Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.М. Стасенко

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математика для економістів (вища математика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка»

Харків 2016

Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

Спеціальність 051

О.М. Стасенко

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математика для економістів (вища математика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка»

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 2 від 26.09.2016

Харків 2016

П.344,17

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математика для економістів(вища математика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка» / Укладач О.М. Стасенко – Харків: ХНУБА, 2016. - 186 с.

Рецензент Є.В. Поклонський

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Пропоновані методичні вказівки призначені для студентів спеціальності 051 «Економіка» з метою надання допомоги у вивченні теоретичного матеріалу і опануванні практичними навичками розв'язання задач з дисципліни «Математика для економістів (вища математика)».

Практичне заняття – форма навчального заняття, під час якого викладач організує детальний розгляд студентами окремих теоретичних положень навчальної дисципліни та формує вміння і навички їх практичного застосування шляхом індивідуального виконання студентом відповідно сформульованих завдань.

Методичні вказівки містять робочу програму модуля, питання для самоперевірки до модульного контролю, короткий теоретичний матеріал (означення, формулювання теорем, формули, алгоритми методів), приклади розв'язання задач та перелік завдань для самостійної роботи.

ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

1 семестр

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ І. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія.

Тема 1. Матриці. Визначники n–го порядку, їх властивості. Методи обчислення визначників.

Тема 2. Правило Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь. Знаходження розв'язків систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Тема 3. Вектори та дії з ними. Проекція вектора на вісь. Координати вектора. Розподіл відрізку у даному відношенні. Скалярний, векторний та змішаний добутки векторів. Їх властивості.

Тема 4. Рівняння лінії. Різні види рівняння прямої. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, рівняння пучка прямих, точка перетину.

Тема 5. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їхні властивості. Загальне рівняння кривої другого порядку.

Тема 6. Рівняння поверхні. Рівняння площини. Дослідження загального рівняння площини. Кут між площинами. Пряма лінія у просторі.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ ІІ. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної.

Тема 7. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними. Границя функції.

Тема 8. Перша та друга особливі границі. Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції.

Тема 9. Похідна функцій. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання функції. Таблиця похідних. Похідна оберненої, неявної, параметрично заданої функції. Диференціал функції.

Тема 10. Похідні та диференціали вищих порядків. Дотична, нормаль та асимптоти кривої. Диференціал дуги та кривина кривої.

Тема 11. Правило Лопіталя. Формули Тейлора. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Розкриття невизначеностей.

Тема 12. Монотонність, екстремуми функції. Опуклість, вгнутість, точки перегину. Асимптоти, загальна схема побудови графіка функцій.

2 семестр

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ І. Функції багатьох змінних. Визначені і невизначені інтеграли.

Тема 1. Означення функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали функцій двох змінних.

Тема 2. Екстремуми функцій багатьох змінних. Похідна за напрямом. Градієнт.

Тема 3. Невизначений інтеграл. Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування.

Тема 4. Інтегрування раціональних дробів.

Тема 5. Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування ірраціональних функцій.

Тема6. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбниця. Методи підстановки та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Тема 7. Геометричне та економічне застосування визначених інтегралів.

Тема 8. Невласні інтеграли. Інтеграл Ейлера-Пуассона.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ ІІ. Диференціальні рівняння. Ряди.

Тема 9. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння, однорідні відносно змінних. Лінійні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі.

Тема 10. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв’язку.

Тема 11. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв’язку. Метод варіації довільних сталих та спеціальна права частина.

Тема 12. Системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Тема 13. Числові ряди. Збіжність рядів. Гармонічний ряд. Необхідна умова збіжності. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами: ознака порівняння, ознака Даламбера, ознака Коші (радикальна, інтегральна).

Тема 14. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності. Область збіжності степеневого ряду.

Тема 15. Розвинення функції у степеневі ряди.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Матриці. Визначники *n*–го порядку, їх властивості.
Методи обчислення визначників. Правило Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь. Знаходження розв'язків систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Використовуючи правило обчислення визначника другого порядку, маємо: $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Приклад 2 Розв'язати нерівність $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$.

Розв'язання. Після обчислення визначника одержимо $2x^2 - 12x < 14$ або $x^2 - 6x - 7 < 0$. Розкладемо ліву частину одержаної нерівності на множники: $(x+1)(x-7)<0$. Для одержання розв'язків цієї нерівності застосуємо метод інтервалів (рис.1.1).

Рис.1.1

Таким чином, розв'язок нерівності: $x \in (-1; 7)$.

Приклад 3 Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

Розв'язання: Згідно з означенням визначника третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 60 + 0 - 5 - 0 - 0 + 32 = 87.$$

Приклад 4 Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$

методом Крамера;

Розв'язання. Для розв'язання системи за правилом Крамера обчислюємо головний та додаткові визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 16 = 31, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 23 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 69 + 24 = 93, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & 23 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 60 - 184 = -124.$$

Тоді $x_1 = \dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \dfrac{93}{31} = 3, \quad x_2 = \dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \dfrac{-124}{31} = -4.$

Приклад 5 Знайти матрицю

$$A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Використовуючи правила множення матриць на число та додавання матриць, знаходимо

$$A = 2\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 14 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 2} \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ -3 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 10+12 & 4-15 \\ 6-3 & 14-3 \\ -8-6 & 10+0 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Приклад 6 Знайти добуток $A\,B$, якщо $A = (3\ 2)$, $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Матриця A має розмір 1×2, матриця B має розмір 2×1, тому добуток $A\,B$ існує і в матрицею розміру 1×1.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(3\cdot 1 + 2\cdot(-1)\right) = (1).$$

Приклад 7 Знайти добуток ABC, якщо $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Задані матриці мають розмір 2×2, тому їх можна перемножити, причому одержимо матрицю того самого розміру. Помножимо спочатку A на B:

$$AB = \begin{pmatrix} 4\cdot(-28) + 3\cdot 38 & 4\cdot 93 + 3\cdot(-126) \\ 7\cdot(-28) + 5\cdot 38 & 7\cdot 93 + 5\cdot(-126) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}.$$

Тепер помножимо одержану матрицю на матрицю С:

$$ABC = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 7 + (-6)\cdot 2 & 2\cdot 3 + (-6)\cdot 1 \\ -6\cdot 7 + 21\cdot 2 & (-6)\cdot 3 + 21\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 8 Знайти матрицю $C = B - 2A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Маємо, $A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$.

Тоді $C - B - 2A^T = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}_{3x2} - 2\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}_{3x2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3x2}$.

Приклад 9 Установити, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок і знайти його за правилом Крамера.

Розв'язання. Для розв'язання системи за правилом Крамера потрібно обчислити головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(6-2) = -4$$

Оскільки $-4 \neq 0$, то система має єдиний розв'язок. Обчислимо додаткові визначники системи:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}1\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-14-(-18)) = -4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}1\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = (10-14) = -4,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}1\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-45-(-49)) = -4.$$

Тоді $x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{-4}{-4} = 1.$

Перевірка: $\begin{cases} 3\cdot 1 - 3\cdot 1 + 2\cdot 1 = 2, \\ 4\cdot 1 - 5\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1, \\ 5\cdot 1 - 6\cdot 1 + 4\cdot 1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2, \\ 1 = 1, \\ 3 = 3. \end{cases}$

Приклад 10 Знайти розв'язок системи за допомогою оберненої матриці.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

Розв'язання. У матричній формі дану систему можна записати таким чином:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3x3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3x1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3x1},$$

або коротко $AX = C$, звідки $X = A^{-1}C$, де A^{-1} – матриця, обернена до матриці A.

Обернена матриця A^{-1} існує, бо $\Delta = \det A = -8 \neq 0$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(4+1) = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-3) = 2, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2+4) = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6-1) = -5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6.$$

За формулою знаходження оберненої матриці одержуємо:

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо шуканий розв'язок

$$X = AC^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}_{3\times3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3\times1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2+6+7 \\ 2+2+5 \\ 4-4+6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/8 \\ -9/8 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1 = -11/8$; $x_2 = -9/8$; $x_3 = -3/4$;

Приклад 11 Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

матричним способом. Зробити перевірку.

Розв'язання. Розв'язок системи матричним способом знаходиться за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Складемо матриці $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -6 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$.

Знайдемо обернену матрицю системи $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, для цього обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці *A*.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-8,$ $A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=0,$ $A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -5 & 2\end{vmatrix}=4,$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-6,$ $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2,$ $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2,$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & -6\end{vmatrix}=1,$ $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3,$ $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-3.$

Обчислимо визначник матриці *A*: $\Delta=\begin{vmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -6 & 4\end{vmatrix}=-4$.

Отже, $X=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-8 & 0 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}(-8)\cdot 2+0\cdot 1+4\cdot 3\\ (-6)\cdot 2+2\cdot 1+2\cdot 3\\ 1\cdot 2+3\cdot 1+(-3)\cdot 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

або $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=1$.

Перевірка.

$$\begin{cases}3\cdot 1-3\cdot 1+2\cdot 1=2\\ 4\cdot 1-5\cdot 1+2\cdot 1=1\\ 5\cdot 1-6\cdot 1+4\cdot 1=3\end{cases},\quad \begin{cases}2=2\\ 1=1\\ 3=3\end{cases}.$$

Приклад 12 Розв’язати систему методом Гауса

$$\begin{cases}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1,\\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6,\\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.\end{cases}$$

Розв’язання. Працювати зручніше не з самою системою, а з матрицею з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1\\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6\\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\underset{I}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12\end{bmatrix}\underset{II}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3\end{bmatrix}\underset{III}{\sim}$$

I - помножимо елементи 1-го рядка по черзі на -2, -1, -3 і додамо відповідно до елементів 2-го, 3-го і 4-го рядків;

II - поділимо елементи 4-го рядка на -4;

III - поміняємо місцями 2-й і 4-й рядки;

$$\underset{III}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7\end{bmatrix}\underset{IV}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2\end{bmatrix}\underset{V}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12\end{bmatrix}.$$

IV - помножимо елементи 2-го рядка по черзі на 1 і 3, додамо їх відповідно до елементів 3-го і 4-го рядків;

V - помножимо елементи 3-го рядка на 2 і додамо до елементів 4-го рядка, а в одержаній матриці елементи 3-го рядка помножимо на -1;

VI - елементи четвертого рядка поділимо на 3.

Одержуємо матрицю, що еквівалентно даній і має той самий ранг:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{bmatrix}.$$

Очевидно, що ця матриця має ранг, що дорівнює 4. Тобто ранги матриці системи і розширеної матриці системи однакові і дорівнюють числу невідомих (система визначена).

Одержано трикутну матрицю, яка відповідає наступній системи рівнянь:

$$\begin{cases}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4,\\ x_2 - x_3 + x_4 = 3,\\ x_3 - 2x_4 = -5,\\ x_4 = 4.\end{cases}$$

Ця система має трикутну форму.

З цієї системи всі невідомі визначаються послідовно, а саме:

$$x_4 = 4,$$
$$x_3 = -5 + 2\cdot 4 = 3,$$
$$x_2 = 3 + 3 - 4 = 2,$$
$$x_1 = 4 - 2 + 3 - 4 = 1.$$

Розв’язок системи має вигляд (1;2;3;4).

Приклад 13 Розв’язати систему $\begin{cases}x_1 + 2x_2 + x_3 = 4,\\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3\end{cases}$ методом Гауса.

Розв’язання. $\begin{cases}x_1 + 2x_2 + x_3 = 4\\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3\end{cases}$. Запишемо розширену матрицю системи $A = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 2 & 3\end{array}\right)$. Застосуємо елементарні перетворення (від другого рядка віднимаємо елементи першого, помноженні на 2):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 2 & 4 & 2 & 3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & -5\end{array}\right).$$

З останньої матриці видно, що rang A $\neq$ rang $\overline{A}$, отже за теоремою Кронекера-Капеллі система несумісна.

Однорідні системи завжди сумісні, оскільки завжди існує, так званий, тривіальний розв'язок $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$. Якщо в однорідній системі кількість рівнянь менше кількості невідомих ($m < n$), то така система, крім тривіального розв'язку, має безліч нетривіальних розв'язків.

Приклад 14 Розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь методом Гауса: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи та виконаємо елементарні перетворення розширеної матриці системи:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{I}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{II}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{III}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \end{array}\right) \underset{\text{IV}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/7 & 0 \\ 0 & 1 & 4/7 & 0 \end{array}\right).$$

I – перший рядок помножили на 2 і додали до другого, потім перший рядок додали до третього;
II – відняли від третього рядка другий;
III – відкинули рядок з усіма нулями, а другий рядок розділили на 7;
IV – другий рядок помножили на 2 та відняли від першого.

З останньої матриці запишемо систему: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}x_3, \\ x_2 = -\dfrac{4}{7}x_3. \end{cases}$

Отже, система має безліч розв'язків $\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{7}t, \\ x_2 = \dfrac{4}{7}t, \quad t \in R. \\ x_3 = t. \end{cases}$

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.3-4], с. 15 – 34.

Вправи

1 Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+1 & в-c \\ a^2+a & aв-ac \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 18; б) 10; в) 0; г) 0.

2 Розв'язати рівняння:

а) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$; б) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0$.

Відповідь: а) $x_1 = -\dfrac{1}{6}$; $x_2 = \dfrac{3}{2}$; б) $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2}n, \quad n \in Z$;

в) $x = \frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n \in Z$.

3 Розв'язати нерівності:

а) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$; б) $\begin{vmatrix} 2x-3 & -1 \\ 7 & 2x \end{vmatrix} \le 11$.

Відповідь: а) $x > 3$; б) $-0{,}5 \le x \le 2$.

4 Установити, що система має єдиний розв'язок і знайти його за правилом Крамера.

а) $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$

Відповідь: а) $x=y=z=1$; б) $x=1, y=3, z=5$.

5 Знайти матрицю $D = 2A + BC - A^2$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}$.

6 Знайти союзну матрицю для матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Відповідь: $\hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

7 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

матричним способом.

Відповідь: $x_1=2, x_2=1, x_3=0$.

8 Розв'язати систему лінійних рівнянь (n – сума цифр у вашому дні народження): методом Гауса: а) $\begin{cases} 6x_1 + nx_2 = n+6, \\ x_1 + 3x_2 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - nx_3 = 7-n, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

Питання для самоперевірки

1 Дати означення визначників другого та третього порядку.

2 Дати означення мінору елемента визначника.

3 Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?

4 Навести правило обчислення визначника n – го порядку.

5 Які перетворення не змінюють величину визначника?

6 Яке перетворення змінює лише знак визначника?

7 За яких умов визначник може дорівнювати нулю?

8 Дати означення матриці.

9 Що називають розміром матриці?

10 Які існують види матриць?

11 Сформулюйте правила додавання, віднімання матриць, множення матриці на число і множення матриць.

12 Яка матриця називається оберненою і за якою формулою вона знаходиться?

13 Які існують методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?

14 Яку систему називають лінійною?

15 Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною, несумісною, визначеною і невизначеною?

16 Напишіть формули Крамера.

17 У чому полягає матричний спосіб розв'язання системи лінійних рівнянь?

18 У чому полягають елементарні перетворення матриці?

19 У чому полягає метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Вектори та дії з ними. Проекція вектора на вісь. Координати вектора. Розподіл відрізку у даному відношенні. Скалярний, векторний та змішаний добутки векторів. Їх властивості. Рівняння лінії. Різні види рівняння прямої. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, рівняння пучка прямих, точка перетину.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти координати вектора $\vec{a}$, початок якого знаходиться в точці $M_1(2,-3,0)$, кінець – у точці $M_2(1,1,2)$.

Розв'язання. Вектор $\vec{a}$ має координати

$$\vec{a} = (1-2;\ 1+3;\ 2-0) = (-1;\ 4;\ 2).$$

Приклад 2 Обчислити довжину вектора $3\bar{a}+2\bar{b}$, якщо $\bar{a}=2\bar{i}$, $\bar{b}=\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів: $3\bar{a}=(3\cdot 2;3\cdot 0;3\cdot 0)$, $3\bar{a}=(6;0;0)$; $2\bar{b}=(2\cdot 1;2\cdot 1;2\cdot(-1))$, $2\bar{b}=(2;2;-2)$; $3\bar{a}+2\bar{b}=(6+2;0+2;0-2)$, $3\bar{a}+2\bar{b}=(8;2;-2)$.

Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:

$$\left|3\bar{a}+2\bar{b}\right| = \sqrt{(8)^2+2^2+(-2)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36\cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Приклад 3 Дано три точки A (1, 1, 1), B (2, 2, 1) і C (2, 1, 2). Знайти кут $\varphi = \angle BAC$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\vec{AB}$ = (1, 1, 0), $\vec{AC}$ = (1, 0, 1). Згідно з формулою кута між векторами маємо:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}, \text{ отже, } \varphi = 60°.$$

Приклад 4 Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$. Обчислити $пр_{\vec{n}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

Розв'язання. За формулою обчислення проекції вектора на вектор одержуємо: $пр_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \dfrac{\vec{c}\cdot\left(\vec{a} + \vec{b}\right)}{|c|}$.

Знайдемо спочатку координати вектора $\vec{a} + \vec{b}$. Оскільки $\vec{a} = \{3;\ -6;\ -1\}$, $\vec{b} = \{1;4;\ -5\}$, $\vec{a} + \vec{b} = \{3+1;\ -6+4;\ -1;\ -5\} = \{4;\ -2;\ -6\}$.

Далі, використовуючи вище зазначену формулу, одержимо:

$$пр_{\vec{c}}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{3\cdot 4 + (-4)\cdot 2 + 12\cdot(-6)}{\sqrt{9+16+144}} = 4.$$

Приклад 5 Дано трикутник своїми вершинами: $A(2;\ 4;\ 5)$, $B(-3;\ 2;\ 2)$, $C(-1;\ 0;\ 3)$. Покажіть, що $\overline{CA} \perp \overline{CB}$.

Розв'язання. Знайдемо координати векторів:

$\overline{CA} = (2-(-1);\ 4-0;\ 5-3)$; $\overline{CA} = (3;\ 4;\ 2)$;

$\overline{CB} = (-3-(-1);\ 2-0;\ 2-3)$; $\overline{CB} = (-2;\ 2;\ -1)$.

Умова перпендикулярності двох векторів має вигляд: $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$. Перевіримо виконання цієї умови:

$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 3\cdot(-2) + 4\cdot 2 + 2\cdot(-1) = -6 + 8 - 2 = 0$.

Доведено, що вектори перпендикулярні.

Приклад 6 Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$.

Розв'язання. Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k}\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\cdot(2-1) - j\cdot(2+2) + \bar{k}\cdot(-1-2) = \bar{i} - 4\bar{j} - 3\bar{k}.$$

Площа паралелограма дорівнює: $S = \left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26}\,(êâ.\ î\ ä.)$.

Приклад 7 У просторі задано чотири точки *A* (1, 1, 1), *B* (4, 4, 4), *C* (3, 5, 5), *D* (2, 4, 7). Знайти об'єм піраміди *ABCD*.

Розв'язання. Об'єм піраміди *ABCD* дорівнює одній шостій об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ і $\vec{AD}$, а останній, у свою чергу, дорівнює модулю мішаного добутку. Отже, маємо:

$$\vec{AB} = (3, 3, 3),\ \vec{AC} = (2, 4, 4),\ \vec{AD} = (1, 3, 6);$$

$$V_{\text{пр}} = \frac{1}{6}\left|\vec{AB}\left(\vec{AC}\cdot\vec{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3 \text{ куб. од.}$$

Приклад 8 Довести, що точки $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$, $D(5;\ 0;\ -6)$ лежать в одній площині.

Розв'язання. Щоб довести, що ці чотири точки лежать в одній площині, доведемо, що в одній площині лежать вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, тобто ці три вектори компланарні.

Умова компланарності трьох векторів має вигляд:

$$\overline{AB}\quad\overline{AC}\quad\overline{AD} = 0.$$

Знайдемо координати векторів:

$$\overline{AB} = (-1;\ 3;\ 3);\ \overline{AC} = (0;\ 4;\ 2);\ \overline{AD} = (3;\ 1;\ -4).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{AB}\quad\overline{AC}\quad\overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-16-2) + 3\cdot(6-12) = 18-18 = 0.$$

Таким чином, точки *A*, *B*, *C*, *D* лежать в одній площині.

Приклад 9 Дано вектори $\vec{a}$ =(*-1;2;5*), $\vec{b}$ =(*3;1;-2*), $\vec{c}$ =(*4;1;7*).

Необхідно:

1 знайти орти векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$;

2 перевірити, чи є вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ попарно перпендикулярними;

3 перевірити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на колінеарність;

4 перевірити, чи є вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарними;

5 знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

6 обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Розв'язання. 1 Скористаємося формулами:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\frac{a_y}{|\vec{a}|};\frac{a_z}{|\vec{a}|}\right),\ \text{де}\ |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Дійсно,

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30};\ \vec{a}^0 = (\frac{-1}{\sqrt{30}};\frac{2}{\sqrt{30}};\frac{5}{\sqrt{30}}).$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14};\ \vec{b}^0 = (\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{-2}{\sqrt{14}}).$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{16+1+49} = \sqrt{66}\ ;\ \vec{c}^{\,0} = (\frac{4}{\sqrt{66}}; \frac{1}{\sqrt{66}}; \frac{7}{\sqrt{66}})\ .$$

2 Скористаємося умовою перпендикулярності:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0\,,$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \Leftrightarrow a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 0\,,$$

$$\vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0\,.$$

Обчислимо скалярні добутки векторів

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ =(-1)·3+2·1+5·(-2)= -11≠ 0, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не перпендикулярні;

$\vec{a} \cdot \vec{c}$ =(-1)·4+2·1+5·7= 33≠ 0, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні;

$\vec{b} \cdot \vec{c}$ =3·4+1·1+(-2)·7= -1≠ 0, тобто вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні.

3 Скористаємося умовою колінеарності:

$$\vec{a} \ \parallel\ \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

$\frac{-1}{3} \neq \frac{2}{1} \neq \frac{5}{-2}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні;

4 Скористаємось умовою компланарності трьох векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0\,.$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -7 - 16 + 15 - (20 + 42 + 2) = -72\,,$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} \neq 0$, тобто вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ не компланарні.

5 Площу паралелограма знайдемо за формулою:

$$S_{пар} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \right\|\,,$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 13\vec{j} - 7\vec{k}\,.$$

Отже, $S_{пар} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-9)^2 + 13^2 + (-7)^2} = \sqrt{299}$ (кв.од.).

6 Об’єм паралелепіпеда знайдемо за допомогою формули:

$$V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| = \left\| \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \right\|\,.$$

Отже, $V = \left\| \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -7 \end{vmatrix} \right\| = |26| = 26$ (куб.од.).

Побудова лінії у полярній системі координат

Для побудови графіка кривої L, рівняння якої записане в полярній системі координат, пропонується виконувати наступні кроки:

1) дослідити криву на визначення областей, де існує графік заданої функції;
2) скласти таблицю і побудувати точки з заданим кроком;
3) з´єднати одержані точки послідовно плавною лінією. Одержують криву *L*.

Приклад 10 Побудувати лінію в полярній системі координат, яка має рівняння $\rho = a\cos 2\varphi$.

Розв'язання. Оскільки $\rho \ge 0$ і константа $a > 0$, то повинна виконуватись умова $cos 2\varphi \ge 0$. Звідси маємо $2\pi k - \frac{\pi}{2} \le 2\varphi \le 2\pi k + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi k - \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi k + \frac{\pi}{4}$.

Визначимо діапазон кутів, у яких існує графік функції:

$k = 0$ $\quad -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$,

$k = 1$ $\quad \pi - \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} \le \varphi \le \frac{5\pi}{4}$,

$k = 2$ $\quad 2\pi - \frac{\pi}{4} \le \varphi \le 2\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{7\pi}{4} \le \varphi \le \frac{9\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

Для кутів φ, які не потрапляють у зазначені проміжки, графік функції не існує.

Складемо таблицю 10.1.

Таблиця 10.1

φ	-45°	-30°	0°	30°	45°
ρ	0	0,87a	a	0,87a	0

За одержаними розрахунковими даними побудуємо лінію (рис.10.1):

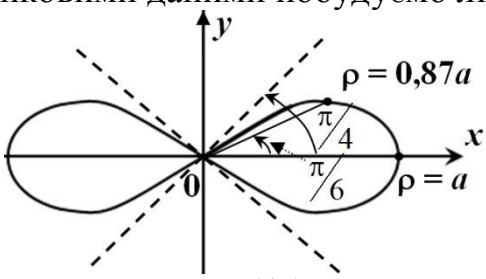


Рис. 10.1

Приклад 11 Побудувати лінію, яка задана рівнянням $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Розв'язання. Щоб побудувати графік заданої лінії (кардіоїди), складемо таблицю 11.1 з кроком $h = 45^\circ$ і приймемо $\sqrt{2} \approx 1{,}4$.

Таблиця 11.1

φ	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
ρ	$2a$	$1{,}7a$	a	$0{,}3a$	0	$0{,}3a$	a	$1{,}7a$	$2a$

Для зручності на рисунку 11.1 залишимо осі прямокутної декартової системи координат.

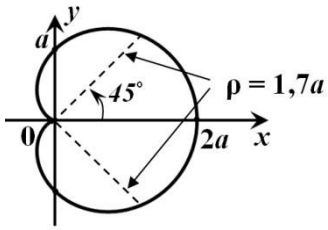
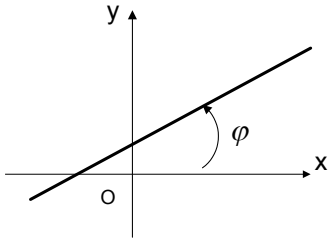
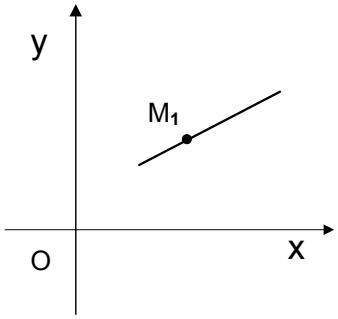
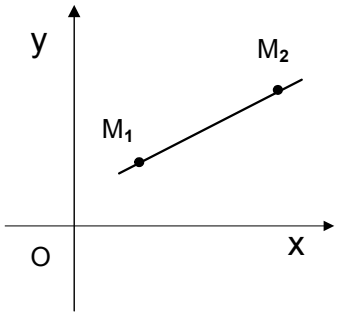
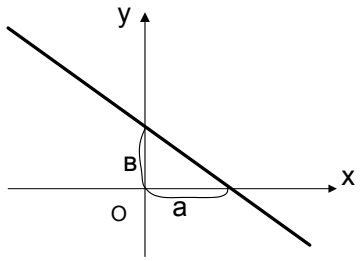
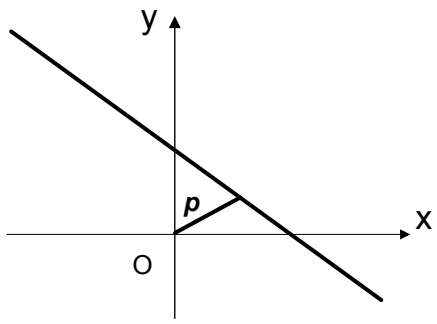
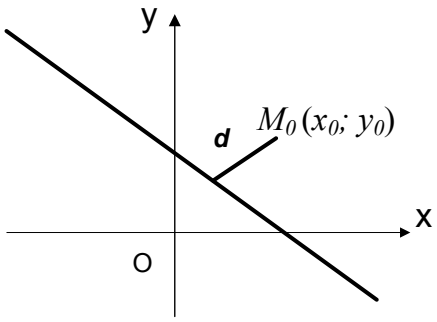
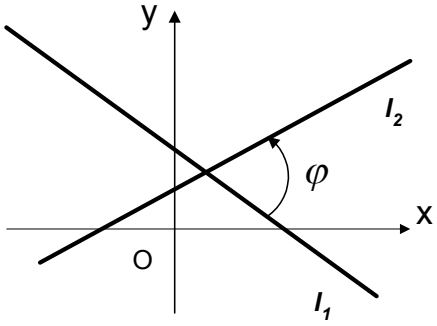
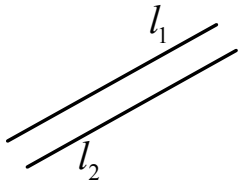
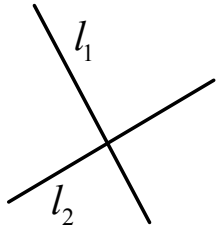
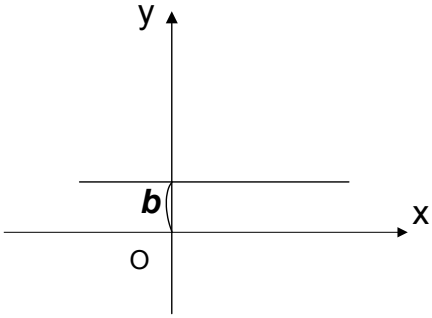
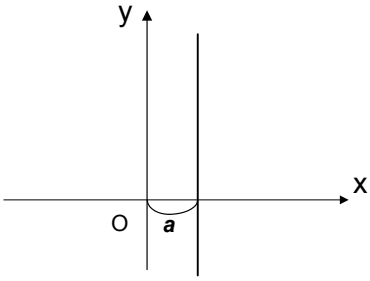


Рис. 11.1

Таблиця 2.1 **Пряма лінія та її рівняння**

№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	2	3	4
1	Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом	 $k = tg\varphi$ - кутовий коефіцієнт (φ - кут нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox), b - відрізок, який пряма відтинає на осі Oy.	$y = kx + b$
2	Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданому напрямі	 $M_1(x_1; y_1) \in l$	$y - y_0 = k(x - x_0)$
3	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	 $M_1(x_1; y_1) \in l$ $M_2(x_2; y_2) \in l$ $k = tg\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

4	Рівняння прямої у відрізках		$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a і b - довжини відрізків, які пряма відтинає на осях координат;
5	Загальне рівняння прямої	$к=-\frac{A}{B}$ $в=-\frac{C}{B}$	$Ax+By+C=0$.
6	Нормальне рівняння прямої		$x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ або $\frac{Ax+By+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$.
7	Відстань від точки до прямої	 $M_0(x_0;\ y_0)$	$d=\frac{\lvert Ax_0+By_0+C\rvert}{\sqrt{A^2+B^2}}$.
8	Кут між двома прямими		$tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$, якщо рівняння прямих задані у вигляді $y=kx+b$, або $\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$, якщо рівняння прямих задані у вигляді $Ax+By+C=0$.

9	Умова паралельності двох прямих	 l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\kappa_1 = \kappa_2$, або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$
10	Умова перпендику-лярності двох прямих	 l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1$, або $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.
11	Умова збіжності двох прямих	l_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ l_2: $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.
12	Рівняння прямої, яка проходить через початок координат		$y = kx$, або $Ax + By = 0$.
13	Рівняння прямої, що паралельна осі абсцис		$y = в$, або $By + C = 0$.
14	Рівняння прямої, що паралельна осі ординат		$x = a$, або $Ax + C = 0$.

15	Рівняння осі абсцис		$y=0$.
16	Рівняння осі ординат		$x=0$.

Приклад 12 Скласти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(2;1)$ перпендикулярно до даної прямої $2x+3y+4=0$ (l_1).

Розв'язання. Будемо шукати рівняння прямої l у вигляді:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Оскільки за умовою задачі $l \perp l_1$, $kk_1=-1$, звідки $k=\frac{3}{2}$. Ураховуючи також, що $x=2$, $y=1$ остаточно матимемо:

$$y-1=\frac{3}{2}(x-2) \text{ або } 3x-2y-4=0 \text{ рівняння прямої } l.$$

Приклад 13 Визначити за яких значень m, n прямі $mx+8y+n=0$ і $2x+my-1=0$ 1) паралельні , 2) збігаються, 3) перпендикулярні?

Розв'язання. Згідно з умовою паралельності прямих:

$$\frac{m}{2}=\frac{8}{m}\neq\frac{n}{-1}.$$

Розв'язуючи рівняння $\frac{m}{2}=\frac{8}{m}$, одержимо $m=\pm 4$. Тоді при $m=4$ з нерівності $\frac{8}{m}\neq\frac{n}{-1}$ маємо $n\neq -2$, а при $m=-4$ $n\neq -2$. Таким чином, задані прямі паралельні, якщо $m=4$, $n\neq -2$ або $m=-4$, $n\neq 2$.

Якщо прямі збігаються, тоді :

$$\frac{m}{2}=\frac{8}{m}=\frac{n}{-1},$$

звідки одержуємо, що $m=4$, $n=-2$ або $m=-4$, $n=2$. Прямі перпендикулярні, якщо $2m+8m=0$, звідки $m=0$. При цьому n може набувати довільних значень.

Приклад 14 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(2;3)$ і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини, рахуючи кожний відрізок від початку координат.

Розв'язання. Шукатимемо рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

За умовою $|a|=|b|$. Тоді , якщо $ab>0$, то рівняння прямої $x+y=a$, якщо $ab<0$, то рівняння набуде вигляду $x-y=a$. Точка $M(2;3)$ належить кожній з цих прямих, тому її координати задовольняють кожному рівнянню. Підставляючи в рівняння $x+y=a$, замість змінних координат , координати точки M, одержимо 2+3=a, звідки a=5. Отже, рівняння шуканої прямої в

цьому випадку буде $x+y=5$ або $x+y-5=0$. При x=2 і y=3 з рівняння $x-y=a$ маємо $2-3=a$, звідки $a=-1$. Таким чином, у цьому випадку рівняння шуканої прямої буде $x-y+1=0$.

Зазначимо, що коли $a=b=0$, записати рівняння шуканої прямої у вигляді $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ не можна, бо це рівняння втрачає значення. У цьому випадку рівняння прямої треба шукати у вигляді $y=kx$ або $Ax+By=0$, бо умова $a=b=0$ означає, що пряма проходить через початок координат. Отже, застосовуючи рівняння прямої, що проходить через початок координат, і враховуючи, що точка M належить цій прямій, матимемо ще одне рівняння шуканої прямої: $y=kx,\quad 3=2k,\quad k=\frac{3}{2},\quad y=\frac{3}{2}x,\quad 3x-2y=0$.

Таким чином умові задачі задовольняють три прямі:

$$x+y-5=0,\quad x-y+1=0,\quad 3x-2y=0.$$

Приклад 15 Задані координати вершин трикутника *ABC*: *A*(3;-2), *B*(1;4), *C*(-2;1). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони *AB*;
2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини *C*;
3) обчислити довжину висоти *CD*;
4) знайти площу трикутника;
5) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *A* (рис. 3.6).

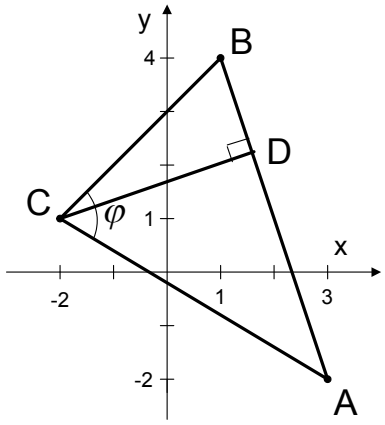


Рис. 3.6

Розв'язання. 1) Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $A(x_1,y_1)$ и $B(x_2,y_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Для *A(3;-2), B(1;4)* маємо: $\frac{x-3}{1-3}=\frac{y-(-2)}{4-(-2)}$; $\frac{x-3}{-2}=\frac{y+2}{6}$;

$-3(x-3)=y+2$; $3x+y-7=0$ - загальне рівняння прямої *AB*;

$y=-3x+7$ - рівняння прямої *AB* з кутовим коефіцієнтом , $k_{AB}=-3$.

2) Складемо рівняння прямої $CD \perp AB$. З умови перпендикулярності прямих $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} \quad \Rightarrow \quad k_{CD} = \frac{1}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через точку $C(x_0;y_0)$: $y - y_0 = k(x - x_0)$. Для $C(-2;1)$ маємо: $y - 1 = \frac{1}{3}(x+2)$, тобто $x - 3y + 5 = 0$ - загальне рівняння прямої CD.

3) Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої AB за формулою: $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де $Ax + By + C = 0$ - рівняння прямої AB. $d = \frac{|3\cdot(-2) + 1 - 7|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$ (од.).

4) Площа трикутника дорівнює половині добутку довжини сторони на довжину висоти, яка опущена на цю сторону: $S_\Delta = \frac{1}{2}a\cdot h_a$, тобто $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CD$.

Довжину сторони AB знайдемо за формулою

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (4-(-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$. Тоді

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\frac{6\sqrt{10}}{5} = 12$ (кв. од.)

5) Тангенс кута φ - кута між прямими AC і BC знайдемо за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC}\cdot k_{AC}}$$

$$k_{AC} = -\frac{3}{5}; \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-4}{-2-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad tg\varphi = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - 1\cdot\frac{3}{5}} = 4,$$

$\varphi = arctg4 \approx 76^\circ$.

Приклад 16 Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x - 12y - 65 = 0$ і $5x - 12y + 26 = 0$. Обчислити його площу.

Розв'язання. Для обчислення площі квадрата треба знайти довжину його сторони. Для цього досить знайти відстань між паралельними прямими $5x - 12y - 65 = 0, 5x - 12y + 26 = 0$, на яких розташовані дві сторони квадрату. (умову паралельності цих прямих перевіряти самостійно). Знайдемо на одній з цих прямих, наприклад, на прямій $5x - 12y - 65 = 0$, координати будь-якої точки. Для цього покладемо $y = 0$. Тоді $5x - 65 = 0$, звідки $x = 13$. Таким чином, точка $M(13;0)$ належить прямій $5x - 12y - 65 = 0$. Після цього задача зводиться до знаходження відстані від точки M до прямої $5x - 12y + 26 = 0$. За

формулою $d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ маємо $d=\frac{|5\cdot 13-12\cdot 0+26|}{\sqrt{25+144}}=7$. Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 7 , а його площа $S=7^2=49$ кв. од.

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.5], с. 34 – 43.

Вправи

1 Відомі дві координати вектора: $a_x=4$; $a_y=-12$. Знайти його третю координату a_z, якщо $\left|\vec{a}\right|=13$

Відповідь: $a_z=\pm 3$.

2 Знайти початок вектора $\vec{a}=\{2;\ -3;\ -1\}$, якщо його кінець збігається з точкою $M\ (1;-1;2)$.

Відповідь: $(-1;2;3)$.

3 Знайти орт вектора $\vec{a}=\{2;\ -3;-1\}$.

Відповідь: $\vec{a}^0=\left\{\frac{3}{13};\frac{4}{13};-\frac{12}{13}\right\}$;

4 Вектор утворює з осями $0x$ і $0y$ кути 40 і 80°. Знайти кут, який утворює цей вектор з віссю $0x$.

Відповідь: 128°.

5 Побудувати паралелограм на векторах $\vec{OA}=\vec{i}+\vec{j}$ і $\vec{OB}=\vec{k}-3\vec{j}$. Знайти його діагоналі.

Відповідь: $\vec{OC}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$; $OC=\sqrt{6}$; $\vec{AB}=-\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$; $AB=3\sqrt{2}$.

6 Побудувати вектор $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+6\vec{k}$; знайти його довжину і напрям.

Відповідь: $\left|\vec{a}\right|=7$, $\cos\alpha=\frac{2}{7}$, $\cos\beta=\frac{3}{7}$, $\cos\gamma=\frac{6}{7}$.

6 Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a}=\alpha\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$ взаємно перпендикулярні.

Відповідь: $\alpha=-6$.

7 Дано вектори $\vec{a}=\{1;-3;4\}$, $\vec{b}=\{3;-4;2\}$, $\vec{c}=\{-1;1;4\}$.Обчислити $пр_{\overline{b+c}}\vec{a}$.

Відповідь: 5.

8 Дано вектори $\vec{a}=\{3;-1;-2\}$, $\vec{b}=\{1;2;-1\}$. Знайти координати вектора $\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)\times\vec{b}$.

Відповідь: $\{10;\ 2{:}14\}$.

9 Дано вершини трикутника $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Знайти його зовнішній кут при вершині A.

Відповідь: $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$.

10 Обчислити довжини діагоналей і площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = -\vec{k} - \vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Відповідь: $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{5}$, $S = \sqrt{6}$.

11 Довести, що точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$, $D(2;\ 1;\ 3)$ належать одній площині .

12 Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках

$$A(2;\ -1;\ 1),\ B(5;\ 5;\ 4),\ C(3;\ 2;\ -1),\ D(4;\ 1;\ 3)$$

Відповідь: 3 куб. од.

13 Установити, яка лінія визначається рівнянням $r = 10\sin\varphi$ і побудувати її.

Відповідь: коло з центром $\left(5;\ \frac{\pi}{2}\right)$ і радіуса 5.

14 Дано середини сторін трикутника: $M_1(2;1), M_2(5;3), M_3(3;-4)$. Скласти рівняння його сторін.

Відповідь : $7x - 2y - 12 = 0;\ 5x + y - 28 = 0;\ 2x - 3y - 18 = 0$.

15 Скласти рівняння прямої якщо точка $P(2;3)$ є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

Відповідь : $2x + 3y - 13 = 0$

16 Знайти точку Q, яка симетрична точці P відносно прямої $2x - 3y - 3 = 0$.

Відповідь : $Q(11;-11)$.

17 Дано вершини трикутника: $A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)$. Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини A на медіану, що проведена з вершини B.

Відповідь: $4x + y - 3 = 0$

18 Визначити, за яких значень m, n прямі $mx - 2y - 1 = 0$, $6x - 4y - n = 0$ 1) мають одну спільну точку; 2) паралельні; 3)збігаються.

Відповідь: 1) $m \neq 3$; 2) $m = 3, n \neq 2$; 3)$m = 3, n = 2$.

19 Пряма $3x - 4y - 12 = 0$ відтинає від координатного кута трикутник. Обчислити його площу.

Відповідь: 6 кв. од.

20 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_1(3;-4)$ і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини кожний відрізок вважається напрямленим від початку координат.

Відповідь: $x + y + 4 = 0$.

21 Точка $A(2;-5)$ є вершиною квадрата, одна сторона якого лежить на прямій $x - 2y - 7 = 0$. Обчислити площу цього квадрату.

Відповідь: 5кв. од.

22 Знайти кут між двома прямими: а) $y = -2x$; $3x - y + 5 = 0$;

б) $4x + 2y - 5 = 0$; $6x + 3y + 1 = 0$

Відповідь: а) $\alpha = 135^0$ б) $\alpha = 0$. Дані прямі паралельні.

23 Через точку перетину прямих $x - y + 4 = 0$ і $4x + 2y - 19 = 0$ проведено пряму паралельно до прямої $2x - 3y + 6 = 0$. Скласти її рівняння.

Відповідь: $12x - 18y + 83 = 0$.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення вектора і його довжини.
2 Що називається базисом на площині та у просторі?
3 Які вектори називають колінеарними, компланарними, рівними між собою?
4 Що називають координатами вектора?
5 Як розкласти вектор за координатним базисом?
6 Як визначаються операції додавання, віднімання, множення на число?
7 Що називається скалярним, векторним, мішаним добутком векторів?
8 Як виконуються операції над векторами, які задані координатами?
9 Сформулюйте умови паралельності, перпендикулярності і компланарності векторів.
10 Сформулюйте приклади застосування скалярного, векторного, мішаного добутків.
11 Що називається рівнянням лінії у деякій системі координат?
12 Як у загальному вигляді визначаються рівняння лінії на площині в декартові та полярній системах координат?
13 Як однозначно може бути визначено положення прямої на площині?
14 Яке рівняння називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?
15 Наведіть рівняння прямої, яка проходить: через дві задані точки площини; через задану точку в заданому напрямі.
16 Запишіть умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їхні властивості. Загальне рівняння кривої другого порядку..

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней від яких до точок $M_1(-3:0)$ і $M_2(3:0)$ дорівнює 50.

Розв'язання. Нехай $M\left(x:y\right)$ - довільна точка шуканої лінії. За умовою $MM_1^2+MM_2^2=50$, або в координатній формі

$$\left(\sqrt{\left(x+3\right)^2+y^2}+\sqrt{\left(x-3\right)^2+y^2}\right)^2=50,$$

звідки $x^2+6x+9+y^2+x^2-6x+9+y^2=50$, або $x^2+y^2=16$. Одержали рівняння кола.

Приклад 2 Скласти рівняння кола, якщо точки $A\left(3;2\right)$ і $B\left(-1;6\right)$ є кінцями одного з його діаметрів.

Розв'язання. За умовою AB – діаметр кола. це означає, що його центр знаходиться на середині відрізка AB. За формулами ділення відрізка навпіл:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3-1}{2}=1;$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+6}{2}=4.$$

Тобто $C\left(1;4\right)$ - центр кола. Тепер ясно, що рівняння кола треба шукати у вигляді $\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2=R^2$. Підставляючи в це рівняння замість змінних координат координати точки A або B (кожна з них належить колу) і враховуючи, що $x_0=1$, $y_0=4$, матимемо: $\left(3-1\right)^2+\left(2-4\right)^2=R^2$, звідки $R^2=8$.

Отже, рівняння шуканого кола $\left(x-1\right)^2+\left(y-4\right)^2=8$.

Приклад 3 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

Розв'язання. За умовою $2a=20$, $\varepsilon=\frac{3}{5}$. Тоді $a=10$, а згідно з формулою $\varepsilon=\frac{c}{a}$: $c=a\cdot\varepsilon=10\cdot\frac{3}{5}=6$. Тепер із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо: $b^2=100-36=64$. Підставляючи значення $a^2=100$ і $b^2=64$ в рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, одержимо $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. Це і є рівняння шуканого еліпса.

Приклад 4 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

Розв'язання. За умовою фокуси еліпса лежать на осі ординат, тому його мала вісь $2a=16$, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{b}=\frac{3}{5}$. Отже, $a=8$, $c=\frac{3}{5}b$.

Із співвідношення $a^2 = b^2 - c^2$ маємо: $64 = b^2 - \frac{9}{25}b^2$ або $64 = \frac{16}{25}b^2$, звідки $b^2 = 100$. Таким чином, рівняння шуканого еліпса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$.

Приклад 5 Скласти найпростіше рівняння еліпса, в якого відстані одного з фокусів від кінців великої осі дорівнюють 5 і 1.

Розв'язання. Нехай $A_1A_2 = 2a$ - велика вісь еліпса, F_1 - один з його фокусів (рис. 5.1). За умовою $A_2F_1 = 5$, $F_1A_1 = 1$. Тоді $A_2A_1 = A_2F_1 + F_1A_1 = 5 + 1 = 6$. Отже, $2a = 6$, звідки $a = OA_1 = 3$, $OF_1 = OA_1 - F_1A_1 = 3 - 1 = 2$, тобто $c = 2$. Із співвідношення $b^2 = a^2 - c^2$ маємо: $b^2 = 9 - 4 = 5$. Підставляючи значення $b^2 = 5$ і $a^2 = 9$ в канонічне рівняння еліпса, одержуємо:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Це і є рівняння шуканого еліпса.

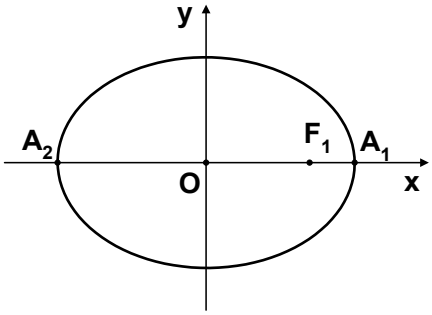


Рис. 5.1

Приклад 6 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y = \pm\frac{4}{3}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$.

Розв'язання. Шукатимемо рівняння гіперболи у вигляді $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Параметри a і b знайдемо з системи: $\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$

Із першого рівняння системи: $b = \frac{4}{3}a$. Підставляючи цей вираз у друге рівняння системи, одержуємо: $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 100$, звідки $a^2 = 36$. Тоді $b^2 = 100 - 36 = 64$ і шукане рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

Приклад 7 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 10$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі фокуси гіперболи розташовані на осі ординат, тому її рівняння буде мати вигляд: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Параметри a и b визначаються із системи: $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ \varepsilon = \frac{c}{b}. \end{cases}$

Враховуючи, що $c = 5$, маємо: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25, \\ \frac{5}{b} = \frac{5}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 16, \\ b = 3. \end{cases}$

Таким чином, рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

Приклад 8 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо вона проходить через точку $M_1(-5;3)$ і її ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$.

Розв'язання. Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Підставляючи в це рівняння замість змінних координат x і y координати точки M_1 (бо вона належить гіперболі), одержуємо: $\frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$. За умовою $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, звідки $c = a\sqrt{2}$. Тоді із співвідношення $b^2 = c^2 - a^2$ матимемо $b^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$.

Таким чином, для знаходження невідомих параметрів a і b гіперболи маємо систему: $\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \\ b^2 = a^2. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $a^2 = b^2 = 16$.

Отже, шукане рівняння гіперболи $x^2 - y^2 = 16$.

Приклад 9 Скласти найпростіше рівняння гіперболи, симетричної відносно координатних осей, якщо вона перетинає вісь Oy і проходить через точки $M_1\left(24;5\sqrt{5}\right)$ і $M_2(0;5)$. Знайти фокуси цієї гіперболи.

Розв'язання. Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Оскільки точки M_1 і M_2 належать гіперболі, їх координати задовольняють

рівнянню гіперболи. Підставляючи координати даних точок у це рівняння, одержуємо: $\begin{cases} \dfrac{125}{b^2} - \dfrac{576}{a^2} = 1, \\ \dfrac{25}{b^2} = 1. \end{cases}$ Розв'язуючи цю систему, знаходимо: $b^2 = 25,\ a^2 = 144.$

Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{144} = 1$. Із співвідношення $c^2 = a^2 + b^2$ знаходимо c: $c = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Фокуси гіперболи розташовані на осі Oy, тому $F_1(0;13)$, $F_2(0;-13)$.

Приклад 10 Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходяться в початку координат, якщо вона симетрично розташована відносно осі Ox і проходить через точку $M_1(-1;3)$.

Розв'язання. Оскільки вершина параболи знаходиться в точці $O(0;0)$, а вісь Ox є віссю симетрії, то рівняння параболи треба шукати у вигляді $y^2 = 2px$.

Параметр p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку $M_1(-5;3)$. Підставляючи координати цієї точки в рівняння параболи, одержуємо $3^2 = 2p(-1)$, звідки $2p = -9$.

Отже, шукане рівняння параболи $y^2 = -9x$.

Приклад 11 Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі Oy, якщо вона проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину прямої і кола, для чого розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y, \\ (-y)^2 + y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ 2y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ \left[\begin{array}{l} y_1 = 0, \\ y_2 = -4; \end{array}\right. \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x_2 = 4, \\ y_2 = -4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Отже, $O(0;0)$ і $M(4;-4)$ - шукані точки перетину.

Рівняння параболи, яка симетрична відносно осі Oy і проходить через початок координат, має вигляд $x^2 = 2py$.

Параметр p знайдемо з умови, що парабола проходить через точку $M(4;-4)$. Підставляючи координати цієї точки в рівняння параболи, одержуємо $4^2 = 2p(-4)$, звідки $2p = -4$.

Таким чином, шукане рівняння параболі набуде вигляду $x^2 = -4y$.

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.6-7**],** с. 43 – 54.

Вправи

1 Скласти рівняння траєкторії точки, яка в кожний момент руху рівновіддалена від точок $A(5;-2)$ і $B(-3;-2)$.

Відповідь: $x-1=0$.

2 Скласти рівняння кола, яке проходить через точку $M_1(2;6)$, а його центр знаходиться у точці $C(-1;2)$.

Відповідь: $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

3 Коло дотикається до осі Ox в початку координат і проходить через точку $A(0;-4)$. Скласти його рівняння.

Відповідь: $x^2+y^2+4y=0$.

4 Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1;3)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$.

Відповідь: $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

5 Скласти рівняння кола, яке проходить через початок координат, а його центр знаходиться у точці $C(6;-8)$.

Відповідь: $(x-6)^2+(y+8)^2=100$.

6 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо він проходить через точку $M_1\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ і його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

7 Обчислити ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між його фокусами видно з вершин малої осі під прямим кутом.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8 Скласти рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси знаходяться у точках $(\pm 12;0)$.

Відповідь: $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

9 Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса $x^2+5y^2=20$, а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

Відповідь: 16 кв.од.

10 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот $y=\pm\frac{12}{5}x$, а відстань між вершинами дорівнює 48.

Відповідь: $-\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{576}=1$.

11 Знайти півосі, фокуси, ексцентриситет і рівняння асимптот гіперболи $16x^2-9y^2=144$.

Відповідь: $a=3$, $b=4$, $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$, $\varepsilon=\frac{5}{3}$, $y=\pm\frac{4}{3}x$.

12 Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ і прямою $9x+2y-24=0$.

Відповідь: 12 кв.од.

13 Обчислити ексцентриситет рівносторонньої гіперболи.

Відповідь: $\sqrt{2}$.

14 Скласти канонічне рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 5, а ексцентриситет $\varepsilon=1,4$.

Відповідь: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$.

15 Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса $9x^2+25y^2-225-0$. Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет $\varepsilon=2$.

Відповідь: $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

16 Фокус параболи має координати $F(-6;0)$, а рівняння директриси $x-6=0$. Скласти рівняння параболи.

Відповідь: $y^2=-24x$.

17 Скласти найпростіше рівняння параболи, фокус якої знаходиться у точці перетину прямої $2x-5y-8=0$ з віссю абсцис. Побудувати цю параболу.

Відповідь: $y^2=16x$.

18 Скласти рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі абсцис і проходить через точки $O(0;0)$ і $M(5;3)$.

Відповідь: $y^2=1,8x$.

19 Парабола, симетрична відносно осі *Oy*, проходить через точку $M(6;3)$ і початок координат. Скласти її рівняння.

Відповідь: $x^2=12y$.

20 На параболі $y^2=6x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 5.

Відповідь: $M_1(1;4)$, $M_2(1;-4)$.

21 Скласти рівняння параболи та її директриси, якщо парабола проходить через точки перетину прямої $y-x=0$ і кола x^2+y^2+8x-0 і симетрична відносно осі абсцис.

Відповідь: $y^2=-4x$, $x=1$.

Питання для самоперевірки

1 Виведіть канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболи.

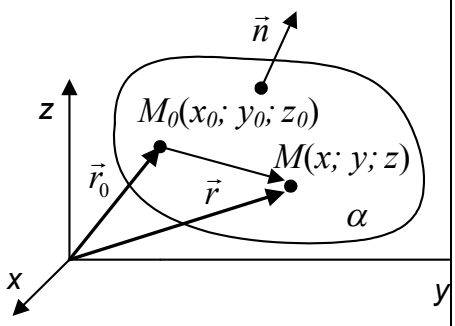
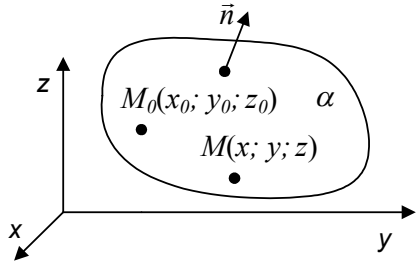
2 Які геометричні властивості еліпса, гіперболи і параболи?

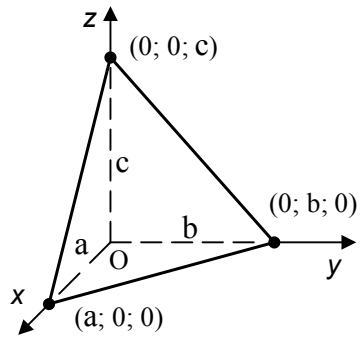
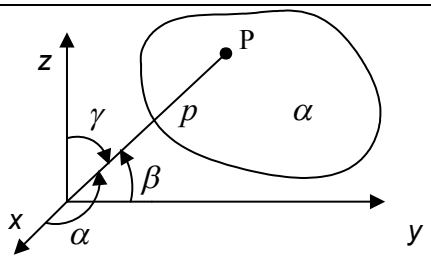
3 Що називається асимптотами гіперболи?

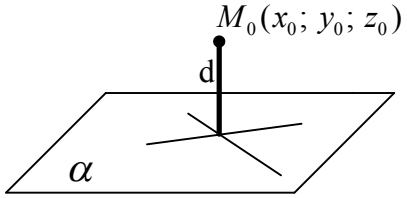
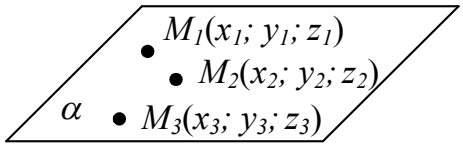
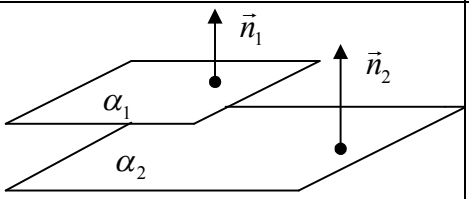
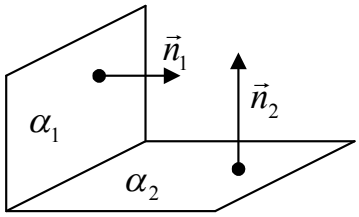
ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

Рівняння поверхні. Рівняння площини. Дослідження загального рівняння площини. Кут між площинами. Пряма лінія у просторі.

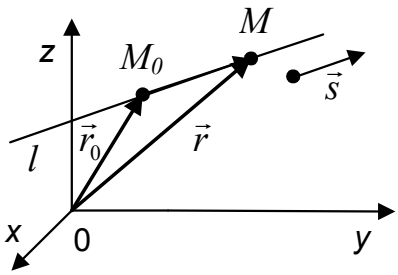
Таблиця 4.1 **Площина**

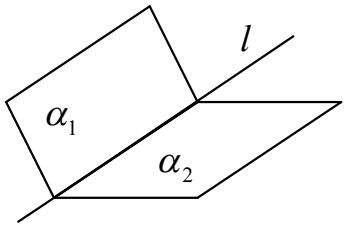
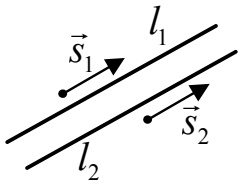
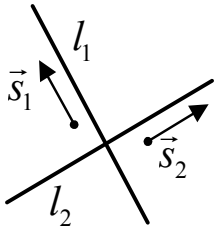
№ п/п	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	Векторне рівняння площини	 $\vec{n}=\{A;B;C\}\perp\alpha$ $\vec{r}_0=\{x_0;y_0;z_0\}$ $\vec{r}=\{x;y;z\}$	$\vec{n}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$
2	Рівняння площини, яка проходить через задану точку в заданому напрямі (в'язка площин)	 $M_0(x_0; y_0; z_0)\in\alpha$ $\vec{n}=\{A;B;C\}\perp\alpha$	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$
3	Загальне рівняння площини	$A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$	$Ax+By+Cz+D=0$
4	Рівняння площини, яка проходить через початок координат	$D=0$	$Ax+By+Cz=0$
5	Рівняння площини, яка паралельна		

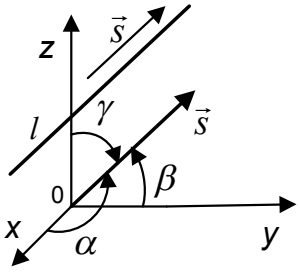
	а) осі Ox б) осі Oy в) осі Oz	$A=0,\ D\neq 0$ $B=0,\ D\neq 0$ $C=0,\ D\neq 0$	$By+Cz+D=0$ $Ax+Cz+D=0$ $Ax+By+D=0$
6	Рівняння площини, яка проходить через а) вісь Ox б) вісь Oy в) вісь Oz	$A=0,\ D=0$ $B=0,\ D=0$ $C=0,\ D=0$	$By+Cz=0$ $Ax+Cz=0$ $Ax+By=0$
7	Рівняння площини, яка паралельна а) площині yOz б) площині xOz в) площині xOy	$B=0,\ C=0,\ D\neq 0$ $A=0,\ C=0,\ D\neq 0$ $A=0,\ B=0,\ D\neq 0$	$Ax+D=0$ $By+D=0$ $Cz+D=0$
8	Рівняння координатних площин: а) площини yOz б) площини xOz в) площини xOy	$B=0,\ C=0,\ D=0$ $A=0,\ C=0,\ D=0$ $A=0,\ B=0,\ D=0$	$x=0$ $y=0$ $z=0$
9	Рівняння площини у відрізках		$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$
10	Нормальне рівняння площини	 $OP\perp\alpha,\ \lvert OP\rvert=p$	$x\cdot\cos\alpha+y\cdot\cos\beta+$ $+z\cdot\cos\gamma-p=0$ або $\frac{Ax+By+Cz+D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0$

11	Відстань від точки до площини	 $Ax+By+Cz=0\quad(\alpha)$	$d=\dfrac{\lvert Ax_0+By_0+Cz_0+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
12	Рівняння площини, яка проходить через три задані точки		$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$
13	Кут між двома площинами	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$	$\cos\phi=\pm\dfrac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$
14	Умова паралельності двох площин	 $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$ $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$ $\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$	$\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$
15	Умова перпендикуляр-ності двох площин	 $\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$	$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$
16	Рівняння в'язки площин, які проходять через лінію перетину двох даних площин	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ $\dfrac{A_1}{A_2}\neq\dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+$ $+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

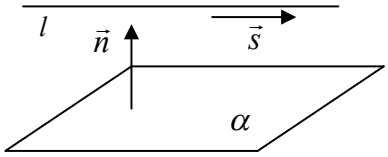
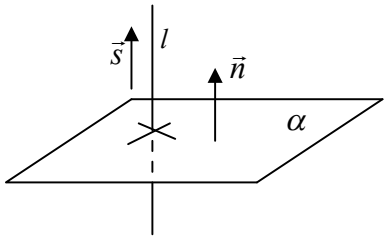
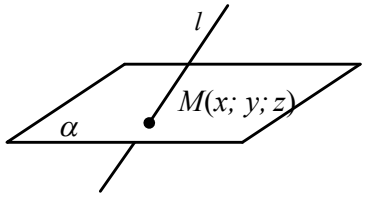
Таблиця 4.2 **Пряма лінія у просторі**

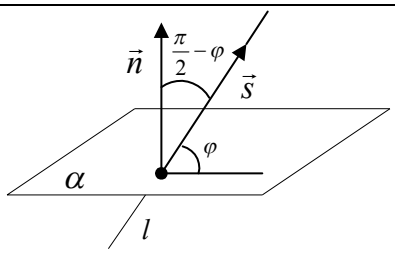
№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	Векторне рівняння прямої		$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}$

		$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$	
2	Параметричні рівняння прямої	$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$ t – параметр	$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$
3	Канонічні рівняння прямої	$M_0(x_0;\ y_0;\ z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$	$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$
4	Рівняння прямої, яка проходить через дві точки	$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1) \in l$ $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2) \in l$	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
5	Загальні рівняння прямої		$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$
6	Кут між двома прямими	$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$	$\cos\varphi = \pm\frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$
7	Умова паралельності двох прямих	 $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ $l_1 \parallel l_2 \ \Rightarrow\ \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$	$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$
8	Умова перпендику-лярності двох прямих	 $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ $l_1 \perp l_2 \ \Rightarrow\ \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$	$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$

9	Напрямні косинуси прямої	 $\vec{s}=\{m;n;p\}$	$\cos\alpha=\frac{s_x}{\lvert\vec{s}\rvert}=\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ $\cos\beta=\frac{s_y}{\lvert\vec{s}\rvert}=\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$ $\cos\gamma=\frac{s_y}{\lvert\vec{s}\rvert}=\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Таблиця 4.3 **Пряма і площина у просторі**

№	Назва	Спосіб завдання	Рівняння
1	Умова паралельності прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (l)$ $Ax+By+Cz+D=0\ (\alpha)$ $\vec{s}=\{m;n;p\}$ $\vec{n}=\{A;B;C\}$ $\alpha \parallel l \Rightarrow \vec{n}\perp\vec{s}$	$Am+Bn+Cp=0$
2	Умова перпендикулярності прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (l)$ $Ax+By+Cz+D=0\ (\alpha)$ $\vec{s}=\{m;n;p\}$ $\vec{n}=\{A;B;C\}$ $\alpha \perp l \Rightarrow \vec{n}\parallel\vec{s}$	$\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$
3	Точка перетину прямої і площини	 $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (l)$ $Ax+By+Cz+D=0\ (\alpha)$	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$

		$l \cap \alpha = M(x;y;z)$	
4	Кут між прямою і площиною	 $\vec{s} = \{m;n;p\}$ $\vec{n} = \{A;B;C\}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi = \frac{\lvert \vec{n}\cdot\vec{s} \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert \cdot \lvert \vec{s} \rvert}$ $\sin\varphi = \frac{\lvert Am+Bn+Cp \rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Точка P (2; -1; -1) є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини .

Розв'язання. За умовою точка P належить шуканій площині, тому її рівняння шукатимемо у вигляді $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Відомо також, що $OP \perp \alpha$. Отже, вектор $\overrightarrow{OP}$ можна вважати нормальним вектором $\vec{n} = \{A;B;C\}$ площини α . Оскільки $\overrightarrow{OP} = \vec{n} = \{2;-1;-1\}$, бо координати точки O (0; 0; 0), підставляючи його координати і координати точки P в рівняння площини, одержимо $2(x-2)-(y+1)-(z+1)=0$ або $2x-y-z-6=0$. Це і є шукане рівняння.

Приклад 2 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку M_1 (3; -2; -7) паралельно до площини $2x-3z+5=0$ (α_1).

Розв'язання. Точка M_1 належить шуканій площині α , тому її рівняння має вигляд $A(x-3)+B(y+2)+C(z+7)=0$ (α).

За умовою площини паралельні, тому їх нормальні вектори колінеарні, а з умови колінеарності векторів одержуємо $\frac{A}{2}=\frac{B}{0}=\frac{C}{-3}$. А це означає, що вектор $\vec{n}_1 = \{2;0;-3\}$ можна вважати нормальним вектором площини α . Таким чином, рівняння цієї площини $2(x-3)+0(y+2)-3(z+7)=0$ або $2x-3z-27=0$.

Цю задачу можна розв‘язати інакше: якщо площини паралельні, то їх рівняння можна перетворити так, що вони відрізнятимуться лише вільними членами. Тоді рівняння площин, паралельних даній площині, матиме вигляд: $2x-3z+D=0$. Підставляючи в це рівняння замість змінних координат x і y координати точки M_1 (3; –2; –7), через яку проходить площина, одержуємо рівняння $2\cdot 3-3\cdot(-7)+D=0$, звідки $D=-27$. Таким чином, рівняння шуканої площини набуде вигляду $2x-3z-27=0$.

Приклад 3 Визначити, за яких значень l і m площини і $mx-6y-6z+2=0$ (α_2) будуть паралельні.

Розв'язання. За умовою паралельності двох площин маємо: $\frac{2}{m}=\frac{l}{-6}=\frac{3}{-6}$, бо $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}=\{2;l;3\}$, $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}=\{m;-6;-6\}$.

Розв‘язуючи рівняння $\frac{2}{m}=\frac{3}{-6}$, одержуємо $m=\frac{2\cdot(-6)}{3}=-4$. Із рівняння $\frac{l}{-6}=\frac{3}{-6}$ маємо $l=3$.

Таким чином, при $l=3$ і $m=-4$ площини (α_1) і (α_2) будуть паралельні.

Приклад 4 Визначити, за яких значень l площини $5x+y-3z-2=0$ (α_1) і $2x+ly-3z+1=0$ (α_2) будуть перпендикулярні.

Розв'язання. $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}=\{5;1;-3\}$ - нормальний вектор площини (α_1), $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}=\{2;l;-3\}$ - нормальний вектор площини (α_2).

Згідно з умовою перпендикулярності двох площин, маємо $5\cdot 2+1\cdot l+(-3)\cdot(-3)=0$, звідки $l=-19$.

Отже, при $l=-19$ площини (α_1) і (α_2) будуть перпендикулярні.

Приклад 5 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-3;3)$ паралельно до площини xOy.

Розв’язання. Шукана площина паралельна площині xOy, а тому її рівняння $Cz+D=0$. Підставляючи в це рівняння координати точки M_1 (бо вона належить їй), одержимо $C\cdot 3+D=0$, звідки $D=-3C$. Тепер рівняння шуканої площини набуде вигляду $Cz-3C=0$ або $C(z-3)=3$. Оскільки $C\neq 0$, $z-3=0$. Це і є шукане рівняння.

Приклад 6 Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Oy і точку $M_1(1;4;-3)$.

Розв’язання. Рівняння площини, яка проходить через вісь Oy**,** має вигляд $Ax+Cz=0$. Оскільки точка M_1 належить цій площині, її координати задовольняють цьому рівнянню і тому $A\cdot 1+C\cdot(-3)=0$, звідки $A=3C$. Таким чином, рівняння шуканої площини набуває вигляду $3Cx+Cz=0$, або $C(3x+z)=0$. Оскільки $C\neq 0$, то $3x+z=0$ – шукане рівняння.

Приклад 7 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-1;1)$ перпендикулярно до площин $y=0$ (α_1) і $2x-z+1=0$ (α_2).

Розв’язання. Точка M_1 належіть шуканій площині α, а тому маємо: $A(x-2)-B(y+1)+C(z-1)=0$.

За умовою $\alpha \perp \alpha_1 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{n_1} = \{0;1;0\}$, $\alpha \perp \alpha_2 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{n_2} = \{2;0;-1\}$, а це означає, що $\vec{n} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{k}$.

Оскільки $\vec{n} = \{A;B;C\} = \{-1;0;-2\}$, то рівняння шуканої площини $-(x-2) - 2(z-1) = 0$, або $x + 2z - 4 = 0$.

Приклад 8 Обчислити відстань d від точки $M_0(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через три точки : $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$, $M_3(4;-5;-2)$.

Розв‘язання. Складаємо рівняння площини, яка проходить через три точки: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1+1 & 3-1 \\ 4-1 & -5+1 & -2-1 \end{vmatrix} = 0$ або $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$.

Розкривши визначник по елементам першого рядка, одержимо:

$$2(x-1) - 3(y+1) + 6(z-1) = 0 \text{ або } 2x - 3y + 6z - 11 = 0.$$

Тепер за формулою обчислення відстані від точки до площини, враховуючи, що $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, $z_0 = -2$, $A = 2$, $B = -3$, $C = 6$, $D = -11$, маємо:

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) - 11|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{28}{7} = 4.$$

Приклад 9 Обчислити відстань між паралельними площинами $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ (α_1) і $4x - 6y + 12z + 21 = 0$ (α_2).

Розв’язання. Знайдемо на одній із площин, наприклад, на площині α_1, довільну точку. Для цього в рівнянні α_1 покладемо $y = z = 0$. Тоді $2x - 14 = 0$, звідки $x = 7$. Отже, знайдено точку $M_0(7;0;0)$, яка належить площині α_1. Тепер задача зводиться до знаходження відстані від точки M_0 до площини α_2. За формулою обчислення відстані від точки до площини, враховуючи, що $A = 4$, $B = -6$, $C = 12$, $D = 21$, $x_0 = 7$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, маємо:

$$d = \frac{|4 \cdot 7 - 6 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 21|}{\sqrt{16+36+144}} = \frac{49}{14} = 3{,}5.$$

Приклад 10 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(2;-3;-4)$ і відтинає на координатних осях від нуля відрізки однакової величини (вважати кожний відрізок напрямленим з початку координат).

Розв’язання. Шукаємо рівняння площини у відрізках, тобто у вигляді $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Оскільки за умовою $a = b = c$, рівняння площини набуде вигляду $x + y + z = a$. Точка M_1 належить площині, тому її координати задовольняють рівнянню $x + y + z = a$. Підставляючи в це рівняння координати

мочки M_1, одержуємо $2-3-4=a$, звідки $a=-5$. Отже, рівняння шуканої площини $x+y+z+5=0$.

Приклад 11 Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;0;-3)$ паралельно вектору $\vec{a}=\{2;-3;5\}$.

Розв'язання. Використовуючи канонічні рівняння і враховуючи, що $x_0=2$, $y_0=0$, $z_0=-3$, $m=2$, $n=-3$, $p=5$, одержуємо $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{5}$.

Це і є шукане рівняння.

Приклад 12 Скласти параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку M_0 (1; -1; -3) паралельно до прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{5}=\frac{z-1}{0}$.

Розв'язання. Використовуючи параметричні рівняння і враховуючи, що напрямний вектор $\vec{s}=\{2;5;0\}$ даної прямої є також і напрямним вектором шуканої прямої, матимемо: $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-1+5t, \\ z=-3. \end{cases}$

Приклад 13 Довести, що прямі $(l_1)\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1 \end{cases}$ і $(l_2)\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0 \end{cases}$ паралельні.

Розв'язання. Маємо $\vec{s}_1=\{2;3;-6\}$ - напрямний вектор прямої l_1 і

$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix}=-9\vec{i}-6\vec{j}-6\vec{k}$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_2=\{3;2;2\}$ - напрямний вектор прямої l_2.

Знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{s}_1$ і $\vec{s}_2$: $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=2\cdot3+3\cdot2-6\cdot2=0$. Оскільки $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0$, $\vec{s}_1\perp\vec{s}_2$. Звідси випливає, що $l_1\perp l_2$. Таким чином, доведено, що дані прямі перпендикулярні.

Приклад 14 Знайти напрямні косинуси прямої $\begin{cases} x=4+2t, \\ y=-3-t, \\ z=5-2t. \end{cases}$

Розв'язання. Напрямним вектором даної прямої є вектор $\vec{s}=\{2;-1;-2\}$. Використовуючи формули для знаходження напрямних косинусів прямої, одержимо:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3};\ \cos\beta = -\frac{1}{3};\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 15 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;5)$ перпендикулярно до двох даних прямих:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2}\ (l_1) \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}\ (l_2).$$

Розв'язання. Рівняння прямої *l* шукатимемо у вигляді $\frac{x-2}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z-5}{p}$.

Оскільки $l \perp l_1$ і $l \perp l_2$,$\vec{s} \perp \vec{s}_1 = \{-1;\ 2;\ 2\}$ і $\vec{s} \perp \vec{s}_2 = \{6;\ 3;\ -2\}$, звідки випливає, що напрямним вектором шуканої прямої можна вважати вектор $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 15\vec{k}$ або паралельний йому вектор $\vec{s}_3 = \{2;-2;3\}$.

Отже, вважаючи, що $m = 2,\ n = -2.\ p = 3$, рівняння шуканої прямої набуде вигляду $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}$.

Приклад 16 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки $M_1(2;-1;-3)$, $M_2(3;1;-5)$. Знайти її напрямні косинуси.

Розв'язання. Використовуючи рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки, одержимо $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{1+1} = \frac{z+3}{-5+3}$ або $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{-2}$. Напрямний вектор цієї прямої $\vec{s} = \{m;n;p\} = \{1;2;-2\}$. Тепер знаходимо:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3};\ \cos\beta = \frac{2}{3};\ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Приклад 17 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$ перпендикулярно до площини $6x-3y-5z+2=0$.

Розв'язання. Запишемо канонічні рівняння прямої , яка проходить через точку $M_0(2;-3;-5)$:

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z+5}{p}.$$

Невідомі параметри *m, n,* знайдемо з умови перпендикулярності прямої і площини. Оскільки $l \perp \alpha$, то $\vec{s} \parallel \vec{n}$, а це означає, що нормальний вектор площини $\vec{n} = (A;B;C) = (6;-3;-5)$ можна вважати і напрямним вектором шуканої прямої. Отже, $\vec{s} = (m;n;p) = (6;-3;-5)$. Підставляючи координати вектора $\vec{s} = (m;n;p) = (6;-3;-5)$ у рівняння прямої, одержуємо:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}.$$

Приклад 18 За якого значення n пряма $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{n}=\frac{z+3}{-2}$ паралельна площині *x-3y-6z+2=0?*

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=(3;n;-2)$, а нормальний вектор площини $\vec{n}=(A;B;C)=(1;-3;6)$. За умовою паралельності прямої і площини: $3\cdot 1+n\cdot(-3)+(-2)\cdot 6=0$, звідки *n=-3*. Таким чином, при *n=-3* пряма і площина будуть паралельні.

Приклад 19 За яких значень m і C пряма $\frac{x-2}{m}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна до площини *3x-2y+Cz+1=0?*

Розв'язання. Напрямний вектор прямої $\vec{s}=(m;4;-3)$, а нормальний вектор площини $\vec{n}=(3;-2;C)$. За умовою перпендикулярності прямої і площини: $\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}=\frac{-3}{C}$. Розв'язуючи рівняння $\frac{m}{3}=\frac{4}{-2}$, одержуємо $m=-6$. Із рівняння $\frac{4}{-2}=\frac{-3}{C}$ знаходимо, що $C=1{,}5$. Таким чином, при $m=-6$ і C=1,5 пряма і площина будуть перпендикулярні.

Приклад 20 Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ і площини *2x+3y+z-1=0.*

Розв'язання. Запишемо рівняння прямої в параметричній формі

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t.$$

Звідси $x=t+1$, $y=-2t-1$, $z=6t$.

Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t, \\ 2x+3y+z-1=0. \end{cases}$

Підставляючи вирази для *x, y, z* в останнє рівняння системи, одержуємо

$2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0$, або $2t-2=0$, звідки $t=1$.

Із рівняння прямої при $t=1$ знаходимо координати точок перетину:

$$x=1+1=2,\quad y=-2\cdot 1-1=-3,\quad z=6\cdot 1=6.$$

Таким чином, шуканою точкою перетину прямої і площини є точка *M(2; –3;6).*

Приклад 21 Знайти проекцію точки *P(5;2;–1)* на площину*2x–y+3z+23=0.*

Розв'язання. Насамперед зауважимо, що точка P не належить площині (пропонуємо переконатися в цьому самостійно). І, тому задача зводиться до знаходження перпендикуляра, опущеного з точки P на задану площину (рис.4.1). Використовуючи параметричні рівняння прямої у просторі і

враховуючи, що нормальний вектор площини $\vec{n} = (2;-1;3)$ є і одночасно нормальним вектором прямої PP_1: $\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$

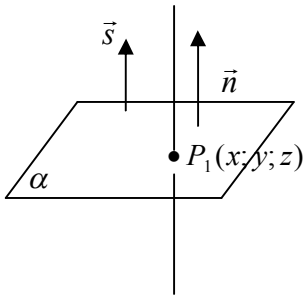


Рис. 4.1

Тепер знайдемо точку перетину прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ і площини

$2x+3y+z-1=0,$ розв'язуючи систему $\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + 3t, \\ 2x - y + 3z + 23 = 0. \end{cases}$

Підставляючи вирази для x, y, z в останнє рівняння системи, одержуємо $2(5+2t)-(2-t)+3(-1+3t)+23=0$. Або $2t-2=0$, звідки $t=-2$.

При $t=-2$ одержуємо:

$x = 5-4 = 1, \quad y = 2-(-2) = 4, \quad z = -1+3\cdot(-2) = -7.$

Отже, проекцією точки Р на площину є точка $P_1(1;4;-7)$.

Приклад 22 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-3;4)$ паралельно прямим $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8}$ і $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{2}$.

Розв'язання. Згідно з рівняння площини запишемо у вигляді

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0.$$

Через те, що $\vec{n} = (A;B;C) \perp \vec{s}_1 = (1;2;8)$ і $\vec{n} = (A;B;C) \perp \vec{s}_2 = (4;0;2)$, то

$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 30\vec{j} - 8\vec{k}$, і тому рівняння шуканої площини набуде вигляду $4(x-2)+30(y+3)+8(z-4)=0$, або $2x+15y-4z+57=0.$

Зауважимо, що нормальним вектором шуканої прямої можна було б вважати і вектор $\vec{n}_1 = (2;15;-4)$, який є паралельний вектору $\vec{n} = (4;30;-8)$.

Приклад 23 Знайти кут між прямою $\begin{cases} x - y - 8 = 0, \\ 2x + z - 14 = 0 \end{cases}$ і площиною $4x-2y-2z+7=0.$

Розв'язання. За формулою знаходження кута між площиною та прямою у просторі знаходимо:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \quad .$$

Оскільки нормальний вектор площини $\vec{n} = (A; B; C) = (4; -2; -2)$ і напрямний вектор прямої $\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 30\vec{j} - 8\vec{k}$,

$$\sin\varphi = \frac{|4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2|}{\sqrt{16 + 4 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

Отже, $\varphi = 30^\circ$.

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.8-9], с. 54 –65.

Вправи

1 Скласти рівняння площини, що відтинає на осі Oy відрізок $b = 5$ і перпендикулярна до вектора $\vec{n} = \{3; -2; 4\}$.

Відповідь: $3x - 2y + 4z + 10 = 0$.

2 Дано точки $M_1(2; -1; 3)$ і $M_2(4; -2; -1)$. Скласти рівняння площини, проведеної через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Відповідь: $2x - y - 4z + 7 = 0$.

3 Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині $x - 2y + z - 3 = 0$.

Відповідь: $x - 2y + z = 0$.

4 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1; -1; 2)$ паралельно площині $2x - 3y + z - 5 = 0$.

Відповідь: $2x - 3y + z - 7 = 0$.

5 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1; 0; 1)$ і $M_2(1; 2; -3)$ перпендикулярно до площини $x - y + z - 1 = 0$.

Відповідь: $x + 2y + z - 2 = 0$.

6 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1; -1; 1)$ і перпендикулярно до площин $2x - y + z - 1 = 0$ і $x + 2y - z + 1 = 0$.

Відповідь: $x - 3y - 5z + 1 = 0$.

7 Знайти відстань між паралельними площинами $x - y + z - 1 = 0$ і $2x - 2y + 2z - 5 = 0$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8 Знайти гострий кут між площинами $11x-8y-7z+5=0$ і $7x+2y-8z-3=0$.

Відповідь: $\varphi=45^{\circ}$.

9 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;3)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно вектору $\vec{a}=\{3;-1;-4\}$.

Відповідь: $9x-y+7z-40=0$.

10 Показати, що площини $x-y+z-1=0$ і $2x-2y+2z+3=0$ паралельні.

11 Показати, що площини $x+2y-5z+1=0$ і $3x-4y-z-2=0$ перпендикулярні.

12 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(-5;2;-1)$ паралельно до площини YOZ.

Відповідь: $x+5=0$.

13 Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь Ox і точку $M_1(4;-1;2)$.

Відповідь: $2y+z=0$.

14 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;1)$ і $M_2(3;1;2)$ паралельно до осі Oy.

Відповідь: $x-z-1=0$.

15 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(1;-2;3)$ перпендикулярно до осі Oz.

Відповідь: $z-3=0$.

16 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(1;-2;6)$ і $M_2(5;-4;-2)$ і відтинає на осях Ox і Oy відмінні від нуля відрізки однакової величини.

Відповідь: $4x+4y+z-2=0$.

17 Скласти рівняння площин, які проходять через точку $M_1(4;3;2)$ і відтинають на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

Відповідь: $x+y+z-9=0$, $x-y-z+1=0$, $x-y+z-3=0$, $x+y-z-5=0$.

18 Знайти відстань від точки $M_1(2;3;-1)$ до площини $7x-6y-6z+42=0$.

Відповідь: $d=4$.

19 Знайти відстань між паралельними площинами $2x-3y+6z-14=0$ і $2x-3y+6z+28=0$.

Відповідь: $d=6$.

20 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(-2;4;1)$, $M_2(0;2;-1)$, $M_3(2;0;-1)$

Відповідь: $x+y-2=0$.

21 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-4;3;0)$ паралельно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-4=0, \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{x+4}{1}=\frac{y-3}{3}=\frac{z}{5}$.

22 Знайти кут між прямою $\begin{cases} x=2z-1, \\ y=-2z+1 \end{cases}$ і прямою, яка проходить через початок координат і через точку з координатами $(1;-1;-1)$.

Відповідь: $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

23 Показати, що пряма $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ перпендикулярна до прямої $\begin{cases} x=z+1, \\ y=1-z. \end{cases}$

24 Дано вершини трикутника $A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$, $C(-7;11;6)$. Скласти канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині A.

Відповідь: $\frac{x-2}{6}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+3}{-7}$.

25 Довести паралельність прямих $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}$ і $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$

26 Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-4;0;2)$ перпендикулярно до прямих $\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{4}$ і $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$.

Відповідь: $\frac{x+4}{-2}=\frac{y}{8}=\frac{z-2}{-5}$.

27 Скласти канонічні рівняння діагоналей паралелограма, три вершини якого знаходяться в точках $A(2;4;6)$, $B(-3;5;4)$, $C(8;-6;2)$.

Відповідь: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z-6}{-2}$, $\frac{x+3}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-4}{0}$.

28 Довести, що пряма $\begin{cases} x=2-3t, \\ y=1-4t, \\ z=-5+4t \end{cases}$ паралельна площині $4x-3y-6z-5=0$.

29 Знайти точку перетину прямої і площини:

а) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$, $x+y-z+2=0$;

б) $\frac{x+3}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{-5}$, $x-2y+z-15=0$;

в) $\frac{x+2}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}, \quad x+2y-2z+6=0.$

Відповідь: а) М(4;-5;1); б) пряма паралельна площині; в) пряма лежить на площині.

30 Скласти рівняння площини ,яка проходить через точку M_0(1;-2;1) перпендикулярно до прямої $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

Відповідь: $x+2y+3z=0.$

31 За якого значення *C* пряма $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z-2=0. \end{cases}$ паралельна площині $2x-y+Cz-2=0$?

Відповідь: *C*=-2.

32 Скласти рівняння площини ,яка проходить через точку M_0(2;-2;1) і пряму $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-3t+2, \\ z=3t-3. \end{cases}$

Відповідь: $4x+6y+5z-1=0.$

33 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку M_0(3;1; –2) і точку перетину прямої $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{3}$ і площини $2x-3y-5z-3=0.$

Відповідь: $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}.$

34 Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки (2;3;-1) на площину $4x+5y-2z+3=0.$

Відповідь: $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z+1}{-2}.$

35 Скласти рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z+1}{4}$; $\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{4}.$

Відповідь: $7x+y-4z-9=0.$

36 Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{2}$ перпендикулярно до площини $2x+3y-z-4=0.$

Відповідь: $8x-5y-z-4=0.$

37 Знайти проекцію точки *M*(3;-1;1) на площину $x+2y+3z-30=0.$

Відповідь: M_1(5;5;5).

38 Знайти проекцію точки *P*(5;-6;7) на пряму

$x=7-2t;\ y=-1+3t;\ z=4+t.$

Відповідь: P_1(9; –2;3).

39 За яких значень n і A пряма $x = 3 + 2t$; $y = -5$; $z = -5 + nt$; перпендикулярна до площини $Ax-2y+3z-5=0$.

Відповідь: A=1, n= –4.

40 Знайти кут між прямою $x = 8 - 2t$; $y = 7 - 2t$; $z = 9 + 4t$; і площиною $6x - 3y - 3z + 1 = 0$.

Відповідь: $\varphi = 30^\circ$.

41 Знайти точку, симетричну точці P (2;-4;5) відносно прямої $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -3 + t, \\ z = 3 - 4t. \end{cases}$

Відповідь: P_1(-12; 2;-15).

42 Знайти синус кута між прямою $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$ і площиною $x+y+3z-1=0$.

Відповідь: $\sin\varphi = \dfrac{6}{\sqrt{418}}$.

Питання для самоперевірки

1 Як визначаються в аналітичній геометрії лінія, поверхня та інші множини точок? Наведіть приклади.

2 Як однозначно може бути визначене положення площини у просторі?

3 Який вектор називається нормальним вектором площини?

4 Яке рівняння називають загальним рівнянням площини у просторі? У чому полягає зміст його коефіцієнтів?

5 Виведіть рівняння площини, яка проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор.

6 Виведіть рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

7 Як однозначно може бути визначене положення прямої у просторі?

8 Який вектор називають напрямним вектором прямої?

9 Виведіть канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.

10 Виведіть рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

11 Як визначити кут між двома площинами; двома прямими; між прямою і площиною?

12 Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих; двох площин; прямої і площини.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв’язок між ними. Границя функції. Перша та друга особливі границі. Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції.

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Знайти область визначення функцій :

а) $y=\dfrac{2}{x^2-3x+2}$, б) $y=\sqrt{x^2-4x+3}$, в) $y=\arccos\dfrac{1-2x}{4}$.

Розв'язання.

а) Функція визначена для всіх значень x, крім тих, за яких знаменник x^2-3x+2 дробу $\dfrac{2}{x^2-3x+2}$ перетворюється на 0. Розв'язавши рівняння $x^2-3x+2=0$ знаходимо $x_1=1, x_2=2$. Тому областю визначення даної функції є сукупність усіх дійсних чисел, крім 1 та 2, тобто

$$D(y)=(-\infty;1)\cup(1;2)\cup(2;+\infty).$$

б) Корені парного степеня існують лише для невід'ємних чисел. Тому область визначення даної функції можна розглядати як сукупність усіх значень x, що задовольняють нерівності $x^2-4x+3\geq 0$.

Розв'яжемо сказану нерівність методом інтервалів. Для цього знайдемо корені рівняння $x^2-4x+3=0$. За теоремою Вієта $x_1=1, x_2=3$. Ці точки поділяють всю числову вісь на інтервали: $(-\infty;1)$, $(1;3)$, $(3;+\infty)$.

Для зручності позначимо ліву частину нерівності через y і визначимо знак y на кожному інтервалі (рис.5.1):

$$y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3);\ y(0)=3>0;\ y(2)=-1<0;\ y(4)=3>0.$$

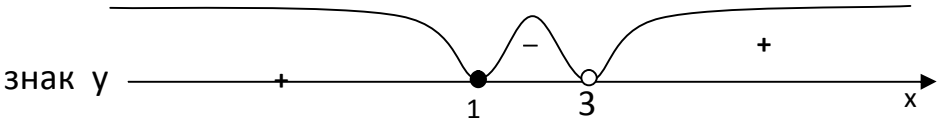


Рис.5.1

Таким чином, область визначення даної функції:

$$D(y)=(-\infty;1]\cup[3;+\infty).$$

в) Позначимо $\dfrac{1-2x}{4}=t$. Відомо, що функція $y=\arccos t$ визначена при $-1\leq t\leq 1$. Отже, задана буде визначена для всіх значень x, що задовольняють нерівності: $-1\leq\dfrac{1-2x}{4}\leq 1$. Розв'язуючи цю нерівність, одержимо: $-4\leq 1-2x\leq 4$, або $-5\leq -2x\leq 5$, звідки $\dfrac{5}{2}\geq x\geq -\dfrac{3}{2}$. Отже, область визначення даної функції $D(y)=\left[-\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right]$.

Приклад 2 Знайти інтервали знакосталості функції $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$.

Розв'язання. Задана функція не існує в точках, де $x^2-3x+2=0$, звідки $x_1=1$, $x_2=2$. Функція дорівнює нулю при $x=0$. Відкладемо одержані значення x на числовій прямій і визначимо знак y на кожному інтервалі (рис.5.2):

$$y(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{x}{(x-1)(x-2)};\ y(-1)<0,\ y(0{,}5)>0,\ y(1{,}5)<0,\ y(3)>0.$$

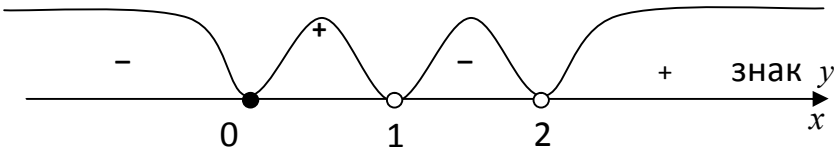


Рис.5.2

Отже, $y<0$ для $x\in(-\infty;0)\cup(1;2)$ і $y>0$ для $x\in(0;1)\cup(2;+\infty)$.

Приклад 3 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$.

Розв'язання. Функція, границю якої треба знайти, елементарна, тому

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=\frac{0^3-3\cdot 0+1}{0-4}+1=\frac{3}{4}.$$

Приклад 4 Знайти $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\ \frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$

Розв'язання. Для визначення границі елементарної функції досить у вираз цієї функції підставити граничне значення її аргументу. Тоді

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3}{x^4+x^2=1}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-3}{\left(\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{0}{9+3+1}=\frac{0}{13}=0.$$

Приклад 5 Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{1-x}$.

Розв'язання. Границя знаменника дорівнює нулю, тому теорему 6 безпосередньо застосувати не можна, тому що ділення на нуль неможливе. Якщо $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$, то $1-x$ є величина нескінченно мала, а обернена до неї $\frac{1}{1-x}$ – нескінченно велика. Отже, умовно можна записати, що $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\infty$.

Розкриття невизначеності виду $\frac{0}{0}$.

Для розкриття цієї невизначеності користуються такими методами:

а) розкладають чисельник і знаменник на множники, після чого скорочують дріб на нескінченно малий співмножник і потім переходять до границі;

б) переносять ірраціональність з чисельника у знаменник або із знаменника в чисельник, а іноді за необхідністю – і те і друге, після чого одержаний дріб скорочують і переходять до границі;

в) використовують першу чудову границю

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1;$$

г) використовують властивість еквівалентності нескінченно малих величин.

Нагадаємо, що коли $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=1,$ то $\alpha\ i\ \beta-$ еквівалентні нескінченно малі величини при $x\to x_{0,}$ тобто $\alpha\sim\beta.$

При $x\to 0$ $\sin x\sim x,$ $tg\,x\sim x,$ $arsin\,x\sim x,$ $arctg\,x\sim x,$ $\ell n(1+x)\sim x,$ $\ell^x-1\sim x.$

Зауважимо, що в таких випадках, коли чисельник або знаменник (або і чисельник, і знаменник) являє собою суму (або різницю) нескінченно малих функцій, то при обчисленні границі, взагалі кажучи, не можна заміняти окремі додатки еквівалентними функціями. Така заміна може призвести до неправильного результату.

Приклад 6 Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}.$

Розв'язання. При $x\to 1$ чисельник і знаменник даного дробу прямують до нуля. Тому безпосередньо застосування теореми про границю частки тут неможливе. Розкладаючи чисельник і знаменник даного дробу на множники, одержуємо:

$$x^2-2x+1=(x-1)^2,\quad x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1).$$

Тоді

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

Слід зазначити, скорочення дробу на $x-1$ було законним тому, що при знаходженні границі в точці $x=1$ значення цієї функції у точці $x=1$ не беремо до уваги, тобто x, прямуючи до одиниці і, отже, на нуль ми не скорочували.

Приклад 7 Знайти $\lim\limits_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}.$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}.$ Розкладаючи на множники чисельник за формулою $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$ а знаменник за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$ де x_1 і x_2- корені рівняння $ax^2+bx+c=0,$ маємо:

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1),$$

$$6x^2-5x+1=0,\qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm 1}{12},\qquad x_1=\frac{1}{2},\qquad x_2=\frac{1}{3}.$$

$$6x^2-5x+1=6(x-1/2)(x-1/3)=(2x-1)(3x-1).$$

Отже,

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-`1)}=\lim_{x\to 1/2}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{1+1+1}{3/2-1}=6.$$

Приклад 8 Знайти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Розв'язання. Після підстановки граничного значення x маємо визначеність виду $\frac{0}{0}$. Звільнимося від ірраціональності у чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на спряжений чисельнику множник $\sqrt{x-1}+2$. Після скороченого дробу на нескінченно малий множник і використання теорем про границі, одержимо:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)-\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}.$$

Приклад 9 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник у точці $x=0$ мають границю, яка дорівнює нулю. Застосувати теорему про границю частки не можна. Тому помножимо чисельник і знаменник дробу на добуток $\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{8}{2}=4.$$

Приклад 10 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Цей приклад можна було б розв'язати ще й так. При $x\to 0$ $\sin 3x\sim 3x$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to 0}3=3.$$

Приклад 11 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{tg5x}$.

Розв'язання. Через те що при $x\to 0$ $tg5x\sim 5x$ *і* $tg2x\sim 2x$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{tg5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

Приклад 12 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$ і при $x\to 0$

$\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$, матимемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Приклад 13 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник цього дробу при $x=0$ перетворюється на нуль. Тому застосувати теорему про границю дробу не можна. Перетворимо дріб, додавши чисельник у вигляді добутку:

$$\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\frac{\sin x\left(1-\cos x\right)}{x^{3\cdot}\cdot\cos x}=\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos x}.$$

Тепер знаходимо:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2/4}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1, a\sin\frac{2x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$ при $x\to 0$. Таким чином, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{2}$.

Слід зауважити, що в цьому прикладі при заміні tgx *на* x, $\sin x$ *на* x одержали $\frac{0}{x^3}$, а це означало, що границя функції дорівнює нулю, а це не вірно.

Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$

Для розкриття цієї невизначеності заданої відношенням многочленів, чисельник і знаменник ділять на найвищу, що входить до них степінь x, і потім переходять до границі.

Приклад 14 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Розв'язання. Ні чисельник , ні знаменник не мають границі при $x\to\infty$. Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на x^4. Знаходимо

$$-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}.$$

Оскільки при $x\to\infty$:

$$1/x\to 0,\quad 1/x^3\to 0,\quad 3/x^2\to 0,\quad 1/x^4\to 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – 1. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\frac{0}{1}=0.$$

Приклад 15 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник і знаменник необмежено збільшується (одержуємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$). Поділивши чисельник і знаменник на x^4, тобто на старшу степінь x, і використавши властивості границь, одержимо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=\frac{1-0}{0-0+0}=\frac{1}{0}=\infty,$$

а це означає, що границя функції не існує.

Слід зауважити, що запис $\frac{1}{0}=\infty$ є чисто умовним. Його треба розуміти так: $\frac{I}{н.м.в.}=н.в.в.$, тобто величина, обернена до нескінченно малої є нескінченно великою.

Приклад 16 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$. Поділивши чисельник і знаменник на x^2, тобто на старшу степінь x, і використавши властивості границь, одержимо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-1/x^2}{2+1/x^2}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

Далі при обчисленні границь можна користуватись таким правилом: якщо чисельник і знаменник дробу - многочлени і $x\to\infty$, то границя дробу дорівнює:

I) відношенню коефіцієнтів при старшій степені змінної, якщо многочлени однакової степені;

2) нулю, якщо степінь многочленна чисельника нижча за степінь многочленна знаменника;

3) нескінченності, якщо степінь многочленна чисельника вища за степінь многочленна знаменника.

Приклад 17 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x+3x^3}$.

Розв'язання. Оскільки степені многочленів чисельника і знаменника однакові і $x\to\infty$, шукана границя дорівнює відношення коефіцієнтів при старшій степені x, тобто

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\frac{-3}{3}=-1.$$

Розкриття невизначеності виду $\infty-\infty$

Невизначеність такого виду розкривається одним з двох шляхів:

I) зведенням дробів до спільного знаменника, в результаті чого приходимо або до невизначеності $\frac{o}{o}$, або до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$;

2) перенесенням ірраціональності з чисельника в знаменник.

Приклад 18 Знайти $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$.

Розв'язання. При $x\to1$ задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок $\infty-\infty$). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\left(\frac{o}{o}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

Приклад 19 Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

Розв'язання. Тут також маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Помноживши і поділивши дану функцію на $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)$, одержимо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x+6x-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5+6/x}{\sqrt{1-5/x+6/x^2}+1}=-5/2.$$

Розкриття невизначеності виду $0\cdot\infty$

Шляхом заміни змінної або за допомогою алгебраїчних перетворень функції невизначеність $0\cdot\infty$ зводиться або до невизначеності $\frac{0}{0}$, або до невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$.

Слід зауважити, що множення можна замінити діленням на обернену величину і тому $0\cdot\infty$ можна розглядати як $\frac{0}{\infty^{-1}}=\frac{0}{0}$ або як $\frac{\infty}{0^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}$ (як уже зазначалося, ці записи чисто умовні).

Приклад 20 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\frac{x}{3}\right)$.

Розв'язання. При $x\to 0$ одержуємо невизначеність виду $0\cdot\infty$ Записавши в іншому вигляді дану функцію і використавши теореми про границі, матимемо:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\frac{x}{3}\right)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{tg\,x/3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x/3}=3.$$

При розв'язанні цього прикладу прийнято до уваги, що при $x\to 0$ $tg\frac{x}{3}\sim\frac{x}{3}$.

Приклад 21 Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x)tg\frac{\pi x}{2}\right]$.

Розв'язання. Тут також маємо невизначеність виду $0\cdot\infty$.

Покладемо $1-x=z$. Звідси випливає, що $z\to 0$, оскільки $x\to 1$.

Тоді, виконуючи відповідні перетворення функції і переходячи до границі, знаходимо

$$\lim_{x\to 1}\left[(1-x)tg\frac{\pi x}{2}\right]=(0\cdot\infty)=\lim_{z\to 0}\left[z\cdot tg\frac{\pi(1-z)}{2}\right]=$$

$$\lim_{z\to 0}\left[ztg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi z}{2}\right)\right]=\lim_{z\to 0}\left(z\cdot ctg\frac{\pi z}{2}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{tg\frac{\pi z}{2}}==\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\frac{\pi z}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Розкриття невизначеності виду 1^{∞}

Для розкриття цієї невизначеності використовуємо другу чудову границю

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{\alpha\to\infty}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e=2{,}71828\ldots.$$

Зазначимо, що число *e* ірраціональне. Логарифм за основою *e* називають натуральним логарифмом і позначають $\ell n\,x\equiv\ell og_{e}x$.

Приклад 22 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{m\,x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність 1^{∞}. Виконуючи елементарні перетворення і використовуючи формулу другої чудової границі, одержуємо

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x}\cdot mx}=e^{km}.$$

Приклад 23 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Розв'язання. При підстановці граничного значення x у вираз функції маємо невизначеність 1^{∞}. Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-2/3}.$$

Приклад 24 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{1/2x}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{1/2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{tg^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=e^{1/2}.$$

При розв'язанні прикладу прийнято до уваги, що при $x\to 0$ $tg^2\sqrt{x}\sim\left(\sqrt{x}\right)^2=x$.

Приклад 25 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

Розв'язання. У результаті підстановки граничного значення x маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Використавши формули потенціювання і другу чудову границю, одержимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{a+x}{a}}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/x}=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{1/x}=\ln\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}}\right]^{\frac{1}{a}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}.$$

Приклад 26 Установити, чи функція $y = 2^{1/x}$ неперервною або розривною для $x = 3$ і $x = 0$.

Розв'язання. За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При $x = 3$ маємо: $y(3) = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$;

$$\lim_{x\to 3+0} y = \lim_{x\to 3+0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{3+0}} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}; \quad \lim_{x\to 3-0} y = \lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3-0}} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при $x = 3$ виконується, отже, в точці $x = 3$ функція неперервна. Проведемо аналогічні міркування при $x \to 0 : y(0) = 2^{1/0}$ не існує, бо ділення на нуль не можливо.

$$\lim_{x\to +0} y = \lim_{x\to +0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -0} y = \lim_{x\to -0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Умова неперервності при $x = 0$ не виконується, отже, в точці $x = 0$ функція розривна (має нескінчений розрив).

Приклад 27 Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{якщо} \quad 1 \le x \le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y = -1$, $y = x^2 - 2$, *і* $y = 1$ є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною тільки в тих точках, де зміняється її аналітичний вираз, тобто в точках $x = -1$ *з* $x = 1$. Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо:

$$\left.\begin{aligned} & y(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ & \lim_{x\to -1+0} y = \lim_{x\to -1+0} (x^2 - 2) = -1 \\ & \lim_{x\to -1-0} y = \lim_{x\to -1-0} (x^2 - 2) = -1 \end{aligned}\right\} \text{Задана функція неперервна в точці } x = -1$$

$$\left.\begin{aligned} & y(1) = 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ & \lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 1 = 1 \\ & \lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0} (x^2 - 2) = -1 \end{aligned}\right\} \text{Задана функція розривна в точці } x = 1$$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь; крім точки x=1. Побудуємо графік функції. На інтервалі $(-\infty : -1)$ її графіком буде пряма $y = -1$, на відрізку $[-1 : 1]$ — парабола $y = x^2 - 2$ і, нарешті, на інтервалі $(1 : +\infty)$ — пряма $y = 1$ (рис. 5.3).

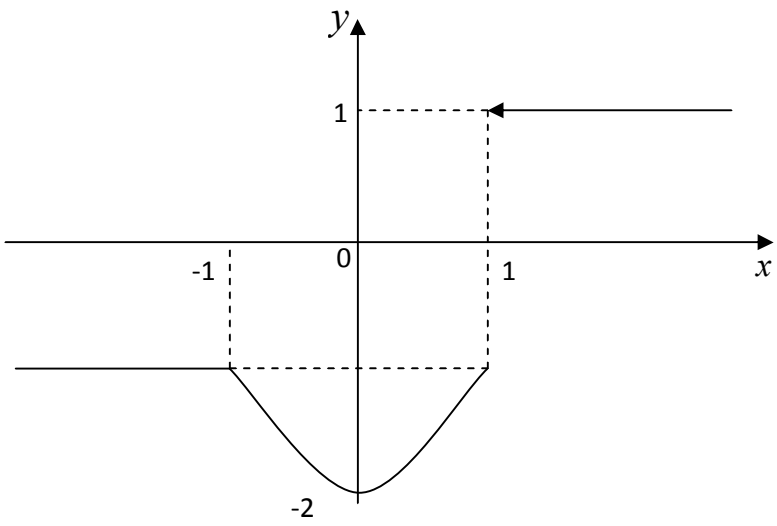


Рис. 5.3

Приклад 28 Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ і дослідити характер розриву.

Розв'язання. Відомо, що частка від ділення двох неперервних функцій є функція неперервна в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю. Оскільки $x^2-4=0$ при $x=\pm 2$, задана функція має дві точки розриву: $x=-2$ і $x=2$.

Досліджуємо характер розриву функції в цих точках. Для цього обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x\to -2+0} y = \lim_{x\to -2+0}\frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2+0}\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2+0}{(-2+0-2)(-2+0+2)} = \frac{-2}{-0} = +\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to -2-0} y = \lim_{x\to -2-0}\frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to -2-0}\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2-0}{(-2-0-2)(-2-0+2)} = \frac{-2}{+0} = -\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to 2+0} y = \lim_{x\to 2+0}\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2+0}{(2+0-2)(2+0+2)} = \frac{2}{+0} = +\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to 2-0} y = \lim_{x\to 2-0}\frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2-0}{(2-0-2)(2-0+2)} = \frac{2}{-0} = -\infty\ .$$

Таким чином, в точках $x=-2$ і $x=2$ функція має нескінченний розрив або розрив другого роду (рис.5.4).

Слід зазначити, що функція $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ непарна, а тому достатньо було б дослідити характер розриву лише в точці $x=2$.

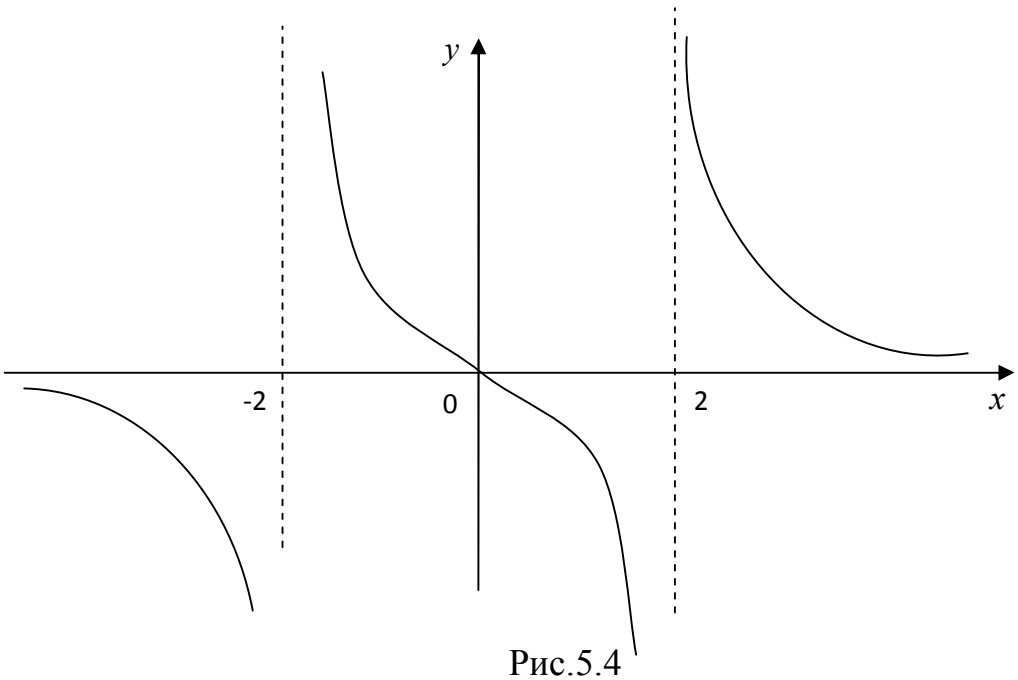


Рис.5.4

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.10-12**]**, с. 65 –78.

Вправи

1 Знайти область визначення функцій:

а) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$. Відповідь: вся числова вісь .

б) $y=1-\sqrt{1-x^2}$. Відповідь: $[-1;1]$.

в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$. Відповідь: $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$.

г) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$. Відповідь: $[-4\,;\,4\ ]$.

2 Знайти корені функцій і інтервали знакосталості, якщо

а) $y=x^2-5x+6$, б) $y=|x|$.

Відповідь: а*) y=0* при *x=2 і x=3*; y>0 при $x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$; *y<0* при $x\in(2;3)$, б) *y=0* при x=0; *y>0* при $x\neq 0$.

3 Знайди область визначення функцій.

а) $y=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$. Відповідь: $[-1;3\ ]$.

б) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{x-2}}-\lg(2x-3)$. Відповідь: $(3/2;\ 2)\cup(2;+\infty)$.

в) $y=\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}+\sqrt{x^2+1}$. Відповідь: x=1.

4 Знайти границі

4.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$.

4.17 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{2x^2+1}$.

Відповідь: 9.

4.2 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

Відповідь: $-\dfrac{2}{5}$.

4.3 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

4.4 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$.

Відповідь: 0.

4.5 $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{56}$.

4.6 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

Відповідь: 0.

4.7 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

Відповідь: $\dfrac{2}{3}$.

4.8 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$.

Відповідь: 0.

4.9 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

Відповідь: $\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}$.

4.10 $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left[\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tg\,x\right]$

Відповідь: 1.

4.11 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^{2x-1}$

Відповідь: e^6.

4.12 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2$

Відповідь: e^2.

4.18 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

Відповідь: 0,5.

4.19 $\lim\limits_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$.

Відповідь: - $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

4.20 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$.

Відповідь: -2,5.

4.21 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$.

Відповідь: -2.

4.22 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{1/x}\right)$.

Відповідь: -4.

4.23 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$.

Відповідь: 1.

4.24 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

Відповідь: -2.

4.25 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x+tg^2 x}{x\sin x}$.

Відповідь: 3.

4.26 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-x-2}{4x^2-5x+1}$.

Відповідь: $\dfrac{5}{3}$.

4.27 $\lim\limits_{x\to -2} \left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$.

Відповідь: $-\dfrac{1}{2}$.

4.28 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$.

Відповідь: e^2.

4.13 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$

Відповідь: k.

4.14 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-1}{x\sin x}$

Відповідь:-2.

4.15 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3-\sqrt{2x+9}}$

Відповідь: - 9.

4.16 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$

Відповідь: 5.

Відповідь: 4.

4.29 $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 3x\cdot ctg 5x)$.

Відповідь: $\dfrac{3}{5}$.

4.30 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2+5}-x\right)$.

Відповідь: 0.

4.31 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 8x\cdot\sin 3x}{x^2+x^3}$.

Відповідь: 24.

4.32 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2x\right)^{3\,ctg^2x}$.

Відповідь: e^3.

5 Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y=\begin{cases} e^x, \text{ якщо } x<0, \\ x, \text{ якщо } x\ge 0. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 0$ – точка розриву першого роду.

6 Знайти точки розриву функції $y=\dfrac{x+1}{x^2-2x+3}$ і установити характер розриву.

Відповідь: $x = 3$ – точка розриву другого роду; $x = -1$ – точка усувного розриву.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення функції.
2 Що називається границею функції у точці x_0?
3 Яка функція називається неперервною в точці?
4 Сформулюйте властивості неперервних функцій.
5 Яка точка називається точкою розриву функції?
6 Дайте класифікацію точок розриву функцій. Наведіть приклади.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6

Похідна функцій. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання функції. Таблиця похідних. Похідна оберненої, неявної, параметрично заданої функції. Диференціал функції. Похідні та диференціали вищих порядків. Дотична, нормаль та асимптоти кривої.

Основні правила диференціювання функцій

$$(C)'=0 \qquad (C=const);$$

$$(u+v-z)'=u'+v'+z';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$(Cu)' = Cu';$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + v' \cdot u}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx},$$

якщо $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$ – правило диференціювання окладної функції.

Таблиця 6.1 **Таблиця похідних**

$y = f(x)$	$y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, тобто $y = f(\varphi(x))$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$
$(a^x)' = a^x \ln a$	$(au)' = a^u \ln a \cdot u'$; $0 < a \neq 1$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, $0 < a \neq 1$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Похідною *n* - го порядку називається похідна від похідної (n – 1) - го порядку (якщо вона існує): $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Для функції, що задана параметрично, похідні другого та третього порядків знаходяться за формулами

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}.$$

Під час знаходження **похідних вищих порядків неявно заданої функції** використовують той самий алгоритм, що і для визначення похідної першого порядку неявно заданої функції.

Диференціал другого порядку визначається по правилу

$$d^2y = y''(x)dx^2.$$

Аналогічно визначаються диференціали n - го порядку.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції $y = 3x^2 - 4x$.

Розв'язання. Для даної функції маємо

1) $y + \Delta y = 3(x+\Delta x)^2 - 4(x+\Delta x) = 3x^2 + 6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4\cdot\Delta x$;

2) $\Delta y = (3x^2 + 6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4\cdot\Delta x) - (3x^2 - 4x) = 6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4\cdot\Delta x$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4\cdot\Delta x}{\Delta x} = 6x - 4 + 3\cdot\Delta x$;

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(6x - 4 + 3\cdot\Delta x\right) = 6x - 4$.

Таким чином, $y' = 6x - 4$.

Приклад 2 Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = 5x^2 - 3x + 2$ у точці з абсцисою $x = 1$.

Розв'язання. За умовою задачі $x_0 = 1$. Тоді $f(x_0) = f(1) = 5\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 2 = 4$. Знайдемо похідну функції $y = 5x^2 - 3x + 2$ у точці $x_0 = 1$. Вона дорівнює

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(5(1+\Delta x)^2 - 3(1+\Delta x) + 2\right) - \left(5\cdot 1^2 - 3\cdot 1 + 2\right)}{\Delta x} =$$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(7 + 5 \cdot \Delta x\right) = 7$.

Рівняння шуканої дотичної і нормалі мають відповідно вигляд:

$$y - f\left(x_0\right) = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

$$y - f\left(x_0\right) = -\frac{1}{f'\left(x_0\right)}\left(x - x_0\right)$$

У нашому прикладі: $y - 4 = 7\left(x - 1\right)$ і $y - 4 = -\frac{1}{7}\left(x - 1\right)$, або

$$7x - y - 3 = 0 \quad \text{і} \quad x + 7y - 29 = 0.$$

Приклад 3 $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила диференціювання та таблицю похідних, знаходимо:

$$y' = \left(2\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\sqrt[4]{3}\right)' = 2\left(\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\sqrt[4]{3}\right)' =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)' + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2}.$$

Прилад 4 $f(z) = \frac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{z}$. Знайти $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Потрібно знайти значення похідної при $z = \frac{1}{4}$. Для цього спочатку знайдемо $f'(z)$, а потім обчислимо її значення при заданому значенні аргументу. Попередньо виконаємо тотожні перетворення $f(z)$:

$$f(z) = 2z^2 - 3 + z^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z}.$$

Згідно з правилами диференціювання та таблицею похідних

$$f'(z) = \left(2z^2\right)' - \left(3\right)' + \left(z^{-\frac{1}{2}}\right)' - \left(\frac{1}{z}\right)' = 4z - \frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{z^2}.$$

При $z = \frac{1}{4}$ $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1 - 4 + 16 = 13.$

Приклад 5 Який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y = \frac{4}{15}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

Розв'язання. Знаходимо похідну $y' = \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$. При $x = 1$ $y'(1) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$, тобто $tg\alpha = 1$, звідки $\alpha = 45^\circ$.

Приклад 6 Точка рухається по прямій так, що її відстань від початкового пункту через t секунд дорівнює $S=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$;

а) в які моменти точка була в початковому пункті?

б) в які моменти її швидкість дорівнювала нулю?

Розв'язання. Виходячи із механічного тлумачення похідної, маємо:

$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right)'=t^3-12t^2+32t=t\left(t^2-12t+32\right)=t(t-4)(t-8).$$

Розв'язуючи рівняння $v(t)=0$, тобто $t(t-4)(t-8)=0$, знаходимо $t_1=0,\ t_2=4$ і $t_3=8$.

Точка буде в початковому пункті тоді, коли $S(t)=0$. Оскільки $S(t)=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2=\frac{1}{4}t^2\left(t^2-16t+64\right)=\frac{1}{4}t^2(t-8)^2$, то розв'язуючи рівняння $\frac{1}{4}t^2(t-8)^2=0$, знаходимо $t_1=0$ і $t_2=8$.

Таким чином, точка була в початковому пункті при $t_1=0$ і $t_2=8$, а її швидкість дорівнювала нулю при $t_1=0,\ t_2=4$ і $t_3=8$.

Приклад 7 Тіло масою 3 кг рухається прямолінійно за законом

$$S=1+t+t^2,$$

де S виражено в сантиметрах, t – в секундах. Обчислити кінетичну енергію тіла $\left(T=\frac{mv^2}{2}\right)$ через 5 секунд після початку руху.

Розв'язання. $v(t)=S'(t)=\left(1+t+t^2\right)'=1+2t.$ Через 5 секунд після початку руху швидкість тіла дорівнюватиме $v(5)=11$, а його кінетична енергія

$$T(5)=\frac{3\cdot 121}{2}=181{,}5\cdot 10^3 \text{ ерг.}$$

Приклад 8 Знайти похідну функції $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання. Подавши функцію у вигляді $y=e^u,\ u=\sqrt{v},\ v=\ln x$ і скориставшись правилом диференціювання складної функції, знайдемо

$$y'_x=y'_u u'_v v'_x=\left(e^u\right)'_u\left(\sqrt{v}\right)'_v\left(\ln x\right)'_x=e^u\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{x}=e^{\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

Приклад 9 Знайти похідну функції $y=\sqrt[3]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}=\left(\ln\sin\frac{x+3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо

$$y'=\frac{1}{3}\left(\ln\sin\frac{x+3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x+3}{4}}\cdot\cos\frac{x+3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{ctg\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}.$$

Приклад 10 Знайти похідну функції $y=x^3\,arctgx^3$.

Розв'язання. Диференціюючи дану функцію як добуток і складну функцію, знаходимо

$$y'=\left(x^3\right)'arctgx^3+x^3\left(arctgx^3\right)'=3x^2arctgx^3+x^3\frac{1}{1+(x^3)^2}3x^2=$$

$$=3x^2\left(\frac{x^3}{1+x^6}+arctg\,x^3\right).$$

Приклад 11 Знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ від неявної функції

$$x^3+y^3-3axy=0.$$

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння по x, враховуючи, що y є функцією від x. Одержимо

$$3x^2+3y^2y'-3a\left(y+xy'\right)=0.$$

Для знаходження y' визначаємо такі перетворення:

$$x^2+y^2y'-a\left(y+xy'\right)=0;$$

$$x^2+y^2y'-ay-axy'=0;$$

$$\left(y^2-ax\right)y'=ay-x^2,\ \text{звідки}\ \ y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

Приклад 12 Знайти похідну $y'=\dfrac{dy}{dx}$ від неявної функції $2y\ln y=x.$

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння по x, одержимо

$$2\left(y'\cdot\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'\right)=1.$$

Після спрощення матимемо $y'\cdot\ln y+y\cdot\dfrac{1}{y}\cdot y'=\dfrac{1}{2};$

$$y'\left(\ln y+1\right)=\frac{1}{2};$$

$$y'=\frac{1}{2\left(1+\ln y\right)}.$$

Приклад 13 Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-arctg\,t.\end{cases}$

Розв'язання. Маємо $x_t'=\dfrac{1}{1+t^2}\cdot 2t=\dfrac{2t}{1+t^2};\quad y_t'=1-\dfrac{1}{1+t^2}=\dfrac{1+t^2-1}{1+t^2}=\dfrac{t^2}{1+t^2}.$

Підставляючи знайдені вирази для x_t' і y_t' до формули $y_x' = \frac{y_t'}{y_x'}$, знаходимо

$$y_x' = \frac{t^2}{1+t^2} : \frac{2t}{1+t^2} = \frac{t^2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)2t} = \frac{t}{2}.$$

Приклад 14 Скласти рівняння дотичної і нормалі до астроїди $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos^3 t, \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$ проведених в точці, для якої $t = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. При $t = \frac{\pi}{4}$ маємо $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos^3\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin^3\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$.

Отже, $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ – точка, яка належить астроїді, дотичної і нормалі.

За формулою знаходження похідної функції, заданої параметрично, маємо: $y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{(\sqrt{2}\sin^3 t)_t'}{(\sqrt{2}\cos^3 t)_t'} = \frac{\sqrt{2}\cdot 3\sin^2 t\cos t}{\sqrt{2\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)}} = -tg\, t.$

При $t = \frac{\pi}{4}$ $\quad f'(x_0) = y_x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -tg\frac{\pi}{4} = -1.$

Таким чином, рівняння дотичної набуває вигляд

$$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ або } x + y - 1 = 0,$$

а рівнянням нормалі буде мати наступний вигляд:

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \text{ або } x - y = 0.$$

Приклад 15 Продиференціювати функцію, використовуючи правило логарифмічного диференціювання

$$y = (x^2+1)^{\sin x}.$$

Розв'язання. Задача функція є степенево-показниковою, оскільки і основа степеня (x^2+1), і показник степеня $\sin x$ є функціями від x. За формулою для знаходження похідної степенево-показникової функції маємо:

$$y' = \sin x\cdot(x^2+1)^{\sin x-1}\cdot 2x + (x^2+1)^{\sin x}\ln(x^2+1)\cdot\cos x =$$

$$= (x^2+1)^{\sin x}\left(\frac{2x\sin x}{x^2+1} + \cos x\ln(x^2+1)\right).$$

Приклад 16 Продиференціювати функцію, використовуючи правило логарифмічного диференціювання

$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

Розв'язання. За формулою для знаходження похідної степенево-показникової функції знаходимо

$$y' = \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{x}-1} \cdot 1 + x^{\frac{1}{x}} \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}-2} - x^{\frac{1}{x}-2} \ln x = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x).$$

Приклад 17 Знайти диференціал функції $S = \frac{1}{1-t^2}$.

Розв'язання. За формулою $dy = y'dx = f'(x)dx,$ маємо:

$$dS = \left(\frac{1}{1-t^2}\right)' dt = -\frac{-2t}{\left(1-t^2\right)^2} dt = \frac{2tdt}{\left(1-t^2\right)^2}.$$

Приклад 18 Знайти диференціал функції $y = tg^2 x$.

Розв'язання. $dy = \left(tg^2 x\right)' dx = y = 2tgx \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{2tgx}{\cos^2 x} dx$.

Приклад 19 Знайти диференціал функції $y = 5^{\ln tgx}$.

Розв'язання. $dy = \left(5^{\ln tgx}\right)' dx =$

$$= 5^{\ln tgx} \ln 5 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 5^{\ln tgx} \ln 5 \cdot \frac{1}{\sin x \cos x} dx = 5^{\ln tgx} \frac{2\ln 5}{\sin 2x} dx$$

Приклад 20 Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Знайти похідні вищих порядків $y', y'', y''', \ldots$.

Розв'язання. Маємо: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2, \quad y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{(4)} = 120x + 48, \quad y^{(5)} = 120, \quad y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$.

Приклад. Обчислити похідну функції другого порядку:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}.$$

Розв'язання. За допомогою формул дії над степенями ($\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ і $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$) перетворюємо задану функцію до вигляду зручного для диференціювання.

$y = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{2-\frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}}$; знаходимо похідну першого порядку:

$$y' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4} x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4} x^{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}} = \frac{5}{4} x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}.$$

Обчислимо похідну другого порядку заданої елементарної функції однієї змінної x:

$$y'' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)'' = \frac{5}{4}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{5}{16} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}.$$

Відповідь: $y'' = \dfrac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}$

Приклад 21 Обчислити похідну другого порядку складної функції однієї змінної x: $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$;

Розв'язання. Застосовуємо формулу $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

$$y' = (\sqrt{x - \sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot (x - \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{4\sqrt{x\sqrt{x} - x}}.$$

Обчислимо похідну другого порядку складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, однієї змінної x.

$$y'' = (\sqrt{x - \sqrt{x}})'' = \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{4\sqrt{x\sqrt{x} - x}}\right)' = \frac{(2\sqrt{x} - 1)'(4\sqrt{x\sqrt{x} - x}) - (4\sqrt{x\sqrt{x} - x})'(2\sqrt{x} - 1)}{16x(\sqrt{x} - 1)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}(4\sqrt{x\sqrt{x} - x}) - \dfrac{4}{2\sqrt{x\sqrt{x} - x}}(x\sqrt{x} - x)'(2\sqrt{x} - 1)}{16x(\sqrt{x} - 1)} =$$

$$= \frac{(4\sqrt{x\sqrt{x} - x})\sqrt{x\sqrt{x} - x} - (x^{1+\frac{1}{2}} - x)'(2\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{16x(\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}\sqrt{x\sqrt{x} - x}} = \frac{4(x\sqrt{x} - x) - (\frac{3}{2}\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{16x^2(\sqrt{x} - 1)\sqrt{\sqrt{x} - 1}}.$$

Відповідь: $y'' = \dfrac{-7x + 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x}}{32x^2(\sqrt{x} - 1)\sqrt{\sqrt{x} - 1}}$.

Приклад 22 Обчислити похідну другого порядку функції $y = arctg\dfrac{x}{3} + \ln 2x$ в точці $x = 3$.

Розв'язання. Застосовуємо формули $(arctg\, u)' = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$ і $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

$$y' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{9}} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' + \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{9}{9 + x^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{3}{9 + x^2} + \frac{1}{x}.$$

Обчислимо похідну другого порядку функції однієї змінної x в точці $x = 3$.

$$y'' = \left(\frac{3}{9 + x^2} + \frac{1}{x}\right)' = \left(3(9 + x^2)^{-1} + x^{-1}\right)' = -3(9 + x^2)^{-2} \cdot 2x - x^{-2} = -\frac{6x}{(9 + x^2)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$y''(3) = -\frac{6 \cdot 3}{(9 + 3^2)^2} - \frac{1}{3^2} = -\frac{18}{18^2} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{18} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{6}.$$

Відповідь: $y''(3) = -\dfrac{1}{6}$.

Приклад 23 Знайти диференціал функції $y = \left(\sin(x^2 - 3x + 5)\right)$.

Розв'язання.

$$dy = y'dx = \left(\sin(x^2 - 3x + 5)\right)'dx = \cos(x^2 - 3x + 5)\cdot(x^2 - 3x + 5)'dx = \cos(x^2 - 3x + 5)\cdot(2x - 3)dx$$

Приклад24 Знайти похідну другого порядку y'' функції, заданої параметрично: $\begin{cases} x = 8\cos t, \\ y = 4\sin t. \end{cases}$

Розв'язання.

$$y' = 4\cos t, \quad y'' = -4\sin t,$$
$$x' = -8\sin t, \quad x'' = -8\cos t.$$

За формулою похідної функції, яка задана параметрично

$$y'' = \frac{x_t' y_t'' - x_t'' y_t'}{\left(x_t'\right)^3} = \frac{8\sin t\cdot 4\sin t + 8\cos t\cdot 4\cos t}{\left(-8\sin t\right)^3} = -\frac{32}{8^3\sin^3 t} = -\frac{1}{16\sin^3 t}.$$

Приклад 25 Обчислити d^2y, якщо $y = \ln(3x+1)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою $d^2y = y''(x)dx^2$. Для цього знайдемо $y''(x)$: $y'(x) = \frac{1}{3x+1}\cdot 3$, $\quad y''(x) = 3\cdot\left(\frac{1}{3x+1}\right)' = -\frac{9}{\left(3x+1\right)^2}$.

Отже, $d^2y = -\frac{9}{\left(3x+1\right)^2}dx^2$.

Приклад 26 Знайти y'', якщо $y = x + arctg\, y$.

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння по x і вважаючи y функцією від x, маємо: $y' = 1 + \frac{1}{1+y^2}\cdot y'$.

Виконуючи перетворення $y' - \frac{1}{1+y^2}\cdot y' = 1$; $\left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right)\cdot y' = 1$;

$\frac{y^2}{1+y^2}\cdot y' = 1$, знаходимо: $y' = \frac{1+y^2}{y^2} = \frac{1}{y^2} + 1 = y^{-2} + 1$.

Тоді $y'' = -2y^{-3}y' = -\frac{2}{y^3}\cdot\frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{2\left(1+y^2\right)}{y^5}$.

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.13-14**],** с. 78 – 85.

Вправи

Продиференціювати задані функції:

1 $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}$. Відповідь: $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

2 $y = \sqrt{x}\left(x^3 - \sqrt{x} + 1\right)$. Відповідь: $3{,}5x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3 $u=\dfrac{v^5}{v^3-2}$. Відповідь: $\dfrac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}$.

4 $z=\dfrac{1}{t^2+t+1}$. Відповідь: $-\dfrac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}$.

5 $\rho=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$. Відповідь: $\varphi\cos\varphi$.

6 $S=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$. Відповідь: $\dfrac{1}{1+\cos t}$.

7 $y=\left(x^2-2x+3\right)\cdot e^x$. Відповідь: $e^x\left(x^2+1\right)$.

8 $y=x^3-3^x$. Відповідь: $3x^2-3^x\ln 3$.

9 $y=e\left(\cos x+\sin x\right)$. Відповідь: $2e^x\cos x$.

10 $y=x^2\log_3 x$. Відповідь: $2x\log_3 x+\dfrac{x}{\ln 3}$.

11 $y=\dfrac{1}{\ln x}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.

12 $f(x)=3x-2\sqrt{x}$. Знайти $f'(1)$; $f'(4)$; $f'(a^2)$.

Відповідь: $f'(1)=2$; $f'(4)=2,5$; $f(a^2)=3-\dfrac{1}{|a|}$.

13 $\rho(\varphi)=\dfrac{\varphi}{1-\varphi^2}$. Знайти $\rho'(2)$ і $\rho'(0)$.

Відповідь: $\rho'(2)=\dfrac{5}{9}$; $\rho'(0)=1$.

14 $f(t)=\dfrac{t^2-5t-1}{t^2}$. Знайти $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)$.

Відповідь: $f'(-1)=-8$; $f'(2)=\dfrac{19}{16}$; $f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=3a^4+10a^3-a^2$.

15 Скласти рівняння дотичних до лінії $y=x-\dfrac{1}{x}$ в точках її перетину з віссю абсцис.

Відповідь: $y=2x-2$; $y=2x+2$.

16 Скласти рівняння нормалі до лінії $y=\dfrac{x^2-3x+6}{x^2}$ в точці а абсцисою $x=3$.

Відповідь: $27x-3y-79=0$.

17 Тіло рухається вздовж прямої за законом $S=5t^3+1$, де шлях S визначається в метрах, а час t - в секундах. Якою була швидкість тіла через 2 секунди після початку руху

Відповідь: $v=60$ м/с.

Знайти похідну складних функцій:

18 $u(t)=\left(t^2+t+2\right)^{\frac{3}{2}}$. Відповідь: $\frac{3}{2}(2t+1)\sqrt{t^2+t+2}$.

19 $y=3\sin(3x+5)$. Відповідь: $9\cos(3x+5)$.

20 $y=\cos^3 4x$. Відповідь: $-12\cos^2 4x\sin 4x$.

21 $y=\sin^2(\cos 3x)$. Відповідь: $-3\sin 3x\sin(2\cos 3x)$.

22 $y=\arcsin\frac{2}{x}$. Відповідь: $-\frac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}$.

23 $y=arctg^2\frac{1}{x}$. Відповідь: $-\frac{2arctg\frac{1}{x}}{1+x^2}$.

24 $y=\sqrt{\ln x}$. Відповідь: $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$.

25 $y=\ln\left(x^2-4x\right)$. Відповідь: $\frac{2x-4}{x^2-4x}$.

26 $y=10^{2x-3}$. Відповідь: $2\cdot 10^{2x-3}\ln 10$.

27 $y=\sin e^{x^2+3x-2}$. Відповідь: $\cos e^{x^2+3x-2}\cdot e^{x^2+3x-2}(2x+3)$.

28 $y=x\cdot 10^{\sqrt{x}}$. Відповідь: $10^{\sqrt{x}}\left(1+\frac{\sqrt{x}}{2}\ln 10\right)$.

29 $y=\lg(x-\cos x)$. Відповідь: $\frac{1+\sin x}{(x-\cos x)\ln 10}$.

30 $y=\frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$. Відповідь: $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$.

31 $y=\ln\left(x\sin x\sqrt{1-x^2}\right)$. Відповідь: $\frac{1}{x}-\frac{x}{1-x^2}+ctgx$.

32 $y=e^{\arcsin 2x}$. Відповідь: $\frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}$.

33 $y=\left(2x^2-7\right)^5$. Відповідь: $20x(2x^2-7)^4$.

34 $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. Відповідь: $-\sin 4x$.

35 $y=\frac{1}{(1+\sin 2x)^3}$. Відповідь: $-\frac{6\cos 2x}{(1+\sin 2x)^4}$.

36 $y=-ctg^3x+3ctgx+3x$. Відповідь: $3ctg^4x$.

37 $y=\ln\frac{ae^x}{bx^2+c}$. Відповідь: $\frac{bx^2-2bx+c}{bx^2+c}$.

Знайти похідні від заданих функцій:

38 $y^3 - 3y + 2ax = 0.$ Відповідь: $\dfrac{2a}{3(1-y^2)}.$

39 $\cos(xy) = x.$ Відповідь: $-\dfrac{1 + y\sin(xy)}{x\sin(xy)}.$

40 $y = 1 + xe^y.$ Відповідь: $\dfrac{e^y}{2-y}.$

41 $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t}, \\ x = \dfrac{t-1}{t}. \end{cases}$ Відповідь: -1.

Вказівка: $x = \dfrac{t+1}{t} = 1 + \dfrac{1}{t}; \quad y = \dfrac{t-1}{t} = 1 - \dfrac{1}{t}.$

42 $y = x^{\sin x}.$ Відповідь: $x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right).$

43 $y = 2x^{\sqrt{x}}.$ Відповідь: $x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}}\left(2 + \ln x\right).$

44 Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії

$x = 2\ln ctg\, t + 1,\ y = tg\, t + ctg\, t$ в точці, для якої $t = \dfrac{\pi}{4}.$

Відповідь: $y = 2,\ x = 1.$

Знайти диференціали заданих функцій:

45 $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 - 1}.$ Відповідь: $-\dfrac{6x^2 dx}{\left(x^3 - 1\right)^2}.$

46 $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}.$ Відповідь: $-2^{-\frac{1}{\cos x}} \ln 2 \cdot \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$

47 $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \dfrac{49}{2}\arcsin\dfrac{x}{7}.$ Відповідь: $\sqrt{49 - x^2}\, dx.$

48 Знайти похідні та диференціали другого порядку від функцій:

1). $y = -\dfrac{22}{x+5}.$ Відповідь. $y'' = -\dfrac{44}{(x+5)^3}.$

2). $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3).$ Відповідь. $y'' = \ln x.$

3). $y = -\dfrac{1}{9}x\sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x.$ Відповідь. $y'' = x \cdot \sin 3x.$

4). $y = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \sqrt{x^2 + a^2}.$ Відповідь. $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}.$

5). $y = xe^{x^2}.$ Відповідь. $2e^{x^2}\left(3x + 2x^3\right).$

49 Знайти похідні та диференціали першого і другого порядків від функцій:

1) $\begin{cases} x = tgt \\ y = \sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = te^t \\ y = e^{2t} \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$.

Питання для самоперевірки

1 Що називається похідною функції?

2 У чому полягає фізичний та геометричний зміст похідної?

3 Сформулюйте правила диференціювання.

4 Запишіть таблицю похідних.

5 Що називається похідною другого порядку?

6 Дайте означення диференціалу функції.

7 У чому полягає зв'язок між диференційованістю функції та існуванням її похідної?

8 Запишіть правила обчислення диференціалів.

9 Що називається похідною *n*-го порядку?

10 Що називається диференціалом 2-го порядку?

11 Як знаходити похідні другого порядку функції, що задана параметрично?

12 Як знаходити похідні другого порядку функції, яка задана неявно?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7

Правило Лопіталя. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Розкриття невизначеностей.

Довідковий матеріал

Правило Лопіталя застосовується для обчислення границь у випадку розкриття невизначеності лише одного із видглядів

$\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$ (які називають основними) і визначається формулою:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Такі невизначеності, як $0 \cdot \infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$, під час застосування правилв Лопіталя зводяться до основних.

Розв'язання прикладів

Обчислити границі за правилом Лопіталя.

Приклад 1 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x}$.

Розв'язання. При $x \to 0$ чисельник і знаменник дробу прямує до нуля, тобто маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, знаходимо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{1}=\frac{0}{1}=0.$

Приклад 2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}.$

Розв'язання. Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Після застосування правила Лопіталя і алгебраїчних перетворень одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}.=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{3x^2\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{3}.$$

Приклад 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}.$

Розв'язання. Після підстановки граничного значення x маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, знаходимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x}{-\sin x}=-2\lim_{x\to 0}e^{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=-2\cdot 1\cdot 1=-2.$$

Прилад 4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}.$

Розв'язання. Застосовуючи правило Лопіталя тричі, дістанемо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=\frac{2}{1}=2.$$

Приклад 5 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$

Розв'язання. Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду $\infty-\infty$. Правило Лопіталя застосовувати неможна. Тому виконаємо спочатку алгебраїчні перетворення: $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}.$

Тепер після підстановки граничного значення x маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. За правилом Лопіталя знаходимо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1}{\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\dfrac{1}{2}.$

Приклад 6 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right).$

Розв'язання. Після елементарних перетворень дограничної функції знаходимо границю

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\right)=\left(0\cdot\infty\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{-2}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-2x3\right)}{-2x^{-3}}=e^{+\infty}=\infty.$$

Приклад 7 Обчислити границю $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 5x}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\dfrac{\infty}{\infty}$, тому за правилом Лопіталя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln 5x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=0.$$

Приклад 8 Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{7x}-e^{-x}}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7e^{7x}+e^{-x}}{1}=8.$$

Приклад 9 Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 2}(2-x)tg\dfrac{\pi x}{4}$.

Розв'язання. Тут невизначеність виду $0\cdot\infty$. Зведемо її до невизначеності $\dfrac{0}{0}$, після чого застосовуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 2}(2-x)tg\frac{\pi x}{4}=\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{ctg\frac{\pi x}{4}}=\lim_{x\to 2}\frac{-1}{-1/\sin^2\frac{\pi x}{4}\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

Приклад 10 Обчислити границю $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx-\sec x)$

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Зведемо її до невизначеності $\dfrac{0}{0}$, після чого застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx-\sec x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-1}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-\sin x}=0.$$

Приклад 11 Обчислити границю $\lim\limits_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tg2x}$;

Розв'язання. Тут невизначеність виду ∞^0. Маємо

$$\lim_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tg2x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}(tg2x)\ln ctgx}$$

Знайдемо границю в показнику. Для цього зведемо дану невизначеність до виду $\frac{\infty}{\infty}$, потім скористаємось правилом Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}(tg2x\ln ctgx)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln ctgx}{1/tg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ln ctgx}{ctg2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\ln ctgx}\frac{1}{ctgx}\frac{1}{\sin^2 x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{\sin x\cos x\ln ctgx}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{x\cos x\ln ctgx}=0,$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln ctgx)^{tg2x}=e^0=1.$$

Приклад 12 Обчислити границю $\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$;

Розв'язання. Маємо невизначеність виду 1^∞, тоді

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}=e\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\cos 2x=[\infty\cdot 0]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 2x/\cos 2x}{2x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}=-2;$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)1/x^2=e^{-2}.$$

Приклад 13 Обчислити границю $\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{tg3x}$;

Розв'язання. Тут невизначеність виду 0^0, тоді

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{tg3x}=e^{\lim_{x\to 0}tg3x\ln\sin 2x};$$

$$\lim tg3x\ln\sin 2x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin 2x}{ctgx}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2ctg2x}{-3/\sin^2 3x}=$$

$$=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{tg2x}=-\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{2x}=0.$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin 2x)^{tg3x}=e^0=1.$$

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.15-16], с. 85 – 92.

Вправи

Обчислити границі за правилом Лопіталя.

1 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{\sin 3x}$. Відповідь: 1.

2 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{-\sin x}}{\cos x\cdot\sin x}$. Відповідь: 3.

3 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$. Відповідь: 0,5.

4 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{x}{\ln x}\right)$. Відповідь: -1.

5 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$. Відповідь: - 0,5.

6 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. Відповідь: 0.

7 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$. Відповідь: 1.

8 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$. Відповідь: $\dfrac{3}{e}$.

Питання для самоперевірки

1 Сформулюйте правило Лопіталя.

2 Сформулюйте основні теореми диференціального числення.

3 Для яких невизначеностей застосовують правило Лопіталя?

4 Як привести невизначеності вигляду $0\cdot\infty, \infty-\infty, \infty^0, 1^\infty, 0^0$ до основних?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8

Монотонність, екстремуми функції. Опуклість, вгнутість, точки перегину. Асимптоти, загальна схема побудови графіка функцій.

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Знайти асимптоти кривої $y=\dfrac{x^2+5x+3}{x-2}$.

Розв'язання. Задана функція не існує при $x=2$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}y=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x+3}{x-2}=\infty$, то пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою.

Для знаходження похилих асимптот обчислимо коефіцієнти k і b: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+5x+3}{x(x-2)}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=1$, оскільки степені многочленів чисельника і знаменника однакові;

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x-2}-x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+5x+3-x^2+2x}{x-2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x+3}{x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=7\cdot$$

Підставляючи значення $k=1$ і $b=7$ в рівняння $y=kx+b$, одержимо $y=x+7$. Таким чином, пряма $y=x+7$ – похила асимптота кривої.

Прилад 2 Знайти екстремуми функції $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

Розв'язання. Задана функція визначена і диференційована в інтервалі $(-\infty;+\infty)$. $x>0$. Її похідна $y'(x)=6x^2-12x-18=6(x^2-2x-3)=6(x+1)(x-3)$.

Знайдемо критичні точки: $y'(x)=0$, якщо $x=-1$ і $x=3$; $y'(x)\neq\infty$.

В інтервалах $(-\infty;-1)$ і $(3;+\infty)$ похідна $y'(x)$ додатна, бо $y'(-2)>0$ і $y'(-4)>0$, а в інтервалі $(-1;3)$ вона від'ємна, бо $y'(0)<0$.

Визначимо, які із критичних точок є екстремальними (рис. 2.1).

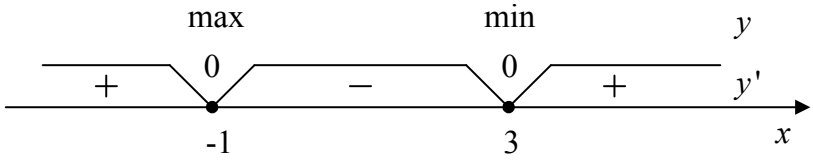


Рис.2.1

Обчислюємо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми:

$y_{\max}=y(-1)=-2-6+18+7=17$, $y_{\min}=y(3)=54-54-54+7=-47$.

Приклад 3 Знайти екстремум функції $y=x-\ln(1+x^2)$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, бо $1+x^2>0$ для будь-яких x. $x>0$. Її похідна $y'(x)=1-\dfrac{2x}{1+x^2}=\dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2}=\dfrac{(1-x)^2}{1+x^2}\geq 0$, отже, функція зростає, екстремумів немає.

Приклад 4 Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^4-2x^2+5$ на відрізку $[-2;2]$.

Розв'язання. Знаходимо $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$. Знаходимо критичні точки першого роду: $y'(x)=0$, якщо $x=0$, $x=1$ і $x=-1$; $y'(x)\neq\infty$. Відзначимо, що всі знайдені точки належать відрізку $[-2;2]$.

Обчислимо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізку: $y(-2)=13$, $y(-1)=4$, $y(0)=5$, $y(1)=4$, $y(2)=13$. Із одержаних значень вибираємо найбільше і найменше: $y_{\text{нм}}=4$, $y_{\text{нб}}=13$.

Приклад 5 За допомогою другої похідної знайти екстремуми функції $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Розв'язання. Задана функція визначена для всіх $x\in(0;1)\cup(1;+\infty)$.

Знаходимо $y'=\dfrac{\ln x-x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$;

$$y''=\frac{\frac{1}{x}\ln^2 x-2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln x-1)}{(\ln^2 x)^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot\ln x\cdot(\ln x-2\ln x+2)}{\ln^4 x}=\frac{2-\ln x}{x\ln^3 x}.$$

$y'(x)=0$, якщо $\ln x-1=0$, звідки $x=e$ – стаціонарна точка. Обчислюючи значення другої похідної при $x=e$, маємо $y''(e)=e^{-1}>0$. Отже, $(e;e)$ - точка мінімуму.

Приклад 6 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції $y=x^3-5x^2+3x-5$.

Розв'язання. Діятимемо за правилом знаходження інтервалів опуклості і вгнутості та точок перегину графіка функції:

1 задана функція визначена для всіх $x\in R$.

2 $y'(x)=3x^2-10x+3$;

3 $y''(x)=6x-10=2(3x-5)$;

4 $y''(x)=0$, якщо $3x-5=0$, тобто $x=\frac{5}{3}$; $y''(x)\neq\infty$;

5 для $x\in\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$ $y''(x)<0$, бо, наприклад, $y''(0)=-10<0$, а для $x\in\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ $y''(x)>0$, оскільки, наприклад, $y''(4)=14>0$, отже, в інтервалі $\left(-\infty;\frac{5}{3}\right)$ крива є опуклою, а в інтервалі $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$ – вгнутою;

6 в точці $x=\frac{5}{3}$ друга похідна даної функції дорівнює нулю і при переході через точку змінює знак, а це означає, що $x=\frac{5}{3}$ є абсцисою точки перегину кривої;

7 обчислюючи значення функції $y=x^3-5x^2+3x-5$ при $x=\frac{5}{3}$, одержимо: $y\left(\frac{5}{3}\right)=-\frac{250}{27}$. Таким чином, $M\left(\frac{5}{3};-\frac{250}{27}\right)$ – точка перегину графіка даної функції.

Приклад 7 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

Розв'язання. Задана функція визначена на всій числовій осі, оскільки $1+x^2>0$ для всіх $x\in R$. Диференціюючи її двічі, одержимо: $y'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$, $y''(x)=2\frac{1+x^2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$. Друга похідна існує на всій числовій осі і обертається в нуль при $x=-1$ і $x=1$. Ці точки розділять числову вісь на три інтервали: $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ і $(1;+\infty)$ (рис.7.1), в кожному з яких похідна $y''(x)$ зберігає знак. Визначаючи знак другої похідної в довільно взятій точці кожного

інтервалу, одержимо: $y''(-2)<0$, $y''(0)>0$, $y''(2)<0$. При визначенні знака другої похідної слід враховувати, що знаменник $\left(1+x^2\right)^2>0$ при всіх значеннях $x\in R$.

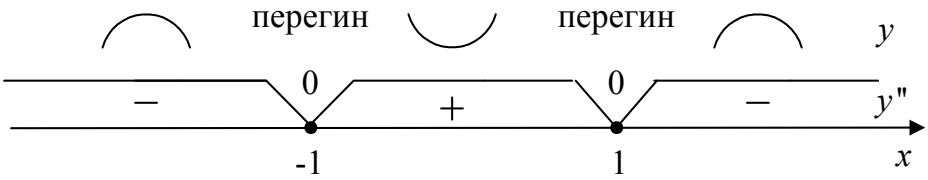


Рис. 7.1

Обчислюючи значення функції $y=\ln\left(1+x^2\right)$ при $x=\pm1$, знаходимо: $y(-1)=y(1)=\ln 2$. Таким чином, графік функції $y=\ln\left(1+x^2\right)$ є опуклим в інтервалах $(-\infty;-1)$ та $(1;+\infty)$ і вгнутим в інтервалі $(-1;1)$. Крива має дві точки перегину: $(-1;\ln 2)$ і $(1;\ln 2)$.

Приклад 8 Провести повне дослідження функції $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ і побудувати її графік за результатами дослідження.

Розв'язання. 1 $x^2-1\neq 0,\quad x\neq\pm1;\quad D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2 $x=-1$ і $x=1$ – точки розриву;

$(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ і $(1;+\infty)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{x^2}{x^2-1}=y(x)$. Отже, задана функція є парною. Її графік розташований симетрично відносно осі Oy, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x\geq 0$.

4 При $x=0$ $y=0$; при $y=0$ $x=0$, тобто графік функції проходить через точку початок координат.

5 $y=0$ при $x=0$; $y=\infty$ при $x=\pm1$;

$y<0$ в інтервалі $(0;1)$ і $y>0$ в інтервалі $(1;+\infty)$ (рис. 8.1).

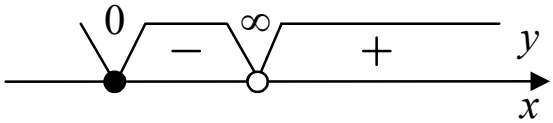


Рис. 8.1

6 $x=1$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to1+0}y=\lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{(1+0)^2}{(1+0-1)(1+0+1)}=\frac{1}{+0}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to1-0}y=\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{(1-0)^2}{(1-0-1)(1-0+1)}=\frac{1}{-0}=-\infty.$$

Отже, $x=1$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x\cdot\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0;\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=1.$$

Отже, пряма $y=1$ – горизонтальна асимптота.

7 $$y'=\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)'=\frac{2x\left(x^2-1\right)-x^2\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2-1-x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2};$$

$y'(x)=0$, якщо $x=0$; $y'(x)=\infty$, якщо $x=\pm1$, $y_{\max}=y(0)=0$ (рис. 8.2).

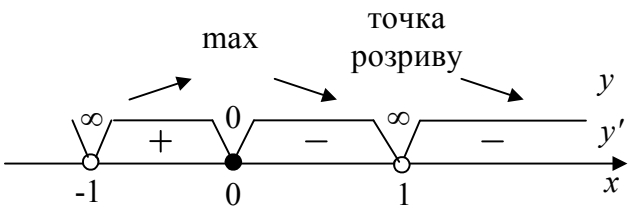


Рис. 8.2

8 $$y''=\left(\frac{-2x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=-2\left(\frac{x}{\left(x^2-1\right)^2}\right)'=-2\frac{\left(x^2-1\right)^2-2\left(x^2-1\right)\cdot 2x\cdot x}{\left(x^2-1\right)^4}=$$

$$=-2\frac{\left(x^2-1\right)\left(x^2-1-4x^2\right)}{\left(x^2-1\right)^4}=\frac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}.$$

$y''(x)\neq 0$; $y''(x)=\infty$ при $x=\pm1$ (рис. 8.3).

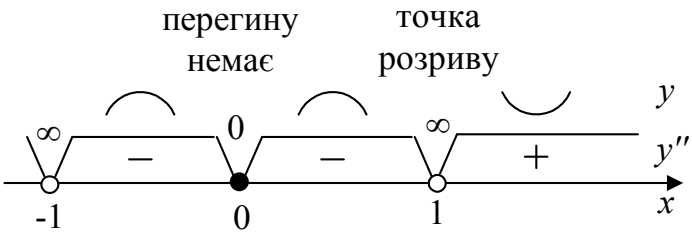


Рис. 8.3

9 Будуємо графік функції (рис. 8.4) за результатами дослідження і додатковими точками $y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$, $y(1{,}5)=1{,}8$, $y(2)=\frac{4}{3}$.

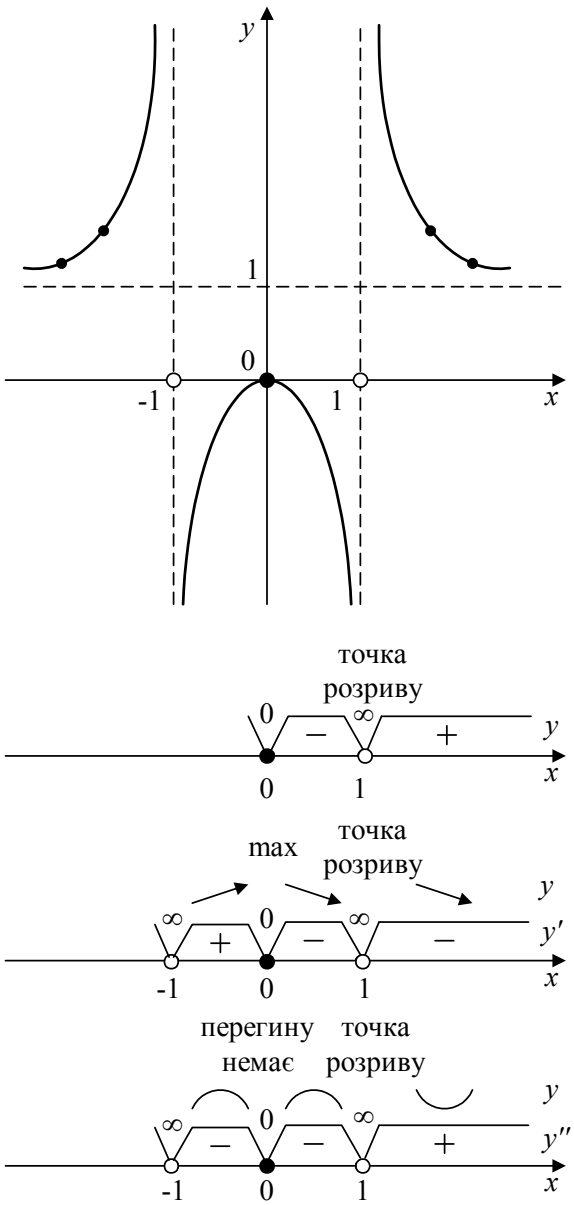


Рис. 8.4

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л. 17-18**],** с. 91 –102.

Вправи

Знайти асимптоти заданих кривих.

1 $y = \dfrac{x}{x^2 - 4x + 3}$. Відповідь: $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$.

2 $y = \dfrac{3x^2}{x^2 + 5}$. Відповідь: $y = 3$.

3 $y = \dfrac{x^3 + 4}{x^2}$. Відповідь: $x = 0$, $y = x$.

4 Показати, що функція $y = \dfrac{x^2 - 1}{x}$ зростає в будь-якому інтервалі, який не містить точку $x = 0$.

5 Знайти інтервали монотонності функції $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Відповідь: в інтервалах $(0;1)$ і $(1;e)$ функція спадає, а в інтервалі $(e;+\infty)$ функція зростає.

6 Знайти екстремуми функції $y=2x^3-3x^2$.

Відповідь: $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(1)=-1$.

7 Знайти екстремуми функції $y=x-\ln(1-x)$.

Відповідь: $y_{\min}=y(0)=0$.

8 Знайти найбільше і найменше значення функції $y=x^5-5x^4+5x^3+1$ на відрізку $[-1;2]$.

Відповідь: $y_{\text{нм}}$ = -10, $y_{\text{нб}}$ = 2.

9 За допомогою другої похідної знайти екстремуми функції $y=x^2e^{-x}$.

Відповідь: $y_{\max}=y(2)=\dfrac{4}{e^2}$, $y_{\min}=y(0)=0$.

10 Показати, що графік функції $y=\ln(x^2-1)$ всюди опуклий.

11 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину кривої $y=x^4(12\ln x-7)$.

Відповідь: в інтервалі $(0;1)$ крива опукла, а в інтервалі $(1;+\infty)$ – вгнута. Точка перегину $(1;-7)$.

Питання для самоперевірки

1 Яка функція називається зростаючою (спадаючою) на проміжку?

2 Сформулюйте необхідну і достатню умови зростання (спадання) функції на проміжку.

3 Що називають максимумом (мінімумом) функції в точці?

4 Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.

5 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування інтервалів опуклості (вгнутості) кривої.

6 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину кривої.

7 Що називають асимптотою кривої?

8 Яку пряму називають вертикальною асимптотою?

9 За яких умов існують похилі і горизонтальні асимптоти і як їх визначають?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9

Означення функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали функцій двох змінних. Екстремуми функцій багатьох змінних. Похідна за напрямом. Градієнт.

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Знайти і зобразити геометрично область існування функції $z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$.

Розв'язання. Логарифм визначений для додатних значень його аргументу, тому $y^2 - 4x + 8 > 0$, звідки $y^2 > 4\left(x - 2\right)$. Ніяких інших обмежень на змінні x і y не дано.

Щоб зобразити геометрично область визначення даної функції, побудуємо спочатку її межу, тобто графік функції $y^2 = 4\left(x - 2\right)$.

Це рівняння визначає параболу з вершиною в точці $O\left(2;0\right)$ і віссю симетрії Ox (рис. 9.1).

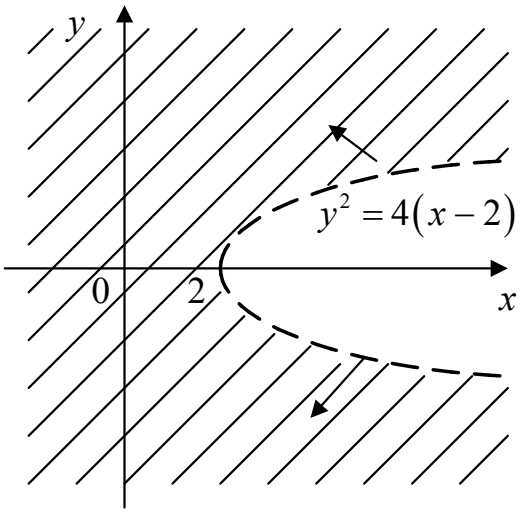


Рис. 9.1

Парабола поділила всю площину на дві частини – внутрішню і зовнішню по відношенню до параболи. Для точок однієї з цих частин виконується нерівність $y^2 > 4\left(x - 2\right)$, а для другої - $y^2 < 4\left(x - 2\right)$. На самій параболі $y^2 = 4\left(x - 2\right)$. Щоб встановити, яка з цих двох частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умові $y^2 > 4\left(x - 2\right)$, досить перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки , яка не лежить на параболі. Наприклад, початок координат $O\left(0;0\right)$ знаходиться зовні від параболи і задовольняє потрібній умові $0 > 4\left(0 - 2\right)$.

Отже, областю існування даної функції є множина точок площини xOy, які знаходяться зовні від параболи. Сама парабола в область існування функції не входить, бо для точок параболи $y^2 - 4x + 8 = 0$, а логарифм нуля не визначений.

Прилад 2 Знайти і зобразити геометрично область визначення функції $z = \arcsin\dfrac{y - 1}{x}$.

Розв'язання. Функція визначена за умови $x \neq 0$ і $-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1$, що рівносильно розв‘язанню двох систем: $\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x \leq y \leq 1 + x \end{cases}$ і $\begin{cases} x < 0, \\ 1 - x \geq y \geq 1 + x. \end{cases}$

Зобразимо розв‘язки кожної із систем графічно (рис. 9.2).

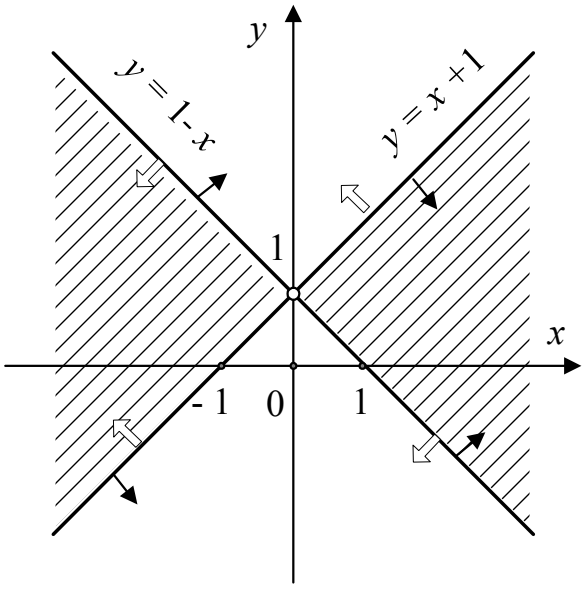


Рис. 9.2

Першій системі задовольняють точки, які розташовані всередині правого вертикального кута, утвореного прямими $y = 1 + x$ і $y = 1 - x$, але без точки $(0;1)$, другій - точки, які розташовані всередині лівого вертикального кута, утвореного цими самими прямими і також без точки $(0;1)$.

Отже, областю визначення даної функції є внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y = 1 + x$ і $y = 1 - x$, включаючи ці прямі, але без точки їх перетину $(0;1)$, бо при $x = 0$ задана функція не визначена.

Приклад 3 Знайти точки розриву функції $f(x;y) = \frac{3}{4 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Задана функція невизначена, а отже і розривна там, де її знаменник обертається в нуль, тобто в точках, для яких $4 - x^2 - y^2 = 0$. Таким чином, задана функція розривна в кожній точці кола $x^2 + y^2 = 4$ (лінія розриву).

Приклад 4 Дослідити на неперервність функцію $z = \frac{x^2 + 2y + 4}{y^2 - 2x}$.

Розв'язання. Функція z неперервна як відношення двох многочленів в усіх точках, де $y^2 - 2x \neq 0$. Точки розриву розташовані на параболі $y^2 = 2x$. При наближені точки $M(x;y)$ до будь-якої точки цієї параболи задана функція z нескінченно зростає.

Приклад 5 Знайти частинні похідні функції $z = x^2 - 3xy + 4y^2$.

Розв'язання. Як уже визначалося, функцію кількох змінних можна диференціювати за будь-якою змінною, вважаючи всі інші сталими, і за тими самими правилами і формулами, що і функцію однієї змінної. Тому, припустивши, що y є сталим, знаходимо частинну похідну від даної функції по змінній x: $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(x^2 - 3xy + 4y^2\right)'_x = \left(x^2\right)'_x - \left(3xy\right)'_x + \left(4y^2\right)'_x = 2x - 3y\left(x\right)'_x + 0 =$
$= 2x - 3y \cdot 1 = 2x - 3y$.

Припускаючи тепер, що x залишається сталим, знаходимо частинну похідну від даної функції по y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x^2 - 3xy + 4y^2\right)'_y = \left(x^2\right)'_y - \left(3xy\right)'_y + \left(4y^2\right)'_y = 0 - 3x \cdot 1 + 8y = -3x + 8y.$$

Прилад 6 Обчислити $f'_x(2;1)$ і $f'_y(2;1)$, якщо $f(x;y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку частинні похідні від даної функції в точці $(x;y)$: $f'_x(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} \underset{y=const}{=} \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right)$;

$$f'_y(x;y) = \frac{\partial f(x;y)}{\partial y} \underset{x=const}{=} \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(x - \frac{x}{y^2}\right).$$

Обчислимо тепер їх значення в точці $(2;1)$, тобто при $x = 2$, $y = 1$:

$$f'_x(2;1) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} \cdot (1+1) = \frac{1}{2}; \qquad f'_y(2;1) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=2\\y=1}} = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} \cdot (2-2) = 0.$$

Отже, $f'_x(2;1) = \frac{1}{2}$ і $f'_y(2;1) = 0$ – шукані значення частинних похідних заданої функції в заданій точці.

Приклад 7 Показати, що функція $z = y\ln\left(x^2 - y^2\right)$ задовольняє рівнянню $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

Розв'язання. Знаходимо $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln\left(x^2 - y^2\right) + y \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (-2y) = \ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Підставляючи вирази частинних похідних в ліву частину рівняння , отримаємо тотожність: $\frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y}\left(\ln\left(x^2 - y^2\right) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}\right) =$

$$=\frac{2y}{x^2-y^2}+\frac{\ln\left(x^2-y^2\right)}{y}-\frac{2y}{x^2-y^2}=\frac{1}{y}\ln\left(x^2-y^2\right)=\frac{z}{y^2}.$$

Отже, функція z задовольняє даному рівнянню.

Приклад 8 Знайти частинні диференціали функції $z=xy^3-3x^2y^2+2y^4$ по кожній із незалежних змінних.

Розв'язання. Задана функція z залежить від двох змінних x і y. Отже, можна знайти два її частинних диференціали d_xz і d_yz. Згідно з означенням $d_xz=\frac{\partial z}{\partial x}dx$, $d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$. Знайдемо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(xy^3-3x^2y^2+2y^4\right)'_x=y^3-6xy^2;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left(xy^3-3x^2y^2+2y^4\right)'_y=3xy^2-6x^2y+8y^3.$$

Підставляючи вирази частинних похідних у формули частинних диференціалів, остаточно дістанемо

$$d_xz=\frac{\partial z}{\partial x}dx=\left(y^3-6xy^2\right)dx;\qquad d_yz=\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(3xy^2-6x^2y+8y^3\right)dy.$$

Приклад 9 Знайти повний диференціал функції $S=x^2\ln t$

Розв'язання. Задана функція S залежить від двох змінних x і t, тому

$$dS=\frac{\partial S}{\partial x}dx+\frac{\partial S}{\partial t}dt.$$

Враховуючи, що $\frac{\partial S}{\partial x}=\left(x^2\ln t\right)'_x=2x\ln t$; $\frac{\partial S}{\partial t}=\left(x^2\ln t\right)'_t=x^2\cdot\frac{1}{t}$, шуканий диференціал $dS=2x\ln t dx+\frac{x^2}{t}dt$.

Приклад 10 Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\left(x^2+y\right)^5$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[\left(x^2+y\right)^5\right]'_x=5\left(x^2+y\right)^4\left(x^2+y\right)'_x=5\left(x^2+y\right)^4 2x=10x\left(x^2+y\right)^4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left[\left(x^2+y\right)^5\right]'_y=5\left(x^2+y\right)^4\left(x^2+y\right)'_y=5\left(x^2+y\right)^4\cdot 1=5\left(x^2+y\right)^4.$$

Диференціюючи кожну із одержаних похідних (функцій) по x і по y, знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left[10x\left(x^2+y\right)^4\right]'_x=10\left(\left(x^2+y\right)^4+4x\left(x^2+y\right)^3\cdot 2x\right)=10\left(x^2+y\right)^3\left(x^2+y+8x^2\right)=$$

$$=10\left(x^2+y\right)^3\left(9x^2+y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left[10x\left(x^2+y\right)^4\right]'_y=10x\cdot 4\left(x^2+y\right)^3\cdot 1=40x\left(x^2+y\right)^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left[5\left(x^2+y\right)^4\right]_x'=5\cdot 4\left(x^2+y\right)^3\cdot 2x=40x\left(x^2+y\right)^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left[5\left(x^2+y\right)^4\right]_y'=5\cdot 4\left(x^2+y\right)^3\cdot 1=20x\left(x^2+y\right)^3.$$

Приклад 11 $z=e^x\left(\cos y+x\sin y\right)$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^x\left(\cos y+x\sin y\right)\right)_x'=e^x\left(\cos y+x\sin y\right)+e^x\left(0+\sin y\right)=e^x\left(\cos y+x\sin y+\sin y\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^x\left(\cos y+x\sin y\right)\right)_y'=e^x\left(-\sin y+x\cos y\right).$$

Тепер маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left[e^x\left(\cos y+x\sin y+\sin y\right)\right]_y'=e^x\left(-\sin y+x\cos y+\cos y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left[e^x\left(-\sin y+x\cos y\right)\right]_x'=e^x\left(-\sin y+x\cos y\right)+e^x\left(0+\cos y\right)=$$

$$=e^x\left(-\sin y+x\cos y+\cos y\right).$$

Порівнюючи між собою результати для $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, бачимо, що вони однакові. Отже, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Приклад 12 $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Показати, що $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Розв'язання. Перетворимо задану функцію u таким чином:

$$u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\ln\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right).$$

Тепер знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x=-\frac{x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y=-\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)_x'=-\frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)_x'=-\frac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=-\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Підставляючи вирази похідних $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ і $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ у задане рівняння, будемо мати $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2-y^2+y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{0}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$.

Отже, якщо $u=\ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, то $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

Приклад 13 Знайти $d^2 z$, якщо $z=e^x\cos y$.

Розв'язання. Скористаємось формулою для знаходження повного диференціала другого порядку функції двох змінних, згідно з якою

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Ураховуючи, що $\frac{\partial z}{\partial x}=\left(e^x\cos y\right)_x'=e^x\cos y$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(e^x\cos y\right)_y'=e^x\sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x\cos y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-e^x\sin y$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x\cos y$, будемо мати

$$d^2 z=e^x\cos y dx^2-2e^x\sin y dxdy-e^x\cos y dy^2.$$

Приклад 14 Знайти екстремуми функції $f(x;y)=x^3+3xy^2-30x-18y$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку даної функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-30=3(x^2+y^2-10);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=6xy-18=6(xy-3).$$

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо після елементарних перетворень систему

$$\begin{cases}x^2+y^2-10=0\\2xy=6\end{cases}.$$

Додаючи і віднімаючи почленно рівняння цієї системі, матимемо

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2=16\\x^2-2xy+y^2=4\end{cases},$$

або

$$\begin{cases}(x+y)^2=16\\(x-y)^2=4\end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases}x+y=\pm 4\\x-y=\pm 2\end{cases}.$$

Розв'язуючи останню систему, рівносильну даній, знаходимо стаціонарні точки: $M_1(3;1)$, $M_2(1;3)$, $M_3(-1;-3)$, $M_4(-3;-1)$.

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

і складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x \cdot 6y \\ 6y \cdot 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Переконуємося, що

1) $\Delta(M_1) = 36(9-1) = 288 > 0$, $A_1 = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_1} = 6 \cdot 3 = 18 > 0$, отже $M_1(3;1)$ - точка мінімуму;

2) $\Delta(M_2) = 36(1-9) = -288 < 0$, отже у точці M_2 екстремуму немає;

3) $\Delta(M_3) = 36(1-9) = -288 < 0$, отже у точці M_3 екстремуму немає;

4) $\Delta(M_4) = 36(9-1) = 288 > 0$, $A_4 = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)_{M_4} = 6(-3) = -18 < 0$, отже M_4 - точка максимуму.

Таким чином, задана функція має два екстремуми: у точці $M_1(3;1)$ - мінімум, $z_{\min} = f(3;1) = -72$; у точці $M_4(-3;-1)$ максимум; $z_{\max} = f(-3;-1) = 72$.

Приклад 15 Знайти екстремум функції $z = x^2 + xy + y^2 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$.

Розв'язання. Задана функція визначена і диференційовна скрізь, крім $x = 0$ і $y = 0$. Тому подальші дослідження будемо виконувати за умов $x \neq 0$ і $y \neq 0$.

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - \frac{1}{y^2}.$$

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - \dfrac{1}{x^2} = 0, \\ x + 2y - \dfrac{1}{y^2} = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x^3 + x^2 y - 1 = 0, \\ xy^2 + 2y^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

з якої знаходимо стаціонарні точки даної функції. Віднімаючи від першого рівняння системи друге, одержуємо:

$$2(x^3-y^3)+xy(x-y)=0 \Leftrightarrow (x-y)(2x^2+3xy+2y^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\frac{x}{y}+2\right)=0, \quad \text{бо } y\neq 0.$$

З останньої рівності випливає, або $x-y=0$, або $2\left(\frac{x}{y}\right)^2+3\frac{x}{y}+2=0$. Але останнє рівняння дійсних розв'язків не має, бо $D=b^2-4ac=9-16<0$. Отже, $x=y$. Тоді із першого рівняння системи маємо:

$$2x^3+x^3-1=0,$$

звідки $x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

Таким чином, $x=y=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$, тобто $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ - стаціонарна точка.

Перевіримо, чи є екстремум у точці M з допомогою достатніх умов. Для цього знайдемо спочатку другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2+\frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2+\frac{2}{y^3}.$$

Підставляючи в частинні похідні другого порядку координати стаціонарної точки $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$, одержимо

$$A=2+2\cdot 3=8, \quad B=1, \quad C=2+2\cdot 3=8.$$

Обчислюючи далі визначник

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}=64-1=63>0$$

і враховуючи, що $A=8>0$, робимо висновок: $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ - точка локального мінімуму, причому

$$z_{\min}=z\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\sqrt[3]{3}\cdot 3.$$

Приклад 16 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=x^2-y^2$ в колі $x^2+y^2\leq 4$.

Розв'язання. Знаходимо перші частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}=2x$ і $\frac{\partial z}{\partial y}=-2y$.

Розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} 2\tilde{o}=0, \\ -2\acute{o}=0, \end{cases}$ знаходимо одну критичну точку O(0;0), в який значення функції дорівнює нулю.

Знайдемо найбільше і найменше значення функції z на межі, тобто на колі $x^2+y^2=4$. Оскільки на колі змінні x і y зв'язані співвідношенням $x^2+y^2=4$, то для точок кола функцію $z=x^2-y^2$ можна подати як функцію однієї змінної x: $z=z(x)=x^2-(4-x^2)=2x^2-4$, причому $-2\le x\le 2$.

Отже, знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних на колі $x^2+y^2=4$ зведено до знаходження найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної $z=2x^2-4$ на відрізку (-2;2). Знаходимо критичні точки цієї функції на інтервалі (-2;2) і обчислюємо значення функції у цих точках і на кінцях відрізка:

$z'=4x=0$ при $x=0$ (критична точка); $z(0)=-4$;

$z(-2)=z(2)=2\cdot 4-4=4$. Таким чином, функція має найбільше значення, яке дорівнює 4, і найменше значення, яке дорівнює –4.

Отже, найбільшого значення функція $z=x^2-y^2$ в колі $x^2+y^2\le 4$ набуває у точках $M_1(-2;0)$ і $M_2(2;0)$ кола $x^2+y^2=4$ і найменшого - у точках $M_3(0;2)$ і $M_4(0;-2)$ цього самого кола.

Приклад 17 Знайти похідну функції $z=x^3-y^3$ у точці $M(1;1)$ у напрямі $\vec{l}$, який утворює з віссю $0x$ кут $\alpha=60°$.

Розв'язання. За формулою знаходження похідної за напрямком маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha .$$

Ураховуючи,що

$$\cos\alpha=\cos 60°=\frac{1}{2},\sin\alpha=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=(3x^2)\big|_M=3,\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M=(-3y^2)\big|_M=-3,$$

знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial l}=3\frac{1}{2}-3\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3(1-\sqrt{3})}{2}.$$

Приклад 18 Знайти градієнт функції $z=3x^2-6xy+y^2$ в точці $M_1\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$, його модуль та напрямні косинуси.

Розв'язання. За формулою $gradz=\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}$. Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z=3x^2-6xy+y^2$ у точці $M_1\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{2}\right)$ відповідно дорівнюють:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_1}=\left.(6x-6y)\right|_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}}=6\left(-\frac{1}{3}\right)-6\left(-\frac{1}{2}\right)=1;$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_1} = \left.(-6x+2y)\right|_{\substack{x=-\frac{1}{3}\\ y=-\frac{1}{2}}} = -6\left(-\frac{1}{3}\right)+2\left(-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Отже, $\left.gradz\right|_{M_1} = \vec{i}+\vec{j}$.

Модуль градієнта і його напрямні косинуси у точці M_1 відповідно дорівнюють:

$$\left.|gradz|\right|_{M_1} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos\beta = \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що градієнт даної функції у точці M_1 напрямлений вздовж бісектриси першого координатного кута.

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.19-20**]**, с. 104 –116.

Вправи

Знайти область визначення наведених функцій і зобразити її геометрично.

1 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}$.

Відповідь: $x^2+y^2 \ge 1$ – частина площини зовні одиничного кола з центром в початку координат, включаючи і саме коло.

2 $z=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$.

Відповідь: внутрішня частина кола $x^2+y^2<1$ (без межі).

3 $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}$.

Відповідь: частина площини між двома параболами $y^2=x$ і $y^2=-x$, включаючи межу за винятком точки $O(0;0)$.

Дослідити наступні функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі існують.

4 $z=\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$. Відповідь: $x^2+y^2=4$.

5 $z=\ln\left(9-x^2-y^2\right)$.

Відповідь: функція неперервна в області визначення. Лінія розриву – коло $x^2+y^2=9$.

Знайти частинні похідні першого порядку наступних функцій.

6 $z=x^3y-y^3x$. Відповідь: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$.

7 $z=\left(5x^2y-y^3+7\right)^3$.

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy\left(5x^2y-y^3+7\right)^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3\left(5x^2y-y^3+7\right)^2\left(5x^2-3y^2\right)$.

8 $z=\ln\left(x+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

Відповідь: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$.

9 Показати, що функція $z=\frac{x^2}{2y}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ задовольняє рівнянню $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^3}{y}$.

10 Знайти частинні диференціали функції $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$.

Відповідь: $d_xz=\frac{y\left(y^2-x^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dx$, $d_yz=\frac{x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy$.

Знайти повні диференціали наступних функцій:

11 $z=x^2+\sin y$. Відповідь: $dz=2xdx+\cos ydy$.

12 $z=x\cdot 2^y$. Відповідь: $dz=2^y dx+x2^y\ln 2dy$.

13 $z=\arcsin\frac{x}{y}$. Відповідь: $dz=\frac{ydx-xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$.

14 $z=\ln\left(e^x+e^y\right)$. Довести, що $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$ і що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

15 Знайти повний диференціал другого порядку функції

$$z=x^2+y^2-xy-2x+y+7.$$

Відповідь: $2\left(dx^2-dxdy+dy^2\right)$.

16 Знайти d^2z, якщо $z=x\ln\frac{y}{x}$. Відповідь: $-\frac{dx^2}{x}+2\frac{dxdy}{y}-x\frac{dy^2}{y^2}$.

17 Знайти точки екстремуму функції $z=4(x-y)-x^2-y^2$.

Відповідь: (2;-2).

18 Знайти екстремуми функції $z=x^3+y^3-3xy$.

Відповідь: у точці (0;0) немає екстремуму. У точці (1;1) - мінімум.

19 Знайти найбільше і найменше значення функції $z=e^{-x^2-y^2}(2x^2+3y^2)$ в колі $x^2+y^2\le 4$.

Відповідь: $z_{нб} = \frac{3}{e}$ у точках (0;±1); $z_{нм} = 0$ у точці (0;0).

20 Знайти похідну функції $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ у точці $M_0(1;1)$ у напрямі бісектриси першого координатного кута.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

21 Знайти похідну функції $z = arctg\frac{y}{x}$ у напрямі вектора $\vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ в будь-якій точці та в точках $M_1(1;3)$ і $M_2(2;1)$.

Відповідь: $\frac{4x - 3y}{5(x^2 + y^2)^2}$; $-\frac{1}{100}$; $\frac{1}{25}$.

22 Знайти найбільшу швидкість зростання поля $u = \ln(x^2 + 4y^2)$ у точці $M_0(6;4;0)$.

Відповідь: $\frac{\sqrt{73}}{25}$.

23 Знайти точку, в який градієнт функції $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ дорівнює $\bar{i} - \frac{16}{9}\bar{j}$.

Відповідь: $\left(-\frac{1}{3};\frac{3}{4}\right),\left(\frac{7}{3};-\frac{3}{4}\right)$.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення функції двох (кількох) незалежних змінних.

2 Що називають областю визначення функції двох (кількох) змінних?

3 Що називається графіком функції двох змінних?

4 Дайте означення границі функції $z = f(x;y)$ при $x \to x_0$, $y \to y_0$.

5 Дайте означення неперервності функції двох незалежних змінних в точці і в області. Наведіть приклади розривних функцій.

6 Дайте означення частинної похідної функції двох незалежних змінних по одній із них. Поширити це означення на функції багатьох змінних.

7 У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції $z = f(x;y)$ в системі декартових координат?

8 Що називають частинним приростом і частинним диференціалом по x функції $z = f(x;y)$? Як виражається частинний диференціал функції через її частинну похідну?

9 У чому полягає геометричний зміст частинних диференціалів функції $z = f(x;y)$ в системі декартових координат?

10 Що називається повним приростом і повним диференціалом функції $z = f\left(x; y\right)$? Як виражається повний диференціал функції через її частинні похідні?

11 Яка функція кількох змінних називається диференційованою?

12 Сформулюйте достатню умову диференційованості функції в точці.

13 Дайте означення точки екстремуму (максимуму і мінімуму) функції двох змінних.

14 У чому полягає необхідна умова екстремуму функції двох незалежних змінних? Який її геометричний зміст?

15 Сформулюйте достатні умови екстремуму функції двох змінних. Чи може функція $z = f(x; y)$ у критичних точках не мати екстремуму?

16 Сформулюйте правило знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних у заданій замкненій області.

17 Чи завжди функція $z = f(x; y)$ має найменше і найбільше значення у замкненій області D?

18 Що називають скалярним полем?

19 Дайте означення похідної у заданому напрямі в даній точці для функції двох змінних.

20 У яких точках скалярного поля похідна у будь-якому напрямі дорівнює нулю?

21 Дайте означення градієнта скалярного поля. За яких умов $gradz$, де $z = f(x; y)$, може дорівнювати нульовому вектору? Що показує градієнт?

22 Як виражається похідна у напрямі в даній точці через градієнт і одиничний вектор цього напряму?

23 Виразити похідну поля у точці $M(x; y)$ у будь-якому напрямі $\vec{l}$ з допомогою $gradz$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10

Невизначений інтеграл. Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування. Інтегрування раціональних дробів.

Таблиця невизначених інтегралів

$$\int Odu = \int Ou'_x dx = C. \quad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx == u + C. \quad (2)$$

$$\int u^{\alpha} du = \int u^{\alpha} u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. \quad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \quad . \quad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C. \quad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C. \quad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C. \quad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C. \quad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u \cdot u'_x dx = -\cos u + C. \quad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u \cdot u'_x dx = \sin u + C. \quad (10)$$

$$\int tgu du = \int tgu \cdot u'_x dx = -\ln|\cos u| + C. \quad (11)$$

$$\int ctgu du = \int ctgu \cdot u'_x dx = \ln|\sin u| + C. \quad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = tgu + C. \quad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C. \quad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C. \quad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \quad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C. \quad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \quad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C. \quad (19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C. \quad (20)$$

$$\int \sqrt{u^2 + A} du = \int \sqrt{u^2 + A} \cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C. \quad (21)$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \int \sqrt{a^2 - u^2} \cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C, \ (a>0). \quad (22)$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $\int \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx.$

Розв`язання. Помічаємо, що $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right) = \left(\sqrt{x}\right)^3 + 1.$ Тоді

$$\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx=\int\left[\left(\sqrt{x}\right)^3+1\right]dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+x+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C.$$

Приклад 2 Знайти $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx.$

Розв`язання. Маємо

$$\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^x dx+\int\frac{dx}{x}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C=C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|.$$

Приклад 3 Знайти $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx.$

Розв`язання. Оскільки $1+cos2x=2cos^2x$, то

$$\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{2}tgx+\frac{x}{2}+C=\frac{1}{2}\left(tgx+x\right)+C.$$

Приклад 4 Знайти $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}.$

Розв`язання. Виконуємо тотожні перетворення над підінтегральною функцією:

$$f(x)=\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int\frac{dx}{\sin^2 x}=tgx-ctgx+C.$$

Приклад 5 Знайти $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx.$

Розв`язання. Маємо

$$\int\frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx=\int\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}}\sin 2xdx.$$

Оскільки $\left(7-\cos^2 x\right)'=-2\cos x(-\sin x)=\sin 2x,$ то в якості змінної інтегрування маємо вираз $7-cos^2x$. Відносно цієї змінної одержимо інтеграл від степеневої функції, тобто

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7-\cos^2 x}}dx = \int \left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}} \sin 2x dx = \frac{\left(7-\cos^2 x\right)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C =$$

$$= \frac{\left(7-\cos^2 x\right)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\left(7-\cos^2\right)^2} + C.$$

Приклад 6 Знайти $\int \frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x}$.

Розв`язання. Оскільки похідна виразу *5+7tgx* дорівнює $\frac{7}{\cos^2 x}$, а множник $\frac{1}{\cos^2 x}$ відрізняється від цієї похідної лише сталим множником *7,* то змінною інтегрування тут можна вважати вираз *5+7tgx,* і, таким чином, знайти інтеграл за формулою (6):

$$\int \frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x} = \frac{1}{7}\int \frac{1}{5+7tgx} \cdot \frac{7}{\cos^2 x} dx = \begin{vmatrix} u = 5+7tgx \\ u_x{}' = \frac{7}{\cos^2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{u} \cdot u_x{}' dx = \frac{1}{7}\ln\left|5+7tgx\right| + C.$$

Приклад 7 Знайти $\int \frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2}dx.$

Розв`язання. Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{arctg 2x} \cdot \frac{2}{1+4x^2}dx,$$

але $\frac{2}{1+4x^2} = \left(arctg 2x\right)'$, і тому, вважаючи змінною інтегрування функцію *arctg2x,* інтеграл знаходимо за формулою (8):

$$\int \frac{e^{arctg 2x}}{1+4x^2}dx = \frac{1}{2}e^{arctg 2x} + C.$$

Приклад 8 Знайти $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}}$.

Розв'язання. Покладемо $x^6=t$. Тоді $6x^5dx=dt$ і

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{(x^6)^2-3}} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3}} = \frac{1}{6}\ln\left|t+\sqrt{t^2-3}\right| + C.$$

За допомогою вказаної підстановки даний інтеграл зведений до табличного (формула 20). Повертаючись до початкової змінної, остаточно будемо мати

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6}\ln\left|x^6 + \sqrt{x^{12}-3}\right| + C.$$

Приклад 9 Знайти $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Покладемо $x+1=t^2$. Звідси $x=t^2-1$, а $dx=2tdt$ і

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\int\left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C.$$

Розв`язати даний приклад можна інакше. Нехай $1+\sqrt{x+1} = t$. Звідси $x=(t-1)^2-1$, а $dx=2(t-1)dt$ і

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2\int \frac{t-1}{t}dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t} =$$

$$= 2t - 2\ln|t| + C = 2(1+\sqrt{x+1}) - 2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right| + C.$$

Одержані результати відрізняються сталим доданком 2. Однак, обидва вони правильні, в чому можна легко переконатися шляхом їх диференціювання.

Приклад 10 Знайти $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$.

Розв'язання. Розділивши чисельник і знаменник підінтегрального виразу на cos^2x, одержимо

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3+4tg^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{3}{4}+tg^2 x}.$$

Оскільки $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(tgx)$, то доцільно покласти $tgx=t$. Тоді

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 + 4\sin^2 x} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{3}{4}+t^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2tgx}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 11 Знайти $\int x^2 \ln x dx$.

Розв'язання. Поклавши $u(x)=lnx$, $dv(x)=x^2dx$ і застосувавши формулу інтегрування частинами $\int udv = uv - \int vdu$, одержуємо

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln x; & du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx; & v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C.$$

Приклад 12 Знайти $\int x^2 \sin 3x dx$.

Розв'язання. Покладемо $u=x^2, dv=\sin 3xdx$. Тоді

$$du=2xdx,\quad v=\int \sin 3xdx=\frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою інтегрування частинами знаходимо

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3xdx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x,\ dv=\cos 3xdx,$ тоді

$$du=dx, v=\int \cos 3xdx=\frac{1}{3}\int \cos 3xd(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x\cos 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int \sin 3xdx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2\sin 3xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x\right)+C.$$

$$=\frac{1}{27}\left(-9x^2\cos 3x+6x\sin 3x+2\cos 3x\right)+C.$$

Приклад 13 Знайти $\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx.$

Розв'язання. Застосувавши формулу інтегрування ачтинами, одержимо

$$\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2-3x+4; & du=(2x-3)dx \\ dv=e^{5x}dx; & v=\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}e^{5x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\int(2x-3)e^{5x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=2x-3; & du=2dx \\ dv=e^{5x}dx; & v=\frac{1}{5}e^{5x}\end{matrix}\right|=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{5}\int e^{5x}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{25}e^{5x}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{125}e^{5x}\left(25x^2-75x+100-10x+15+2\right)+C=\frac{1}{125}\left(25x^2-85x+117\right)e^{5x}+C.$$

Приклад 14 Знайти $\int xarctgxdx$

Розв'язання. Із формули інтегрування частинами

$$\int xarctgxdx=\frac{1}{2}\int arctgxd(x^2)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int x^2darctgx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-x+arctgx\right)+C.$$

Інтегрування раціональних дробів

Приклад 15 Знайти $\int \frac{dx}{3x+2}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу I типу. Покладемо *3x+2=t*, тоді *3dx=dt* і тому

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{3dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3}\ln|t| + C = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C.$$

Розв`язання цього ж прикладу можна записати ще й таким чином:

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+2)}{3x+2} = \frac{1}{3}\ln|3x+2| + C.$$

Приклад 16 Знайти $\int \frac{dx}{(1-2x)^7}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу II типу. Оскільки $d(1-2x) = (1-2x)'dx = -2dx$ і $\frac{1}{(1-2x)^7} = (1-2x)^{-7}$, то

$$\int \frac{dx}{(1-2x)^7} = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-7}(-2)dx = -\frac{1}{2}\int (1-2x)^{-7} d(1-2x) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{12(1-2x)^6} + C.$$

Приклад 17 Знайти $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де *A=0*, *B=1*, $b^2 - 4ac = -64 < 0$. Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена $4x^2+4x+5$, одержимо табличний інтеграл (17). Дійсно

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \begin{vmatrix} u = 2x+1 \\ du = 2dx \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{1}{2} arctg\frac{2x+1}{2} + C = \frac{1}{4} arctg\frac{2x+1}{2} + C.$$

Приклад 18 Знайти $\int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx.$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де *A=-8*, *B=7*, $D=b^2-4ac=-20 < 0$. Спочатку виділимо похідну знаменника в чисельнику дробу. Для цього чисельник *7-8x* подамо у вигляді

$$7-8x = -2(4x-2)+3.$$

Тоді

$$\int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3}dx = \int \frac{-2(4x-2)+3}{2x^2-2x+3}dx = -2\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx + 3\int \frac{dx}{2x^2-2x+3} =$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}}=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}arctg\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}}+C=$$

$$=-2\ln(2x^2-2x+3)+\frac{3}{\sqrt{5}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

Тут $\int\frac{4x-2}{2x^2-2x+3}dx$ знайдений за формулою (6) таблиці інтегралів, вважаючи $u=2x^2-2x+3$ і враховуючи, що $2x^2-2x+3>0$ для будь-якого x, а $\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}}$ - за формулою (17), вважаючи $u=x-\frac{1}{2}$ і враховуючи, що $a^2=\frac{5}{4}$.

Приклад 19 Знайти $\int\frac{x-1}{x^2+x-6}dx.$

Розв'язання. Маємо

$$\int\frac{x-1}{x^2+x-6}dx=\int\frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}}dx=\left|\begin{matrix}x+\frac{1}{2}=t\\ dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t-\frac{1}{2}-1}{t^2-\frac{25}{4}}dt=$$

$$=\int\frac{tdt}{t^2-\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2-\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{t^2-\frac{25}{4}}-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{2}}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|t^2-\frac{25}{4}\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x-6\right|-\frac{3}{10}\ln\left|\frac{x-2}{x+3}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|(x-2)(x-3)\right|-\frac{3}{10}\ln|x-2|+\frac{3}{10}\ln|x+3|+C=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x+3|-\frac{3}{10}\ln|x-2|+\frac{3}{10}\ln|x+3|+C=\frac{1}{5}\ln|x-2|+\frac{4}{5}\ln|x+3|+C.$$

Приклад 20 Знайти $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більша, за степінь многочлена знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \cline{3-3}
 & x^5-4x^3 & x^2+x+4 \quad \text{(ціла частина)} \\ \cline{2-2}
 & \quad - \; x^4+4x^3-8 & \\
 & \quad\quad x^4-4x^2 & \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad - \; 4x^3+4x^2-8 & \\
 & \quad\quad\quad 4x^3-16x & \\ \cline{2-2}
 & \quad\quad\quad\quad 4x^2+16x-8 & \text{(залишок).}
\end{array}
$$

Тепер подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} = x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx = \int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx =$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені $x=0$, $x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів I типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Звільнюючись від дробових членів, одержимо

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

або

$$x^2+4x-2=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & A+B+C=1, \\ x & 2B-2C=4, \\ x^0 & -4A=-2. \end{array}$$

Розв`язавши цю систему, знаходимо $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}.$

Слід відзначити, що тут коефіцієнти A, B і C простіше було б знайти способом підстановки до тотожності частинних значень x, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2),$$

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

звідки $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}$.

Таким чином,

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Приклад 21 Знайти $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx.$

Розв'язання. Переконуємося, що підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Враховуючи, що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x=0$ і $x=3$ – прості, а $x=1$- двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}$. Отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-3)(x-1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

Приклад 8 Знайти $\int\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Його знаменник $(x^2+3)(x^2+1)$ не має дійсних коренів, а оскільки його множники x^2+3 і x^2+1 другого степеня і не повторюються, то розкладання даного правильного дробу на найпростіші має вигляд:

$$\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$3x^2+4x+11=(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+3)$$

або

$$3x^2+4x+11=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+3C)x+(B+3D).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності, будемо мати

$$\begin{array}{c|l} x^3 & A+C=0, \\ x^2 & B+D=3, \\ x & A+3C=4, \\ x^0 & B+3D=11. \end{array}$$

Звідси, розв'язуючи систему, знаходимо $A=-2$, $B=-1$, $C=2$, $D=4$.

Отже,

$$\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}=\frac{-2x-1}{x^2+3}+\frac{2x+4}{x^2+1}$$

і шуканий інтеграл

$$\int\frac{3x^2+4x+11}{(x^2+3)(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{-2x-1}{x^2+3}+\frac{2x+4}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{2xdx}{x^2+3}-\int\frac{dx}{x^2+3}+\int\frac{2xdx}{x^2+1}+4\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=-\ln\left(x^2+3\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+\ln\left(x^2+1\right)+4arctgx+C.$$

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.21-22], с. 116 –130.

Вправи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. Відповідь: $C-\frac{1}{8(2x-3)^4}$.

2 $\int \sqrt[5]{x^3+2}\cdot x^2 dx$. Відповідь: $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$.

3 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$. Відповідь: $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$.

4 $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$. Відповідь: $\frac{1}{\cos x}+C$.

5 $\int \cos^3 x \sin 2x dx$. Відповідь: $C-\frac{2}{5}\cos^5 x$.

6 $\int \sin(2x-3)dx$. Відповідь: $-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C$.

7 $\int \cos(1-2x)dx$. Відповідь: $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$.

8 $\int e^x \sin e^x dx$. Відповідь: $C\text{-}cos e^x$.

9 $\int \frac{dx}{2x-1}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

10 $\int ctg(2x+1)dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|\sin(2x+1)|+C$.

11 $\int e^{-3x+1}dx$. Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-3x+1}+C$.

12 $\int e^{-x^3}\cdot x^2 dx$. Відповідь: $-\frac{1}{3}e^{-x^3}+C$.

13 $\int \frac{dx}{x\ln x}$. Відповідь: $\ln|\ln x|+C$.

14 $\int \frac{dx}{1+9x^2}$. Відповідь: $\frac{1}{3}arctg 3x+C$.

15 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$. Відповідь: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+C$.

16 $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$. Відповідь: $\frac{1}{6}arctg\frac{x^3}{2}+C$.

17 $\int \frac{x dx}{x^4+1}$. Відповідь: $\frac{1}{2}arctg x^2+C$.

18 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^8}}$. Відповідь: $\frac{1}{4}\arcsin\frac{x^4}{2}+C$.

19 $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$. Відповідь: $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2}+C$.

20 $\int \frac{dx}{2x^2+9}$. Відповідь: $\frac{1}{3\sqrt{2}} arctg\frac{\sqrt{2}}{3}x+C$.

21 $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx.$ Відповідь: $e^x+e^{-x}+C.$

22 $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx.$ Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C$.

23 $\int \frac{x(1-x^2)dx}{1+x^4}$. Відповідь: $\frac{1}{2}arctgx^2-\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$.

24 $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx.$ Відповідь: $\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

25 $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx.$ Відповідь: $x^3+2x-3\ln|x|-\frac{7}{x}+C$.

26 $\int\left(2^{3x-1}+\frac{3}{\cos^2 7x}-2ctg(x+5)\right)dx.$.

Відповідь: $\frac{2^{3x-1}}{3\ln 2}+\frac{3}{7}tg7x-2\ln|\sin(x+5)|+C$.

27 $\int \frac{2x^2-8}{16-x^4}dx.$ Відповідь: $-arctg\frac{x}{2}+C$.

28 $\int \frac{\cos 2xdx}{\cos x-\sin x}$. Відповідь: $\sin x-\cos x+C$.

29 $\int e^x\left(2^x+3^x\right)dx.$ Відповідь: $e^x\left(\frac{2^x}{1+\ln 2}+\frac{3^x}{1+\ln 3}\right)+C$.

30 $\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2+4)}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{4}arctg\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}+C$.

Знайти інтеграли, підібравши відповідну підстановку:

31 $\int\left(e^{2x}+5\right)^3 e^{2x}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{8}\left(e^{2x}+5\right)^4+C$.

32 $\int \frac{dx}{x\sin^2\ln x}$. Відповідь: $-ctglnx+C.$

33 $\int \frac{\sin xdx}{\cos^5 x}$. Відповідь: $\frac{1}{4\cos^4 x}+C$.

34 $\int \frac{\sin 2xdx}{\sqrt{2+\cos^2 x}}$. Відповідь: $-2\sqrt{2+\cos^2 x}+C$.

35 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$. Відповідь: $-\frac{2}{15}\left(32+8x+3x^2\right)\sqrt{2-x}+C$.

36 $\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}dx$. Відповідь: $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln|x|)^3}-6\sqrt{\ln|x|}+C$.

37 $\int \frac{dx}{x\ln x\ln\ln x}$. Відповідь: $\ln|\ln\ln x|+C$.

38 $\int e^{e^x+x}dx$. Відповідь: $e^{e^x}+C$.

39 $\int \frac{x^3 dx}{\left(6x^4+5\right)^5}$. Відповідь: $-\frac{1}{96\left(6x^4+5\right)^4}+C$.

40 $\int \sqrt{2\sin x-1}\cos xdx$. Відповідь: $\frac{1}{3}\sqrt{(2\sin x-1)^3}+C$.

41 $\int 3^{x^2}xdx$. Відповідь: $\frac{3^{x^2}}{2\ln 3}+C$.

42 $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx$. Відповідь: $\frac{1}{3}tg^3 x+C$.

43 $\int z^2\sqrt{1+2z^3}dz$. Відповідь: $\frac{1}{9}\sqrt{\left(1+2z^3\right)^3}+C$.

44 $\int 2e^{-\frac{1}{2}\varphi+1}d\varphi$. Відповідь: $-4e^{-\frac{1}{2}\varphi+1}+C$.

45 $\int \cos\left(\frac{1}{2}t+3\right)dt$. Відповідь: $2\sin\left(\frac{1}{2}t+3\right)+C$.

Знайти інтеграли, застосовуючи метод інтегрування частинами.

46 $\int xe^{-x}dx$. Відповідь: $C-(x+1)e^{-x}$.

47 $\int x3^x dx$. Відповідь: $\frac{3^x}{\ln^2 3}(x\ln 3-1)+C$.

48 $\int x\cos^2 xdx$. Відповідь: $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

49 $\int \ln(x^2+1)dx$. Відповідь: $x\ln(x^2+1)-2x+2arctgx+C$.

50 $\int \frac{\lg x}{x^3}dx$. Відповідь: $C-\frac{1}{2x^2}\lg\left(x\sqrt{e}\right)$.

51 $\int \ln^2 xdx$. Відповідь: $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C$.

52 $\int \arccos xdx$. Відповідь: $x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+C$.

53 $\int e^x \cos\frac{x}{3}dx.$ Відповідь: $0{,}3e^x\left(\sin\frac{x}{3}+3\cos\frac{x}{3}\right)+C.$

54 $\int \frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}.$ Відповідь: $C-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}arctgx.$

55 $\int arctg\sqrt{x}dx.$ Відповідь: $xarctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}+C.$

56 $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}dx.$ Відповідь: $2\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}\right)+C.$

57 $\int (2x+3)\sin 5xdx.$ Відповідь: $-\frac{2x+3}{5}\cos 5x+\frac{2}{25}\sin 5x+C.$

Знайти інтеграли:

58 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx.$ Відповідь: $\frac{x}{4}+\ln|x|-\frac{7}{16}\ln|2x-1|-\frac{9}{16}\ln|2x+1|+C.$

59 $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}.$ Відповідь: $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|+C.$

60 $\int \frac{dx}{x^4-x^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

61 $\int \frac{x^6-2x^4+3x^3-9x^2+4}{x^5-5x^3+4x}dx.$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+\ln\left|\frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2}\right|+C.$

62 $\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}.$ Відповідь: $\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C.$

63 $\int \frac{x^3-6x^2+9x+7}{(x-2)^3(x-5)}dx.$ Відповідь: $\frac{3}{2(x-2)^2}+\ln|x-5|+C.$

64 $\int \frac{(x^4+1)dx}{x^3-x^2+x-1}.$ Відповідь: $\frac{(x+1)^2}{2}+\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}-arctgx+C.$

65 $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}arctgx+C.$

66 $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}dx.$

Відповідь: $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}arctg\frac{x\sqrt{2}}{2}+C$.

67 $\int\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}dx.$

Відповідь: $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\frac{\ln(x^2+2)}{2}-\frac{1}{4\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

68 $\int\frac{dx}{x(1+x^2)(4+x^2)^2}.$

Відповідь: $\frac{1}{16}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}+C.$

69 $\int\frac{x^9dx}{(x^4-1)^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\left(\frac{2x^6-3x^2}{x^4-1}+\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right|\right)+C$.

70 $\int\frac{x^3+3x^2+5x+7}{x^2+2}dx.$

Відповідь: $\frac{x^2}{2}+3x+\frac{3}{2}\ln(x^2+2)+\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

71 $\int\frac{dx}{(x^2-2x)^2}.$ Відповідь: $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{x(x-2)}+C$.

72 $\int\frac{dx}{x^3-8}.$

Відповідь: $\frac{1}{12}\ln|x-2|-\frac{1}{24}\ln(x^2+2x+4)-\frac{1}{4\sqrt{3}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C$.

73 $\int\frac{x^4}{x^4-16}dx.$ Відповідь: $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|-arctg\frac{x}{2}+C$.

74 $\int\frac{3x^3+x^2+5x+1}{x^3+x}dx.$ Відповідь: $3x+\ln|x|+2arctgx+C$.

75 $\int\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x+3}dx.$ Відповідь: $\frac{x^2}{2}-4x+\frac{3}{4}\ln|x|+\frac{41}{4}\ln|x+3|+C$.

76 $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2+3x+4}$. Відповідь: $2\ln(x^2+3x+4)-\frac{18}{\sqrt{7}}arctg\frac{2x+3}{\sqrt{7}}+C$.

Питання для самоперевірки

1 Яка дія називається інтегруванням?

2 Яка функція називається первісною для даної функції? Наведіть приклади.

3 Чим відрізняються між собою різні первісні функції для даної функції *f(x)*?

4 Дайте означення невизначеного інтеграла.

5 Який геометричний образ відповідає невизначеному інтегралу $\int f(x)dx$?

6 Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.

7 За якою умови справедлива рівність $\int f(x)dx = F(x)+C$?

8 Як перевіряється результат інтегрування?

9 Пригадайте і запишіть усі табличні інтеграли.

10 Укажіть, при якому значенні *n* формула

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$$

немає сенсу ($x > 0$)?

11Яка формула застосовується в тому випадку, коли $n = -1$ в $\int x^n dx$?

12.Назвіть основні методи інтегрування.

13 У чому полягає метод підстановки (заміни змінної) в невизначеному інтегралі?

14 Запишіть формулу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. В яких випадках і для яких інтегралів вона застосовується?

15 Який дріб називають раціональним?

16 Який раціональний дріб називають правильним ? Неправильним ?

17 Який вигляд мають елементарні (найпростіші) дроби?

18 Як здійснюється розклад правильного раціонального дробу на елементарні?

19 Пригадайте правило інтегрування раціонального дробу.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 11

Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування ірраціональних функцій. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбниця. Методи підстановки та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція є раціональною функцією від *sinx* і *cosx*. Тому, зробивши підстановку $tg\frac{x}{2}=t$, одержимо

$$\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=\left|\begin{array}{c} tg\frac{x}{2}=t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-\frac{8t}{1+t^2}+\frac{3-3t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{2dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2}=\int\frac{2dt}{2t^2-8t+8}=\int\frac{dt}{t^2-4t+4}=\int\frac{dt}{(t-2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{t-2}+C=\frac{1}{2-tg\frac{x}{2}}+C.$$

Приклад 2 Знайти $\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx.$

Розв'язання.

$$\int\frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}dx=\int\frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}\cos xdx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}}\cos xdx=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\sin x=t^5 \\ \cos xdx=5t^4dt\end{array}\right|=\int\frac{1-t^{10}}{t^4}5t^4dt=5\int\left(1-t^{10}\right)dt=5\left(t-\frac{t^{11}}{11}\right)+C=$$

$$=5\sqrt[5]{\sin x}-\frac{5}{11}\sqrt[5]{\sin^{11}x}+C.$$

Приклад 3 Знайти $\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}.$

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}=\int\frac{dx}{2\sin^2 x\cos x}.$$

Якщо у виразі $\frac{1}{2\sin^2 x\cos x}$ замінити *cosx* на *-cosx*, то дріб змінить знак на протилежний, тому тут треба застосувати підстановку *sinx=t.* Тоді *x=arcsint*, $dx=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x=\sqrt{1-t^2}$ і

$$\int\frac{dx}{\sin x\sin 2x}=\int\frac{dx}{2\sin^2 x\cos x}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2(1-t^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{1-t^2+t^2}{t^2(1-t^2)}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t^2}=-\frac{1}{2t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{2\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$$

Приклад 4 Знайти $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $4-3cos^2x+5sin^2x=4(cos^2x+sin^2x)-$ $-3cos2x+5sin^2x=cos^2x+9sin^2x$, одержимо

$$\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x+9\sin^2 x}=\int \frac{dx}{\cos^2 x(1+9tg^2 x)}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} tgx=t \\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt \end{array}\right|=\int \frac{dt}{1+9t^2}=\int \frac{dt}{1+(3t)^2}=\frac{1}{3}\int \frac{3dt}{1+(3t)^2}=$$

$$=\frac{1}{3}arctg3t+C=\frac{1}{3}arctg(3tgx)+C.$$

Приклад 5 Знайти $\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$.

Розв'язання. Застосувавши формулу перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, згідно з якою

$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right),$$

будемо мати

$$\int \cos x\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{4}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int \cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{4}dx+\frac{1}{2}\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{7x}{4}+\cos\frac{5x}{4}\right)dx+\frac{1}{4}\int\left(\cos\frac{3x}{4}+\cos\frac{x}{4}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{7}\sin\frac{7x}{4}+\frac{1}{5}\sin\frac{5x}{4}+\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{4}+\sin\frac{x}{4}+C.$$

Приклад 6 Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

Розв'язання. Маємо інтеграл другого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=3$, $n_2=2$, тому $к=6$. Використовуючи підстановку $2x+1=t^6$, звідки $x=\frac{1}{2}(t^6-1)\cdot dx=3t^5dt$, одержимо

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=\int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3}=3\int \frac{t^2dt}{t-1}=3\int \frac{t^2-1+1}{t-1}dt=$$

$$=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C.$$

Оскільки $t=\sqrt[6]{2x+1}$, то повертаючись до змінної x, будемо мати

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}=3\left(\frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2}+\sqrt[6]{2x+1}+\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right|\right)+C.$$

Приклад 7 Знайти $\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$.

Розв'язання. Спочатку в чисельнику виділимо похідну підкореневого виразу, після чого розкладемо інтеграл на суму двох інтегралів. Перший із одержаних інтегралів є табличним інтегралом (4), а другий зведеться до табличного інтеграла (19) шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена:

$$\int\frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=\int\frac{\frac{3}{8}(8x+4)-\frac{3}{2}-2}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx=\frac{3}{8}\int\frac{8x+4}{\sqrt{4x^2+4x+5}}dx-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\int\frac{2dx}{\sqrt{(2x+1)^2+4}}=$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{4x^2+4x+5}-\frac{7}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+5}\right|+C.$$

Приклад 8 Знайти $\int\frac{(5x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}$.

Розв'язання. Маємо

$$\int\frac{(5x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}=\int\frac{5(x+1)-2}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}dx=5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}}-2\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l}x+1=\frac{1}{t}\\ x=\frac{1}{t}-1\\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\end{array}\right|=5\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2+1}}-2\int\frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-4\left(\frac{1}{t}-1\right)+5}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+2\int\frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1-\frac{4}{t}+4+5}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+2\int\frac{dt}{\sqrt{10t^2-6t+1}}=$$

$$=5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+\frac{2}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{6}{10}t+\frac{1}{10}}}=$$

$$= 5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right| + \frac{2}{\sqrt{10}}\int\frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{3}{10}\right)^2+\frac{1}{100}}} =$$

$$= 5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right| + \frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|t-\frac{3}{10}+\sqrt{t^2-\frac{6}{10}t+\frac{1}{10}}\right| + C =$$

$$= 5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right| + \frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{1}{x+1}-\frac{3}{10}+\sqrt{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2-\frac{6}{10}*\frac{1}{x+1}+\frac{1}{10}}\right| + C =$$

$$= 5\ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right| + \frac{2}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{7-3x+\sqrt{10(x^2-4x+5)}}{10(x+1)}\right| + C.$$

Приклад 9 Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

Розв'язання. Для знаходження заданого інтегралу робимо підстановку *x=2 tgt*. Звідси

$$dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}, \sqrt{(4+x^2)^3} = \sqrt{(4+4tg^2t)^3} = \sqrt{4^3(1+tg^2t)^3} = 8\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3} = \frac{8}{\cos^3 t}.$$

Тоді шуканий інтеграл

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \int\frac{\frac{2}{\cos^2 t}}{\frac{8}{\cos^3 t}}dt = \frac{1}{4}\int\cos t dt = \frac{1}{4}\sin t + C.$$

Оскільки $\sin t = tgt\cdot\cos t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$, то остаточно одержимо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C.$$

Приклад 10 Знайти $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання. Застосуємо підстановку $x = \frac{3}{\cos t}$, тоді

$$dx = \frac{3\sin t}{\cos^2 t}dt, \sqrt{x^2-9} = \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9} = \sqrt{9\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)} = 3\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = 3\frac{\sin t}{\cos t} = 3tgt$$

і

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \int \frac{\frac{3\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t}\cdot\frac{3\sin t}{\cos t}}dt = \frac{1}{9}\int \cos t dt = \frac{1}{9}\sin t + C.$$

Оскільки $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}$, то шуканий інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$$

Зауважимо, що заданий інтеграл можна знайти і за допомогою підстановки $x = \frac{1}{t}$.

Приклад 11 Обчислити $\int\limits_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy$.

Розв'язання.

$$\int\limits_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}dy = \int\limits_4^9 \frac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}+1}dy = \int\limits_4^9 (\sqrt{y}-1)dy = \int\limits_4^9 \sqrt{y}dy - \int\limits_4^9 dy =$$

$$= \left(\frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - y\right)\Bigg|_4^9 = \frac{2}{3}\cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 - \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}} + 4 = 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{23}{3}.$$

Приклад 12 Обчислити $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Після елементарних перетворень підінтегральної функції будемо мати

$$\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}} = \int\limits_0^{16} \frac{(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+9}-\sqrt{x})(\sqrt{x+9}+\sqrt{x})}dx = \int\limits_0^{16} \frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x}}{x+9-x}dx =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\int\limits_0^{16}\sqrt{x+9}dx + \int\limits_0^{16}\sqrt{x}dx\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}(x+9)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{16} =$$

$$= \frac{2}{27}\left((x+9)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{16} = \frac{2}{27}\left(25^{\frac{3}{2}} + 16^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{27}(125+64-27) = 12.$$

Приклад 13 Обчислити $\int\limits_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

Розв'язання.

$$\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2} = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dx}{x^2+\frac{3}{2}x-1} = \frac{1}{2}\int_2^3 \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{25}{16}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{5}{4}}\ln\left|\frac{x+\frac{3}{4}-\frac{5}{4}}{x+\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}\right|\Bigg|_2^3 =$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{x-\frac{1}{2}}{x+2}\right|\Bigg|_2^3 = \frac{1}{5}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{5}\ln\frac{4}{3}.$$

Приклад 14 Обчислити $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3} = \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_1^2 \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)}dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= \ln x\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 5 + \ln 2) = \frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}.$$

Приклад 15 Обчислити $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx.$

Розв'язання. Застосуємо підстановку $t=\sqrt{e^x-1}$. Тоді

$$t^2=e^x-1,\ \ 2tdt=e^x dx,\qquad dx=\frac{2tdt}{e^x}=\frac{2tdt}{t^2+1}.$$

Якщо $x=0$, то $t=\sqrt{e^0-1}=0$. Якщо $x=ln2$, то $t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=1$. Отже,

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}dx = 2\int_0^1 \frac{t^2dt}{t^2+1} = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt =$$

$$= 2(t-arctgt)\Big|_0^1 = 2(1-arctg1+arctg0) = 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4-\pi}{2}.$$

Приклад 16 Обчислити $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx.$

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx = \left|\begin{array}{c} x^2-1=t^2 \\ 2xdx=2tdt \\ xdx=tdt \\ 1-1=t^2, t_н=0 \\ 4-1=t^2, t_в=\sqrt{3} \end{array}\right| = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\cdot xdx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2dt}{t^2+1} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = \left(t - arctgt\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - arctg\sqrt{3} + arctg\,0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 17 Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} = \left| \begin{array}{c} t = tg\frac{x}{2} \\ x = 2arctgt \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ t_н = tg\,0 = 0 \\ t_в = tg\frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int_0^1 \frac{2dt}{2+2t^2+1-t^2} = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} arctg\frac{t}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{1}{\sqrt{3}} - arctg\,0\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Приклад 18 Обчислити $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^3}$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \frac{x^2dx}{\left(1+x^2\right)^3} = \left| \begin{array}{c} x = tgt \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+x^2 = 1+tg^2t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ tgt = 0, t_н = arctg\,0 = 0 \\ tgt = 1, t_в = arctg\,1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tg^2t\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t\cos^2 tdt = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2tdt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 4t)dt =$$

$$= \frac{1}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin\pi + \frac{1}{4}\sin 0\right) = \frac{\pi}{32}.$$

Приклад 19 Обчислити $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} = \left| \begin{array}{c} x=\frac{1}{t}; dx=-\frac{dt}{t^2} \\ 1=\frac{1}{t}, t_н=1 \\ 3=\frac{1}{t}, t_в=\frac{1}{3} \end{array} \right| = \int\limits_1^{\frac{1}{3}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t}+1}} =$$

$$= -\int\limits_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}}} = \ln\left|t+\frac{5}{2}+\sqrt{t^2+5t+1}\right|\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= \ln\left(\frac{7}{2}+\sqrt{7}\right) - \ln\left(\frac{17}{6}+\sqrt{\frac{25}{9}}\right) = \ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}.$$

Приклад 20 Обчислити $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання. Покладемо $u=x$, $dv=\frac{dx}{\sin^2 x}$. Тоді $du=dx$, $v=\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx$.

Оскільки $u=x$, $v=-ctgx$, $u'=1$ і $v'=\frac{1}{\sin^2 x}$ неперервні на відрізку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]$,

то враховуючи формулу $\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu$ будемо мати:

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x} = -xctgx\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} ctgxdx = -\frac{\pi}{3}ctg\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}ctg\frac{\pi}{4}+\ln\sin x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\ln\sin\frac{\pi}{3}-\ln\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{9}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} = \frac{\left(9-4\sqrt{3}\right)\pi}{36}+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 21 Обчислити $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx$.

Розв'язання. Враховуючи, що *u=ln(x+1), dv=dx* за формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі, одержимо

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(x+1); du = \dfrac{dx}{x+1} \\ dv = dx; v = x \end{matrix} \right| = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1} =$$

$$= (e-1)\ln e - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}dx = e-1-\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = e-1-(x-\ln(x+1))\Big|_0^{e-1} =$$

$$= e-1-(e-1-\ln e+\ln 1) = e-1-e+1+1 = 1.$$

Приклад 22 Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx.$

Розв'язання. Застосовуючи двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = \left| \begin{matrix} u = e^{2x}; du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos xdx; v = \sin x \end{matrix} \right| = e^{2x}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cdot\sin xdx =$$

$$= e^{\pi} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\sin xdx = \left| \begin{matrix} u = e^{2x}; du = 2e^{2x}dx \\ dv = \sin xdx; v = -\cos x \end{matrix} \right| = e^{\pi} - 2\left(-e^{2x}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx \right) =$$

$$= e^{\pi} - 2 - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx.$$

Розв`язуючи далі одержане рівняння відносно невідомого інтеграла, знаходимо

$$5\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = e^{\pi} - 2.$$

Звідси остаточно одержимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{\pi}-2}{5}.$$

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.23], с. 130 – 137.

Вправи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}dx.$ Відповідь: $2tg\frac{x}{2}-x+C$.

2 $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$ Відповідь: $C-ctgx-\frac{2}{3}ctg^3x-\frac{1}{5}ctg^5x$.

3 $\int \sin 2x \sin 5x dx.$ Відповідь: $\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{14}\sin 7x+C$.

4 $\int \sin^4 x dx.$ Відповідь: $\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$.

5 $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$ Відповідь: $\ln|tgx|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C$.

6 $\int ctg^4 x dx.$ Відповідь: $x-\frac{1}{3}ctg^3x+ctgx+C$.

7 $\int \frac{dx}{5-3\cos x}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}arctg(2tg\frac{x}{2})+C$.

8 $\int \frac{dx}{1+tgx}.$ Відповідь: $\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+C$.

9 $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}dx.$ Відповідь: $\ln(2+\cos x)+\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}tg\frac{x}{2}\right)+C$.

10 $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}.$ Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tgx)+C$.

11 $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}tgx+\frac{1}{2\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}tgx)+C$.

12 $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x+\sin x}.$ Відповідь: $\ln|\sin x|-\sin x+C$.

13 $\int \sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}\sin x+C$.

14 $\int \sqrt[3]{\cos^2 x}\sin^3 x dx.$ Відповідь: $-\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}}x+\frac{3}{11}\cos^{\frac{11}{3}}x+C$.

15 $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}.$ Відповідь: $\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-5}{tg\frac{x}{2}-3}\right|+C$.

16 $\int \frac{dx}{(1+\cos x)\sin x}.$ Відповідь: $\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{4}tg^2\frac{x}{2}+C$.

17 $\int \frac{dx}{\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x}.$ Відповідь: $arctg(tgx-2)+C$.

18 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx.$ Відповідь: $\frac{1}{4}tg^4\frac{x}{2}+tg\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$.

19 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos x} dx.$ Відповідь: $-\frac{1}{3}\sin^3 x - \sin x + \ln\left|\frac{1+tg\frac{x}{2}}{1-tg\frac{x}{2}}\right| + C$.

20 $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}.$ Відповідь: $-arctg(\cos 2x) + C$.

21 $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx.$ Відповідь: $2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}arctg\sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$.

22 $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx.$ Відповідь: $2arctg\sqrt{x} + C$.

23 $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}.$ Відповідь: $3\sqrt[3]{x} + 3\ln\left|\sqrt[3]{x}-1\right| + C$.

24 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$ Відповідь: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right| + C$.

25 $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx.$ Відповідь: $\frac{2}{9}\sqrt{9x^2+6x+2} + \frac{13}{9}\ln\left|3x+1+\sqrt{9x^2+6x+2}\right| + C$.

26 $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}.$ Відповідь: $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C$.

27 $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}.$ Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}}\right| + C$.

28 $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}.$ Відповідь: $-2arctg\frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C$.

29 $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$ Відповідь: $-\frac{1}{15}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x+15x^2}}{2x-3}\right| + C$.

30 $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3}+1}.$ Відповідь: $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right) + C$.

31 $\int \frac{\sqrt[6]{x}dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$ Відповідь: $\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6arctg\sqrt[6]{x} + C$.

32 $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$ Відповідь: $8\arcsin\frac{x}{4} - \frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + C$.

33 $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4} dx.$ Відповідь: C-$\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3}$.

Обчислити інтеграли:

34 $\int\limits_{2}^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$. Відповідь: $-5(\sqrt[5]{16}-1)$.

35 $\int\limits_{0}^{1} \left(e^x-1\right)^4 e^x dx.$ Відповідь: $\frac{1}{5}(e-1)^5$.

36 $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$. Відповідь: $\frac{1}{4}$.

37 $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. Відповідь: $\frac{\pi}{2}$.

38 $\int\limits_{1}^{2} e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}$. Відповідь: $e-\sqrt{e}$.

39 $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}$. Відповідь: $arctg\frac{1}{7}$.

40 $\int\limits_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}$. Відповідь: $\frac{\pi}{6}$.

41 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx.$ Відповідь: $\frac{2}{7}$.

42 $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{\omega}} \sin^2(\omega x+\varphi_0)dx.$ Відповідь: $\frac{\pi}{2\omega}$.

43 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}dx.$ Відповідь: $\frac{4}{3}$.

44 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$. Відповідь: *2.*

45 $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \sin(2t-\frac{\pi}{4})dt.$ Відповідь: $-\frac{\sqrt{2}}{3}$.

46 $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$. Відповідь: $\frac{1}{3}$.

14 $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$. Відповідь: $\frac{\pi}{8}$.

47 $\int_0^1 e^{x+e^x} dx$. Відповідь: $e^e - e$.

48 $\int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x+1}$. Відповідь: ln(e+1).

49 $\int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$. Відповідь: *1-cos1*.

50 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}(\ln 3 - 1)$.

51 $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. Відповідь: $\frac{32}{3}$.

52 $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2} dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$. Відповідь: $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

53 $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. Відповідь: $\frac{1}{32}\left(\pi+\frac{7\sqrt{3}}{2}-8\right)$.

54 $\int_0^{-\ln 2} \sqrt{1-e^{2x}} dx$. Відповідь: $\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln(2-\sqrt{3})$.

55 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx$. Відповідь: $\sqrt{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}+\ln\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$.

56 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6} dx$. Відповідь: $\frac{8}{15}$.

57 $\int_0^{\sqrt[4]{2}} \frac{x^{15} dx}{\left(1+x^8\right)^{\frac{2}{5}}}$. Відповідь: $\frac{5}{192}\left(5+7\sqrt[5]{125}\right)$.

58 $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$. Відповідь: $4-\pi$.

59 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+3}$. Відповідь: $\frac{2}{\sqrt{5}} arctg \frac{1}{\sqrt{5}}$.

60 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{6dx}{6+\sin^2 x}$. Відповідь: $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{6}{7}}$.

Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

61 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$. Відповідь: $\frac{\pi}{2}-1$.

62 $\int_1^2 x\log_2 x dx$. Відповідь: $2-\frac{3}{4\ln 2}$.

63 $\int_1^e \ln^3 x dx$. Відповідь: *6-2e*.

64 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x}{\cos^3 x} dx$. Відповідь: $\frac{\pi-2}{4}$.

65 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} xtg^2 x dx$. Відповідь: $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi^2}{32}-\frac{1}{2}\ln 2$.

66 $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx$. Відповідь: $\frac{15-4\ln 2}{256}$.

67 $\int_1^{\sqrt{e^\pi}} \cos\ln x dx$. Відповідь: $\frac{\sqrt{e^\pi}-1}{2}$.

68 $\int_0^1 xarctgx dx$. Відповідь: $\frac{\pi-2}{4}$.

69 $\int_0^1 x^3 e^{2x} dx$. Відповідь: $\frac{e^2+3}{8}$.

70 $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$. Відповідь: $\pi\sqrt{2}-4$.

Питання для самоперевірки

1 Як виконується інтегрування найпростіших ірраціональних функцій?

2 Укажіть загальний метод знаходження інтеграла від функції, раціональної відносно тригонометричних функцій.

3 Опишіть методи знаходження інтегралів вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де m і n –цілі числа.

4 Для знаходження яких інтегралів застосовують тригонометричні підстановки і які?

5 Дайте означення визначеного інтеграла.

6 Сформулюйте теорему існування визначеного інтеграла.

7 Сформулюйте і доведіть властивості визначеного інтеграла.

8 Що називають середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$?

9 Чому дорівнює похідна від визначеного інтеграла із змінною верхньою межею інтегрування?

10 Сформулювати і вивести формулу Ньютона –Лейбніца.

11 У чому суть методів заміни змінної (підстановки) й інтегрування частинами у визначеному інтегралі?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 12

Геометричне застосування визначених інтегралів. Площа криволінійної трапеції. Довжина дуги кривої та об'єм тіла обертання. Площа поверхні обертання.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y=x(x-1)^2$ і віссю Ox.

Розв'язання. Функція $y=x(x-1)^2$ визначена для всіх дійсних значень x. Точки перетину графіка функції з віссю Ox обчислимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x(x-1)^2, \\ y = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1=0,\ y_1=0$ і $x_2=1,\ y_2=0$.

Таким чином, графік функції $y=x(x-1)^2$ перетинає вісь Ox в точках (0;0) і (1;0). Не складно переконатися в тому, що функція $y=x(x-1)^2$ має екстремум у точках $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right)$ і $(1;0)$, а також точку перегину $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{27}\right)$. Читачеві пропонуємо перевірити це самостійно.

Використовуючи ці дані, будуємо графік функції (рис. 12.1).

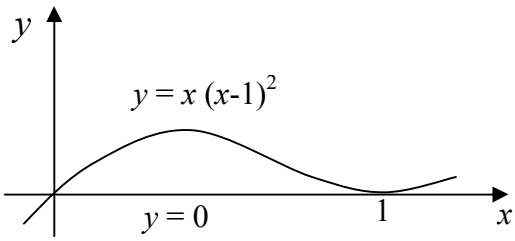


Рис. 12.1

Із рис. 12.1 видно, що фігура обмежена зверху лінією $y=x(x-1)^2$, знизу $y=0$ і проекціюється на вісь Ox у відрізок $[0;1]$. Отже, $y_в=x(x-1)^2$, $y_н=0$, $a=0$, $b=1$.

Таким чином, за формулою $S=\int_a^b f(x)dx$ маємо

$$S=\int_0^1 x(x-1)^2dx=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

Приклад 2 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ і параболою $y=\dfrac{x^2}{2}$.

Розв'язання. Крива $y=\dfrac{x^2}{2}$ – парабола з вершиною в точці $O(0;0)$ і віссю симетрії Oy. Вітки параболи направлені вгору (рис.12.2). Крива $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ – локон Аньєзі. Із рівняння видно, що при будь-якому x функція набуває лише додатних значень, а тому її графік розташований вище осі Ox, а вісь Oy є її віссю симетрії, бо $y(-x)=y(x)$. Найбільше значення, яке дорівнює одиниці, функція набуває при $x=0$, а при $x\to\pm\infty$ $y\to 0$.

Схематично графік цієї функції зображений на рис.12.2. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рис.12.2. Площу заштрихованої фігури обчислимо за формулою:

$$S=\int_a^b\left(y_в(x)-y_н(x)\right)dx.$$

Для визначення меж інтегрування обчислимо абсциси точок перетину ліній, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{1+x^2}, \\ y=\dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Звідси $x_1=-1$, $x_2=1$. Отже, $a=-1$, $b=1$.

Враховуючи також, що $y_в=\dfrac{1}{1+x^2}$, а $y_н=\dfrac{x^2}{2}$ будемо мати

$$S=\int_{-1}^1\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx,$$

а з урахуванням симетрії фігури відносно осі Oy одержуємо

$$S = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2\left(arctgx - \frac{x^3}{6} \right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

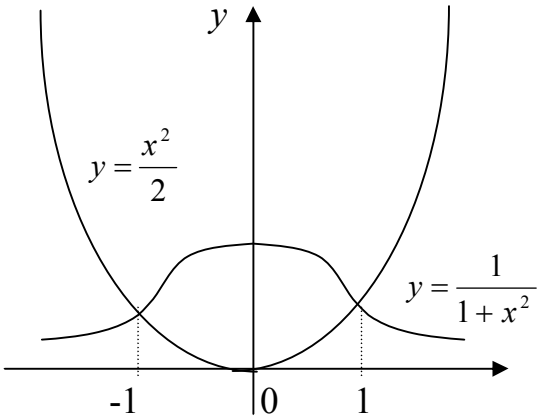


Рис. 12.2

Приклад 3 Обчислити площу петлі лінії $x=t^2-1$, $y=t^3-t$.

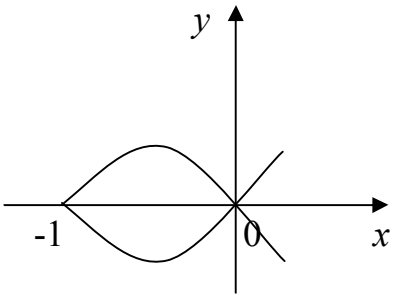


Рис.13.3

Розв'язання. Виключивши з параметричних рівнянь параметр t, одержимо $y^2=x^2(x+1)$. Побудуємо графік цієї функції (рис.13.3). На відрізку $[-1;0]$ параметр t змінюється від 1 до 0. Враховуючи симетрію фігури відносно осі Ox і використовуючи формулу (41г), будемо мати

$$S = 2\int_1^0 \left(t^3 - t\right) 2t dt = -4\int_0^1 \left(t^4 - t^2\right) dt = -4\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = -4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{15}.$$

Приклад 4 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = a\sin 2\varphi$ (чотирипелюсткова троянда).

Розв'язання. Побудуємо криву в полярній системі координат (рис. 12.4). Полярний радіус описує площу половини пелюстка, коли полярний кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{4}$. Площа всієї фігури

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin^2 2\varphi d\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} d\varphi = 2a^2 \left(\varphi - \frac{1}{4}\sin 4\varphi \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

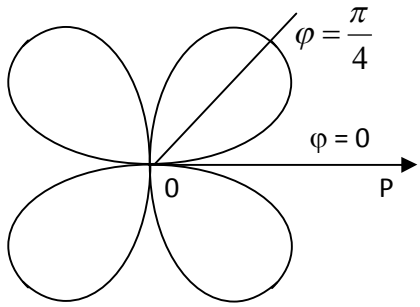


Рис.12.4

Приклад 5 Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y=xe^x$ і прямими $x=1$ і $y=0$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

Розв'язання. Об'єм одержаного тіла будемо обчислювати за формулою $V_x = \pi\int_a^b \left(y_в^2(x) - y_н^2(x)\right)dx$, враховуючи, що $y_в=xe^x$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$:

$$V_x = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

Використовуючи далі двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати:

$$V_x = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \left| \begin{array}{c} \int u dv = uv - \int v du \\ u = x^2; du = 2xdx \\ dv = e^{2x}dx; v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \int xe^{2x}dx\right)\Bigg|_0^1 = \left| \begin{array}{c} u = x; du = dx \\ dv = e^{2x}dx; v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \int \frac{1}{2}e^{2x}dx\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right).$$

Таким чином, шуканий об'єм дорівнює $\frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$.

Приклад 6 Одна арка циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ обертається навколо своєї основи. Обчислити об'єм тіла, обмеженого одержаною поверхнею.

Розв'язання. Побудуємо тіло обертання (рис.12.5).

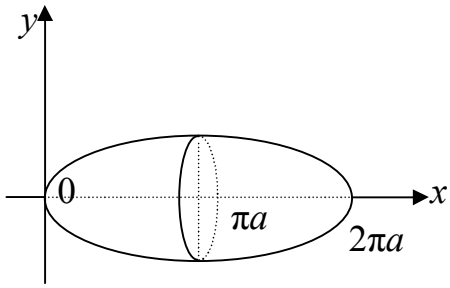


Рис. 12.5

Враховуючи, що $y_в=a(1-\cos t)$, $y_н=0$, $dx = a(t-\sin t)_t' dt = a(1-\cos t)dt$ і $0 \le t \le 2\pi$, маємо

$$V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2 \cdot a(1-\cos t)dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t\right)dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1+\cos 2t) - \left(1-\sin^2 t\right)\cos t\right]dt =$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - 4\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin^2 t \cos t\right)dt =$$

$$= \pi a^3 \left(\frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3.$$

Приклад 7 Обчислити довжину дуги лінії $y=lnx$ від $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$.

Розв'язання. Обчислимо похідну функції: $y' = \frac{1}{x}$. Тоді

$$1 + \left(y'(x)\right)^2 = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1+x^2}{x^2}.$$

За формулою обчислення довжини дуги маємо:

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \cdot xdx = \left| \begin{array}{c} 1+x^2 = z^2 \\ x^2 = z^2 - 1 \\ 2xdx = 2zdz \\ z_н = \sqrt{1+3} = 2 \\ z_в = \sqrt{1+8} = 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^3 \frac{z}{z^2-1} \cdot zdz = \int_2^3 \frac{z^2}{z^2-1} dz = \int_2^3 \frac{z^2-1+1}{z^2-1} dz = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{z^2-1}\right)dz =$$

$$= \left(z + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right)\Bigg|_2^3 = 3 + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 8 Обчислити довжину дуги евольвенти кола *x=R(cost+tsint), y=R(sint-tcost)* від $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Розв'язання. Обчислюємо похідні

$$x_t' = R(-\sin t + \sin t + t\cos t) = Rt\cos t$$

і

$$y_t' = R(\cos t - \cos t + t\sin t) = Rt\sin t.$$

Тоді

$$\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2 = R^2t^2\cos^2 t + R^2t^2\sin^2 t = R^2t^2\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right) = R^2t^2.$$

Довжину дуги евольвенти кола обчислюємо за формулою обчислення довжини дуги лінії, заданої в параметричній формі, одержуємо:

$$L = \int_0^{\pi}\sqrt{R^2t^2}\,dt = R\int_0^{\pi} t\,dt = R\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2 R}{2}.$$

Приклад 9 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r = 2a(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання. Поверхня обертання показана на рис. 12.6.

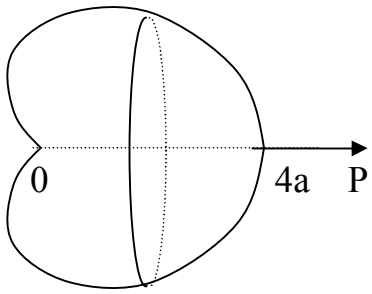


Рис.12.6

Враховуючи, що $r_\varphi' = -2a\sin\varphi$,

$$r^2 + (r')^2 = 4a^2(1+\cos\varphi)^2 + (-2a\sin\varphi)^2 =$$

$$= 4a^2\left(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = 4a^2\left(2 + 2\cos\varphi\right) = 8a^2(1+\cos\varphi) = 16a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

і $0 \le \varphi \le \pi$, за формулою обчислення площі поверхні обертання маємо

$$S_{п.о.} = 2\pi\int_0^{\pi} 2a(1+\cos\varphi)\cdot\sin\varphi\cdot 4a\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi} 2\cos^2\frac{\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 64\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi =$$

$$= -128\pi a^2\cdot\frac{\cos^5\frac{\varphi}{2}}{5}\Bigg|_0^{\pi} = -\frac{128}{5}\pi a^2(0-1) = \frac{128}{5}\pi a^2.$$

Тут враховано, що $\sqrt{\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{2}$, бо для $0 \le \varphi \le \pi$ $\cos\frac{\varphi}{2}$ набуває невід'ємних значень.

Таким чином, шукана площа поверхні обертання дорівнює $\frac{128}{5}\pi a^2$.

Домашнє завдання

Теорія Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні відносно змінних диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. [20], с. 136 –140.

Вправи

1 Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

2 Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю абсцис і лінією $y = x - x^2\sqrt{x}$.

Вказівка. Побудуйте лінію $y = x - x^2\sqrt{x}$, надаючи аргументу x значень від 0 до 1.

Відповідь: $\frac{3}{14}$.

3 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=e^{-x}$, $y=e^x$ і прямою $x=1$.

Відповідь: $e + \frac{1}{e} - 2$.

4 Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Вказівка. Фігура симетрична відносно осей координат. При зміні аргументу x на чверті площі від 0 до a параметр t змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Відповідь: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

5 Обчислити площу петлі лінії $x=3t^2$, $y=3t-t^3$.

Вказівка. Фігура симетрична відносно осі Ox. Обчисліть половину площі за формулою (41г), змінюючи параметр t від 0 до $\sqrt{3}$, і результат подвойте.

Відповідь: $\frac{72}{5}\sqrt{3}$.

6 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = a\cos 5\varphi$.

Вказівка. Фігура являє собою п`ятипелюсткову троянду. На площі половини пелюстка кут φ змінюється від 0 до $\frac{\pi}{10}$.

Відповідь: $\frac{a^2\pi}{4}$.

7 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $r = tg\varphi$ $(a > 0)$ і прямою $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Вказівка. Досить побудувати частину лінії $r = tg\varphi$, змінюючи φ від 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Відповідь: $\frac{1}{8}a^2(4-\pi)$.

8 Обчислити площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = 2(1-\cos\varphi)$ і колом $r=4$.

Відповідь: 10π.

9 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=e^{-2x}$, $y=0$, $x = -\frac{1}{2}$ і $x=1$.

Відповідь: $\frac{e^3-1}{2e^2}$.

10 Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 12\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2 = 2\pi$.

Відповідь: 169π.

11 Фігура, обмежена дугами парабол $y^2=x$ і $x^2=y$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

Відповідь: $0{,}3\pi$.

12 Обчислити об'єм тіла, яке одержуємо від обертання навколо осі ординат криволінійної трапеції, обмеженої дугою синусоїди $y=\sin x$, яка відповідає півперіоду, і віссю абсцис.

Відповідь: $2\pi^2$.

13 Обчислити об'єм тіла, яке утворюється в результаті обертання навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$ і $y=4$.

Відповідь: 8π.

14 Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією $x=2\cos t$, $y=3\sin t$.

Відповідь: 24π.

15 Фігура, обмежена лініями $y^2=(x+4)^3$ і $x=0$, обертається навколо осі Ox. Обчислити об'єм тіла обертання.

Відповідь: 64π.

16 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями $y^2+x-4=0$ і $x=0$.

Відповідь: $\frac{512}{15}\pi$.

17 Обчислити довжину дуги лінії $y=\ln\left(1-x^2\right)$ від $x_1=0$ до $x_2=\frac{1}{2}$.

Відповідь: *ln3 – 0,5.*

18 Обчислити довжину дуги лінії $y=\ln\frac{e^x+1}{e^x-1}$ від $x_1=a$ до $x_2=в$.

Відповідь: $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$.

19 Обчислити довжину дуги кривої $y=1-\ln\sin x$ від $x_1=\frac{\pi}{3}$ до $x_2=\frac{\pi}{2}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}\ln 3$.

20 Обчислити довжину дуги кривої $y=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$ від $x_1=0$ до $x_2=3$.

Відповідь: $\frac{1}{4}\left(e^6-e^{-6}\right)$.

1 Обчислити довжину дуги лінії $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t, \\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=\pi$.

Відповідь: $\frac{\pi^3}{3}$.

22 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=1$.

Відповідь: $\sqrt{2}(e-1)$.

23 Обчислити довжину дуги кривої $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=2\pi$.

Відповідь: *48.*

24 Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі $r\varphi=1$ від $\varphi_1=\frac{3}{4}$ до $\varphi_2=\frac{4}{3}$.

Відповідь: $\frac{5}{12}+\ln\frac{3}{2}$.

25 Обчислити довжину дуги кривої $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Відповідь: $\frac{3\pi a}{2}$.

26 Обчислити довжину дуги кардіоїди $r = 2(1-\cos\varphi)$, яка розташована всередині кола $r=1$.

Відповідь: $16-8\sqrt{3}$.

27 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболи $3y-x^3=0$ навколо осі абсцис від $x_1=0$ до $x_2=a$.

Відповідь: $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{\left(1+a^4\right)^3}-1\right)$.

28 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}\left(t^2-3\right) \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=\sqrt{3}$.

Відповідь: 3π.

29 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

Відповідь: $2\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

30 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y=\frac{1}{3}x^3$ від $x_1=-2$ до $x_2=2$.

Відповідь: $\frac{2}{9}\pi\left(17\sqrt{17}-1\right)$.

31 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y^2=4+x$ від вершини до точки з абсцисою $x=2$.

Відповідь: $\frac{62}{3}\pi$.

2 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кардіоїди $\begin{cases} x = a\left(2\cos t-\cos 2t\right), \\ y = a\left(2\sin t-\sin 2t\right). \end{cases}$

Відповідь: $\frac{128}{5}\pi a^2$.

33 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox однієї арки циклоїди $\begin{cases} x = a\left(t-\sin t\right), \\ y = a\left(1-\cos t\right). \end{cases}$

Відповідь: $\frac{64}{3}\pi a^2$.

4 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox астроїди $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$

Відповідь: $\frac{12}{5}\pi a^2$.

Питання для самоперевірки

1 Як обчислюється площа фігури, обмеженої кривою, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?

2 Як обчислюється довжина кривої, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?

3 Як обчислюється об'єм тіла обертання?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 13

Невласні інтеграли. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння, однорідні відносно змінних.

Розв'язання прикладів
Невласні інтеграли

Приклад 1 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Розв'язання. За означенням,

$$\int\limits_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{e^2}^{b}\frac{dx}{x\ln^3 x}=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\Bigg|_{e^2}^{b}\right)=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 b}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{8}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Приклад 2 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Розв'язання. За означенням,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(x+1)^2+4}=$$

$$=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Bigg|_{a}^{b}\right)=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{b+1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}\frac{a+1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається.

Приклад 3 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty}x\sin x dx$.

Розв'язання. За означенням,

$$\int\limits_{0}^{+\infty}x\sin x dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}x\sin x dx=\left|\begin{matrix}u=x; & du=dx\\ dv=\sin x dx; & v=-\cos x\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-x\cos x+\int\cos x dx\right)\Big|_{0}^{b}=\lim_{b\to+\infty}\left(-x\cos x+\sin x\right)\Big|_{0}^{b}=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-b\cos b+\sin b\right).$$

Оскільки остання границя не існує, то невласний інтеграл розбігається.

Приклад 4 Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right)^2} dx.$

Розв'язання. Покладемо, що $\operatorname{tg} x = t.$ Тоді $dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$, $t_n = \operatorname{tg} 0 = 0,$ $t_B = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$ і

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right)^2} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\cos^6\left(\operatorname{tg}^3 x + 1\right)^2} dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x dx}{\cos^2 x\left(\operatorname{tg}^3 x + 1\right)^2} = \int\limits_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2}.$$

Одержали невласний інтеграл. Обчислюючи його за означенням, будемо мати

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2} = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^{b} \frac{t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2} = \frac{1}{3} \lim_{b \to +\infty} \int\limits_0^{b} \frac{3t^2 dt}{\left(t^3 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{t^3 + 1} \Bigg|_o^b \right) = -\frac{1}{3} \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{1}{b^3 + 1} - 1 \right) = \frac{1}{3}.$$

Таким чином, заданий інтеграл

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\left(\sin^3 x + \cos^3 x\right)^2} dx = \frac{1}{3}.$$

Приклад 5 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2}$ або установити його розбіжність.

Розв'язання. За означенням,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b \frac{dx}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \left| \begin{array}{ll} x = \operatorname{tg} t,\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t}, & \operatorname{tg} t = -\infty,\ t_H = -\frac{\pi}{2} \\ x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}, & \operatorname{tg} t = +\infty,\ t_B = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^4 t}} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin \pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin \pi \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Тут слід зауважити, що після заміни змінної у невласному інтегралі, одержали визначений інтеграл.

Приклад 6 Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}.$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} > 0$ на проміжку $[1; \infty)$

(a=1>0) і $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^4\left(\dfrac{1}{x^4}+1\right)}}=\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^4}}}<\dfrac{1}{x^2}$ при $x\to\infty$.

У силу ознаки 5 збіжності невласних інтегралів, вихідний інтеграл

$\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ збігається, бо $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}<\dfrac{1}{x^2}$ і c=1 (c=$const$), $\alpha=2>1$.

Іншими словами із збіжності більшого невласного інтеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{x^2}$ випливає збіжність меншого невласного інтеграла $\int\limits_1^\infty \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Приклад 7 Дослідити на збіжність інтеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos ax}{k^2+x^2}dx$, де $k\neq 0$.

Розв'язання. Оскільки $\dfrac{|\cos ax|}{k^2+x^2}\le\dfrac{1}{k^2+x^2}$ і

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{k^2+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b \frac{dx}{k^2+x^2}=\frac{1}{k}\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{k}\Big|_0^b=\frac{\pi}{2k}$$

збігається, то за ознакою 1 інтеграл $\int\limits_0^{+\infty}\dfrac{|\cos ax|}{k^2+x^2}dx$ збігається. Тоді збігається, і до того ж абсолютно, і заданий інтеграл $\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos ax}{k^2+x^2}dx$.

Приклад 8 Довести збіжність інтеграла $\int\limits_{10}^\infty \dfrac{(1+\ln x)dx}{\sqrt{x^2-3x}\left(\ln^3 x-3\right)}$.

Розв'язання. Відкидаючи менші члени чисельника і знаменника, бачимо, що даний інтеграл збігається або розбігається одночасно з інтегралом

$$\int\limits_{10}^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x},$$

бо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+\ln x)x\ln^2 x}{\sqrt{x^2-3x}\left(\ln^3 x-3\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\dfrac{1}{\ln x}+1\right)x\ln^3 x}{x\ln^3 x\left(1-\dfrac{3}{\ln^3 x}\right)\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\ln x}+1}{\left(1-\dfrac{3}{\ln^3 x}\right)\sqrt{1-\dfrac{3}{x}}}=1>0.$$

Невласний інтеграл

$$\int\limits_{10}^\infty \frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{10}^b \frac{dx}{x\ln^2 x}=\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Big|_{10}^b=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\ln b}-\frac{1}{\ln 10}\right)=\frac{1}{\ln 10}$$

збігається, отже, збігається і заданий інтеграл.

Приклад 9 Довести, що $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ збігається.

Розв'язання. Очевидно, що $x^2-2x+1\geq 0.$ Звідси $-2x+1\geq -x^2$ або $-x^2\leq -2x+1$ і тому $e^{-x^2}\leq e^{-2x+1}$ або $e^{-x^2}\leq e*e^{-2x}$. Оскільки

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_0^b\right)=-\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{2b}}-1\right)=\frac{1}{2}$$

збігається, то на основі ознаки 3 збігається і інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-2x}\cdot edx.$ А так як $e^{-x^2}\leq e^{-2x}\cdot e,$ то на основі ознаки 1, збігається і інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx.$

Замінюючи в цьому інтегралі *x* на *-y,* приходимо до висновку, що збігається й $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx$ (назва змінної інтегрування не змінює величину визначеного інтеграла). Із збіжності інтегралів $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ і $\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx$ випливає збіжність $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx.$

Відзначимо, що $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ має важливе значення в теорії ймовірностей. Як уже відзначалося раніше, $\int e^{-x^2}dx$ через елементарні функції не виражається.

Приклад 10 Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bxdx$ і обчислити його (a > 0).

Розв'язання. Так як $\int_0^{+\infty} e^{-ax}dx$ при a > 0 збігається (пропонуємо читачеві довести збіжність цього інтеграла самостійно), а $\left|e^{-ax}\sin bx\right|\leq e^{-ax},$ то на основі ознаки 1 збігається і інтеграл $\int_0^{+\infty}\left|e^{-ax}\sin bx\right|dx.$ Тоді на основі ознаки 4 збігається і заданий інтеграл.

Застосовуючи двічі формулу інтегрування частинами, легко показати (це ми також пропонуємо читачеві зробити самостійно), що для функції $e^{-ax}\sin bx$ первісна функція

$$F(x)=-\frac{a\sin bx+b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax}.$$

Тому

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bxdx=\lim_{x\to+\infty}F(x)-F(0)=$$

$$= -\lim_{x\to+\infty}\frac{a\sin bx + b\cos bx}{a^2+b^2}e^{-ax} + \frac{b}{a^2+b^2} = \frac{b}{a^2+b^2},$$

оскільки під знаком границі чисельник дробу – величина обмежена, а $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-ax} = 0$ при $a > 0$. Отже, даний невласний інтеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx dx$ збігається до числа $\frac{b}{a^2+b^2}$.

Приклад 11 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ не визначена в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$, причому при $x \to -1$ і $x \to 1$ функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ необмежено зростає. Таким чином, маємо невласний інтеграл від необмеженої функції. За означенням

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon_1\to0}\int\limits_{-1+\varepsilon_1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\varepsilon_2\to0}\int\limits_{0}^{1-\varepsilon_2}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon_1}^{0} + \lim_{\varepsilon_2\to0}\arcsin x\Big|_{0}^{1-\varepsilon_2} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1\to0}\left(\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon_1)\right) + \lim_{\varepsilon_2\to0}\left(\arcsin(1-\varepsilon_2) - \arcsin 0\right) =$$

$$= \arcsin 1 + \arcsin 1 = 2\arcsin 1 = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Зауважимо, що замість точки $x=0$ можна було б взяти будь-яку іншу внутрішню точку відрізка $[-1;1]$.

Приклад 12 Показати, що невласний інтеграл $\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ збігається.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ необмежена в будь-якому околі точки $x=0$ неперервна при $-1 \le x < 0$ і $0 < x \le 8$. Отже маємо невласний інтеграл від необмеженої функції.

Так як первісна функція $F(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ неперервна в точці $x=0$, то на основі формули (40) одержимо

$$\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{8} = \frac{3}{2}\left(8^{\frac{2}{3}} - (-1)^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається.

Зауважимо, що скориставшись означенням (37), одержимо такий самий результат. Дійсно,

$$\int\limits_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1\to0}\int\limits_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + \lim_{\varepsilon_2\to0}\int\limits_{0+\varepsilon_2}^{8_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{\varepsilon_1\to0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{-1}^{0-\varepsilon_1}\right) + \lim_{\varepsilon_2\to0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Big|_{0+\varepsilon_2}^{8}\right) =$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left((-\varepsilon_1)^{\frac{2}{3}}-1\right)+\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(4-(\varepsilon_2)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{3}{2}(-1+4)=\frac{9}{2}.$$

Не важко зрозуміти, що застосування формули (40) для розв`язання цього прикладу, привело до більш простіших викладок.

Приклад 13 Обчислити за означенням невласний інтеграл $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ або установити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\sqrt[3]{\ln x}}$ не обмежена в околі точки x=1. На будь-якому ж відрізку $[1+\varepsilon;e]$ вона інтегровна, так як є неперервною функцією. Тому за означенням

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{1+\varepsilon}^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_{1+\varepsilon}^e\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(1-\sqrt[3]{\ln^2(1+\varepsilon)}\right)=\frac{3}{2}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Зауважимо, що розв`язати цей приклад можна і за формулою (40), бо функція $F(x)=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}$ неперервна на відрізку $[1;e]$ і диференційовна в кожній точці проміжка $1<x\le e$, причому $F'(x)=f(x)$ на цьому проміжку. Тому

$$\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}=\frac{3}{2}\sqrt[3]{\ln^2 x}\Big|_1^e=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{\ln^2 e}-\sqrt[3]{\ln^2 1}\right)=\frac{3}{2}$$

Приклад 14 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}$ або установити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ необмежена в околі точки $x=\frac{\pi}{2}$ і інтегровна на будь- якому відрізку $\left[0;\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$ як неперервна функція. Тому

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \frac{dx}{\cos x}=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)-\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\operatorname{ctg}\frac{\varepsilon}{2}=\infty.$$

Отже, даний інтеграл розбігається.

Приклад 15 Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\ln x}$ або установити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ не визначена в точці x=1, яка співпадає з нижньою межею інтегрування, причому при $x\to 1$

функція $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ необмежено зростає. Тому, за означенням,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\ln x\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\ln 2 - \ln\ln(1+\varepsilon)\right) = \infty$$

Таким чином, даний інтеграл розбігається.

Приклад 16 Обчислити невласний інтеграл $\int_0^1 \ln x dx$ або установити його розбіжність.

Розв'язання. При $x \to +0$ підінтегральна функція $f(x) = \ln x \to -\infty$. Тому

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \ln x dx.$$

Застосовуючи формулу інтегрування частинами, знаходимо

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x;\ du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx;\quad v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Таким чином, шуканий інтеграл

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_\varepsilon^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(x\ln x - x\right)\Big|_\varepsilon^1 = -1 - \lim_{\varepsilon\to+0}\left(\varepsilon\ln\varepsilon - \varepsilon\right) =$$

$$= -1 - \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\ln\varepsilon = -1 - \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\varepsilon}{\varepsilon^{-1}} = -1 - \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} = -1 + \lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon = -1.$$

Оскільки одержано скінченну границю, то даний інтеграл збігається.

Приклад 17 Обчислити невласний інтеграл $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx.$

Розв'язання. Виконуючи нескладні перетворення інтеграла, одержимо

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \frac{x-1-1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx - \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \sqrt{x-1}dx - \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}dx.$$

У першому з одержаних інтегралів підінтегральна функція неперервна на відрізку $[1;2]$, тому за формулою Ньютона –Лейбніца

$$\int_1^2 \sqrt{x-1}dx = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(1-0) = \frac{2}{3}.$$

Другий інтеграл невласний, бо підінтегральна фунуція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} \to \infty$ при $x \to 1$. За означенням

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \lim_{\varepsilon\to+0} 2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon\to+0}\left(1 - \sqrt{1+\varepsilon-1}\right) = 2.$$

Отже, остаточно маємо

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}.$$

Зазначимо, що даний інтеграл можна розв`язати ще й так:

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \left| \begin{array}{c} x-1=u^2 \\ dx=2udu \\ u_n=0; u_B=1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{u^2+1-2}{u}\cdot 2udu = 2\int_0^1 \left(u^2-1\right)du =$$

$$= 2\left(\frac{u^3}{3}-u\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{1}{3}-1\right) = -\frac{4}{3}.$$

Як бачимо, після заміни змінної у невласному інтегралі, одержали визначений інтеграл.

Приклад 18 Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$ є нескінченно великою при $x \to 1.$ Отже маємо невласний інтеграл. Подамо цю функцію у вигляді

$$f(x)=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}=\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}\cdot\frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}.$$

При $x \to 1$ множник $\frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1+x}}$ прямує до сталої величини і тому порядок цієї нескінченно великої функції при $x \to 1$ порівняно з $\frac{1}{1-x}$ дорівнює $\alpha=\frac{1}{3}<1.$ Таким чином, на основі ознаки 2 даний інтеграл збігається.

Приклад 19 Дослідити на збіжність інтеграл $\int_0^1 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}dx.$

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}$ в проміжку інтегрування додатна і $f(x)\to\infty$ при $x \to 0$. Враховуючи, що при $x \to 0$ $\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)$ $\sim\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$, а $e^{\sin x}-1 \sim \sin x \sim x$, будемо мати

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}{e^{\sin x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}=\infty,$$

тобто $f(x)$ є нескінченно великою порядку $\alpha=\frac{2}{3}<1$ порівняно з $\frac{1}{x}$. Отже, на основі ознаки 2 даний інтеграл збігається.

Приклад 20 Довести, що інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$ збігається.

Розв'язання. Маємо невласний інтеграл, бо при $x \to +0$ підінтегральна функція $f(x)=\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\to\infty.$ Оскільки для $0<x\le 1$ $0\le\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{1}{\sqrt{x}}$ і інтеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$

збігається, то в силу ознаки 3 збігається і інтеграл $\int_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\right| dx,$ а отже, збігається і до того ж абсолютно, заданий інтеграл.

Приклад 21 Установити збіжність інтеграла $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$ і обчислити його.

Розв'язання. При $x\to 0$ підінтегральна функція $f(x)=\ln\sin x\to -\infty.$ Застосувавши метод інтегрування частинами, одержимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = \left| \begin{matrix} u=\ln\sin x;\ du=\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x dx \\ dv=dx;\quad v=x \end{matrix} \right| = x ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{tgx}dx,$$

так як $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(x\ln\sin x\right)\Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\varepsilon\ln\sin\varepsilon\right) = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\sin\varepsilon}{\varepsilon^{-1}} = -\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\frac{\frac{1}{\sin\varepsilon}\cdot\cos\varepsilon}{-\varepsilon^{-2}} =$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon^2\cos\varepsilon}{\sin\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{\sin\varepsilon}\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\cdot\lim_{\varepsilon\to+0}\cos\varepsilon = 1\cdot 0\cdot 1 = 0.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x}{tgx}=1,$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{x}{tgx}=0,$ то інтеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{tgx}dx$ є визначеним.

Отже, вихідний інтеграл збігається.

Для обчислення вихідного інтеграла виконаємо підстановку $x=2t.$ Тоді $dx=2dt,$ $t_H=0,$ $t_B=\frac{\pi}{4}$ і

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\cos t)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\ln 2+\ln\sin t+\ln\cos t\right)dt =$$

$$= 2t\ln 2\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt.$$

В останньому інтегралі виконаємо підстановку $t=\frac{\pi}{2}-z.$ Тоді $dt=-dz,$ $z_H=\frac{\pi}{2},$ $z_B=\frac{\pi}{4}$ і

$$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos t dt = -2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-z\right)dz = 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin z dz.$$

Таким чином,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin t dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin z dz = \frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I.$$

Звідси

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Диференціальні рівняння

Приклад 22 Обчислити невласний інтеграл $\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}$ або установити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+3}$ не існує в точках $x=1\in[0;2]$ і $x=3\notin[0;2]$. При $x\to 1$ функція $f(x)\to\infty$. Отже,

$$\int_0^2\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int_0^1\frac{dx}{x^2-4x+3}+\int_1^2\frac{dx}{x^2-4x+3}.$$

Обчислюючи перший інтеграл, одержимо

$$\int_0^1\frac{dx}{x^2-4x+3}=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)^2-1}=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-2-1}{x-2+1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x-3}{x-1}\Bigg|_0^{1-\varepsilon}\right)=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\frac{-\varepsilon-2}{-\varepsilon}-\ln 3\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\ln\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)-\ln 3\right)=\frac{1}{2}(\infty-\ln 3)=\infty.$$

Так як одержана границя нескінченна, то цей інтеграл розбігається. Другий інтеграл обчислювати не потрібно, бо на основі означення невласний інтеграл розбігається, якщо принаймні один із інтегралів розбігається. Таким чином, вихідний інтеграл розбігається.

Приклад 23 Знайти загальний розв`язок рівняння $yy'=\frac{1-2x}{y}$.

**Розв`язання.** Розв`яжемо рівняння відносно y' : $y'=\frac{1-2x}{y^2}$.

Отримаємо рівняння типу $y'=f_1(x)f_2(y)$, оскільки $\frac{1-2x}{y^2}=(1-2x)\frac{1}{y^2}$.

Замінимо y' на $\frac{dy}{dx}$, тоді $\frac{dy}{dx}=\frac{1-2x}{y^2}$.

Помноживши обидві частини на y^2dx, одержимо рівняння з відокремленими змінними $y^2dy=(1-2x)dx$, інтегруючи яке, знаходимо

$$\frac{y^3}{3}=x-x^2+C \qquad \text{(загальний інтеграл)}$$

або, розв`язавши відносно y,

$$y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2} \qquad \text{(загальний розв'язок).}$$

Приклад 24 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'+\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}.=0.$

Розв`язання. Це рівняння з відокремленими змінними, оскільки $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$. Відокремлюючи змінні $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ й інтегруючи отриману рівність, знаходимо загальний інтеграл:

$$\arcsin y = -\arcsin x + C,$$

а розв`язавши відносно y:

$$y = \sin(C - \arcsin x) \text{ - загальний розв'язок.}$$

Приклад 25 Знайти загальний розв`язок рівняння $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2} = 0.$

Розв`язання. Це рівняння вигляду $M_1(x)N_2(y)dx + M_2(x)N_1(y)dy = 0.$

Розділивши обидві частини цього рівняння на $\sqrt{1-y^2} * \sqrt{1-x^2}$, отримаємо $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$ а після інтегрування знаходимо його загальний інтеграл

$$\arcsin x - \sqrt{1-y^2} = C.$$

Приклад 26 Знайти частинний розв`язок диференціального рівняння $y'\sin x = y\ln y$, який задовольняє початковій умові $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

**Розв`язання.** Спочатку знайдемо загальний розв`язок рівняння. Для його розв'яжемо його відносно $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\ln y}{\sin x}.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y\ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Після інтегрування маємо:

$$\ln|\ln y| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \ln C,$$

а після потенціювання $\ln y = C \cdot tg\frac{x}{2}$ або $y = e^{C \cdot tg\frac{x}{2}}$ - загальний розв`язок.

Використовуючи початкову умову, знаходимо значення довільної сталої C. Підставляючи значення $C = 1$ в загальний розв`язок рівняння, отримаємо частинний розв`язок рівняння $y = e^{tg\frac{x}{2}}$.

Приклад 27 Знайти загальний розв`язок рівняння $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$

Розв`язання. Це рівняння типу $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$, тобто однорідне відносно змінних x і y. Зробимо заміну $\frac{y}{x} = u(x)$, звідки $y=ux$, а $y' = u'x + u.$ Підставляючи ці вирази в дане рівняння, отримаємо

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

а після відокремлювання змінних $udu = \frac{dx}{x}$. Інтегруючи цю рівність, знаходимо $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln C$ або $u^2 = \ln\left|Cx^2\right|$. Повертаючись до y, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння $\frac{y^2}{x^2} = \ln\left|Cx^2\right|$, а розв`язавши відносно $y$, загальний розв`язок рівняння

$$y = \pm\sqrt{\ln\left|Cx^2\right|}.$$

Приклад 28 Знайти загальний розв`язок рівняння $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

**Розв`язання.** Розв`язавши рівняння відносно y', отримаємо $u' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$, тобто рівняння типу $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Зробимо підстановку $\frac{y}{x} = u(x)$. Тоді $y = ux$, а $y' = u'x + u$. Виконуючи низку перетворень, будемо мати:

$$u'x + u = u\ln u;$$

$$x\frac{du}{dx} = u(\ln u - 1);$$

$$\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \int\frac{dx}{x} + \ln C;$$

$$\ln(\ln u - 1) = \ln|x| + \ln C;$$

$$lnu - 1 = Cx,$$

$$u = e^{Cx+1};$$

$$\frac{y}{x} = e^{Cx+1};$$

$$y = xe^{Cx+1}.$$

Це і є шуканий розв`язок.

Приклад 29 Знайти загальний розв`язок рівняння $x\,dy - y\,dx = y\,dy$.

**Розв`язання.** Об`єднаємо доданки, які містять dy в одну групу, а ті, що містять dx - в іншу, одержуємо: $(x-y)dy - ydx = 0$. Наявність множника $x - y$ перед dy дає можливість стверджувати, що відокремити змінні в даному рівнянні неможливо.

Розділивши обидві частини отриманого рівняння на xdy, будемо мати

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0,$$

звідки $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ і рівняння набуло вигляду $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Далі треба діяти як у попередніх прикладах. Але неважко помітити, що дане рівняння набуде простішого вигляду, якщо розв'язати його відносно $\frac{dx}{dy}$, а саме $\frac{dx}{dy}=\frac{x}{y}-1$. Тоді, застосувавши підстановку $\frac{x}{y}=u(y)$, звідки $x=yu$, а $\frac{dx}{dy}=u+y\frac{du}{dy}$, будемо мати:

$$u+y\frac{du}{dy}=u-1;$$

$$y\frac{du}{dy}=-1;$$

$$du=-\frac{dy}{y};$$

$$u=-\ln|u|-\ln C;$$

$$u=-\ln|Cy|;$$

$$\frac{x}{y}=-\ln|Cy|;$$

$$\frac{x}{y}+\ln|Cy|=0 \quad \text{(загальний інтеграл).}$$

Зауважимо, що розв`язати отримане рівняння відносно y неможливо.

Домашнє завдання

Теорія Диференціальні рівняння другого порядку. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. [20], с. 141 –145.

Вправи

Обчислити невласні інтеграли або установити їх розбіжність:

1 $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(x+1)}$. Відповідь: 1–ln2.

2 $\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}dx$. Відповідь: розбігається.

3 $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}$.

4 $\int_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$. Відповідь: $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$.

5 $\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{(1+x)^2}$. Відповідь: $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$.

6 $\int_0^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx.$ Відповідь: *2.*

7 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}.$ Відповідь: розбігається

Знайти загальний або частинний розв`язок (інтеграл) диференціальних рівнянь.

1 $xyy' = 1 - x^2$ Відповідь: $x^2 + y^2 = \ln Cx^2.$

2 $y'tgx - y = a.$ Відповідь: $y = C\,sinx - a.$

3 $y' = 10^{x+y}.$ Відповідь: $10^x + 10^{-y} = C.$

4 $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}; y(0) = 1.$ Відповідь: $y = \frac{1+x}{1-x}.$

5 $y' = \frac{x+y}{x-y}.$ Відповідь: $arctg\,\frac{y}{x} = \ln\left(C\sqrt{x^2+y^2}\right)$

Вказівка. Для спрощення результату скористайтеся формулою

$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}.$

6 $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}.$ Відповідь: $x^2 = C^2 + 2Cy.$

7 $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$ Відповідь: $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2.$

8 $y' + y = \cos x.$ Відповідь: $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 14

Лінійні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі.
Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв'язку.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти загальний розв`язок рівняння $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

Розв`язання. Маємо рівняння вигляду $y' + p(x)y = q(x)$, де $p(x) = 2x$, $q(x) = xe^{-x^2}$, тобто лінійне відносно y і y'.

Покладемо $y = uv$. Тоді $y' = u'v + v'u$. Підставляючи вирази y і y' в дане рівняння, одержимо

$$u'v + v'b + 2xuv = xe^{-x^2}$$

або

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}.$$

За v беремо будь-який частинний інтеграл рівняння $v' + 2xv = 0$. Тоді для знаходження u отримаємо рівняння $u'v = xe^{-x^2}$. Розв`язуючи перше рівняння, знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -2xv;$$

$$\frac{dv}{v} = -2xdx;$$

$$\ln|v| = -x^2;$$

$$v = e^{-x^2}.$$

Підставляючи v в друге рівняння і розв`язуючи його, знаходимо u:

$$u''e^{-x^2} = xe^{-x^2};$$

$$u' = x;$$

$$u = \int xdx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Отже, шукана функція

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}.$$

Приклад 2 Знайти загальний розв`язок рівняння $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Розв`язання. Поділимо обидві частини рівняння на $1+x^2$:

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2.$$

Переконавшись, що рівняння лінійне неоднорідне, покладемо $y = uv$. Тоді воно набуває вигляду

$$u'v + v'u - \frac{2xuv}{1+x^2} = 1 + x^2$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{1+x^2}v\right) = 1 + x^2.$$

Далі маємо:

1. $v' - \frac{2x}{1+x^2}v = 0;$

$\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}v;$

$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2};$

$\ln|v| = \ln(1+x^2);$

$v = 1 + x^2.$

2. $u'v = 1 + x^2;$

$u'(1+x^2) = 1 + x^2;$

$u' = 1;$

$u = \int dx + C = x + C.$

$y = uv = (x + C)(1 + x^2)$ - загальний розв`язок заданого рівняння.

Приклад 3 Знайти частинний розв`язок рівняння $y' - ytgx = \sec x$, який задовольняє початковій умові $y(0) = 0$.

**Розв`язання.** Рівняння лінійне неоднорідне. Знайдемо спочатку його загальний розв`язок. Для цього покладемо $y=uv$, $y' = u'v + v'u$ і воно набуде вигляду

$$u'v + v'u - uvtgx = \sec x$$

або

$$u'v + u(v' - vtgx) = \sec x.$$

Тоді

1. $v' - vtgx = 0;$

$\frac{dv}{dx} = vtgx;$

$\frac{dv}{v} = tgxdx;$

$\ln|v| = -\ln|\cos x|;$

$v = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.$

2. $u'v = \sec x;$

$u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x};$

$u' = 1;$

$u = x + C.$

$y = uv = (x + C)\frac{1}{\cos x}$ - загальний розв`язок заданого рівняння.

При $x = 0$ і $y = 0$ знаходимо значення довільної сталої C

$$0 = (0 + C)\frac{1}{\cos 0} \Rightarrow C = 0.$$

Отже, шуканий частинний розв`язок рівняння буде мати вигляд: $y = \frac{x}{\cos x}$.

Приклад 4 Знайти загальний розв'язок рівняння $y' + xy = 3xy^3$.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку виду $y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, де $\alpha \in R$, причому $\alpha \neq 0$ і $\alpha \neq 1$. Це рівняння Бернуллі.

Зробимо заміну $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Після підстановки у рівняння $y = uv$ та $y' = u'v + uv'$ отримаємо: $u'v + uv' + xuv = 3x(uv)^3$ $\Rightarrow$ $u'v + u(v' + xv) = 3x \cdot (vu)^3$.

Виберемо функцію v так, щоб $v' + xv = 0$. Знаходимо v:

$$\frac{dv}{dx} = -xv \Rightarrow \frac{dv}{v} = -xdx \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = -\int xdx \Rightarrow \ln|v| = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow v = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Підставляючи v в рівняння $u'v + u(v' + xv) = 3x \cdot (vu)^3$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u' e^{\frac{-x^2}{2}} = 3xu^3\left(e^{\frac{-x^2}{2}}\right)^3 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3xe^{-x^2}u^3 \Rightarrow \frac{du}{u^3} = 3xe^{-x^2}dx$.

$\int\frac{du}{u^3} = 3\int xe^{-x^2}dx$.

1) $\int\frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = -\frac{u^{-2}}{2} + C = -\frac{1}{2u^2} + C_1$;

2) $\int xe^{-x^2}dx = \begin{vmatrix} t=-x^2 \\ dt=-2xdx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int e^t dt = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C_2$.

Отже, $-\frac{1}{2u^2}+C_1 = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C_2 \Rightarrow \frac{1}{u^2}=\frac{3}{e^{x^2}}+C$, де $C = 2C_1 - 2C_2 \Rightarrow \frac{1}{u^2}=3e^{-x^2}+C \Rightarrow$

$u^2 = \frac{e^{x^2}}{3+Ce^{x^2}} \Rightarrow u = \pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}$.

Загальний розв'язок має вигляд $y = uv = \pm\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ або $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3+Ce^{x^2}}}$.

Приклад 5 Розв'язати рівняння $x^2y^2\frac{dy}{dx}+xy^3=a^2$, де a – стала.

Розв'язання. З'ясуємо тип рівняння $x^2y^2y'+xy^3=a^2$. Так як $y'=\frac{dy}{dx}$ то $x^2y^2y'+xy^3=a^2 \Rightarrow y^2y'+\frac{xy^3}{x^2}=\frac{a^2}{x^2} \Rightarrow y'+\frac{y}{x}=\frac{a^2}{x^2y^2}$. Отже, це рівняння Бернуллі. Зробимо заміну $y=uv$. Після підстановки у рівняння $y=uv$ та $y'=u'v+uv'$ отримаємо:

$u'v+uv'+\frac{uv}{x}=\frac{a^2}{x^2u^2v^2} \Rightarrow u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}$.

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\frac{v}{x}=0$. Знаходимо v : $\frac{dv}{v}=-\frac{dx}{x}$

$\int\frac{dv}{v}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=-\ln|x| \Rightarrow v=\frac{1}{x}$.

Підставляючи v в рівняння $u'v+u\left(v'+\frac{v}{x}\right)=\frac{a^2}{x^2u^2v^2}$, отримуємо рівняння для знаходження u : $\frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{a^2}{x^2\cdot u^2\frac{1}{x^2}} \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot\frac{1}{x}=\frac{a^2}{u^2} \Rightarrow u^2du=a^2xdx$.

$\int u^2du=a^2\int x\,dx \Rightarrow \frac{u^3}{3}=a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right) \Rightarrow u=\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)}$.

Отже, загальний розв'язок має вигляд $y=uv=\frac{1}{x}\sqrt[3]{3a^2\left(\frac{x^2}{2}+C\right)}$ або $y^3=\frac{3}{2}\frac{a^2}{x}+\frac{C}{x^3}$.

Таблиця загальних розв'язків 14.1

Рівняння	$y''+py'+qy=0$, де p і q - сталі		
Характеристичне рівняння	$k^2+pk+q=0$		
Корені характеристичного рівняння	$\kappa_1\neq\kappa_2$	$\kappa_1=\kappa_2=\kappa$	$k_{1,2}=\alpha+\beta i, \beta\neq 0$
Фундаментальна система частинних розв`язків	$y_1=e^{k_1x}$ $y_2=e^{k_2x}$	$y_1=e^{kx}$ $y_2=xe^{kx}$	$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$
Загальний розв`язок	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$	$y=(C_1+C_2x)e^{kx}$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+$ $+C_2\sin\beta x)$

Приклад 6 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' + y' + 2y = 0.$

**Розв`язання.** Маємо ЛОДР – 2 зі сталими коефіцієнтами. Для його розв`язання складемо характеристичне рівняння. За теоремою Вієта $\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = -2, \\ k_1 + k_2 = -1, \end{cases}$ звідси $к_1$= -2, $к_2$= 1.

Корені характеристичного рівняння дійсні і різні числа ($к_1 \neq к_2$), тому загальний розв`язок рівняння набуде вигляду(див. таблицю 14.1)

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}.$$

Приклад 7 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' - 4y' = 0.$

Розв'язання. Складемо характеристичне рівняння $к^2 - 4к = 0$. Розв'язуючи його, знаходимо $к_1 = 0$, $к_2 = 4$. Оскільки $к_1 \neq к_2$, то шуканий загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

Приклад 8 Знайти загальний розв`язок рівняння $3y'' - 2y' - 8y = 0.$

Розв`язання. Складемо характеристичне рівняння $3к^2 - 2к - 8 = 0$.

Розв`язуючи його, знаходимо:

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4*3*(-8) = 100;$$

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6};$$

$$к_1 = 2; \qquad k_2 = -\frac{4}{3}.$$

Загальний розв`язок рівняння: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$.

Приклад 9 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' + 6y' + 13y = 0.$

Розв`язання. Складемо характеристичне рівняння $к^2 + 6к + 13 = 0$. Його корені знайдемо за формулою

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

згідно з якою

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm \sqrt{4i} = -3 \pm 2i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ($к_{1,2} = \alpha \pm \beta i$).

Отже, α = - 3; β = 2. Тоді загальний розв`язок даного рівняння набуде вигляду

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Приклад 10 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' - 2y' + y = 0.$

**Розв`язання.** Складемо характеристичне рівняння $к^2 - 2к + 1 = 0$. Оскільки $к^2 - 2к + 1 = (к-1)^2 = 0$, $к_1 = к_2 = 1$. Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні, тому загальний розв`язок запишемо у вигляді:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

Приклад 11 Знайти частинний розв`язок наступних рівнянь, який задовольняє даним початковим умовам

$$y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 6; y'(0) = 10.$$

**Розв`язання.** Спочатку знайдемо загальний розв`язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння $к^2 - 4к + 3 = 0$. Його корені $к_1$ = 1 і $к_2$ = 3 дійсні й різні, тому загальний розв`язок має вигляд $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$. Диференціюючи y, отримаємо $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$. Використовуючи початкові умови, знаходимо значення C_1 і C_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6 = C_1 + C_2, \\ 10 = C_1 + 3C_2. \end{cases}$$

Розв`язуючи систему, одержимо $C_1$ = 4, $C_2$ = 2. Підставляючи ці значення в загальний розв`язок, знаходимо шуканий частинний розв`язок

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

Приклад 12 Знайти частинний розв`язок наступних рівнянь, який задовольняє даним початковим умовам

$$y'' + 4y' + 29y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 15.$$

Розв`язання. Складемо характеристичне рівняння $к^2 + 4к + 29 = 0$.

Знаходимо його корені

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 29} = -2 \pm \sqrt{-25} = -2 \pm 5i.$$

Оскільки корені комплексно-спряжені і α = - 2; β = 5 загальний розв`язок рівняння запишемо у вигляді

$$y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x\right).$$

Далі знаходимо

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + e^{-2x}(-5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x).$$

Враховуючи початкові умови: при $x = 0,\ y = 0,\ y' = 15,$ а також те, що $e^0=1,\ sin0 = 0,\ cos0 = 1,$ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 15 = -2C_1 + 5C_2, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 0$, $C_2 = 3$. Отже, шуканий частинний розв`язок вихідного рівняння набуде вигляду

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л.27-28], с. 155 –159.

Вправи

Знайти загальний або частинний розв`язок (інтеграл) диференціальних рівнянь.

1 $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}.$ Відповідь: $x^2 = C^2 + 2Cy.$

2 $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1.$ Відповідь: $y = Cx^2 e^{\frac{1}{x}} + x^2.$

3 $y' + y = \cos x.$ Відповідь: $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x).$

4 $y'' - 9y = 0.$ Відповідь: $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$

5 $y'' - 2y' - 8y = 0.$ Відповідь: $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}.$

6 $y'' + y = 0,$ Відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$

7 $4y'' - 8y' + 5y = 0.$ Відповідь: $y = e^x\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2} \right).$

8 $4\frac{d^2x}{dt^2} - 20\frac{dx}{dt} + 25x = 0.$ Відповідь: $x = (C_1 + C_2 t)e^{2,5t}.$

9 $4y'' + 4y' + y = 0; y(0) = 2; y'(0) = 0.$ Відповідь: $y = (2 + x)e^{-\frac{x}{2}}.$

Питання для самоперевірки

1 Що називається диференціальним рівнянням?

2 Що називається порядком диференціального рівняння?

3 Що називається загальним і частинним розв’язками диференціального рівняння?

4 Яка задача називається задачею Коші? За яких умов існує єдиний розв’язок задачі Коші?

5 Які диференціальні рівняння першого порядку називають рівняннями з відокремлюваними лінійними?

6 У якому вигляді шукають розв’язок лінійного диференціального рівняння першого порядку за методом Бернулі?

7 Який вигляд має рівняння Бернулі?

8 Яке рівняння називають диференціальним рівнянням другого порядку?

9 Який вигляд має задача Коші для диференціального рівняння другого порядку?

10 Сформулюйте теорему існування та єдності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку.

11 Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням другого порядку?

12 Який вигляд має загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку.

13 Викласти метод розв'язання лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Яке рівняння називають характеристичним?

14 Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені його характеристичного рівняння: 1) дійсні й різні, 2) дійсні й рівні, 3) комплексно-спряжені.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 15

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв'язку. Метод варіації довільних сталих та спеціальна права частина

Розв'язання прикладів

Загальний розв'язок y лінійного неоднорідного диференціального рівняння (ЛНДР) $y'' + py' + qy = f(x)$ (p, q – дійсні числа, $f(x)$ – неперервна функція) дорівнює сумі будь - якого частинного розв'язку Y цього рівняння і загального розв'язку $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$. Отже, функція $y = Y + \overline{y}$ є загальним розв'язком ЛНДР.

Існує загальний метод знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$, який називається методом варіації довільних сталих, або методом Лагранжа, за яким частинний розв'язок рівняння $y'' + py' + qy = f(x)$ має вигляд:

$$Y = y_2 \int \frac{y_1(x) f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2(x) f(x)}{W} dx,$$

де $y_1(x)$, $y_2(x)$ – незалежні частинні розв'язки відповідного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$, а $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ - є визначник Вронського

Приклад 1 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у

вигляді $y = Y + \overline{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$; звідки $k^2 = -1$, $k_{1,2} = \pm\sqrt{-1}; k_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \pm i$. Маємо випадок уявних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. В нашому випадку α=0, β=1. Отже, $y_1(x) = \cos x; y_2(x) = \sin x$, а $\overline{y} = C_1\cos x + C_2\sin x$.

Щоб за формулою $Y = y_2\int\frac{y_1(x)f(x)}{W}dx - y_1\int\frac{y_2(x)f(x)}{W}dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Тоді

$$Y(x) = \sin x\int\frac{\cos x \cdot 1}{1\cdot\sin^3 x}dx - \cos x\int\frac{\sin x\cdot 1}{1\cdot\sin^3 x}dx = \sin x\int\cos x\sin^{-3}x dx - \cos x\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \sin x\left(\frac{\sin^{-2}x}{-2}\right) - \cos x(-ctgx) = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{-1 + 2\cos^2 x}{2\sin x} = \frac{\cos 2x}{2\sin x}.$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\overline{y} + Y$: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{\cos 2x}{2\sin x}$.

Приклад 2 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Розв'язання. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = Y + \overline{y}$ Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 2k + 1 = 0$; звідки $(k-1)^2 = 0$, $k_1 = k_2 = k = 1$. Корені дійсні та рівні. Тоді фундаментальна системо розв'язків має вигляд $y_1 = e^{kx} = e^x$, $y_2 = xe^{kx} = xe^x$. За формулою $y = (C_1 + C_2x)e^{kx}$ записуємо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння: $\overline{y} = C_1e^x + C_2xe^x$.

Обчислимо визначник Вронського:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^x(e^x + xe^x) - xe^xe^x = e^{2x} \neq 0.$$

Тоді $Y(x) = xe^x\int\frac{e^x\cdot\frac{e^x}{x}}{e^{2x}}dx - e^x\int\frac{xe^x\cdot\frac{e^x}{x}}{e^{2x}}dx = xe^x\int\frac{1}{x}dx - e^x\int dx = xe^x\ln|x| - e^xx$.

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо у вигляді: $y = \overline{y} + Y = C_1 e^x + C_2 x e^x + x e^x \ln|x| - x e^x$ або $y = C_1 e^x + C_3 x e^x + x e^x \ln|x|$, де $C_3 = C_2 - 1$.

Приклад 3 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = Y + \overline{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' - y' = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2 - k = 0$; запишемо його у вигляді $k(k-1) = 0$, звідки $k_1 = 0$; $k_2 = 1$. Маємо випадок дійсних та різних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$. Отже, $y_1(x) = e^{0x} = 1$; $y_2(x) = e^{1x} = e^x$, а $\overline{y} = C_1 + C_2 e^x$.

Щоб за формулою $Y = y_2 \int \dfrac{y_1(x) f(x)}{W} dx - y_1 \int \dfrac{y_2(x) f(x)}{W} dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix} = e^x - 0 = e^x \neq 0.$$

Тоді

$$Y(x) = e^x \int \frac{1 \cdot \frac{e^x}{1+e^x}}{e^x} dx - 1 \cdot \int \frac{e^x \cdot \frac{e^x}{1+e^x}}{e^x} dx = e^x \int \frac{1}{1+e^x} dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = e^x \int \frac{1}{1+e^x} dx - \ln\left(1+e^x\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} u = 1+e^x \\ du = e^x dx \\ dx = \dfrac{du}{u-1} \end{vmatrix} = e^x \int \frac{du}{(u-1)u} - \ln(1+e^x) = -e^x \int \frac{u-1-u}{(u-1)u} du - \ln(1+e^x) = -e^x \int \frac{1}{u} du + e^x \int \frac{1}{u-1} du - \ln(1+e^x) =$$

$$= -e^x \ln|u| + e^x \ln|u-1| - \ln(1+e^x) = e^x \ln \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\overline{y} + Y : y = C_1 + C_2 e^x + e^x \ln \dfrac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$.

Приклад 4 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = tgx$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = Y + \overline{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\overline{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння:

$k^2+1=0$; звідки $k^2=-1$, $k_{1,2}=\pm\sqrt{-1}; k_{1,2}=\alpha\pm i\beta=\pm i$. Маємо випадок уявних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x)=e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2(x)=e^{\alpha x}\sin\beta x$. В нашому випадку α=0, β=1. Отже, $y_1(x)=\cos x; y_2(x)=\sin x$, а $\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Щоб за формулою $Y=y_2\int\frac{y_1(x)f(x)}{W}dx-y_1\int\frac{y_2(x)f(x)}{W}dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$:

$$W(x)=\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x\end{vmatrix}=\cos^2 x+\sin^2 x=1\neq 0.$$

Тоді

$$Y(x)=\sin x\int\frac{\cos x\cdot tgx}{1}dx-\cos x\int\frac{\sin x\cdot tgx}{1}dx=\sin x\int\cos x\cdot tgxdx-\cos x\int\sin x\cdot tgxdx=$$

$$=\sin x\int\cos x\cdot tgxdx-\cos x\int\sin x\cdot tgxdx=\sin x\int\sin x\cdot dx-\cos x\int\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx=-\sin x\cos x-\cos x\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx=$$

$$=-\sin x\cos x-\cos x\int\left(\frac{1}{\cos x}-\cos x\right)dx=-\sin x\cos x-\cos x\left(\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|-\sin x\right)=\cos x\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y}+Y: y=C_1\cos x+C_2\sin x+\cos x\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

Приклад 5 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y''-y'=e^{2x}\cos e^x$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y=Y+\bar{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y''-y'=0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2-k=0$; запишемо його у вигляді $k(k-1)=0$, звідки $k_1=0;\ \ k_2=1$. Маємо випадок дійсних та різних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x)=e^{k_1x},\ \ y_2(x)=e^{k_2x}$. Отже, $y_1(x)=e^{0x}=1;\ \ y_2(x)=e^{1x}=e^x$, а $\bar{y}=C_1+C_2e^x$.

Щоб за формулою $Y=y_2\int\frac{y_1(x)f(x)}{W}dx-y_1\int\frac{y_2(x)f(x)}{W}dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}$:

$$W(x)=\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x\end{vmatrix}=e^x-0=e^x\neq 0.$$

Тоді

$$Y(x)=e^x\int\frac{1\cdot e^{2x}\cos e^x}{e^x}dx-1\cdot\int\frac{e^x\cdot e^{2x}\cos e^x}{e^x}dx=e^x\int e^x\cos e^x dx-\int e^{2x}\cos e^x dx=e^x\sin e^x-$$

$$-\int e^x\cos e^x e^x dx=\begin{vmatrix} u=e^x & du=e^x dx \\ dv=\cos e^x e^x dx & v=\sin e^x \end{vmatrix}=e^x\sin e^x-\left(e^x\sin e^x-\int\sin e^x e^x dx\right)=$$

$$=e^x\sin e^x-\left(e^x\sin e^x+\cos e^x\right)=-\cos e^x$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y}+Y: y=C_1+C_2e^x-\cos e^x$.

Наведемо таблицю найпростіших правих частин *f(x)* рівняння $y''+py'+qy=f(x)$ та відповідних видів частинних розв'язків *Y*.

Таблиця 15.1

Вид правої частини рівняння $y''+py'+qy=f(x)$	Вид частинного розв'язку *Y*
$f(x)=P_n(x)$ (багаточлен *n*-го степеню)	$Y=x^sQ_n(x)$, де $S=\begin{cases}0, якщо\ k_1\neq 0\neq k_2\\ 1, якщо\ k_1=0\neq k_2\end{cases}$ $Q_n(x)$ – багаточлен *n*-го степеню, коефіцієнти якого треба визначити
$f(x)=P_n(x)e^{ax}$	$Y=x^SQ_n(x)e^{\alpha x}$, де $S=\begin{cases}0, якщо\ k_1\neq a\neq k_2\\ 1, якщо\ k_1=a\neq k_2\\ 2, якщо\ k_1=a=k_2\end{cases}$
$f(x)=A\cos bx+B\sin bx$ (*A*, *B*, *b* – числа)	$Y=x^s(M\cos bx+N\sin bx)$, де $S=\begin{cases}0, якщо\ k_1\neq bi\neq k_2\\ 1, якщо\ k_1=bi\neq k_2\end{cases}$, *M*, *N* – коефіцієнти, які треба визначити

У загальному випадку, коли $f(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x)$; $Q_m(x)$ – багаточлени з дійсними коефіцієнтами степеню відповідно *n* і *m*, тоді: $Y=x^se^{ax}\left[R_k(x)\cos bx+T_k(x)\sin bx\right]$, де $k=max\{n, m\}$; $R_k(x)$, $T_k(x)$ – багаточлени степеню *k*, коефіцієнти яких треба визначити;

$$S=\begin{cases}0, якщо\ k_1\neq a+bi\neq k_2\\ 1, якщо\ k_1=a+bi\neq k_2\\ 2, якщо\ k_1=a+bi=k_2\end{cases}.$$

Приклад 6 Знайти загальний розв’язок рівняння $2y''+y'-y=2e^x$.

Розв’язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Його загальний розв’язок шукаємо у вигляді $y=\bar{y}+Y$. Для знаходження $\bar{y}$ розв’язуємо лінійне однорідне диференціальне рівняння, що йому відповідає $2y''+y'-y=0$. Складемо характеристичне рівняння $2к^2+к-1=0$. Його корені $к_1=-1$ і $k_2=\frac{1}{2}$. Отже, $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Права частина $f(x) = 2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, де n=0, a=1, тому $Y = Ae^x$ бо $a \neq k_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y' = Ae^x, Y'' = Ae^x$. Підставимо Y, Y', Y'' в дане рівняння: $2Ae^x + Ae^x - Ae^x \equiv 2e^x$, звідки знаходимо A=1. Отже, $Y = e^x$. Тоді загальний розв`язок рівняння $2y'' + y' - y = 2e^x$ має вигляд: $y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{x}{2}} + e^x$.

Приклад 7 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' + 7y' + 6y = \sin x$.

**Розв`язання.** Переконуємося, що дане рівняння є лінійним неоднорідним II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, тому його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y = \overline{y} + Y$. Розв`язуємо відповідне йому однорідне рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$. Його характеристичне рівняння $к^2$-$7к$+6=0 має корені $к_1$=1, $к_2$=6. Отже, $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{6x}$. Права частина даного рівняння $f(x) = \sin x$ являє собою функцію вигляду $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$, де A=0, B=1, b=1. Оскільки $bi = 1 \neq k_{1,2}$, то $Y = M\cos x + N\sin x$, де M і N - коефіцієнти, які треба визначити. Диференціюючи Y двічі, знаходимо:
$Y' = -M\sin x + N\cos x, \quad Y'' = -M\cos x - N\sin x.$

Підставимо вирази Y, Y', Y'' в рівняння $y'' + 7y' + 6y = \sin x$:
$-M\cos x - N\sin x - 7(-M\sin x + N\cos x) + 6(M\cos x + N\sin x) = \sin x.$

У лівій частині отриманої тотожності зведемо подібні доданки:
$(5M - 7N)\cos x + (7M - 5N)\sin x \equiv 0\cos x + \sin x.$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ в обох частинах тотожності, одержимо систему рівнянь $\begin{cases} 5M - 7N = 0, \\ 7M + 5N = 1. \end{cases}$

Розв`язавши її, знаходимо $M = \frac{7}{74}, N = \frac{5}{74}$. Отже, $Y = \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$

Таким чином, загальний розв`язок даного рівняння має вигляд $y = C_1e^x + C_2e^{6x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x.$

Приклад 8 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

**Розв`язання.** Переконуємося, що дане рівняння є лінійним неоднорідним II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, тому його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y = \overline{y} + Y$. Розв`язуємо відповідне йому однорідне рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$: $к^2 - 6к + 9 = 0$; $(к - 3)^2 = 0$; $к_1 = к_2 = 3$. Таким чином маємо, що $\overline{y} = (C_1 + C_2x)e^{3x}$.

Знаходимо частинний розв`язок неоднорідного рівняння. Його права частина $f(x) = 2x^2 - x + 3$ є функцією вигляду $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, де n=2, a=0. Оскільки $a \neq k_{1,2}$, то $Y = Ax^2 + Bx + C$. Далі знаходимо $Y' = 2Ax + B$, $Y'' = 2A$ і підставляємо вирази Y, Y', Y'' в рівняння $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$:
$2A - 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) \equiv 2x^2 - x + 3$ або
$9Ax^2 + (-12A + 9B)x + (2A - 6B + 9C) = 2x^2 - x + 3.$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в багаточленах лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases} 9A = 2, \\ 9B - 12A = -1, \\ 9C - 6B + 2A = 3. \end{cases}$$

Розв`язуючи систему, знаходимо $A = \frac{2}{9}, B = \frac{5}{27}, C = \frac{11}{27}$. Тому $Y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$. Отже, шуканий загальний розв`язок має вигляд $y = (C_1 + C_2 x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}$.

Приклад 9 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, якщо:

1) $f(x) = 3e^{2x}$,

2) $f(x) = 2x^3 - 30$.

**Розв`язання.** Шукаємо загальний розв'язок заданого рівняння у вигляді: $y = \overline{y} + Y$. Знаходимо загальний розв`язок однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$:

$к^2 - 3к + 2 = 0;\ к_1 = 1;\ к_2 = 2;$

$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$, бо $к_1 \neq к_2$.

Далі маємо:

1) $f(x) = 3e^{2x}$. Це функція вигляду $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, де n=0, a=2. Оскільки, $a = к_2$, то

$Y = Axe^{2x}$,

$Y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = (A + 2Ax)e^{2x}$,

$Y'' = 2Ae^{2x} + 2(A + 2Ax)e2^x = (4A + 4Ax)e^{2x}$.

Підставивши значення Y, Y', Y'' у рівняння $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$, маємо:

$(4A + 4Ax)e^{2x} - 3(A + 2Ax)e^{2x} + 2Axe^{2x} = 3e^{2x}$

$(4A - 6A + 2A)xe^{2x} + (4A - 3A)e^{2x} = 3e^{2x}$

$(4A - 3A)e^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow 4A - 3A = 3 \Rightarrow A = 3$.

Отже, $Y = 3xe^{2x}$, а загальний розв'язок має вигляд: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3xe^{2x}$.

2) $f(x) = 2x^3 - 30$. Маємо функцію вигляду $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, де n=3, a=0. Оскільки, $a \neq k_{1,2}$, то $Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, $Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $Y'' = 6Ax + 2B$.

Підставивши значення Y, Y', Y'' у рівняння $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$, маємо:

$6Ax + 2B - 3(3Ax^2 + 2Bx + C) + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = 2x^3 - 30$,

$2Ax^3 + (2B - 9A)x^2 + (6A - 6B + 2C)x + (2B - 3C + 2D) = 2x^3 - 30$.

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в багаточленах лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases} 2A = 2, \\ 2B - 9A = 0, \\ 6A - 6B + 2C = 0, \\ 2B - 3C + 2D = -30. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = 9/2, \\ C = 21/2, \\ D = -15/4. \end{cases}$$

Отже, $Y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$, а загальний розв`язок має вигляд: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$.

Приклад 10 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, якщо $f(x) = (3 - 4x)e^x$.

**Розв`язання.** Загальний розв`язок шукаємо у вигляді $y = \overline{y} + Y$. Загальний розв`язок однорідного рівняння $\overline{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}$ - знайдено раніше (див. приклад 4).

$f(x) = (3 - 4x)e^x$ - функція вигляду $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, де n=1, a =1=$\kappa_1 \neq \kappa_2$, тому $Y = x(Ax + B)e^x$. Обчислюємо похідні $Y' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$ і $Y'' = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$ та підставляємо їх значення до рівняння $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x$:

$$2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x - 3(2Ae^x + (2Ax + B)e^x +$$
$$+(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x) + 2(Ax^2 + Bx)e^x = (-4x + 3)e^x,$$
$$-2Ax + 2A - B = -4x + 3.$$

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в багаточленах лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases} -2A = -4, \\ 2A - B = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2, \\ B = 1. \end{cases}$$

Таким чином, $Y = (2x^2 + x)e^x$ і остаточно $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (2x^2 + x)e^x$.

Приклад 11 Знайти частинний розв`язок рівняння $y'' - y' = 2(1 - x)$, який задовольняє даним початковим умовам $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

**Розв`язання.** Загальний розв`язок рівняння шукаємо у вигляді $y = \overline{y} + Y$. Розв`язуємо однорідне рівняння $y'' - y' = 0$.

k^2-k = 0; $k(k$-1) = 0; k_1= 0; k_2= 1;

$\overline{y} = C_1 + C_2e^x$.

Оскільки $f(x) = 2(1 - x)$, то $n = 1$, $a = 0 = k_1 \neq k_2$, тому $Y = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$. Обчислюємо $Y' = 2Ax + B$ та $Y'' = 2A$. Підставляємо їх значення до рівняння $y'' - y' = 2(1 - x)$:

$2A-(2Ax+B)=2(1-x) \quad \Rightarrow \quad -2Ax+2A-2B=-2x+2$.

Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в багаточленах лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases}-2A=-2,\\ 2A-2B=2.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1,\\ B=0.\end{cases}$$

Таким чином, $Y=x^2$ і, отже, загальний розв`язок неоднорідного рівняння набуває вигляду: $y=C_1+C_2e^x+x^2$.

Виходячи з початкових умов: $y(0)=1, y'(0)=1$ і враховуючи, що $y'=C_2e^x+2x,$ маємо систему $\begin{cases}1=y(0)=C_1+C_2\\ 1=y'(0)=C_2\end{cases}$, розв`язавши яку, знаходимо $C_1=0$ і $C_2=1$. Підставляючи числові значення $C_1$ і $C_2$ в загальний розв`язок рівняння, одержимо шуканий частинний розв`язок $y=e^x+x^2$, який задовольняє даним початковим умовам.

Приклад 12 Знайти частинний розв`язок даного диференціального рівняння $y''+y+\sin 2x=0,$ який задовольняє початковим умовам $y(\pi)=y'(\pi)=1.$

Розв`язання. Зведемо рівняння до загального вигляду $y''+y=-\sin 2x$. Його розв'язок шукатимемо у вигляді $y=\overline{y}+Y$.

Знайдемо $\overline{y}$:

$y''+y=0;\ \ \kappa^2+1=0;\ \ \kappa_{1,2}=\pm i;\ \ \alpha=0;\beta=1;$

$\overline{y}=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Оскільки $f(x)=-\sin 2x$ то $b=2\ (\pm bi=\pm 2i\neq k_{1,2})$, тому $Y=M\cos 2x+N\sin 2x$. Знаходимо $Y'=-2M\sin 2x+2N\cos 2x$ та $Y''=-4M\cos 2x-4N\sin 2x$. Підставляємо їх значення до рівняння $y''+y=-\sin 2x$:

$-4M\cos 2x-4N\sin 2x+M\cos 2x+N\sin 2x=-\sin 2x$,

$(-4M+M)\cos 2x+(N-4N)\sin 2x=-\sin 2x$.

Порівнюючи коефіцієнти при $\cos 2x$ та $\sin 2x$ лівої і правої частин тотожності $(-4M+M)\cos 2x+(N-4N)\sin 2x=-\sin 2x$, будемо мати:

$$\begin{cases}M-4M=0,\\ N-3N=-1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}M=0,\\ N=1/3.\end{cases}$$

Отже, $Y=\frac{1}{3}\sin 2x$ і загальний розв`язок неоднорідного рівняння набуде вигляду $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$.

Знаходимо $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x.$ Враховуючи початкові умови $y(\pi) = y'(\pi) = 1,$ отримаємо систему: $\begin{cases} 1 = -C_1 \\ 1 = -C_2 + \frac{2}{3} \end{cases}$, розв'язавши яку, знаходимо $C_1 = -1,$ $C_2 = -\frac{1}{3}.$ Підставляємо числові значення C_1 і C_2 в загальний розв`язок і одержимо шуканий частинний розв`язок $y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$

Домашнє завдання

Повторити теорію [9, л. 29-30], с. 161 –169.

Вправи

Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівнянь:

1 $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1}$. Відповідь: $y = \left(C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{1+x^2} + x\,arctgx\right)e^x$.

2 $y'' + y = ctgx$. Відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln\left|tg\frac{x}{2}\right|$.

3 $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$. Відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\sin x + \cos x \ln|\cos x|$.

4 $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^x}{\cos x}$. Відповідь: $y = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x + x\sin x + \cos x \ln|\cos x|\right)$.

5 $y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}$. Відповідь: $y = C_1 + C_2 e^{-x} + x - \left(1+e^{-x}\right)\ln\left(1+e^{-x}\right)$.

Знайти загальний або частинний розв`язок наступних диференціальних рівнянь.

6 $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2}\cos 2x.$

Відповідь: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$

7 $y'' - 2y' + 2y = 2x.$ Відповідь: $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1.$

8 $y'' - 3y' + 2y = f(x),$ якщо

1) $f(x) = 10e^{-x}.$ Відповідь : $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3}e^{-x}.$

2) $f(x) = 2\sin x.$ Відповідь: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$

9 $y'' + y = \cos x.$ Відповідь: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}x\sin x.$

10 $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6; y(0) = 1; y'(0) = 3{,}2.$

Відповідь: $y = e^x(0{,}16\cos x + 0{,}28\sin x) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84.$

11 $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3; y(0) = y'(0) = 2.$

Відповідь: $y = e^x(e^x - x^2 - x + 1).$

12 Вказати вигляд частинних розв`язків неоднорідних рівнянь:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$. Відповідь: $xe^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$.

б) $y'' + 9y = \cos 2x$. Відповідь: $A\cos 2x + B\sin 2x$.

в) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$. Відповідь: $xe^x(A\cos x + B\sin x)$.

Питання для самоперевірки

1 Яке рівняння називають лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами?

2 Який вигляд має загальний розв'язок неоднорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку?

3. Коли функції називають $y_1(x)$ та $y_2(x)$ називають лінійно залежними, а коли лінійно незалежними?

4 Що означає відмінність від нуля визначника Вронського?

5 У чому полягає сутність методу варіації довільних змінних?

6 Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

7 Який вигляд має частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною у випадках:

1) $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$;

2) $f(x) = P_n(x)e^{ax}$;

3) $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$?

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 16

Системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
Числові ряди. Збіжність рядів. Гармонічний ряд. Необхідна умова збіжності.
Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами: ознака порівняння, ознака Даламбера, ознака Коші (радикальна, інтегральна).

Розвязання прикладів

Приклад 1 Записати систему лінійних рівнянь в матричному вигляді та знайти її розв'язок, якщо $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y \\ \dot{y} = x + 3y \end{cases}$.

Розв'язання Запишемо матрицю системи $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Задану систему запишемо у вигляді матричного рівняння: $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$. Обчисливши визначник, отримаємо $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$.

Коренями цього рівняння є $\lambda_1=1$ та $\lambda_2=4$. Для кореня $\lambda_1=1$ складемо систему:

$$\begin{cases}(2-1)\alpha_1+2\alpha_2=0\\ \alpha_1+(3-1)\alpha_2=0\end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases}\alpha_1+2\alpha_2=0\\ \alpha_1+2\alpha_2=0\end{cases}.$$

Якщо $\alpha_1=1$, то $\alpha_2=-\frac{1}{2}$. У цьому випадку $x_1=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}=e^t$; $y_1=\alpha_2 e^{\lambda_1 t}=-\frac{1}{2}e^t$. Для кореня $\lambda_2=4$ маємо:

$$\begin{cases}(2-4)\alpha_1+2\alpha_2=0\\ \alpha_1+(3-4)\alpha_2=0\end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases}\alpha_1-\alpha_2=0\\ \alpha_1-\alpha_2=0\end{cases}.$$

Якщо $\alpha_1=1$, то $\alpha_2=1$, тоді: $x_2=\alpha_1 e^{\lambda_2 t}=e^{4t}; y_2=\alpha_2 e^{\lambda_2 t}=e^{4t}$. Загальним розв'язком системи є:

$$\begin{cases}x(t)=C_1x_1+C_2x_2\\ y(t)=C_1y_1+C_2y_2\end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases}x(t)=C_1e^t+C_2e^{4t}\\ y(t)=-\frac{1}{2}C_1e^t+C_2e^{4t}\end{cases}.$$

У матричній формі розв'язок має вигляд

$$\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1/2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1e^t\\ C_2e^{4t}\end{pmatrix}.$$

Приклад 2 Знайти частинний розв’язок системи лінійних рівнянь $\begin{cases}\dot{x}=3x+y\\ \dot{y}=8x+y\end{cases}$, якщо $x(0)=4$, $y(0)=2$.

Розв'язання Запишемо матрицю системи $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 1\end{pmatrix}$. Задану систему запишемо у вигляді матричного рівняння: $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$. Складемо характеристичне рівняння $\begin{vmatrix}3-\lambda & 1\\ 8 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0$. Обчисливши визначник, отримаємо $\lambda^2-4\lambda-5=0$.

Коренями цього рівняння є $\lambda_1=5$ та $\lambda_2=-1$.

Для кореня $\lambda_1=5$ складемо систему:

$$\begin{cases}(3-5)\alpha_1+\alpha_2=0\\ 8\alpha_1+(1-5)\alpha_2=0\end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases}-2\alpha_1+\alpha_2=0\\ 8\alpha_1-4\alpha_2=0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}2\alpha_1-\alpha_2=0\\ 2\alpha_1-\alpha_2=0\end{cases}.$$

Якщо $\alpha_1=1$, то $\alpha_2=2$. У цьому випадку $x_1=\alpha_1 e^{\lambda_1 t}=e^{5t}$; $y_1=\alpha_2 e^{\lambda_1 t}=2e^{5t}$.

Для кореня $\lambda_2=-1$ маємо:

$$\begin{cases}(3-(-1))\alpha_1+\alpha_2=0\\ 8\alpha_1+(1-(-1))\alpha_2=0\end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases}4\alpha_1+\alpha_2=0\\ 8\alpha_1+2\alpha_2=0\end{cases} \text{ або } \begin{cases}4\alpha_1+\alpha_2=0\\ 4\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}.$$

Якщо α_1=1, то α_2=-4, тоді: $x_2 = \alpha_1 e^{\lambda_2 t} = e^{-t}$; $y_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = -4e^{-t}$. Загальним розв'язком системи є:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 x_1 + C_2 x_2 \\ y(t) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \end{cases}, \text{ тобто } \begin{cases} x(t) = C_1 e^{5t} + C_2 e^{-t} \\ y(t) = 2C_1 e^{5t} - 4C_2 e^{-t} \end{cases}.$$

Знайдемо розв'язок задачі Коші з початковими умовами виду $x(0) = 4$, $y(0) = 2$:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 4 \\ 2C_1 - 4C_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_2 = 1 \end{cases}.$$

Записуємо частинний розв'язок системи, підставляючи в загальний розв'язок знайдені значення $C_1 = 3$ і $C_2 = 1$:

$$\begin{cases} x(t) = 3e^{5t} + e^{-t} \\ y(t) = 6e^{5t} - 4e^{-t} \end{cases}.$$

Приклад 3 Для ряду $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \ldots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \ldots$ знайти суму n перших членів ряду S_n, довести збіжність ряду, користуючись означенням збіжності.

Розв'язання. Зауважимо, що дріб

$$\frac{3^n + 2^n}{6^n} = \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Кожний член ряду подамо у вигляді цієї суми, і часткову суму ряду зможемо записати таким чином: $S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$.

Проведемо групування доданків

$$S_n = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + \left[\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

Вирази в квадратних дужках є сумами n перших членів геометричної послідовності зі знаменником $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{3}$, тому S_n можна записати у вигляді

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Знайдемо границю S_n:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}.$$

Отже, даний ряд збігається і його сума дорівнює $S = \frac{3}{2}$.

Приклад 4 Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \ldots$

Розв'язання. Маємо $u_n = \dfrac{1}{\ln(n+1)}$. Для порівняння обираємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, який розбігається. Ряд $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+...\dfrac{1}{n}+..$_також розбігається, він отриманий із гармонічного ряду відкиданням першого члена. Оскільки $\ln 2 < 2$, $\ln 3 < 3,...,\ \ \ln n < n,\ \ \ln(n+1) < n+1,$ то $\dfrac{1}{\ln 2} > \dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{\ln 3} > \dfrac{1}{3},...,\dfrac{1}{\ln(n+1)} > \dfrac{1}{n+1}.$ Отже, члени дослідженого ряду є більшими за члени розбіжного ряду. На основі другої ознаки порівняння рядів він розбігається.

Приклад 5 Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-4n+5}$.

Розв'язання. Для порівняння обираємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Цей ряд збіжний, оскільки $p = 2 > 1$.

За третьою ознакою порівняння рядів

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-4n+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2} = 1 \neq 0.$$

Границя відношення загальних членів рядів існує, отже, заданий ряд так само, як і обраний, збігається.

Приклад 6 Дослідити збіжність ряду $1+\dfrac{1+2}{1+2^2}+...+\dfrac{1+n}{1+n^2}+...$

Розв'язання. Маємо $u_n = \dfrac{1+n}{1+n^2}$. У якості ряду порівняння обираємо гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, який при $p = 1$ розбігається. Застосовуючи третю ознаку порівняння рядів, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{1+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{2} = 1 \neq 0.$$

Робимо висновок про те, що обидва ряди одночасно розбігаються.

Приклад 7 Дослідити збіжність ряду $\dfrac{5}{6}+\dfrac{13}{36}+...+\dfrac{3^n+2^n}{6^n}+...$

Розв'язання. Кожний член ряду можна подати у вигляді суми двох доданків $u_n = \dfrac{3^n}{6^n}+\dfrac{2^n}{6^n} = \left(\dfrac{3}{6}\right)^n + \left(\dfrac{2}{6}\right)^n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$, тому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Обидва ряди є геометричними і збігаються, оскільки $q_1 = \frac{1}{2} < 1$; $q_2 = \frac{1}{3} < 1$. На основі другої властивості рядів даний ряд, який є сумою двох збіжних, збігається.

Приклад 8 Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$.

Розв'язання. При $n \to \infty$ u_n являє невизначеність вигляду $0 \cdot (\infty - \infty)$. Перетворимо u_n:

$$u_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{n+1-n+1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}.$$

У якості еталонного ряду застосуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, який збігається при $p = \frac{1}{2} > 1$.

Застосовуючи третю ознаку порівняння рядів

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 1 \neq 0,$$

робимо висновок про те, що обидва ряди одночасно збігаються.

Приклад 9 Довести збіжність ряду $\frac{1}{5!} + \frac{1}{8!} + \ldots + \frac{1}{(3n+2)!} + \ldots$

Розв'язання. Це ряд, що має додатні члени. Загальний член ряду $u_n = \frac{1}{(3n+2)!}$ містить факторіал, тому збіжність дослідимо за ознакою Даламбера.

Замінивши у u_n величину n на $n+1$, знайдемо

$$u_{n+1} = \frac{1}{[3(n+1)+2]!} = \frac{1}{(3n+5)!}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)!}{(3n+5)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+2)!}{(3n+2)!(3n+3)(3n+4)(3n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(3n+3)(3n+4)(3n+5)} = 0 < 1,$$

отже, ряд збігається.

Приклад 10 Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \ldots + \frac{n^2}{5^n} + \ldots$

Розв'язання. Це ряд, що має додатні члени. Застосуємо до нього ознаку Даламбера. Запишемо $(n+1)$ – й член ряду $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}$. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 5^n}{5^{n+1}n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{5n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{10n} = \frac{2}{10} < 1,$$

таким чином, ряд збігається.

Приклад 11 Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \ldots$

Розв'язання. Це ряд, що має додатні члени, його загальний член $u^n = \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n$. Отже, доцільно застосувати радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

таким чином, даний ряд збігається.

Приклад 12 Дослідити на збіжність ряд $arctg 1 + arctg^2 \frac{1}{2} + \ldots + arctg^n \frac{1}{n} + \ldots$

Розв'язання. Це ряд, що має додатні члени, загальний член ряду $u_n = \left(arctg \frac{1}{n} \right)^n$. Застосовуючи радикальну ознаку Коші, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(arctg\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} arctg\frac{1}{n} = 0 < 1,$$

отже, ряд збігається.

Приклад 13 Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + .. + \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \ldots$

Розв'язання. Даний ряд має додатні спадні члени

$$\frac{1}{2\ln 2} > \frac{1}{3\ln 3} > \ldots > \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} > \ldots$$

Розглянемо функцію $f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, частинні значення якої дорівнюють членам ряду при $n = 1,2,3,\ldots$

$$f(1) = \frac{1}{2\ln 2}, f(2) = \frac{1}{3\ln 3}, \ldots, f(n) = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \ldots$$

Невласний інтеграл

$$\int_1^\infty f(n)dn = \int_1^\infty \frac{dn}{(n+1)\ln(n+1)} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{d(\ln(n+1))}{\ln(n+1)} = \lim_{b\to\infty} \ln\left|\ln(n+1)\right|_1^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty}(\ln\left|\ln(b+1)\right| - \ln\left|\ln 2\right|) = \infty,$$

інтеграл розбігається. За інтегральною ознакою Коши ряд також розбігається.

Домашнє завдання

Повторити теорія [9, л.31-32], с. 169 –179.

Вправи

1 Записати систему лінійних рівнянь в матричному вигляді та знайти її розв'язок, якщо $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y \\ \dot{y} = 2x + 3y. \end{cases}$.

2 Знайти частинний розв’язок системи лінійних рівнянь $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2x + 3y \end{cases}$, якщо $x(0) = 8$, $y(0) = 1$.

Знайти загальні члени наступних рядів:

3 $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \ldots$

Відповідь: $\frac{1}{n(n+3)}$.

4 $arctg\frac{1}{2} + arctg\frac{1}{2 \cdot 2^2} + arctg\frac{1}{2 \cdot 3^2} + \ldots$

Відповідь: $arctg\frac{1}{2n^2}$.

Дослідити збіжність числових рядів:

5 $\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \ldots$

Відповідь: ряд збігається.

6 $\frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \ldots + \frac{n+1}{n(n+2)} + \ldots$

Відповідь: ряд розбігається.

7 $tg\frac{\pi}{4} + tg\frac{\pi}{8} + \ldots + tg\frac{\pi}{4n} + \ldots$

Відповідь: ряд розбігається.

8 $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{3n-1} + \ldots$

Відповідь: ряд розбігається.

9 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}$.

Відповідь: ряд розбігається.

10 $1 + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{n}{2n-1} + ..$

11 $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

Відповідь: ряд збігається.

12 $2+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{2^n}{n^4}+\ldots$

Відповідь: ряд розбігається.

13 $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

Відповідь: ряд збігається.

14 $1+\frac{4}{2!}+\ldots+\frac{n^2}{n!}+\ldots$

Відповідь: ряд збігається.

15 $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$

Відповідь: ряд збігається.

16 $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$

Відповідь: ряд збігається.

Питання для самоперевірки

1 Що називають системою лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами?

2 Викладіть метод знаходження загального розв’язку системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

3 Запишіть у матричній формі систему лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та її розв’язок.

4 Дайте означення числового ряду, його загального члена, частинної суми збіжного й розбіжного рядів.

5 Дослідження збіжності ряду, складеного з членів геометричної прогресії.

6 Сформулюйте й доведіть основні властивості числових рядів.

7 Сформулюйте й доведіть необхідну ознаку збіжності ряду й наслідок цієї ознаки.

8 Сформулюйте й доведіть ознаки порівняння рядів з додатними членами

9 Сформулюйте й доведіть ознаку Даламбера і Коші (радикальну й інтегральну) збіжності рядів, наведіть приклади застосування цих ознак.

10 Дослідження збіжності узагальненого гармонічного ряду за допомогою інтегральної ознаки Коші.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 17

Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності. Область збіжності степеневого ряду. Розвинення функції у степеневі ряди.

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Дослідити знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжності.

$$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}+\ldots$$

Розв'язання. Даний ряд є знакопочережним. Члени ряду спадають

$$\frac{1}{\ln 2}>\frac{1}{\ln 3}>\frac{1}{\ln 4}>\ldots>\frac{1}{\ln(n+1)}>\ldots \text{ і } \lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0.$$

Умови ознаки Лейбніца виконані, а це означає, що ряд збігається умовно. Перевіримо ряд на абсолютну збіжність, складаючи ряд із абсолютних величин даного ряду:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$$

Отриманий ряд за другою ознакою порівняння розбігається. Таким чином, даний ряд збігається умовно.

Приклад 2 Дослідити знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2}.$$

Розв'язання. Даний ряд є знакопочережним. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $2>1>\frac{8}{3}>\ldots>\frac{2^n}{n^2}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(2^n\right)'}{\left(n^2\right)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\ln 2}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\ln^2 2}{2}=\infty.$

Друга умова ознаки Лейбніца не виконується, тому ряд розбігається.

Приклад 3 Знайти область збіжності ряду

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Розв`язання. Для даного функціонального ряду запишемо

$$u_n=\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n};u_{n+1}=\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}}{|x|^n}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}|x+1|.$$

На основі ознаки Даламбера можна стверджувати, що ряд збігається і причому абсолютно, якщо $\frac{1}{2}|x+1|<1$ або -1 <x < 1 ; ряд розбігається, якщо $\frac{1}{2}|x+1|>1$, тобто якщо - ∞ < x < - 3 або 1 < x < ∞. При x = 1 отримаємо гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$, який розбігається, а при x = -3 – ряд: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...$, який відповідно до ознаки Лейбніца збігається умовно.

Отже, даний ряд збігається при $-3\le x<1$.

Приклад 4 Знайти область збіжності степеневого ряду

$$10x+100x^2+1000x^3+...+10^n x^n+...$$

Розв'язання. Даний ряд є повним степеневим за степенями x. Знайдемо радіус збіжності за формулою (4.6) при $a_n=10^n$;

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n}}=\frac{1}{10}.$$

Для всіх $x\in\left]-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right[$ ряд збігається. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках $x=-\frac{1}{10}$ і $x=\frac{1}{10}$.

При $x=-\frac{1}{10}$ отримаємо знакопочережний ряд $-1+1-1+...+(-1)^n+...$, який розбігається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$.

При $x=\frac{1}{10}$ отримаємо знакододатний ряд 1+1+1+..., який розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності числового ряду $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1\ne 0$.

Отже, областю збіжності степеневого ряду є інтервал $\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$.

Приклад 5 Знайти область збіжності степеневого ряду

$$x+\frac{x^2}{20}+\frac{x^3}{300}+...+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+...$$

Розв'язання. Даний ряд є повним степеневим за степенями x.

$$a_n=\frac{1}{n\cdot 10^{n-1}};\qquad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)10^n}.$$

Радіус збіжності

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)10^n}{n10^{n-1}}=10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=10.$$

Для всіх $x\in\left]-10;10\right[$ ряд збігається.

При x = - 10 отримаємо знакопочережний ряд

$$-10+\frac{10}{2}-\frac{10}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{10}{n}+\ldots$$

Для нього виконуються умови ознаки Лейбніца. Ряд збігається.

При x = 10 отримаємо знакододатний ряд

$$10+\frac{10}{2}+\frac{10}{3}+\ldots+\frac{10}{n}+\ldots=10\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right).$$

Даний ряд розбігається, оскільки є гармонічним рядом, помноженим на 10. Отже, областю збіжності даного ряду є інтервал $\left[-10;10\right[$.

Приклад 6 Розвинути многочлен $f(x)=x^3+3x^2-2x+4$ за степенями двочлена (x + 1).

Розв'язання. Обчислимо значення функції та її похідних при x = a= - 1

$f(x)=x^3+3x^2-2x+4,$ $\qquad f(-1)=-1+3+2+4=8,$

$f'(x)=3x^2+6x-2,$ $\qquad f(-1)=3-6-2=-5,$

$f''(x)=6x+6,$ $\qquad f''(-1)=-6+6=0,$

$f'''(x)=6,$ $\qquad f'''(-1)=6.$

Підставляючи дані значення в ряд Тейлора, отримаємо

$$x^3+3x^2-2x+4=8-5(x+1)+\frac{0\cdot(x+1)^2}{2!}+\frac{6(x+1)^3}{3!}=8-5(x+1)+(x+1)^3.$$

Приклад 7 Розвинути функцію $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$ в околі точки x = 0, скориставшись формулою розвинення в ряд Маклорена функції $(1+x)^m$.

Розв'язання. Перетворимо дану функцію, замінивши x на $\left(-\frac{x^3}{8}\right)$:

$$f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}=\sqrt[3]{8\left(1-\frac{x^3}{8}\right)}=2\left(1-\frac{x^3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^3}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^2+\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^n+\ldots\right]=$$

$$=2\left[1-\frac{x^3}{3\cdot 8}-\ldots-\frac{2\cdot 5\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\cdot\frac{x^{3n}}{8^n}-\ldots\right]=$$

$$=2-2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{2}{3^2\cdot 2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots+\frac{2\cdot 5\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots\right].$$

Домашнє завдання
Вправи

Дослідити на збіжність ряди.

1 $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-...+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+...$

Відповідь: ряд збігається абсолютно

2 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}-(-1)^{n+1}\frac{1}{n\cdot 2^n}+...$

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

3 $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+...+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+...$

Відповідь: ряд збігається умовно.

4 $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-...+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+...$

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

5 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\alpha)}{n!}$.

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

6 $\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}-\frac{4}{16}+...(-1)^{n+1}\frac{n}{2^n}+...$

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

Знайти область збіжності степеневих рядів:

7 $1+x+x^2+...+x^n+...$

Відповідь: $-1<x<1$.

8 $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+...+\frac{x^n}{n^2}+...$

Відповідь: $-1\le x\le 1$.

9 $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+...$

Відповідь: $-1<x\le 1$.

10 $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+...+\frac{x^n}{n(n+1)}+...$

Відповідь: $-1\le x\le 1$.

11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n3^n}$.

Відповідь: $2<x\le 8$.

12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.

Відповідь: $-\infty<x<\infty$.

Розвинути функції в степеневі ряди:

13 Розвинути многочлен $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степенями (x-4).

Відповідь: $(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56.$

14 Розвинути функцію $f(x)=\sqrt{x^3}$ в ряд Тейлора в околі точки x = 1.

Відповідь: $1+\frac{3}{2}\left[(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2\cdot 2!}-\frac{(x-1)^3}{2^2\cdot 3!}+\ldots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\ldots\cdot(2n-5)(x-1)^n}{2^{n-1}\cdot n!}+\ldots\right].$

15 Розвинути функцію $f(x)=\sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в околі точки x = 2.

Відповідь: $1-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\cdot\frac{(x-2)^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2}\cdot\frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots.$

16 Розвинути функцію $f(x)=e^{-x^2}$ в ряд Маклорена.

Відповідь: $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(n-1)!}+\ldots.$

17 Розвинути функцію $f(x)=\sin\frac{x}{2}$ в ряд Маклорена.

Відповідь: $\frac{x}{2}-\frac{x^3}{2^3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}\cdot(2n-1)!}+\ldots.$

18 Розвинути функцію $f(x) = x\ ln(1+x)$ в ряд Маклорена.

Відповідь: $x^2-\frac{x^3}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n}+\ldots.$

19 Розвинути функцію $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ в ряд Маклорена.

Відповідь: $x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{1\cdot 3\cdot x^6}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)\cdot x^{2n+2}}{2^n\cdot n!}+\ldots.$

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення знакозмінного ряду.

2 Сформулюйте й доведіть достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.

3 Дайте означення знакопочережного ряду.

4 Сформулюйте й доведіть ознаку Лейбніца збіжності знакопочережного ряду та наведіть приклади застосування цієї ознаки.

5 Дайте означення абсолютно й умовно збіжних знакозмінних рядів.

6 Сформулюйте зауваження до ознаки Лейбніца про заміну суми ряду сумою n перших членів ряду.

7 Дайте означення степеневого ряду й інтервалу його збіжності.

8 Сформулюйте основні властивості збіжних степеневих рядів.

9 Сформулюйте й доведіть теорему Абеля про характер області збіжності степеневих рядів.

10 Вивести формулу для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду.

11 Запишіть формулу Тейлора для довільної функції з залишком у формі Лагранжа і покажіть, за яких умов формула Тейлора переходить в ряд Тейлора, а також в ряд Маклорена.

12 Сформулюйте й доведіть теорему про єдність розвинення функції в ряд Тейлора.

13 Сформулюйте й доведіть теорему про можливість розвинення функції в ряд Тейлора.

14 Сформулюйте необхідну й достатню умову збіжності рядів Тейлора і Маклорена.

15 Розвинути функції $\sin x$, $\cos x$, e^x, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена, знайдіть проміжок збіжності.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1975.
2 Привалов И.И. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1966.
3 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика / Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. Шк., 2001.
4 Сборник задач по высшей математике для экономистов / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: Инфра, 2000.
5 Щелкунова Л.І.. Харченко А.П., Стасенко О.М. Методичні вказівки до виконання завдань модуля «Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної», ХНУБА.
6 Лысянская А.В., Щелкунова Л.И., Бабаева Е.В. Методические указания к выполнению заданий модуля «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия на плоскости», ХНУСА, 2012.
7 Аршава О.О., Іохвідович Н.Ю., Щелкунова Л.І. «Вища математика». Тексти лекцій, ч.1.ХНУБА, 2014.
8 Щелкунова Л.І. Методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» для студентів спеціальності 122.
9 Стасенко О.М. Тексти лекцій з курсу «Математика для економістів (вища математика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка» – ХНУБА, 2016.
10 Аршава О.О. Тексти лекцій з курсу «Вища математика» для студентів спеціальності 101 «Екологія». – ХНУБА, 2016.

ЗМІСТ

Вступ..... 3
Програма навчальної дисципліни..... 3
Практичне заняття 1..... 5
Практичне заняття 2..... 13
Практичне заняття 3..... 26
Практичне заняття 4..... 33
Практичне заняття 5..... 49
Практичне заняття 6..... 63
Практичне заняття 7..... 76
Практичне заняття 8…… 80
Практичне заняття 9…… 86
Практичне заняття 10…….. 99
Практичне заняття 11…….. 115
Практичне заняття 12…….. 130
Практичне заняття 13…….. 140
Практичне заняття 14…….. 153
Практичне заняття 15…….. 160
Практичне заняття 16..... 170
Бібліографічний список……. 184

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Математика для економістів (вища математика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка»

Укладач: Стасенко Олександр Миколайович

Відповідальний за випуск А.П. Харченко

За редакцією автора

План 2017р., поз. Формат 60х84 1/16. Папір друк. № 2.
Підп. до друку 21.10.2016 Обл. -вид. арк. Безкоштовно.
Надруковано на ризографі. Умов. друк. арк. 9
Тираж 50 прим. Зам. № 3607.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та віддруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури