діагональною матрицею. Це означає, що збурення можуть корелювати, а також мати різні дисперсії.

4.2. Узагальнений метод найменших квадратів (УМНК)

До системи (4.1) можна застосовувати метод найменших квадратів. Але оцінка $\hat{b}$ вектора b буде зміщеною і неефективною. Оцінка матриці коваріації вектора $\hat{b}$ буде також зміщеною.

Для одержання ефективної оцінки застосовують узагальнений метод найменших квадратів. Сутність цього методу полягає в тому, що оцінки $\hat{\hat{b}}$ знаходять за формулою

$$\hat{\hat{b}} = (X'K_0^{-1}X)^{-1}X'K_0^{-1}Y \ . \qquad (4.2)$$

Доведено (теорема Айткена), що в класі лінійних незміщених оцінок вектора $\hat{b}$ для узагальненої регресійної моделі оцінка (4.2) має найменшу матрицю коваріацій.

Коваріаційна матриця $K_{\hat{\hat{b}}}$ вектора оцінок $\hat{\hat{b}}$ для узагальненої лінійної моделі має такий вигляд

$$K_{\hat{\hat{b}}} = \sigma^2 (X'K_0^{-1}X)^{-1} \ . \qquad (4.3)$$

Як уже зазначалося, параметр σ^2 не інтерпретується як величина дисперсії збурення, але залишається невідомим параметром, який треба оцінити. Його оцінка

$$\hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{e'K_0^{-1}e}{n-p-1} \ , \qquad (4.4)$$

де

$$e = Y - \hat{\hat{Y}} \ , \ \hat{\hat{Y}} = X\hat{\hat{b}} \ .$$

Отже, оцінка $\hat{\hat{K}}_{\hat{\hat{b}}}$ коваріаційної матриці $K_{\hat{\hat{b}}}$ набуває такого вигляду:

$$\hat{\hat{K}}_{\hat{\hat{b}}} = \hat{\hat{\sigma}}^2 \left(X'K_0^{-1}X\right)^{-1} . \qquad (4.5)$$

Коефіцієнт детермінації не є задовільною мірою якості моделі при використанні узагальненого методу найменших квадратів.

Практичне використовування узагальненого методу найменших квадратів ускладнюється тим, що для побудови УМНК – оцінок необхідно знати матрицю K_0, яка реально майже завжди невідома. Тому природним буде такий підхід: оцінити матрицю K_0, а потім скористатися формулами (4.2) – (4.5). Взагалі матриця K_0 містить $n(n+1)/2$ невідомих параметрів (оскільки вона симетрична) і, маючи тільки n спостережень, немає ніякої надії одержати для неї гарну оцінку.

Отже, щоб одержати оцінку матриці K_0, необхідно ввести додаткові умови відносної структури.

Питання для самоперевірки

1. Чим відрізняється узагальнена модель від класичної?
2. Які параметри невідомі в узагальненій регресійній моделі?
3. До яких наслідків приведе застосування МНК до узагальненої моделі?
4. У чому полягає сутність узагальненого методу найменших квадратів?
5. Чи будуть найкращими оцінки УМНК?
6. Чи можна оцінити матрицю K_0 без додаткових припущень відносно її структури?

ЛЕКЦІЯ 6
5. Гетероскедастичність

5.1. Поняття моделі з гетероскедастичними збуреннями

Розглянемо частинний випадок узагальненої лінійної моделі, а саме, модель з гетероскедастичністю. Це означає, що збурення некорельовані, але мають несталі дисперсії.

Матриця коваріацій збурень є діагональною, але елементи головної діагоналі, взагалі, різні.

Гетероскедастичність часто зустрічається в тих ситуаціях, коли об'єкти, які аналізуються, неоднорідні. Наприклад, якщо досліджується залежність прибутку підприємства від деяких факторів, скажімо, від розміру основних фондів, то природно очікувати, що для більших підприємств коливання прибутку буде більшим, ніж для малих.

Отже, нехай

$$Y = Xb + \varepsilon,$$
$$K_\varepsilon = \sigma_0 K_0$$

і

$$D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2,\ i = \overline{1,n}.$$

Дисперсію σ_i^2 зручно подати у вигляді $\sigma_i^2 = \sigma^2 \varpi_i$, де числа ϖ_i нормовані так, що $\sum \varpi_i = n$. Тоді, при $\varpi_i = 1$, $i = \overline{1,n}$ модель зводиться до класичної.

Коваріаційна матриця K_ε збурень буде мати такий вигляд:

$$K_\varepsilon = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0... & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 .. & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0... & \sigma_n^2 \end{pmatrix} = \sigma^2 \begin{pmatrix} \varpi_1 & 0... & 0 \\ 0 & \varpi_2 ... & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0... & \varpi_n \end{pmatrix}, \qquad (5.1)$$

де σ^2 - невідоме, а числа $\varpi_1, \omega_2, \varpi..., \varpi_n$ можуть бути як відомі, так і невідомі. З (5.1) виливає, що матриця K_0 для моделі з гетероскедастичними збуреннями має такий вигляд:

$$K_O = \begin{pmatrix} \varpi_1 & 0... & 0 \\ 0 & \varpi_2... & 0 \\ - & - & - \\ 0 & 0... & \varpi_n \end{pmatrix}. \qquad (5.2)$$

5.2. Наслідки застосування до моделі з гетероскедастичними збуреннями методу найменших квадратів

Якщо скористатися методом найменших квадратів для оцінки параметрів моделі з гетероскедастичними збуреннями, то виникають наступні небажані ефекти.

1. Оцінка $\hat{b}$ не буде кращою лінійною незміщеною оцінкою, тобто теорема Гауса-Маркова в цій ситуації не дійсна;

2. Оцінка коваріаційної матриці

$$\hat{K}_{\hat{b}} = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$$

є тенденційно “вниз” зміщеним оцінювачем. Якщо оцінки дисперсії й коваріації МНК – оцінювача $\hat{в}$ є тенденційно “вниз” зміщеними, то це негативно відбивається на $t-$ і F – тестах (нульова гіпотеза часто відхиляється помилково), а також на довірчих та прогнозних інтервалах (вони будуть дуже “вузькими”).

3. МНК – оцінювач $\hat{\sigma}^2$ дисперсії збурень також є зміщеним.

5.3. Діагностика гетероскедастичності

У деяких випадках появу проблеми гетероскедастичності можна передбачити на етапі специфікації. Але значно частіше цю проблему розв’язують після побудови рівняння регресії.

Однозначного методу діагностики гетероскедастичності не існує. Розглянемо два методи: графічний і тест Голдфелда- Квандта.

5.3.1. Графічний аналіз залишків

Використання графічного подання відхилень дозволяє виявити наявність гетероскедастичності. У цьому випадку вздовж осі абсцис відкладаються

значення (x_i) пояснювальної змінної *X*, а вздовж осі ординат або відхилення e_i, або їх квадрати e_i^2, $i=\overline{1,n}$. Приклади таких графіків наведені на рисунку 5.1.

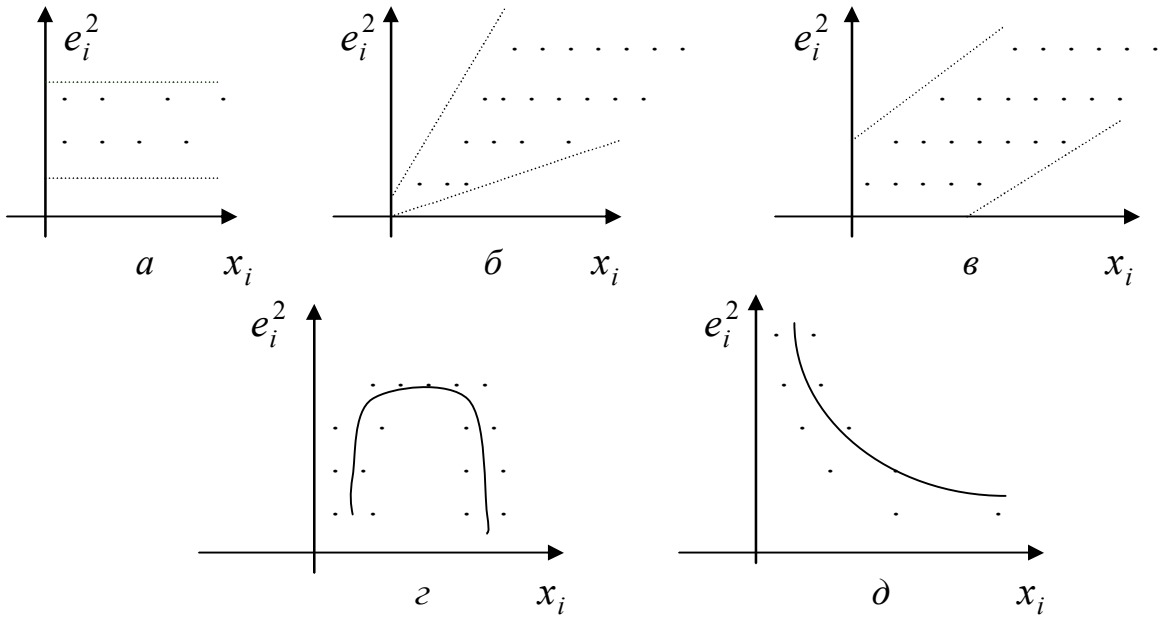


Рис. 5.1

На рисунку 5.1, *а* всі відхилення e_i^2 знаходяться всередині напівполоси, яка паралельна осі абсцис. Це означає, що дисперсії e_i^2 сталі і незалежності від значень змінної *X*, тобто у цьому разі виконуються умови гомоскедастичності.

На рис. 5.1, *б-д* спостерігається деяка систематична зміна в співвідношеннях між значеннями x_i змінної X і квадратами відхилень e_i^2. Тобто ці випадки відбивають велику ймовірність присутності гетероскедастичності для статистичних даних.

У випадку множинної регресії графічний аналіз можливий для кожної пояснювальної змінної окремо. Часто замість пояснювальних змінних X_j вздовж осі абсцис відкладаються значення $\hat{y}_i$, $i=\overline{1,n}$, які одержані за емпіричним рівнянням регресії. Такий аналіз виправдовує себе у випадку великої кількості змінних.

5.3.2. Тест Голдфелда – Квандта

У даному випадку припускається, що дисперсія збурень $\sigma_i^2=\sigma^2(\varepsilon_i)$ пропорційна квадрату значення x_i змінної *X* в цьому спостереженні, тобто

$$\sigma_i^2=\sigma^2 X_i^2,\ i=\overline{1,n}.$$

У тесті нульова гіпотеза проголошує:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ... = \sigma_n^2,$$

тобто припускається гомоскедастичність.

Альтернативна гіпотеза:

$$H_1: \text{ існує принаймні одне таке і , що } \sigma_i^2 \neq \sigma_1^2,$$

тобто припускається гетероскедастичність.

Тест Голдфелда- Квандта складається з таких кроків:

1. Усі *n* спостережень упорядковуються за величиною *X*.

2. Уся упорядкована вибірка після цього розбивається на три підвибірки розміру *k, (n-2k), k* відповідно.

3. Оцінюються окремо регресії для першої підвибірки (*k* перших спостережень) і для третьої підвибірки (*k* останніх спостережень). Якщо припущення про пропорційність дисперсій відхилень значенням *X* справедливе, то дисперсія регресії за першою вибіркою (сума квадратів відхилень $S_1 = \sum_{i=1}^{k} e_i^2$) буде значно третьою підвибіркою (сума квадратів відхилень $S_3 = \sum_{i=n-k+1}^{n} e_i^2$).

4. Для порівняння відповідних дисперсій будується наступна *F* - статистика

$$F = \frac{S_3 / (k-p-1)}{S_1 / (k-p-1)} = \frac{S_3}{S_1} \ . \qquad (5.3.)$$

Тут (*к–р–1*) – число ступенів свободи відповідних вибіркових дисперсій (*р* – кількість пояснювальних змінних у рівнянні регресії).

Статистика (5.3.) має розподіл Фішера з числом ступенів свободи $\nu_1 = \nu_2 = к - p - 1$.

5. Якщо $F_ф = \frac{S_3}{S_1} > F_{кр} = F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}$, то гіпотеза про відсутність гетероскедастичності відхиляється (α - рівень значущості).

Для парної регресії Голдфелд і Квандт пропонують такі пропозиції відносно *n* і *к*: $n = 30$, $к = 11$; $n = 60$, $к = 22$.

Для множинної регресії даний тест проводиться для тієї пояснювальної змінної, яка більш за все пов'язана з σ_i. При цьому *к* повинно бути більше, ніж (*р+1*). Якщо немає впевненості вибору змінної X_j, то даний тест можна застосувати для кожної пояснювальної змінної.

5.4. Оцінка параметрів моделі з гетероскедастичними збуреннями при відомій матриці K_0

Якщо матриця K_0 (див. (5.2)) відома, то оцінки параметрів моделі з гетероскедастичними збуреннями можна знайти таким чином:

1.За методом Ейткена (УМНК)

$$\hat{\hat{b}} = (X'K_0^{-1}X)^{-1}X'K_0^{-1}Y,$$

де

$$K_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varpi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varpi_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\varpi_n} \end{pmatrix} \qquad (5.4.)$$

(див. формули (4.3) – (4.5)).

2. Перетворюванням початкових даних X і Y і застосуванням МНК для перетвореної моделі.

Початкові дані X і Y при гетероскедастичності можуть бути перетворені за допомогою матриці

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\varpi_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\varpi_2}} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{\varpi_n}} \end{pmatrix},$$

а саме :

$$Y_{пр} = T \cdot Y \ , \qquad X_{пр} = T \cdot X .$$

Модель, у якій розглядаються початкові дані $Y_{пр}$, $X_{пр}$ задовольняє умовам класичної лінійної моделі. А отже, до неї може бути застосований метод найменших квадратів.

Оцінки, одержані за методом Ейткена, будуть ідентичні оцінкам, які одержані за методом перетворення початкової інформації.

5.5. Оцінки параметрів моделі з гетероскедастичними збуреннями при невідомій матриці K_0

У разі невідомої матриці K_0 її необхідно оцінити, тобто оцінити елементи ϖ_i $, i = \overline{1,n}$. Оскільки число їх дорівнює n, то без додаткових обмежень на структуру матриці K_0 немає надії одержати оцінки. Розглянемо декілька типів моделей з гетероскедастичними збуреннями, де такі обмеження впроваджуються, що дає змогу знайти задовільні оцінки матриці K_0. А якщо буде відома оцінка матриці K_0, то для оцінки параметрів моделі можна застосувати або метод Ейткена або метод перетворення вихідної інформації:

1. Дисперсії збурень σ_i^2 пропорційні до пояснювальної змінної X_i:

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 x_{ik} .$$

Тоді $\varpi_i = x_{ik}$, $i = \overline{1,n}$.

2. Дисперсії збурень σ_i^2 пропорційні до зміни квадратів пояснювальної змінної X_i^2. У цьому випадку $\varpi_i = x_{ik}^2$.

3. Дисперсії збурень σ_i^2 пропорційні до зміни квадратів залишків за модулем $\sigma_i^2 = \sigma^2 |e_i|^2$. Для цієї гіпотези $\varpi_i = |e_i|^2$.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення гомоскедастичності і гетероскедастичності.

2 Як впливає явище гетероскедастичності на оцінку параметрів моделі?

3 Назвіть методи визначення гетероскедастичності.

4 Як застосовується тест Голфелда - Квандта для визначення гетероскедастичності?

5 У чому полягають методи формування матриці K_0.

6 Запишіть оператор оцінювання параметрів моделі з гетероскедастичними збуреннями за методом Ейткена.

ЛЕКЦІЯ 7
6. Автокореляція

6.1. Поняття автокореляції збурень. Наслідки і усунення

Економетричну модель можна побудувати, використовуючи два типи вихідних даних:

а) дані, які характеризують сукупність різних об’єктів у визначений (конкретний) момент часу;

б) дані, які характеризують один об’єкт за низку послідовних моментів часу.

Моделі, які побудовані за даними типу а), називають просторовими моделями.

Моделі, які побудовані на основі даних типу б), називають моделями часових рядів.

Часовий ряд – це сукупність значень будь-якого показника за декілька послідовних моментів чи періодів часу.

При застосуванні регресійного аналізу на базі часових рядів у класичній моделі часто виявляється порушення: збурення в рівнянні є автокорельованими, в той час як дисперсії їх залишаються сталими. Це явище називають автокореляцією збурень.

У разі автокореляції матриця коваріацій збурень K_ε не буде діагональною, а отже, доведеться мати справу з узагальненою лінійною моделлю.

Якщо знехтувати наявністю автокореляції і для оцінювання параметрів моделі застосувати МНК, то можливі такі наслідки:

1) оцінки параметрів моделі залишаються лінійними та незміщеними, але вони не будуть ефективними, тобто вибіркові дисперсії вектора оцінок $\hat{b}$ можуть бути неоправдано великими;

2) оцінка $\hat{K}_{\hat{b}}$ коваріаційної матриці $K_{\hat{b}}$ оцінок $\hat{b}$ параметрів моделі буде зміщеною;

3) оцінка $\hat{\sigma}_2$ дисперсії збурень σ^2 буде зміщеною;

4) як наслідок, висновки за t- і F- статистиками, які визначають значущість коефіцієнтів регресії і коефіцієнта детермінації, можливо, будуть невірними. Це може привести до неефективних прогнозів.

При автокореляції можливі дві альтернативи дій:

а) змінити специфікацію моделі так, щоб усунути автокореляцію збурень (наприклад, ввести один або більше додаткових факторів);

б) оцінити параметри моделі за методом Ейткена.

6.2. Авторегресійний процес збурень першого порядку

Як було вже зазначено, автокореляція залишків зустрічається в регресійному аналізі при використанні даних часових рядів. У зв'язку з цим, далі замість символу і порядкового номера спостережень буде використовуватись символ t, який відбиває момент спостереження. Об'єм вибірки при цьому буде позначатися символом T замість n.

Автокореляція збурень означає, що збурення ε_t в регресійному рівнянні для періоду t залежить від збурень попередніх періодів в тому ж рівнянні. Можна також сказати, що при автокореляції збурення в період t залежить від власних значень попередніх періодів.

Природним припущенням відносно типу залежності збурень є гіпотеза, згідно з якою ця залежність послаблюється по мірі їх взаємного віддалення одне від одного загалом.

Найпростішим варіантом математичної формалізації цієї гіпотези є авторегресійний процес першого порядку

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + \delta_t,\ t = \overline{1,t}, \tag{6.1}$$

де δ_t – випадкова величина, яка задовольняє припущенням класичної моделі

$$M(\delta_t) = 0;$$

$$D(\delta_t) = M(\delta_t^2) = \sigma_0^2;$$

$$\operatorname{cov}(\delta_t, \delta_{t^*}) = 0,$$

а число ρ задовольняє умову $|\rho| < 1$.

Випадкова величина ε_i має такі числові характеристики:

$$M(\varepsilon_t) = 0,$$

$$D(\varepsilon_t) = \sigma^2 = \frac{\sigma_0^2}{1-\rho^2},$$

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = \sigma^2 \rho^k, \; k = 0,1,2,...$$

Отже, коваріаційна матриця збурень K_ε у випадку авторегресійного процесу першого порядку буде мати наступний вигляд:

$$K_\varepsilon = \frac{\sigma_0^2}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & ... & \rho^{n-2} & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & ... & \rho^{n-3} & \rho^{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & ... & \rho & 1 \end{pmatrix} = \sigma^2 \cdot K_0 \qquad .2)$$

де

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & ... & \rho^{n-2} & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & ... & \rho^{n-3} & \rho^{n-2} \\ . & . & . & . & . & . \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & ... & \rho & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.3)$$

Матриця K_0^{-1}, яка бере участь в усіх формулах узагальненого методу найменших квадратів, має такий вигляд:

$$K_0^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1+\rho^2 & -\rho & 0 & . & . & . & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & . & . & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho \end{pmatrix}. \qquad (6.4)$$

Число ρ є коефіцієнтом кореляції між сусідніми збуреннями.

Авторегресійні процеси більш високого порядку можуть бути висунуті як альтернативні гіпотези, якщо у спостереженнях даних є циклічні коливання. Наприклад, при обробці піврічних даних за наявності в них сезонних коливань вельми природною є робота з авторегресійним процесом другого порядку

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \delta_t.$$

При роботі з квартальними даними може бути доцільним розгляд авторегресійного процесу четвертого порядку

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \rho_3 \varepsilon_{e-3} + \rho_4 \varepsilon_{e-4} + \delta_t.$$

6.3. Диагностика автокореляції. Критерій Дарбіна-Уотсона

Найбільш відомим критерієм виявлення автокореляції першого порядку є критерій Дарбіна-Уотсона.

Нехай нульова гіпотеза полягає у тім, що автокореляція відсутня, тобто

$$H_0: \; \rho = 0.$$

Альтернативною гіпотезою може бути одна із наступних гіпотез:

$$H_1 \quad \rho \neq 0, \quad H_1: \quad \rho > 0, \quad H_1: \quad \rho < 0.$$

Критерій Дарбіна-Уотсона базується на статистиці

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{T} (l_t - l_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} e_t^2}, \tag{6.5}$$

де e_t – похибка регресійного рівняння в період t. Для її розрахунку виконується звичайна оцінка МНК досліджуваного рівняння (див. розділ 2.1.).

Статистика d тісно пов'язана з вибірковим коефіцієнтом кореляції $r_{e_t e_{t-1}} - 1$:

$$d \approx 2(1 - r_{e_t e_{e-1}}) \tag{6.6}$$

Отже, $0 \leq d \leq 4$, а її значення можуть вказувати на наявність або відсутність автокореляції. Дійсно, якщо $r_{e_t e_{t-1}} = 0$ (автокореляція відсутня), то d ≈ 2. Якщо $r_{e_t e_{t-1}} = 1$ (додатна автокореляція),то d ≈0. У разі $r_{e_t e_{t-1}} - 1 = -1$ (від'ємна автокореляція) $d \approx 4$.

Для більш точного визначення, яке із значеннь d вказує на відсутність автокореляції, а яке – про її наявність, була побудована таблиця критичних точок розподілу Дарбіна-Уотсона. За цією таблицею для заданого рівня значущості α, числа спостережень T і кількістю пояснювальних змінних P знаходять 2 значення: d_l – нижня межа і d_u – верхня межа.

Особливістю d-тесту є те, що між областями прийняття та відхилення нульової гіпотези існує область, в якій застосування цього тесту дає невизначеність.

Загальна схема застосування критерію Дарбіна-Уотсона така:

1. За побудованим рівнянням регресії

$$\hat{y}_t = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{t1} + \hat{b}_2 x_{t2} + \hat{b}_2 x_{t2} + \ldots + \hat{b}_p x_{tp}$$

знаходять похибки $e_t = y_t - \hat{y}_t$ для кожного спостереження t, $t=1,2,\ldots T$.

2. За формулою (6.5) розраховується статистика d.

3. За таблицею критичних точок Дарбіна-Уотсона знаходять 2 числа d_e і d_u і роблять висновки за правилом:

а) $0 \leq d \leq d_e$ – існує додатня автокореляція;

б) $d_e \leq d < d_u$ – висновок про наявність автокореляції не можна зробити;

в) $d_u \leq d < 4\text{-}d_u$ – автокореляція відсутня;

г) $4\text{-}d_u \leq d < 4\text{-}d_e$ – висновок про наявність автокореляції не можна зробити;

д) $4\text{-}d_e \leq d \leq 4$ – існує від'ємна автокореляція.

На практиці, якщо значення критерію Дарбіна-Уотсона попадає в зону невизначеності, то припускають, що існує автокореляція, тобто нульову гіпотезу відхиляють.

6.4. Оцінка параметрів моделі з автокорельованими збуреннями при відомій матриці K_0.

Якщо матриця K_0 відома (ρ відомо), то оцінити параметри моделі з автокорельованими збуреннями можна таким чином:

1. За методом Ейткена

$$\hat{\hat{b}} = (X'K_0^{-1}X)^{-1}X'K_0^{-1}Y ,$$

де

$$K_0^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -p & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1+\rho^2 & -\rho \end{pmatrix}$$

(див. формули (4.3)–(4.5)).

2. Перетворити початкові дані X і Y і застосувати НМК для перетворених вихідних даних (метод перетворення вихідної інформації).

Перетворення вихідної інформації виконується за допомогою матриці T_1 або T_2:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \qquad (6.7)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (6.8)$$

тобто замість матриці X застосовується матриця T_1X або T_2X, замість вектора $У$- $T_1У$ або $T_2У$.

6.5. Оцінка параметрів моделі з автокорельованими збуреннями при невідомій матриці K_0

Автокорегресійний параметр ρ, як правило, невідомий. Тому метод Ейткена, а також метод перетворення вихідної інформації, які в принципі вимагають знання параметра ρ, не можуть бути застосовані. Виникає

необхідність в процедурі оцінювання параметра ρ. Якщо знайти оцінку $\hat{\rho}$ параметра ρ, то потім можна застосувати або метод Ейткена, або метод перетворення вихідної інформації.

6.5.1 Метод Ейткена

Реалізацію методу Ейткена виконують у такій послідовності:

1. Оцінюють параметри моделі за методом МНК

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y$$

і розраховують вектор похибок (залишків) $e = Y - X\hat{b}$.

2. Досліджують залишки на наявність автокореляції за допомогою критерію Дарбіна-Уотсона. Якщо не можна відхилити гіпотезу про те, що $\rho \neq 0$, то виконують наступний крок.

3. Оцінюють автокореляційний параметр ρ і формують матрицю K_0. Оцінювач $\hat{\rho}$ для ρ розраховують таким чином:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{T} e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} e_e^2} \tag{6.9}$$

або

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{d}{2} \tag{6.10}$$

де $d -$ статистика Дарбіна-Уотсона, яка розрахована за формулою (6.5).

4. Знаходять матрицю K_0^{-1}, обернену до матриці K_0.

5. Оцінюють параметри моделі за методом Ейткена

$$\hat{\hat{b}} = (X'K_0^{-1}X)^{-1} X'K_0^{-1}Y,$$

$$\hat{\hat{K}}_{\hat{\hat{b}}} = \hat{\hat{\sigma}}^2 (X'K_0^{-1}X)^{-1},$$

$$\hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{e'K_0^{-1}e}{n - \rho - 1},$$

$$e = Y - \hat{\hat{Y}},$$

$$\hat{\hat{Y}} = X\hat{\hat{b}}.$$

6.5.2. Метод перетворення вихідної інформації

Оцінка методом перетворення вихідної інформації може бути проведена таким чином:

1. Оцінюють параметри моделі за методом МНК

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y$$

і знаходять залишки $e = Y - X\hat{b}$.

2. Досліджують залишки на наявність автокореляції за допомогою критерію Дарбіна-Уотсона. Якщо автокореляція присутня, то виконують наступний крок.

3. Оцінюють авторегресійний параметр ρ за формулою (6.9) або (6.10).

4. Перетворюють вихідні дані X і $У$ за допомогою матриці

$$T = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\hat{\rho}^2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\hat{\rho} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\hat{\rho} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{\rho} & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\hat{\rho} & 1 \end{pmatrix},$$

а саме

$$X_{пр} = TX, \qquad Y_{пр} TY.$$

5. Застосовують МНК до перетвореної вихідної інформації

$$\hat{\hat{b}} = (X'_{пр} X_{пр})^{-1} X'_{пр} Y_{пр},$$

$$\hat{\hat{K}}_{\hat{\hat{b}}} = \hat{\hat{\sigma}}^2 (X'_{пр} X_{пр})^{-1},$$

$$\hat{\hat{\sigma}}^2 = \frac{e'e}{n - \rho - 1},$$

$$e = Y_{пр} - X_{пр} \hat{\hat{b}}.$$

6.5.3. Метод Кохрейна-Оркатта

Ще одним можливим методом оцінювання ρ є ітеративний процес, який називають методом Кохрейна-Оркатта. Цей метод включає такі кроки:

1. Оцінюють параметри моделі $Y = X b + \varepsilon$ за методом МНК

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'Y.$$

2. Знаходять залишки першої ітерації $e^{(1)} = Y - X\hat{b}$.

3. Перше наближене значення $\hat{\rho}^{(1)}$ оцінки $\hat{\rho}$ параметра ρ беруть як МНК - оцінку коефіцієнта ρ в регресії

$$e_t^{(1)} = \rho \; e_{t-1}^{(1)} + \delta_t^{(1)},$$

де випадкова величина $\delta_t^{(1)}$ задовольняє класичним вимогам (див. розділ 6.2).

4. Знаходять УМНК-оцінку $\hat{\hat{b}}(\rho^{(1)}), \quad (\rho = \rho^{(1)})$.

5. Знаходять залишки другої ітерації

$$e_t^{(2)} = Y - X\hat{\hat{b}}(\rho^{(1)}).$$

6. Друге наближене значення $\hat{\rho}^{(2)}$ оцінки $\hat{\rho}$ параметра ρ беруть як МНК- оцінку коефіцієнта ρ в регресії

$$e_t^{(2)} = \rho e_{t-1}^{(2)} + \delta_t^{(2)}.$$

7. Знаходять УМНК-оцінку $\hat{\hat{b}}(\hat{\rho}^{(2)})$, $(\rho = \hat{\rho}^{(2)})$ і т.д.

Процес закінчується, коли чергове наближення $\hat{\rho}^{(i)}$ мало відрізняється від попереднього.

Процедура Кохрейна-Оркатта реалізована в більшості економетричних комп'ютерних програмах.

Питання для самоперевірки

1 Що таке автокореляція?

2 Яке припущення МНК порушується при автокореляції?

3 Які наслідки автокореляції?

4 У чому полягає сутність автокореляційного процесу збурень першого порядку?

5 Який вигляд має коваріаційна матриця збурень для авторегресійного процесу першого порядку?

6 Як можна діагностувати авторегресійний процес першого порядку?

7 Яка особливість критерію Дарбіна-Уотсона?

8 За якою схемою проводяться діагностики автокореляції за критерієм Дарбіна-Уотсона?

9 Як можна оцінити параметри моделі з автокорельованими збуреннями при відомій матриці K_0?

10 Як можна оцінити параметри моделі при невідомій матриці K_0?

11 За якою схемою проводиться оцінка регресійного параметра ρ за методом Кохрейна-Оркатта?

ЛЕКЦІЯ 8
7. Моделі часових рядів

Моделі, побудовані за даними, що характеризують один об'єкт за ряд послідовних моментів (періодів), називаються моделями часових рядів.

Часовий ряд – це сукупність значень якого-небудь показника за декілька послідовних моментів або періодів.

Кожен рівень часового ряду формується з трендової (T), циклічної (S) і випадкової (E) компонент.

Моделі, в яких часовий ряд представлений як сума вище згаданих компонент, – адитивні моделі, як добуток – мультиплікативні моделі часового ряду.

Адитивна модель має вигляд: $Y = T + S + E$; мультиплікативна модель $Y = T \cdot S \cdot E$.

Побудова адитивної й мультиплікативної моделей зводиться до розрахунку значень *T*, *S* і *E* для кожного рівня ряду. Побудова моделі включає наступні кроки:

1 вирівнювання початкового ряду методом ковзаючою середньою;

2 розрахунок значень сезонної компоненти *S*;

3 усунення сезонної компоненти з початкових рівнів ряду і отримання вирівняних даних в адитивній $(T + E)$ чи в мультиплікативній $(T \cdot E)$ моделі;

4 аналітичне вирівнювання рівнів $(T + E)$ або $(T \cdot E)$ і розрахунок значень *T* з використанням отриманого рівняння тренду;

5 розрахунок отриманих з моделі значень $(T + S)$ або $(T \cdot S)$;

6 розрахунок абсолютних і відносних помилок.

Автокореляція рівнів ряду – це кореляційна залежність між послідовними рівнями часового ряду:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} (y_t - \bar{y}_1) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^{n} (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^{n} (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}},$$

де $\bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t}{n-1}$; $\bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_{t-1}}{n-1}$ – коефіцієнт автокореляції рівнів ряду першого порядку;

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^{n} (y_t - \bar{y}_3) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^{n} (y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^{n} (y_{t-3} - \bar{y}_4)^2}},$$

де $\bar{y}_3 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_t}{n-2}$; $\bar{y}_4 = \frac{\sum_{t=3}^{n} y_{t-1}}{n-2}$ – коефіцієнт автокореляції рівнів ряду другого порядку.

Формули для розрахунку коефіцієнтів автокореляції старших порядків легко отримати з формули лінійного коефіцієнта кореляції.

Послідовність коефіцієнтів автокореляції рівнів першого, другого і так далі порядків називають автокореляційною функцією часового ряду, а графік залежності її значень від величини лагу (порядку коефіцієнта автокореляції) – корелограмою.

Побудову аналітичної функції для моделювання тенденції (тренду) часового ряду називають аналітичним вирівнюванням часового ряду. Для цього найчастіше застосовуються наступні функції:

лінійна $\hat{y}_t = a + bt$;

гіпербола $\hat{y}_t = a + \frac{b}{t}$;

експонента $\hat{y}_t = e^{a+bt}$;

степенева функція $\hat{y}_t = a \cdot t^b$;

парабола другого і вищих порядків $\hat{y}_t = a + b_1 \cdot t + b_2 \cdot t^2 + \ldots + b_k \cdot t^k$.

Параметри трендів визначаються звичайним МНК, незалежною змінною виступає час $t = 1, 2, 3, \ldots, n$, а в якості залежної змінної – фактичні рівні часового ряду y_t. Критерієм відбору найкращої форми тренду є найбільше значення скоректованого коефіцієнта детермінації R^2.

При побудові моделей регресії по часових рядах для усунення тенденції використовуються наступні методи.

Метод відхилень від тренду припускає обчислення трендових значень для кожного часового ряду моделі, наприклад $\hat{y}_t$ і $\hat{x}_t$, і розрахунок відхилень від трендів: $y_t - \hat{y}_t$ і $x_t - \hat{x}_t$. Для подальшого аналізу використовують не початкові дані, а відхилення від тренду.

Метод послідовних різниць полягає в наступному: якщо ряд містить лінійний тренд, тоді початкові дані замінюються першими різницями:

$$\Delta_t = y_t - y_{t-1} = b + \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\right);$$

якщо параболічний тренд - другими різницями:

$$\Delta_t^2 = \Delta_t - \Delta_{t-1} = 2b_2 + \left(\varepsilon_t - 2\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2}\right).$$

У разі експоненціального і степеневого тренду метод послідовних різниць застосовується до логарифмів початкових даних.

Модель, що включає чинник часу, має вигляд $y_t = a + b_1 x_t + b_2 t + \varepsilon_t$. Параметри a і b цієї моделі визначаються звичайним МНК.

Автокореляція в залишках - кореляційна залежність між значеннями залишків ε_t, за поточний і попередні моменти часу.

Для визначення автокореляції залишків використовують критерій Дарвіна - Уотсона і розрахунок величини:

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}, \ 0 \le d \le 4.$$

Коефіцієнт автокореляції залишків першого порядку визначається за формулою

$$r_1^{\varepsilon} = \frac{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t \cdot \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2}, \ -1 \le r_1^{\varepsilon} \le 1.$$

Критерій Дарбина-Уотсона і коефіцієнт автокореляції залишків першого порядку пов'язані співвідношенням

$$d \approx 2\left(1 - r_1^{\varepsilon}\right).$$

Економетричні моделі, що містять не лише поточні, але й лагові значення факторних змінних, називаються моделями з розподіленим лагом.

Модель з розподіленим лагом в припущенні, що максимальна величина лагу кінцева, має вигляд

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \ldots + b_p \cdot x_{t-p} + \varepsilon_t .$$

Коефіцієнт регресії b_0 при змінній x_t характеризує середня абсолютна зміна y_t при зміні x_t на 1 од. свого виміру в деякий фіксований момент часу t, без урахування дії лагових значень чинника x. Цей коефіцієнт називають короткостроковим мультиплікатором.

У момент $(t+1)$ дія факторною змінною x_t на результат y_t складе $(b_0 + b_1)$ умовних одиниць; у момент часу $(t+2)$ дію можна охарактеризувати сумою $(b_0 + b_1 + b_2)$ і т.д. Ці суми називають проміжними мультиплікаторами. Для максимального лагу $(t+l)$ дія чинника на результат описується сумою $(b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_l = b)$ яка називається довгостроковим мультиплікатором.

Величини $\beta_j = \frac{b_j}{b}$, $j = \overline{0,l}$, називаються відносними коефіцієнтами моделі з розподіленим лагом. Якщо усі коефіцієнти b_j мають однакові знаки, то для будь-кого j має місце $0 < \beta_j < 1$ і $\sum_{j=1}^{l} \beta_j = 1$.

Величина середнього лагу моделі множинної регресії визначається за формулою середньої арифметичної зваженої: $\overline{l} = \sum_{j=1}^{l} j \cdot \beta_j$ і є середнім періодом, впродовж якого відбуватиметься зміна результату під впливом зміни чинника в момент t.

Медіанний лаг – це період, впродовж якого з моменту часу буде реалізована половина загальної дії чинника на результат: $\sum_{j=0}^{l_{Me}-1} \beta_j \approx 0,5$, де l_{Me} - медіанний лаг.

Оцінку параметрів моделей з розподіленими лагами можна проводити згідно з одним з двох методів : методу Койка або методу Алмон.

У розподілі Койка робиться припущення, що коефіцієнти при лагових значеннях пояснювальної змінної спадають у геометричній прогресії:

$$b_l = b_0 \cdot \lambda^l ,\ l = 0,1,2,3,\ldots ,\ 0 < \lambda < 1 .$$

Рівняння регресії матиме вигляд $y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_0 \cdot \lambda \cdot x_{t-1} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$.

Після нескладних перетворень отримуємо рівняння, оцінки параметрів якого призводять до оцінок параметрів початкового рівняння.

У методі Алмон передбачається, що ваги поточних і лагових значень пояснюючих змінних підкоряються поліноміальному розподілу:

$$b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \ldots + c_k j^k .$$

Рівняння регресії набуде вигляду $y_t = a + c_0 \cdot z_0 + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + \ldots + c_k \cdot z_k + \varepsilon_t$, де $z_i = \sum_{j=1}^{p} j^i \cdot x_{t-j}$, $i = \overline{1,k}$, $z_0 = \sum_{j=0}^{p} x_{t-j}$.

Розрахунок параметрів моделі з розподіленим лагом методом Алмон проводиться за наступною схемою:

1 встановлюється максимальна величина лагу l;

2 визначається міра полінома k, лагу, що описує структуру;

3 розраховуються значення змінних $z_0,\ldots,z_k$;

4 визначаються параметри рівняння лінійної регресії y_t від z_t;

5 розраховуються параметри початкової моделі з розподіленим лагом.

Моделі, що містять в якості чинників лагові значення залежної змінної, називаються моделями авторегресії, наприклад:

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + c_1 \cdot y_{t-1} + \varepsilon_t .$$

Як і в моделі з розподіленим лагом, b_0 у цій моделі характеризує короткострокову зміну y_t, під впливом зміни x_t на 1 од. Довгостроковий мультиплікатор в моделі авторегресії розраховується як сума короткострокового і проміжних мультиплікаторів:

$$b = b_0 + b_0 c_1 + b_0 c_1^2 + b_0 c_1^3 + \ldots = b_0\left(1 + c_1 + c_1^2 + c_1^3 + \ldots\right) = \frac{b_0}{\left(1 - c_1\right)}$$

Відмітимо, що така інтерпретація коефіцієнтів моделі авторегресії і розрахунок довгострокового мультиплікатора засновані на передумові про наявність нескінченного лагу в дії поточного значення залежною змінною на її майбутні значення.

Питання для самоперевірки

1 Перелічити основні елементи часового ряду.

2 Що таке автокореляція рівнів часового ряду і як її можна оцінити кількісно?

3 Дати означення автокореляційної функції часового ряду.

4 Перелічити основні види трендів.

5 Як інтерпретувати параметри лінійного і експоненційного трендів?

6 Записати загальний вигляд мультиплікативної і адитивної моделей часового ряду.

7 Перелічити етапи побудови мультиплікативної і адитивної моделей часового ряду.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1 Аршава О.О., Поклонський Є.В., Стасенко О.М., Харченко А.П., Щелкунова Л.І.. Економетрія в прикладах і задачах. Навчально-методичний посібник. – Харків, ХНУБА, 2015.

2 Боровиков В.П. Statistica: искусство анализа данных на компьютере. – Питер, 2003.

3 Бородич С.А. Эконометрика – Минск: Новое знание, 2001.

4 Грубер Й. Эконометрия: Учебное пособие для студентов экономических специальностей. Т. 1: Введение в эконометрию. – К., 1996.

5 Дорохина Е.Ю. и др. Сборник задач по эконометрике. – М.:Экзамен, 2003.

6 Доугерти К. Введение в эконометрию. – М.: ИНФРА, 2009.

7 Елисеева И.И. и др. Практикум по эконометрике.– М.: Финансы и статистика, 2001.

8 Клебанова Т., Дубровина Н., Раевнева Е. Эконометрия - Х., 2005.

9 Леоненко М.М., Мішура Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. – К.: Інформтехніка, 1995.

10 Лондар С.Л., Юринець Р.В. Економетрія засобами MS Excel – К, 2004.

11 Лук’яненко І., Краснікова Л. Економетрия: Підручник. – К.:Знання, 1998.

12 Лук’яненко І., Краснікова Л. Економетрия: Практикум з використанням комп’ютера. – К: Знання, 1998.

13 Лук'яненко І.Г., Городніченко Ю.О. Сучасні економетричні методи в фінансах. – К.:Літера, 2003.

14 Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Навчальный курс -М.: Дело, 2004.

15 Назаренко О.М. Основи економетрики. – Київ, 2004.

16 Наконечний С.І. і ін. Економетрія – Київ, 2004.

17 Наконечний С.І., Терещенко Т.О., Водзянова Н.К., Роскач О.С. Практикум з економетрії: Навч. посібник. – К.: КНЕУ, 1998.

18 Черняк О.І., Ставицький А.В. Динамічна економетрія: Навчальний посібник. – К.: КНЕУ, 2000.

ЗМІСТ

Лекція 1 ……... 3

Лекція 2-3 ……... 14

Лекція 4 ……... 26

Лекція 5 ……... 31

Лекція 6 ……... 33

Лекція 7 ……... 38

Лекція 8 ……... 45

Список джерел інформації …… 50

Навчальне видання

АРШАВА Олена Олександрівна

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ТА МОДЕЛІ (ЕКОНОМЕТРИКА)

Тексти лекцій

Роботу до видання рекомендував Харченко А.П.

Редактор Пуцик В.І.

План 2019 р., поз. 9 Формат 60х84 1/16. Папір друк. №2.
Підп. до друку 10.09.18 Обл.-вид. арк. 2,5 Умов .друк. арк. 2,3
Тираж 50 прим. Зам. № 5348

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури