Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.М. Стасенко

Методичні вказівки до самостійної роботи
з курсу «Математика для економістів»
для студентів спеціальності 051 «Економіка»

Харків 2016

Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

Спеціальність 051

О.М. Стасенко

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Математика для економістів (вища математика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка»

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 2 від 20.10.2016

Харків 2016

П. 345,17

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Математика для економістів» для студентів спеціальності 051 «Економіка» / Укладач О.М. Стасенко – Харків: ХНУБА, 2016. - 69 с.

Рецензент Є.В. Поклонський

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Методичні вказівки призначаються для надання допомоги студентам в організації самостійної роботи з курсу «Математика для економістів(вища математика)».

Результативність самостійної роботи забезпечується системою контролю, яка включає наступні етапи:

- виконання індивідуальних домашніх завдань;
- виконання контрольних робіт;
- виконання та складання підсумкового завдання з теми;
- виконання модульної контрольної роботи за всіма темами модуля.

Методичні вказівки містять робочу програму модуля, індивідуальні домашні завдання, варіанти підсумкового завдання і приклад його виконання

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №1

Лінійна алгебра, векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до аналізу. Диференціальне числення функції однієї змінної.

Тема 1. Матриці. Визначники n–го порядку, їх властивості. Методи обчислення визначників.

Тема 2. Правило Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь. Знаходження розв'язків систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Тема 3. Вектори та дії з ними. Проекція вектора на вісь. Координати вектора. Розподіл відрізку у даному відношенні. Скалярний, векторний та змішаний добутки векторів. Їх властивості.

Тема 4. Рівняння лінії. Різні види рівняння прямої. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, рівняння пучка прямих, точка перетину.

Тема 5. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їхні властивості. Загальне рівняння кривої другого порядку.

Тема 6. Рівняння поверхні. Рівняння площини. Дослідження загального рівняння площини. Кут між площинами. Пряма лінія у просторі.

Тема 7. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними. Границя функції.

Тема 8. Перша та друга особливі границі. Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції.

Тема 9. Похідна функцій. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання функції. Таблиця похідних. Похідна оберненої, неявної, параметрично заданої функції. Диференціал функції.

Тема 10. Похідні та диференціали вищих порядків. Дотична, нормаль та асимптоти кривої. Диференціал дуги та кривина кривої.

Тема 11. Правило Лопіталя. Формули Тейлора. Теорема Ферма. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа. Розкриття невизначеностей.

Тема 12. Монотонність, екстремуми функції. Опуклість, вгнутість, точки перегину. Асимптоти, загальна схема побудови графіка функцій.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь
1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.
Виконати перевірку.

Варіант 1

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 8; \\ 3x_1 - x_2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант 2

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 = -12; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Варіант 3

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 14; \\ -3x_1 - 2x_2 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 = -2. \end{cases}$

Варіант 4

а) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 7; \\ -11x_1 + 3x_2 = -19; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 5

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -17; \\ -3x_1 + 4x_2 = -18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -17. \end{cases}$

Варіант 6

а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 18; \\ -7x_1 + 5x_2 = -31; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 7

а) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 17; \\ 7x_1 + 4x_2 = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

Варіант 8

а) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 12; \\ 9x_1 - 5x_2 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 9

а) $\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 = 19; \\ 2x_1 - 3x_2 = -7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9; \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 10

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -1; \\ 8x_1 - 7x_2 = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 \quad + \quad 3x_3 = 3; \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 11

а) $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 = -19; \\ 2x_1 + 9x_2 = 16; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

Варіант 12

а) $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 = 18; \\ 7x_1 + 2x_2 = -25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 13

а) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 12; \\ 9x_1 - 4x_2 = -17; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 \quad + 5x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

Варіант 14

а) $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 = -3; \\ -7x_1 + 9x_2 = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 15

а) $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 = -25; \\ -9x_1 - 2x_2 = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

Варіант 16

а) $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = -18; \\ -5x_1 + 4x_2 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 14; \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

Варіант 17

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 19; \\ 7x_1 - 11x_2 = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 9; \\ x_1 - 3x_2 - 16x_3 = 14; \\ x_2 - 10x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 18

а) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = -9; \\ 2x_1 + 7x_2 = -25; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 19

а) $\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 = -17; \\ 3x_1 - 4x_2 = -18; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

Варіант 20

а) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 11; \\ -4x_1 + 3x_2 = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7; \\ x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант 21

а) $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 = 16; \\ -7x_1 - 4x_2 = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 5; \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 12; \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 22

а) $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 = 17; \\ -9x_1 + 5x_2 = -3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_3 = 9; \\ x_2 - 10x_3 = -16. \end{cases}$

Варіант 23

а) $\begin{cases} 7x_1 - 11x_2 = 3; \\ 6x_1 + 5x_2 = 17; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 24

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 13; \\ -7x_1 - 4x_2 = -10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \\ 2x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 25

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -6; \\ 2x_1 - 5x_2 = -11; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 15x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 26

а) $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 = -11; \\ -7x_1 + 2x_2 = 20; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 27

а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 = -6; \\ -7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 \quad + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 28

а) $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = -23; \\ -4x_1 - 7x_2 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

Варіант 29

а) $\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 = -3; \\ 5x_1 + 2x_2 = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$

Варіант 30

а) $\begin{cases} -9x_1 - 4x_2 = 19; \\ 5x_1 + 3x_2 = -9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Завдання 1.2 Задана піраміда, координатами вершин якої є A_1, A_2, A_3, A_4 (координати точок наведені в таблиці 1). Методами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди.

Таблиця 1

Номер варіанту	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)
2	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;9)
3	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
4	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
5	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
6	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
7	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
8	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
9	(8:6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
10	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)
11	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
12	(1;2;3)	(2;0;0)	(3;2;5)	(4;0;0)
13	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
14	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
15	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
16	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
17	(6;1;5)	(5;1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
18	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
19	(0;4;-1)	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)
20	(8;5;8)	(3;3;9)	(6:9; I)	(1;7;3)
21	(6;4;8)	(3;5;4)	(5:8:3)	(1;9;9)
22	(3;6;7)	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)
23	(6;9;2)	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)
24	(3;9;8)	(0;7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)
25	(5;8;2)	(3;5;10)	(3;8;4)	(5:5;4)
26	(1;2;6)	(4;2;0)	(4;6;6)	(6;1;1)
27	(7;9;6)	(4;5;7)	(9;4;4)	(7;5;3)
28	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
29	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
30	(1;-2;l)	(0;0;4)	(1;4;2)	(2;0;0)

Завдання 1.3 Задано координати вершин трикутника *ABC* (наведені в таблиці 2). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони *AB*;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, яка проведена із вершини *C*;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони *AC*;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *C*.

Таблиця 2

Номер варіанту	A	B	C	Номер варіанту	A	B	C
1	(-6;-3)	(-4; 3)	(9;2)	16	(2;-1)	(8;7)	(-10;4)
2	(-3;1)	(-1;7)	(I2;6)	17	(5;-3)	(1;0)	(7;2)
3	(-1;3)	(1;9)	(4;7)	18	(4;-б)	(2;2)	(-2;-1)
4	(0;0)	(2;6)	(7;2)	19	(3;4)	(-1;7)	(-4;0)
5	(-2;-6)	(0;0)	(3;-2)	20	(1;-2)	(7;6)	(0;2)
6	(-2;-5)	(6;2)	(0;0)	21	(2;-1)	(-2;-3)	(-6;4)
7	(-2; 0)	(-4;-7)	(5;5)	22	(5;-8)	(3;-2)	(-3;-6)
8	(1;2)	(3;8)	(-4;-I)	23	(8;-2)	(-6;-5)	(0;4)
9	(4;4)	(1;-3)	(9; 0)	24	(7;5)	(3;2)	(4;0)
10	(5;6)	(7;2)	(-6; 0)	25	(3;-7)	(6;0)	(1;1)
11	(-6;-4)	(-1;2)	(6;1)	26	(5;3)	(-1;-2)	(-3;7)
12	(2;0)	(7;2)	(0;5)	27	(3;1)	(-2;8)	(-5;3)
13	(-2;-б)	(-6;-3)	(10;-1)	28	(9;2)	(-5;7)	(0;-3)
14	(-2;1)	(-2;1)	(-4;7)	29	(-3;-3)	(3;1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;-1)	(4; I)	30	(7;9)	(-2;0)	(-3;2)

Завдання 1.4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки A_1, A_2, A_3, A_4 (наведені в таблиці 3). Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;

2) скласти рівняння площини $A_1A_2\ A_3$;

3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2\ A_3$;

4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2\ A_3$.

Таблиця 3

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
2	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
3	(1;2;3)	(2;0; 0)	(0;2;5)	(4;0;0)
4	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
5	(-2;0;-1)	(0,0;4)	(1;3;2)	(3;2;7)
6	(1;-2;1)	(0;0,-4)	(1;4;2)	(2;0;0)
7	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
8	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)

9	(6;-1;5)	(5,1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
10	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
11	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
12	(3;3;9)	(6;9;1)	(1;7;3)	(8;5;-8)
13	(3;5;4)	(5;8;3)	(1;9;9)	(6;4;8)
14	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)	(3;6;7)
15	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)	(6;9;2)
16	(0,7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)	(3;9;8)
17	(5;5;4)	(3;8;4)	(3;5;10)	(5;8;2)
18	(6;1;1)	(4;6;6)	(4;2;0)	(1;2;6)
19	(7;5;3)	(9;4;4)	(4;5;7)	(7;9;6)
20	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
21	(4;2;5)	(0;7;1)	(0;2;7)	(1;5;0)
22	(4;4;10)	(7;10;2)	(2;6;4)	(9;6;9)
23	(4;6;5)	(6;9;4)	(1;10;10)	(7;5;9)
24	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
25	(10;6;6)	(-2;6;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
26	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
27	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
28	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;-7)
29	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
30	(7;7;3)	(6;5 ;8)	(3;5;8)	(8;4,1)

Завдання 1.5 Знайти границі функцій.

Варіант 1

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x tg 3x}{\cos^5 x - \cos^3 x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3-7x-2x^2}$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-8x}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}}$

Варіант 2

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x\sin x}{1-\cos 2x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x^2+5x-6}{x^3+2x^2+3x+7}$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-x-5}{x^2+2x}\right)^{x-3}$.

Варіант 3

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-1}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x-\sqrt{9x^2-7x}\right)$

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x}\right).$

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-7}{5-2x}.$

1 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{5\sin 2x}{tg3x}.$

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right).$

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right).$

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+4x^2+8}{5x^4+2x^3-9}.$

1 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{2x}.$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right).$

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+6x+5}-x\right).$

3 $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1-5x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-7x+2x^2}{6-5x+3x^2}.$

3 $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{8x}}.$

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}.$

3 $\lim\limits_{x\to2} (2x-3)^{\frac{x}{x-2}}.$

Варіант 4

2 $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{7x+2}{7x+2}\right)^{\frac{1}{x}}.$

4 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{arctg^2\ 2x}.$

Варіант 5

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8-5x^2+x^3}{x^2+4x+10}.$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-3x}$

Варіант 6

2 $\lim\limits_{x\to2\pi} \dfrac{tg\dfrac{x}{2}}{\sin x}.$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{3x}$

Варіант 7

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x}.$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right).$

Варіант 8

2 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2\sin^3 3x}{x^2\ tg2x}.$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-4x^4+3}{1-2x^2-4x^5}$

Варіант 9

2 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin 3x}{tg^2\dfrac{x}{2}}.$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x-x}\right).$

Варіант 10

2 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos 3x}{tg^2\ 6x}.$

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x-\sqrt{9x^2-x}\right).$

Варіант 11

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 7x - \cos 3x}{2x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 8x}\right)$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^3\,(3x-2)}{x^5+7}$

Варіант 12

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+8x+1}{2+3x^2+4x^3}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2+6x} + 5\right)$

Варіант 13

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2-2x+3}{3-2x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{5\sin^2 2x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^2} - 4x\right)$

Варіант 14

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2 3x}{x\, tg\dfrac{x}{2}}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+2}{3}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3^{\frac{1}{x}} + \dfrac{2x^5}{1-3x^5}\right)$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+8} - 3\sqrt{x^2+4x}\right)$

Варіант 15

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x+2)}{2x^2+x+7}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{4\sin 2x}{x} - \dfrac{\sin 3x}{2x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x+4} - \sqrt{x^2+8x}\right)$

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}$

Варіант 16

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - x\right)$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4+3x}{3x+2}\right)^{\frac{3x-1}{2}}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+7}{1-x+3x^3}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{5x+x^2}$

Варіант 17

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{14x^2-x-1}{15x^3-3x+7}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x}{2x+3}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos 7x}{x\sin 6x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - \sqrt{x^2-x}\right)$.

Варіант 18

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right)$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+tg\sqrt[2]{3x}\right)\dfrac{2}{\sin 3x}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-1}{x^2+5x^3}$.

4 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 2x}{tg^2 3x}$.

Варіант 19

1 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+tg5x\right)^{\frac{2}{x}}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\dfrac{x}{2}}$

4 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

Варіант 20

1 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3-1}{x^2+5x^3}$.

3 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+1}{3x^2-x-4}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-3}{4+5x}\right)^{x-2}$.

Варіант 21

1 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+3x-9}{27+x^3}$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}-ctg^2 x\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^3+7}{1-x+3x^3}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{\frac{x+4}{2}}$.

Варіант 22

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4+3x^2}{x^{5^3}+x^3+2x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2}{\cos 7x-\cos 3x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-6}\right)^{\frac{x}{2}}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}$.

Варіант 23

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+2x}{7+2x}\right)^{\frac{x-1}{4}}$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot\sin 3x\cdot ctg^2 5x\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5+6}{x^2-7x+10}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}\right)$.

Варіант 24

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x+4}{\sqrt[3]{27x^3-5x^2+1}}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{3+4x}\right)^{\frac{3x-2}{2}}$.

3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x-tg^2 x}{x\sin x}$.

4 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{3x^2-2x-1}$.

Варіант 25

1 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$.

2 $\lim\limits_{x\to -5} \dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+14x-5}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^2 3x}{1-\cos 4x}$.

4 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-5}\right)$.

Варіант 26

1 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{9x^2+8}-3\sqrt{x^2+4x}\right)$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{8x^2}{\cos 7x-\cos 9x}$.

3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3x}}$.

Варіант 27

1 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{\frac{4x+3}{5}}$.

2 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

3 $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x+3)^3\,(3x-2)}{x^5+7}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Варіант 28

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xtg3x}{\cos^5 x-\cos^3 x}$.

2 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$.

3 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{7x}{7x-2}\right)^{\frac{3x-1}{4}}$.

4 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$.

Варіант 29

1 $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(x\cdot tg3x\cdot ctg^2\dfrac{x}{5}\right)$

3 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x-2}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x}$.

Варіант 30

1 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{9x^2-14x-8}{x^2-x-2}$.

2 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{5x-2}{5x-4}\right)^{1-6x}$.

3 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{\sin(x+2)}$.

4 $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(3x-\sqrt{9x^2-7x}\right)$

Завдання 1.6 Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік.

Варіант 1

$$f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x<1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$$

Варіант № 2

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 2x, & 1<x\le 3 \\ x+2, & x>3 \end{cases}$$

Варіант № 3

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0 \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2 \\ -x+4, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 4

$$f(x)=\begin{cases} x-3, & x<0 \\ x+1, & 0\le x\le 4 \\ 3+x, & x>4 \end{cases}$$

Варіант 5

$$f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1 \\ x+1, & -1<x\le 1 \\ -x+3, & x>1 \end{cases}$$

Варіант 6

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{1-x}, & x\le 0 \\ 0, & 0<x\le 2 \\ x-2, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 7

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ -(x-1)^2, & 0<x<2 \\ x-3, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 8

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, & x\le 0 \\ x, & 0<x\le 1 \\ 2+x, & x>1 \end{cases}$$

Варіант 9

$$f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1 \\ (x+1)^3, & -1<x<0 \\ x, & x\le 0 \end{cases}$$

Варіант 10

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x\le 2 \\ x+1, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 11

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ x, & 0\le x\le 2 \\ 0, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 12

$$f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi \\ 2, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 13

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2 \\ 2x, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 14

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x^2-1, & 0\le x<1 \\ -x, & x\ge 1 \end{cases}$$

Варіант 15

$$f(x)=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ 2^x, & 0<x\le 2 \\ x+3, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 16

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x<0 \\ x^2+1, & 0\le x<2 \\ x+1, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 17

$$f(x)=\begin{cases} -x+2, & x\le -2 \\ x^3, & -2<x\le 1 \\ 2, & x>1 \end{cases}$$

Варіант 18

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ 1, & 0<x\le 2 \\ x^2-2, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 19

$$f(x)=\begin{cases} 3x+4, & x\le -1 \\ x^2-2, & -1<x<2 \\ x, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 20

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ \sin x, & 0\le x<\pi \\ 3, & x\ge \pi \end{cases}$$

Варіант 21

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ (x-2)^2, & 1<x<3 \\ -x+6, & x\ge 3 \end{cases}$$

Варіант 22

$$f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<-1 \\ x^2+1, & -1\le x\le 3 \\ 2x, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 23

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1 \\ x^2+2, & 1\le x\le 2 \\ -2x, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 24

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1 \\ x-1, & -1\le x\le 3 \\ -x+5, & x>3 \end{cases}$$

Варіант 25

$$f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ -x^2+4, & 0<x<2 \\ x-2, & x\ge 2 \end{cases}$$

Варіант 26

$$f(x)=\begin{cases} x, & x<-2 \\ -x+1, & -2\le x\le 1 \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$$

Варіант 27

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ x^2-1, & -1<x\le 2 \\ 2x, & x>2 \end{cases}$$

Варіант 28

$$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ \cos x, & 0\le x\le \pi \\ 1-x, & x>\pi \end{cases}$$

Варіант 29

$$f(x)=\begin{cases} 2, & x<-1 \\ 1-x, & -1\le x\le 1 \\ \ln x, & x>1 \end{cases}$$

Варіант 30

$$f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^3, & 0<x\le 2 \\ x+4, & x>2 \end{cases}$$

Завдання 1.7 Знайти похідні першого порядку функцій.

Варіант 1

1. $y = 5^{x^2 \sin^3 x} + \left(\sin\frac{x}{4}\right)^{\sqrt{2}}$
2. $y = \sqrt[4]{3x + x\sqrt[5]{x^2}}$
3. $y = \ln arctg\frac{e^x - e^{-x}}{2}$
4. $y = (x^3 + 1)^{tg^2\frac{x}{2}}$
5. $y\sin x - \cos(x - y) = 0$
6. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t^3}{t^2-1} \\ y = \dfrac{t}{t^2-1} \end{cases}$

Варіант 2

1. $y = \dfrac{e^{-3\sqrt{x}}}{1 + e^{4x^2}}$
2. $y = \ln\sin 3x + x^2 \arcsin^5 2x$
3. $y = \sqrt[5]{(1 - x^2)^2}$
4. $y = \left(\sin\frac{x}{4}\right)^{tg^3\frac{2}{x}}$
5. $arctgy = x + y^2$
6. $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$

Варіант 3

1. $y = \dfrac{\sqrt{5x^3 + 1}}{4 + 5x^3}$
2. $y = (1 + ctg^3 5x)e^{\frac{x}{3}}$
3. $y = \ln^2\cos\dfrac{2}{x^2 + 1}$
4. $y = \cos^x(3x + 1)$
5. $x^2\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$
6. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

Варіант 4

1. $y = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^3 2x}}{1 + \cos 4x}$
2. $y = e^{tg^5\frac{x}{3}} - 2arctg\sqrt{x}$
3. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln\sqrt{1 + x^2}$
4. $y = (\ln tgx)^{\sin^2 x}$
5. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$
6. $\begin{cases} x = \ln(t^3 + 2) \\ y = \dfrac{t}{t^3 + 2} \end{cases}$

Варіант 5

1. $y = x^2 tg^5 3x + \arcsin^2\dfrac{x}{5}$
2. $y = \ln\dfrac{ctg^3\dfrac{x}{3}}{1 + \cos^2 x}$
3. $y = 10^{1 - \sin^4 3x}$
4. $y = (arctg\sqrt{3x + 1})^{x^3 + 1}$
5. $e^x\sin y - e^{-y}\cos x = 0$
6. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$

Варіант 6

1. $y = \ln(9x^3 + \sqrt[3]{x^5 + 1})$
2. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} + \ln tg^3 \dfrac{x}{7}$
3. $y = (1 + \sin_3 3x)e^{arctg^2 5x}$
4. $y = (x^3 - 1)^{\cos\sqrt{x}}$
5. $x^2 \ln(1 + y^3) + y \ln(1 + x^3) = 0$
6. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \end{cases}$

Варіант 7

1. $y = \sin^4(3x - 1)e^{-x^3}$
2. $y = \sqrt[4]{(1 + \cos^5 7x)^3}$
3. $y = 3tg\dfrac{x}{5} + 3^{tg^5 x}$
4. $y = \left(\dfrac{x^3}{1 + x^2}\right)^x$
5. $(y^3 - x^3)^2 - x^2 y + y - x = 0$
6. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

Варіант 8

1. $y = \ln\left(\sin^3 4x + arctg\dfrac{x}{4}\right)$
2. $y = \sqrt[5]{\dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}}$
3. $y = e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}} \arcsin^2 \ln x$
4. $y = (arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2 + 1)}$
5. $(x^2 + 1)^2 + (y^2 + 1)^2 - xy = 0$
6. $\begin{cases} x = 3t - \sin 3t^2 \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$

Варіант 9

1. $y = \sqrt[7]{\dfrac{3x + 2}{1 - 4x}}$
2. $y = ctg^5 x ctg 5x$
3. $y = \ln\dfrac{1 - e^{2x}}{e^{2x}}$
4. $y = (\ln^2 x)^{\cos 3x}$
5. $x^2 + y^2 + \arcsin y + y arctg 2x = 0$
6. $\begin{cases} x = \dfrac{4 - t}{1 + t} \\ y = \dfrac{t^3}{2 - t^3} \end{cases}$

Варіант 10

1. $y = \ln^5(2x + 7) - \sqrt[3]{\sin^2 3x}$
2. $y = \sqrt{xe^{2x} + 2x^3}$
3. $y = 3^{ctg\frac{1}{x}} - \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$
4. $y = (x^3 + 2)^{\sqrt{tgx}}$
5. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln y = 2$
6. $\begin{cases} x = \ln(t^5 + 3) \\ y = \dfrac{t^2}{t^5 + 3} \end{cases}$

Варіант 11

1. $y = tg^5 3x - e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $y = \arcsin(x^3 + 5)$
3. $y = x^3 \ln(x^2 + 5) + \dfrac{1}{\cos^4 \frac{x}{5}}$
4. $y = (x^5 + 5)^{\cos 2x}$
5. $x^3 y^2 + \sin y + (x - y)^2 = 0$
6. $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}$

Варіант 12

1. $y = \ln \dfrac{3 - \sqrt{9 - x^2}}{x^2}$
2. $y = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{\sin^3 x}$
3. $y = \dfrac{2x^3 - 1}{\sqrt{\cos \frac{x}{3}}}$
4. $y = \sin^2 x^{x^2 - 1}$
5. $(y^2 + x)^3 + (x^2 - 3y)^3 = 0$
6. $\begin{cases} x = t + \frac{1}{2}\cos 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$

Варіант 13

1. $y = 5^{ctg^2(5x+3)}$
2. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1} e^{-3x}$
3. $y = \left(\dfrac{4}{3x^2} - \dfrac{1}{9x}\right)\sqrt{4x + x^2}$
4. $y = (\ln 3x)^{arctg \frac{3}{x}}$
5. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{2}} = 5$
6. $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi \\ y = t^3 - 6arctgt \end{cases}$

Варіант 14

1. $y = \sqrt{3} arctg^2 x + \dfrac{1}{x} + tg\sqrt{x}$
2. $y = x^2 e^{-x^2} - 5^{1 - \ln^2 3x}$
3. $y = 3arctg \ln^3 \dfrac{1}{x}$
4. $y = \ln(\cos(7x))^{\sin \frac{x}{2}}$
5. $y - \cos^3 y + \sin^3 x = 0$
6. $\begin{cases} x = \arccos(t^3 + 1) \\ y = \arcsin 5t \end{cases}$

Варіант 15

1. $y = 2^{\arcsin 2x} + \left(1 - \arccos \dfrac{x}{3}\right)^3$
2. $y = e^x \cos 3x + \sqrt[7]{2x + \sqrt[5]{x^3}}$
3. $y = \dfrac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$
4. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$
5. $\ln y + \dfrac{x^2}{y} = 3$
6. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t + t \cos t \end{cases}$

Варіант 16

1. $y = 5\sin^2\frac{x}{3}ctgx$
2. $y = \ln\frac{\cos^4 x}{\sqrt{\sin 2x}}$
3. $y = 5^{\arcsin\sqrt{x}} - 2arctg\frac{x}{2}$
4. $y = (x^2 + e^x)^{tg^3 x}$
5. $xe^y + y^2 = 10$
6. $\begin{cases} x = \frac{1}{t} - t \\ y = \sqrt{t^2 + 1} \end{cases}$

Варіант 17

1. $y = \sqrt[5]{(3 - \sqrt{x\sin x})^3}$
2. $y = 3\cos^2\frac{x^2}{\ln x} + ctge^{x^2+4}$
3. $y = 5arctg(x^2 \ln x)$
4. $y = (1 - \sqrt{x})^{\cos\frac{1}{x}}$
5. $y^3 + \sqrt[3]{x} = \arcsin y$
6. $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sqrt{tgt} \end{cases}$

Варіант 18

1. $y = \frac{1}{3}\arcsin(\cos^3\frac{x}{5})$
2. $y = 5^{tg\frac{x}{2}} \ln x$
3. $y = \frac{e^{5x}}{1 + e^{3x}}$
4. $y = \ln^3 x^{x^7}$
5. $\sin(x + \sqrt{y}) = y^2 + 1$
6. $\begin{cases} x = t\sin t \\ y = \frac{t}{\cos t} \end{cases}$

Варіант 19

1. $y = 2^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}} + 3tg^3\frac{x}{5}$
2. $y = e^{5x}\cos^2 3x + 7$
3. $y = arctg^4(x\ln x)$
4. $y = (1 + 2^x)^{x^2+2}$
5. $2^{x+y} = x + 10y$
6. $\begin{cases} x = 3e^{5t} \\ y = 5\ln t \end{cases}$

Варіант 20

1. $y = 5\sin 3^{\ln x} + 2$
2. $y = (2x + 3)e^{5x} + \frac{\ln x}{x}$
3. $y = (\ln 2)^{\sin x} - ctg^3\frac{x}{2}$
4. $y = (3 + \ln^2 x)^{\sin^5 x}$
5. $4x - y^4 = \cos(xy^2)$
6. $\begin{cases} x = 3t^2 + 1 \\ y = arctg\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 21

1. $y = 2^{\sqrt{\cos(3x+5)}} + \ln ctg\sqrt[3]{x}$
2. $y = \frac{x^5}{\cos^2 7x} - (\cos 5^{\sqrt{tgx}})^3$
3. $y = \sqrt[5]{\sin 10x}e^{arctg\frac{1}{x}}$
4. $y = (x^7 + x)^{\sqrt{\ln x}}$
5. $x + tgy = 2^x + y^2$
6. $\begin{cases} x = \sqrt{1 + 3t} \\ y = t^2\sin t \end{cases}$

Варіант 22

1. $y=\dfrac{x}{\ln^2 x}+x^5 5^{\cos\frac{x}{2}}$
2. $y=(arctg\sqrt{\ln x})^{\sqrt{3}}$
3. $y=3\arcsin^4 3x+\sqrt[3]{\ln^2 tg\dfrac{x}{7}}$
4. $y=(2x+\cos 3x)^{\frac{1}{x}}$
5. $\arccos y+xy^2=1$
6. $\begin{cases} x=\ln^3 t \\ y=t^2+ctg\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 23

1. $y=\sqrt[5]{1+xe^{\sqrt{x}}}$
2. $y=(2x+3)^5+5^{2x+3}$
3. $y=\dfrac{2^x}{tg^3 x}+1$
4. $y=(e^{5x}+\cos\sqrt{x})^{\log_5 x}$
5. $arctg\dfrac{x}{y}+\sin(xy)=y^3$
6. $\begin{cases} x=te^t \\ y=\arcsin t+\sin t \end{cases}$

Варіант 24

1. $y=\ln(x-\sqrt[3]{x})-x^3\ln x$
2. $y=\cos 3^{x^2}+\left(x^3+\dfrac{3}{x}\right)^5$
3. $y=tg\dfrac{x^2}{x^3+1}+5$
4. $y=(1+\sin^8 7x)^{\frac{2}{x}}$
5. $arctgy=2x+\sqrt{y}$
6. $\begin{cases} x=2+\sqrt{\sin t} \\ y=t^2\cos t \end{cases}$

Варіант 25

1. $y=e^{\frac{x}{2}}arctg^2 x$
2. $y=tg\ln^4 x+10\sqrt{\cos\dfrac{x}{5}}$
3. $y=\dfrac{3^{ctgx}}{\sqrt{2x^3+1}}+(x^3+e^{3x})^7$
4. $y=(3^x+\ln x)^{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $arctgy=x\sin y$
6. $\begin{cases} x=2t\sin t \\ y=3\cos^2 t \end{cases}$

Варіант 26

1. $y=x^2(\arcsin 3x)^3$
2. $y=7\log_2(e^{\frac{x}{2}}+1)+7^{\ln x}$
3. $y=\dfrac{arctg3x}{1+9x^2}-3\sqrt{\cos 2x}$
4. $y=(tg7x-x^7)^{\ln^5 x}$
5. $y^3+xy=1$
6. $\begin{cases} x=\sin t+\cos t \\ y=tgt+ctgt \end{cases}$

Варіант 27

1. $y=\sqrt[6]{x+(\sin\ln x)^3}$
2. $y=\dfrac{e^{3x}}{2x+5}-x\ln(1+x^2)$
3. $y=3\arcsin^4(\sqrt{x}-2)^5$
4. $y=ctg(x+1)^{\sqrt{3x^2+2}}$
5. $\sqrt{x-y^3}=2\sin^3 x$
6. $\begin{cases} x=5\cos^2 t+1 \\ y=2tgt-3 \end{cases}$

Варіант 28

1. $y = \sin(x + \sqrt[3]{\cos 2x})$
2. $y = 3\log_7(3^{\ln x} + 5) + \dfrac{3x}{\ln x}$
3. $y = x^2 arctgx^2 - 2^x$
4. $y = (3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$
5. $tg(xy0 = 3\cos(x\sqrt{y})$
6. $\begin{cases} x = \sqrt{1+2t} \\ y = 3t^2 \cos^2 \sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 29

1. $y = (2+\ln 5)^{tgx} + \sqrt{\dfrac{x}{\sin x}}$
2. $y = \sqrt[3]{arctg\dfrac{x}{2}} - \log_2(5^x - 1)$
3. $y = xe^{7x} + (x + e^{7x})^3$
4. $y = \left(1 + \sin\dfrac{2}{x}\right)^{e^{2x}}$
5. $(x^2 + y^2) + \cos\dfrac{x+y}{x} = 5$
6. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 3t^3 \ln t \end{cases}$

Варіант 30

1. $y = x\log_5(x^3+1) + (\ln 3)^{\cos 2x}$
2. $y = \dfrac{x}{(x^3+1)^2} - arctg^3 \sin 7x$
3. $y = 2^{\ln(1+tg^3\frac{x}{4})}$
4. $y = (3 + \cos\sqrt{x})^{\ln^2 x}$
5. $\sqrt{\sin y} + \cos^2(xy^2) = 0$
6. $\begin{cases} x = t^3 + 5\sin t \\ y = t\cos 3t \end{cases}$

Завдання 1.8 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Варіант 1
$y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Варіант 2
$y = \ln(2x^2+3)$

Варіант 3
$y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

Варіант 4
$y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

Варіант 5
$y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

Варіант 6
$y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

Варіант 7
$y = \dfrac{x^3+16}{x}$

Варіант 8
$y = \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$

Варіант 9
$y = \dfrac{x^3-1}{4x^2}$

Варіант 10
$y = \dfrac{2}{x^2+x+1}$

Варіант 11
$y = \dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$

Варіант 12
$y = x + \dfrac{x}{3x-1}$

Варіант 13
$y = \dfrac{x^3-8}{2x^2}$

Варіант 14
$y = \dfrac{4x}{4+x^2}$

Варіант 15
$y = xe^{-x^2}$

Варіант 16
$y = \dfrac{1}{2x+x^2}$

Варіант 17
$y = \ln(x^2+2x+2)$

Варіант 18
$y = \dfrac{x^3}{x^2+9}$

Варіант 19

$$y=\frac{4x^3+5}{x}$$

Варіант 20

$$y=e^{\frac{1}{2-x}}$$

Варіант 21

$$y=\frac{x^2+1}{x}$$

Варіант 22

$$y=x\ln x$$

Варіант 23

$$y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$$

Варіант 24

$$y=\frac{x^2}{x^2+4}$$

Варіант 25

$$y=\frac{8}{x^2(x-4)}$$

Варіант 26

$$y=\frac{x^2-5}{x-3}$$

Варіант 27

$$y=(x^2+4)e^{-x^2}$$

Варіант 28

$$y=\frac{x^3+1}{x^2}$$

Варіант 29

$$y=\frac{x-1}{x^2-2x}$$

Варіант 30

$$y=\frac{x^4+3}{x}$$

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1-3x_2+2x_3=2; \\ 4x_1-5x_2+2x_3=1; \\ 5x_1-6x_2+4x_3=3. \end{cases}$

1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.

Виконати перевірку.

Розв'язання.

1) Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера. Для цього обчислюємо методом трикутників визначники: Δ - головний визначник системи; Δx_1, $\Delta x_2, \Delta x_3$ - додаткові визначники системи (визначники, що утворюються з головного визначника послідовною заміною першого, другого й третього стовпця відповідно стовпцем вільних членів системи рівнянь).

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot(-5)\cdot 4+2\cdot 4\cdot(-6)+2\cdot 5\cdot(-3)-2\cdot(-5)\cdot 5-3\cdot 2\cdot(-6)-4\cdot 4\cdot(-3)=-4;$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot(-5)\cdot 4+2\cdot 1\cdot(-6)+3\cdot 2\cdot(-3)-2\cdot(-5)\cdot 3-2\cdot 2\cdot(-6)-4\cdot 1\cdot(-3)=-4;$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot 4+2\cdot 4\cdot 3+5\cdot 2\cdot 2-2\cdot 1\cdot 5-3\cdot 3\cdot 2-4\cdot 4\cdot 2=-4;$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix}=3\cdot(-5)\cdot 3+2\cdot 4\cdot(-6)+5\cdot 1\cdot(-3)-2\cdot(-5)\cdot 5-3\cdot 1\cdot(-6)-3\cdot 4\cdot(-3)=-4,$$

тоді $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1$.

2) Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою оберненої матриці. Для цього запишемо систему в матричній формі: $A \cdot X = B$,

де $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(A – матриця коефіцієнтів системи, X– стовпець невідомих, B – стовпець вільних членів).

Розв'язок системи знаходимо за формулою $X = A^{-1} \cdot B$, де A^{-1}– матриця, що є оберненою до матриці системи. Оскільки матриця А – квадратна та визначник матриці $\Delta = \det A = -4 \neq 0$, отже, обернена матриця A^{-1} існує та знаходиться за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ де } A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де M_{ij} - мінор, що відповідає елементу a_{ij} матриці А.

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} для кожного елементу матриці A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -3,$$

тоді

$$X = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -6 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -8 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \\ -6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічна відповідь була одержана при розв'язанні системи методом Крамера: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

Виконаємо перевірку одержаного результату, підставляючи значення змінних у вихідну систему: $\begin{cases} 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2; \\ 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1; \\ 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 3, \end{cases}$ $\begin{cases} 2 = 2; \\ 1 = 1; \\ 3 = 3. \end{cases}$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$.

Завдання 1.2 Задана піраміда, координатами вершин якої є $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(2;0;0)$. Методами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;

2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;

3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;

4) площу грані $A_1A_2A_3$;

5) об'єм піраміди (рис. 4.1).

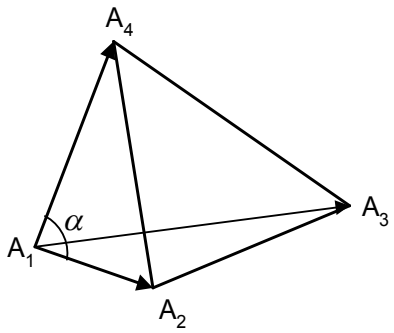

Рис. 1.1

Розв'язання.

1 Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{(x_{A_2}-x_{A_1};y_{A_2}-y_{A_1};z_{A_2}-z_{A_1})}=\overrightarrow{(0-1;\,0-(-2);\,4-1)}=\overrightarrow{(-1;\,2;\,3)}$. Тоді довжина ребра A_1A_2 піраміди буде дорівнювати модулю вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}\ \text{(одиниць).}$$

2 Позначимо кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 через α, тоді

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}.$$

Координати вектора $\overrightarrow{A_1A_4}=\overrightarrow{(2-1;\,0-(-2);\,0-1)}=\overrightarrow{(1;\,2;\,-1)}$,

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}\ \text{(од).}$$

Скалярний добуток $\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}=(-1)\cdot1+2\cdot2+3\cdot(-1)=0$.

Отже, $\cos\alpha=\dfrac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}}=0\Rightarrow\alpha=90^\circ$, тобто ребра A_1A_2 і A_1A_4 перпендикулярні.

3 Координати векторів

$\overrightarrow{A_1A_4}=\overrightarrow{(2-1;\,0-(-2);\,0-1)}=\overrightarrow{(1;\,2;\,-1)}$, $\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{(1-1;\,4-(-2);\,2-1)}=\overrightarrow{(0;\,6;\,1)}$.

Обчислюємо проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ за формулою:

$$пр_{\overrightarrow{A_1A_4}}\overrightarrow{A_1A_3}=\frac{\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}=\frac{1\cdot0+2\cdot6+(-1)\cdot1}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{11}{\sqrt{6}}.$$

4 Оскільки векторним добутком векторів є вектор, довжина якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах у якості сторін, тоді площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює половині векторного добутку векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ (рис. 1.2), тобто S = $\frac{1}{2}\left|\vec{n}\right|$.

Вектор $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{(1-1;\ 4-(-2);\ 2-1)} = \overrightarrow{(0;\ 6;\ 1)}$.

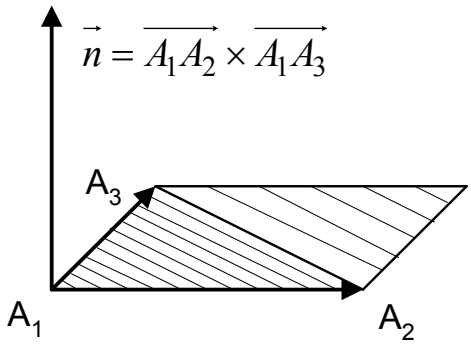

Рис. 1.2

Координати вектора $\vec{n}$ визначимо, користуючись теоремою Лапласа про розвинення визначника за елементами першого рядку.

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k},$$

тобто $\vec{n}(-16; 1; -6)$; $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{(-16)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{256 + 1 + 36} = \sqrt{293}$.

Таким чином, $S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}\sqrt{293}$ (кв.од.).

5 Мішаним добутком векторів є число, що дорівнює об'єму паралелепіпеда, який побудований на цих векторах, а об'єм тетраедра дорівнює шостої частини об'єму цього паралелепіпеда (рис. 1.3).

Таким чином, об'єм піраміди обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} \right|.$$

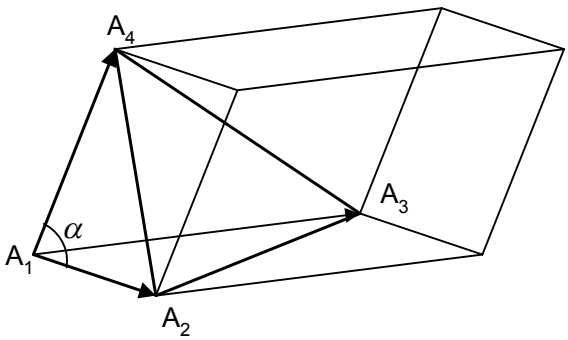

Рис. 1.3

Обчислюємо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+1}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}=8-16=-8;$$

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}\right|=|-8|=8 \quad\Rightarrow\quad V=\frac{1}{6}\cdot 8=1\frac{1}{3}\ \text{(куб.од.)}.$$

Завдання 1.3 Задано координати вершин трикутника *ABC: A*(3;-2), *B*(1;4), *C*(-2;1). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони АВ;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, яка проведена із вершини *C*;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони *AC*;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *C* (рис.1.4).

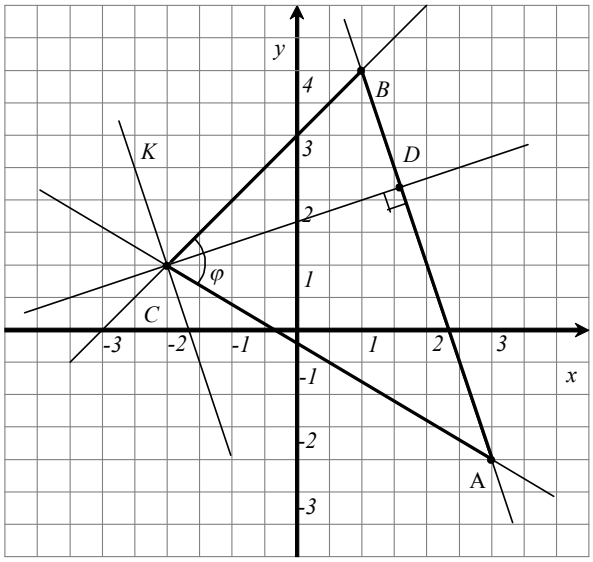

Рис. 1.4

Розв'язання.

1 Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Для $A(3;-2)$, $B(1;4)$ маємо: $\dfrac{x-3}{1-3}=\dfrac{y-(-2)}{4-(-2)} \Rightarrow \dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{6}; \Rightarrow$ $-3(x-3)=y+2 \Rightarrow 3x+y-7=0$ - загальне рівняння прямої AB;

$y=-3x+7$ - рівняння прямої AB з кутовим коефіцієнтом, $k_{AB}=-3$.

2 Складаємо рівняння прямої $CD\perp AB$.

Із умови перпендикулярності прямих $k_{CD} = -\dfrac{1}{k_{AB}} \quad \Rightarrow \quad k_{CD} = \dfrac{1}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку $C(x_0;y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Для $C(-2;1)$ маємо: $y - 1 = \dfrac{1}{3}(x+2)$, т.е. $x - 3y + 5 = 0$ - загальне рівняння прямої CD.

3 Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої AB за формулою $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, де $Ax + By + C = 0$ - рівняння прямої AB.

$$d = \frac{|3\cdot(-2) + 1 - 7|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \text{ (од.)}.$$

4 Координати точки M – центра ваги трикутника обчислюємо як середнє арифметичне координат його вершин:

$$x_M = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

$$x_M = \frac{3+1-2}{3} = \frac{2}{3}, \quad y_M = \frac{-2+4+1}{3} = 1, \text{ тобто } M\left(\frac{2}{3};1\right).$$

Кутовий коефіцієнт прямої AC: $k_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A}$, $\quad k_{AC} = \dfrac{1+2}{-2-3} = -\dfrac{3}{5}$.

Кутовий коефіцієнт прямої, що паралельна прямій AC, також дорівнює $-\dfrac{3}{5}$.

Таким чином, рівняння прямої, що проходить через точку $M\left(\dfrac{2}{3};1\right)$ і має кутовий коефіцієнт $k = -\dfrac{3}{5}$, буде мати вигляд: $y - 1 = -\dfrac{3}{5}(x - \dfrac{2}{3})$;

$3x + 5y - 7 = 0$ - загальне рівняння шуканої прямої.

5 Для обчислення площі трикутника знайдемо довжину сторони АВ:

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Тоді $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\dfrac{6\sqrt{10}}{5} = 12$ (кв. од.).

6 Тангенс кута φ (кута між прямими AC і BC) знаходимо за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC}\cdot k_{AC}}.$$

$$k_{AC}=-\frac{3}{5};\quad k_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{1-4}{-2-1}=1\ \Rightarrow\ tg\varphi=\frac{1+\frac{3}{5}}{1-1\cdot\frac{3}{5}}=4,\quad \varphi=arctg4\ \approx 76^\circ.$$

Завдання 1.4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$, $A_3(2;-1;-2)$, A_4 (-1;2;1). Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;

2) скласти рівняння площини $A_1A_2\ A_3$;

3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2\ A_3$;

4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2\ A_3$.

Розв'язання.

1 Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Для $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$ маємо: $\frac{x-3}{4-3}=\frac{y-(-4)}{1-(-4)}=\frac{z-2}{-3-2}\ \Rightarrow\ \frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{5}=\frac{z-2}{-5}$.

2 Рівняння площини, що проходить через три задані точки: $A_1(x_1;y_1;z_1)$, $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$, знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

Підставимо координати заданих точок у вищенаведене рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 4-3 & 1+4 & -3-2 \\ 2-3 & -1+4 & -2+4 \end{vmatrix}=0;\qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Запишемо розвинення визначника за елементами першого рядку:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-(y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=0;$$

$$25(x-3)+3(y+4)+8(z-2)=0;$$

$25x+3y+8z-79=0$ - рівняння площини $A_1A_2A_3$.

3 Канонічні рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_0;y_0;z_0)$ з напрямним вектором $\vec{s}(m;n;p)$, має вигляд

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$ $\vec{n}(25;3;8)$ є напрямним вектором висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2\ A_3$, тобто $\vec{s}(m;n;p)=(25;3;8)$, тоді рівняння висоти має вигляд:

$$\frac{x+1}{25}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{8}\ .$$

4 Знаходимо кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2\ A_3$ за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}\ .$$

Через те, що нормальний вектор площини $\vec{n}(25;3;8)$ і напрямний вектор прямої $\vec{s}(m;n;p)=(-4;6;-1)$, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|25\cdot(-4)+3\cdot 6+8\cdot(-1)|}{\sqrt{625+9+64}\cdot\sqrt{16+36+1}}=\frac{90}{\sqrt{698}\cdot\sqrt{53}}=0{,}47..$$

Завдання 1.5 Знайти границі функцій.

$$1\ \lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}\quad 2\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$3\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)\ 4\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

Розв'язання.

1 Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладаючи на множники чисельник за формулою $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, а знаменник за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$, матимемо:

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1),$$

$$6x^2-5x+1=0,\qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm 1}{12},\qquad x_1=\frac{1}{2},\qquad x_2=\frac{1}{3}.$$

$$6x^2-5x+1=6(x-1/2)(x-1/3)=(2x-1)(3x-1).$$

Отже,

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-`1)}=\lim_{x\to 1/2}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{1+1+1}{3/2-1}=6.$$

2 Ні чисельник, ні знаменник не мають границі при $x\to\infty$. Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на x^4. Дістанемо

$$-\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}.$$

Оскільки при $x\to\infty$:

$$1/x\to 0,\quad 1/x^3\to 0,\quad 3/x^2\to 0,\quad 1/x^4\to 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – I. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\frac{0}{1}=0.$$

3 При $x\to 1$ задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок $\infty-\infty$). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\left(\frac{o}{o}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

4 При підстановці граничного значення x у вираз функції маємо невизначеність 1^{∞}. Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-2/3}.$$

Завдання 1.6 Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік:

$$y=\begin{cases}-1, & \text{якщо } x<1,\\ x^2-2, & \text{якщо } 1\le x\le 1,\\ 1, & \text{якщо } x>1.\end{cases}$$

Розв'язання. Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y=-1,\ y=x^2-2,\ i\ y=1$ є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною лише в тих точках, де зміняється її аналітичний вираз, тобто в точках $x=-1\ i\ x=1$. Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо :

$$\left.\begin{array}{l} y(-1)=(-1)^2-2=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to-1+0} y=\lim\limits_{x\to-1+0}\left(x^2-2\right)=-1 \\ \lim\limits_{x\to-1-0} y=\lim\limits_{x\to-1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{array}\right\} \text{Задана функція неперервна в точці } x=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} y(1)=1^2-2=1-2=-1 \\ \lim\limits_{x\to1+0} y=\lim\limits_{x\to1+0} 1=1 \\ \lim\limits_{x\to1-0} y=\lim\limits_{x\to1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{array}\right\} \text{Задана функція розривна в точці } x=1$$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь; крім точки x=1. Побудуємо графік функції. На інтервалі $(-\infty:-1)$ її графіком буде пряма $y=-1$, на відрізку $[-1:1]$ — парабола $y=x^2-2$ і, нарешті, на інтервалі $(1:+\infty)$ — пряма $y=1$ (рис. 1.5).

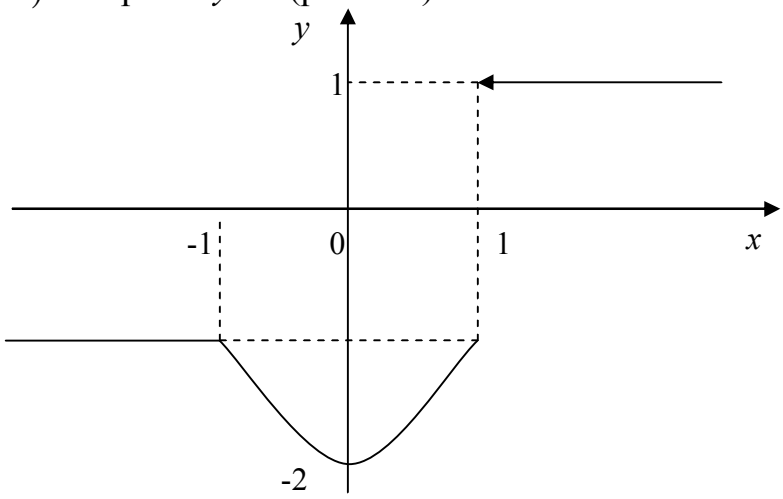

Рис. 1.5

Завдання 1.7 Знайти похідні першого порядку функцій.

1 $y=\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$

2 $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$

3 $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4 $y=(2x-3)^{\sqrt{\cos x}}$

5 $y\sin(x+y)-x=0$

6 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$.

Розв'язання. Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, знаходимо похідні функцій 1-3.

$$1\ \ y'=\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\sqrt{2-x^2}+\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}\right)'+\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2-x^2+2}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{4-2x^2}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{2-x^2}.$$

2 $y' = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)' = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot (1+x^2)' = \frac{2x}{3(1+x^2)}.$

3 $y' = \frac{(x)' \cdot \sqrt{1-x^2} - x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} =$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

4 Для знаходження похідної степенево-показникової функції використовуємо логарифмічне диференціювання.

$$y = (2x-3)^{\sqrt{\cos x}},$$

$$\ln y = \sqrt{\cos x} \cdot \ln(2x-3),$$

диференціюємо ліву та праву частини одержаної рівності по x:

$$\frac{y'}{y} = \left(\sqrt{\cos x}\right)' \cdot \ln(2x-3) + \sqrt{\cos x} \cdot \left(\ln(2x-3)\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x) \cdot \ln(2x-3) + \sqrt{\cos x}\,\frac{2}{2x-3}.$$

Тоді похідна функції має вигляд:

$$y' = ((2x-3)^{\sqrt{\cos x}}) \cdot \left(\sqrt{\cos x}\,\frac{2}{2x-3} - \frac{\sin x \cdot \ln(2x-3)}{2\sqrt{\cos x}}\right).$$

5 Для знаходження похідної неявної функції $y\sin(x+y) - x = 0$ диференціюємо обидві частини рівності по x:

$$y' \cdot \sin(x+y) + y\cos(x+y) \cdot (1+y') - 1 = 0.$$

Розкриваючи дужки та групуючи доданки відносно y', одержуємо:

$$y' \cdot \sin(x+y) + y\cos(x+y) + y \cdot y'\cos(x+y) = 1,$$

$$y' \cdot (\sin(x+y) + y \cdot \cos(x+y)) = 1 - y\cos(x+y),$$

$$y' = \frac{1 - y\cos(x+y)}{\sin(x+y) + y \cdot \cos(x+y)}.$$

6 Для знаходження похідної параметрично заданої функції $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$ будемо використовувати формулу $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Знаходимо похідні по t:

$x'_t = -\sin t + \sin t + t\cos t = t\cos t,$

$y'_t = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t.$

Тоді шукана похідна буде дорівнювати: $y'_x = \frac{t\sin t}{t\cos t} = tgt.$

Завдання 1.8 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Розв'язання.

Повне дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:

1 Знайти область визначення функції

2 Встановити точки розриву та інтервали неперервності функції

3 Дослідити функцію на парність і непарність.
4 Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.
5 Знайти інтервали знакосталості функції.
6 Знайти асимптоти. Дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.
7 Знайти інтервали спадання і зростання функції та екстремуми.
8 Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину.
9 Побудувати графік функції за результатами дослідження.

Використовуючи запропоновану схему, маємо:

1 Знаходимо $3-x^2 \neq 0, \quad x \neq \pm\sqrt{3}$;

$$D(y)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right).$$

2 $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ – точки розриву;

$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-y(x)$. Отже, задана функція є непарною. Її графік розташований симетрично відносно початку координат, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x \geq 0$.

4 При $x=0$ $y=0$; при $y=0$ $x=0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0;0)$ - початок координат.

5 $y=0$ при $x=0$; $y=\infty$ при $x=\pm\sqrt{3}$;

$y>0$ в інтервалі $\left(0;\sqrt{3}\right)$ і $y<0$ в інтервалі $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ (рис. 1.6).

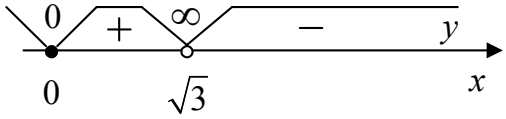

Рис. 1.6

6 $x=\sqrt{3}$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0} y=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+0\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} y=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}-0\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{+0}=+\infty\cdot$$

Отже, $x=\sqrt{3}$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(3-x^2\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0,$$

оскільки степінь многочлена чисельника менша степеня многочлена знаменника.

Отже, пряма $y=-x$ – похила асимптота.

7 $$y'=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3\left(-2x\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2};$$

$y'(x)=0$, якщо $x^2\left(9-x^2\right)=0$, звідки $x=0$, $x=\pm3$;

$y'(x)=\infty$, якщо $3-x^2=0$, звідки $x=\pm\sqrt{3}$,

$y_{\max}=y(3)=\dfrac{27}{3-9}=-\dfrac{9}{2}$ (рис. 1.7).

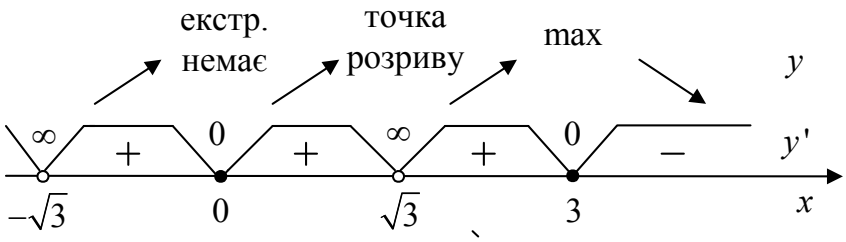

Рис. 1.7

8 $$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-2\left(3-x^2\right)\left(-2x\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3-x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{2x\left(3-x^2\right)\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

$y''(x)=0$, якщо $x=0$;

$y''(x)=\infty$ якщо $x=\pm\sqrt{3}$.

$y_{перегину}=y(0)=0$ (рис. 1.8).

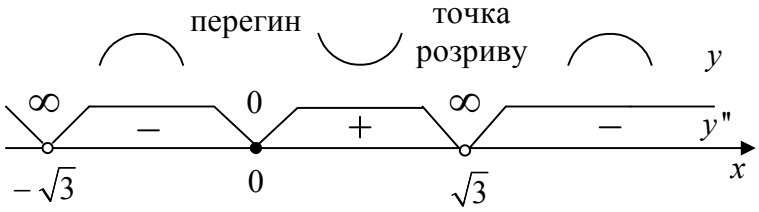

Рис. 1.8

Зауважимо, що у зв‘язку з тим, що точка $x = 0$ знаходиться на межі півінтервалу $[0; +\infty)$, в якому досліджується функція, виникла необхідність дослідити знак $y'(x)$ і $y''(x)$ на півінтервалі $\left(-\sqrt{3}; 0\right]$.

9 Будуємо графік функції за результатами дослідження (рис. 1.9).

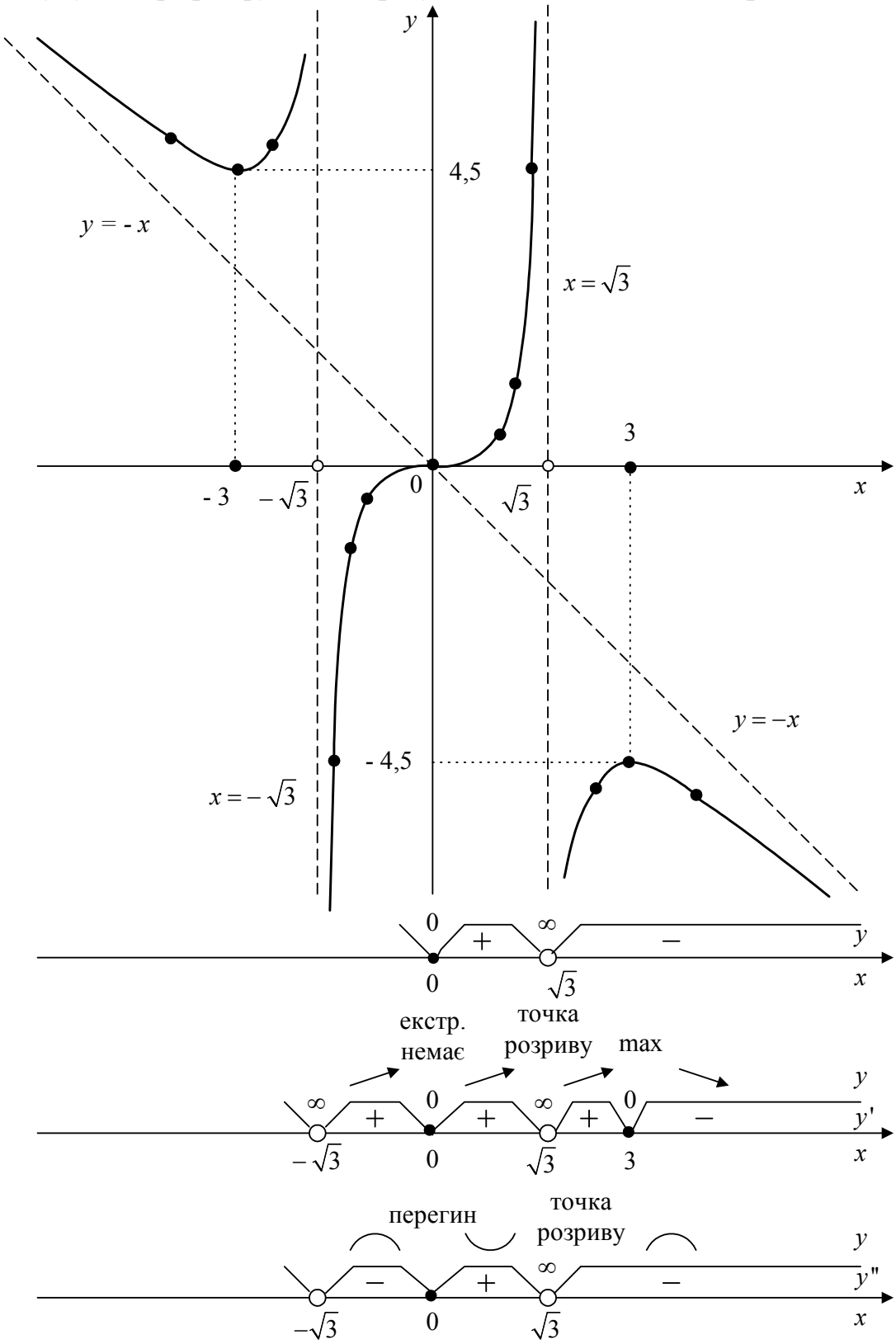

Рис. 1.9

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №2

Функції багатьох змінних. Визначені і невизначені інтеграли. Диференціальні рівняння. Ряди.

Тема 1. Означення функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали функцій двох змінних.

Тема 2. Екстремуми функцій багатьох змінних. Похідна за напрямом. Градієнт.

Тема 3. Невизначений інтеграл. Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування.

Тема 4. Інтегрування раціональних дробів.

Тема 5. Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування ірраціональних функцій.

Тема6. Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбниця. Методи підстановки та інтегрування частинами у визначеному інтегралі.

Тема 7. Геометричне та економічне застосування визначених інтегралів.

Тема 8. Невласні інтеграли. Інтеграл Ейлера-Пуассона.

Тема 9. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння, однорідні відносно змінних. Лінійні рівняння 1-го порядку. Рівняння Бернуллі.

Тема 10. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв'язку.

Тема 11. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Структура загального розв'язку. Метод варіації довільних сталих та спеціальна права частина.

Тема 12. Системи лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

Тема 13. Числові ряди. Збіжність рядів. Гармонічний ряд. Необхідна умова збіжності. Достатні ознаки збіжності рядів з додатними членами: ознака порівняння, ознака Даламбера, ознака Коші (радикальна, інтегральна).

Тема 14. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності. Область збіжності степеневого ряду.

Тема 15. Розвинення функції у степеневі ряди.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 2.1 Знайти невизначені інтеграли.

Варіант № 1	Варіант № 2	Варіант № 3
1 $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x dx}}{1+x^2} dx$	1 $\int \frac{dx}{(4x^2+1)\operatorname{arctg} 2x}$	1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$
2 $\int x\cos\frac{x}{3} dx$	2 $\int xe^{3x} dx$	2 $\int x\ln(x^2+1) dx$

3 $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7}dx$	3 $\int \frac{x^3+2x+5}{(x^2-4)(x+3)}dx$	3 $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4}dx$
4 $\int \cos^2 x \sin^2 x dx$	4 $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$	4 $\int \cos x \sin 5x dx.$
5 $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[6]{x}-1)}$	5 $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$
Варіант № 4	**Варіант № 5**	**Варіант № 6**
1 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}dx$	1 $\int \sqrt[6]{1-2x^3}\cdot x^2 dx$	1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$
2 $\int x^2 \sin 5x dx$	2 $\int (2x-1)e^{2x}dx$	2 $\int x \arccos 3x dx$
3 $\int \frac{(6x+3)dx}{(x-4)(x^2-2x+1)}$	3 $\int \frac{(1-x)dx}{x^3+4x^2+4x}$	3 $\int \frac{3x^2+13x+11}{(x+1)^2(x+2)}dx$
4 $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$	4 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$	4 $\int \cos 2x \cos^2 x dx$
5 $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$	5 $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{3(1+\sqrt[3]{x})}dx$	5 $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$
Варіант № 7	**Варіант № 8**	**Варіант № 9**
1 $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$	1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^7 x}$	*1* $\int e^x \cos e^x dx$
2 $\int x^2 \sin\frac{x}{3}dx$	2 $\int x \ln(x-5)dx$	2 $\int x \arcsin 2x dx$
3 $\int \frac{dx}{(x^2-x-2)(x-1)}$	3 $\int \frac{x^3-3x}{x^2-6x+8}dx$	3 $\int \frac{(x+1)dx}{x^3+x^2-2x}$
4 $\int \cos 2x \cos\frac{x}{3}dx$	4 $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$	4 $\int \frac{dx}{3\cos x-2\sin x}$
5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$	5 $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$
Варіант № 10	**Варіант № 11**	**Варіант № 12**
1 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}$	1 $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3 x}}{x}dx$	1 $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$
2 $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$	2 $\int \frac{x\cos x dx}{\sin^3 x}$	2 $\int (x^2-1)10^{-2x}dx$
3 $\int \frac{x^2+5x+1}{x^2+4}dx$	3 $\int \frac{x^6+1}{x^3-5x^2+4x}dx$	3 $\int \frac{4xdx}{2x^2-3x+1}$

4 $\int x\sin^2 7x dx$	4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x}$	4 $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$
5 $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-7x+13}}dx$	5 $\int \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\sqrt{x}}$	5 $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+9}}dx$
Варіант № 13	**Варіант № 14**	**Варіант № 15**
1 $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}dx$	1 $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$	1 $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\cos^2 x}$
2 $\int \ln(x^2+9)dx$	2 $\int \frac{xdx}{\cos^2 3x}$	2 $\int x^3 \arcsin\frac{1}{x}dx$
3 $\int \frac{(x+2)dx}{x^3+2x^2-3x}$	3 $\int \frac{x^4+3}{x(x^2+4x-5)}dx$	3 $\int \frac{x^3-3x^2+x}{(x-3)(x^2-1)}dx$
4 $\int \frac{dx}{\cos x\sin^5 x}$	4 $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$	4 $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$
5 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$	5 $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-2)}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$	5 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x}}$
Варіант № 16	**Варіант № 17**	**Варіант № 18**
1 $\int \frac{8^{3x}dx}{3+8^{6x}}$	1 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-3\ln x}}$	1 $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$
2 $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x dx$	2 $\int \left(x^2-3x\right)\sin 5x dx$	2 $\int \left(x^2-1\right)\ln x dx$
3 $\int \frac{x^2+4x+1}{2x+2}dx$	3 $\int \frac{x^3+x-1}{\left(x^2+2\right)\left(x-1\right)}dx$	3 $\int \frac{x^5+1}{16-x^4}dx$
4 $\int \cos\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}dx$	4 $\int \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{5x}{2}dx$	4 $\int \frac{dx}{3+\operatorname{tg} x}$
5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$	5 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}}$	5 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$
Варіант № 19	**Варіант № 20**	**Варіант № 21**
1 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$	1 $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$	1 $\int \sin^7 7x\cos 7x dx$
2 $\int xe^{2x+3}dx$	2 $\int x\operatorname{arctg}\left(2x+3\right)dx$	2 $\int \left(2x-1\right)\cos\frac{x}{3}dx$
3 $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$	3 $\int \frac{x^3+2}{x(x^2+2x-3)}dx$	3 $\int \frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$
4 $\int \frac{\sin x dx}{6-5\cos x+\cos^2 x}$	4 $\int \frac{dx}{2+\cos x-2\sin x}$	4 $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

5 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{17-2x-x^2}}$	5 $\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-7x+3}}$	5 $\int \frac{\sqrt{4-x}}{(\sqrt{4-x}+3)^3}dx$
Варіант № 22	**Варіант № 23**	**Варіант № 24**
1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{4x^3-6}}$	1 $\int \left(e^{2x}+5\right)^3 e^{2x}dx$	1 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$
2 $\int x\cdot 5^{2x}dx$	2 $\int \ln\left(2x+1\right)dx$	2 $\int \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x}dx$
3 $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$	3 $\int \frac{x^5-2x}{x^3-1}dx$	3 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$
4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x-5\sin^2 x+2}$	4 $\int \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3}dx$	4 $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx$
5 $\int \frac{5x-3}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{7+4x-2x^2}}$	5 $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}-4}dx$
Варіант № 25	**Варіант № 26**	**Варіант № 27**
1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-11x^6}}$	1 $\int x^2e^{5-3x^3}dx$	1 $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{6-\sin^2 x}}$
2 $\int \frac{\ln\operatorname{ctg} x}{\cos^2 x}dx$	2 $\int x\sin 3x\cos 3xdx$	2 $\int x\ln\left(1+x^3\right)dx$
3 $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$	3 $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$	3 $\int \frac{x^2+24}{x(x^2-7x+12)}dx$
4 $\int \frac{2\operatorname{tg} x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$	4 $\int \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\left(1+\operatorname{tg} x\right)^2}dx$	4 $\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$
5 $\int \frac{7x-1}{\sqrt{9+4x-x^2}}dx$	5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$	5 $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$
Варіант № 28	**Варіант № 29**	**Варіант № 30**
1 $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{5-3e^{4x}}}$	1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(2-3\operatorname{ctg} x\right)}$	1 $\int \frac{\cos^2 x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$
2 $\int \left(x+1\right)\operatorname{arctg} xdx$	2 $\int x^2\sin\frac{x}{2}dx$	2 $\int \frac{\ln\left(2x+1\right)}{x^2}dx$
3 $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$	3 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$	3 $\int \frac{x^3dx}{x^3-4x^2+3x}$
4 $\int \frac{dx}{1+5\sin^2 x}$	4 $\int \sin^3 2x\cos^2 2xdx$	4 $\int \frac{dx}{5\cos x-3\sin x+2}$

5 $\int \frac{x^3 dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+10x+29}}$	5 $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{x(2+\sqrt[3]{x})}dx$

Завдання 2.2 Розв'язати задачі.

Варіант 1

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = a\sin 2t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $y = x^3, y = 0, x = 2.$

3 Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2(1-\cos\varphi)$, що розташована в середині круга $r \le 1$.

Варіант 2

1 Знайти площу фігури, обмеженої лінією

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3 \end{cases} ; \quad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}.$$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = \cos x, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{2}, y = 0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = \sqrt{2}\cdot e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Варіант 3

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x + 3$ і $y = 3x - 1$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* кривої

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}(t^2-3) \end{cases} ; \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$.

Варіант 4

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sqrt{\sin 2\varphi}.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 2x - x^2$ і $y = 2 - x.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y = 1 - \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

Варіант 5

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2 + \sin\varphi.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* параболи $y^2 = 2x$ від її вершини до точки з абсцисою $x = \frac{3}{2}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 3(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Варіант 6

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = (x+2)^2, y = 4 - x$ і $y = 0$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r = 2a(1 + \cos\varphi)$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(t^2 + 1), \\ y = \dfrac{a}{3}(t^3 - 3t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$

Варіант 7

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 5 - x^2$, $y = x - 1$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6}, \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4}, \end{cases} \quad 0 \le t \le \sqrt[4]{8}$.

Варіант 8

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = e^{-2x}, y = 0, x = -\dfrac{1}{2}, x = 1$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$ і $y = x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(\dfrac{1}{3} - t^2), \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

Варіант 9

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = \cos 3\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = x + 4$ і $x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = a\ln(a^2 - x^2)$, $0 \le x \le \dfrac{a}{2}$.

Варіант 10

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $xy = 8$, $x = 6$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = (x+4)^3$ і $x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 11

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3}, \\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$ і $y = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $x+y-2=0$ і $x^2+y^2=4$.

3 Знайти довжину дуги лінії $y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ між точками перетину її з віссю абсцис.

Варіант 12

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=tgx,\ y=ctgx,\ x=\frac{\pi}{6}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \end{cases}\ 0\le t\le 3\pi$.

Варіант 13

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=6-x$ і $y=\frac{5}{x}$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=3\sin t. \end{cases}$

3 Знайти довжину спіралі $r=5\varphi$, що розташована в області, яка обмежена колом $r=10\pi$.

Варіант 14

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2-2x$ і $y-3=0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $xy=4,\ y=1,\ y=2,\ x=0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases}\ 0\le t\le 1.$

Варіант 15

1 Знайти площу фігури, обмеженої лінією $r=4\cos 2\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=e^x,\ y=0,\ x=0, x=1.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y=\arcsin x+\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1.$

Варіант 16

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r=2+\cos 2\varphi.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y=\frac{x^3}{3},\ -2\le x\le 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x=a(\cos 2t+\ln tgt), \\ y=a\sin 2t, \end{cases}\ \frac{\pi}{8}\le t\le\frac{\pi}{4}.$

Варіант 17

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r=1-2\sin\varphi.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

3 Знайти довжину дуги кривої $y^2 = (4 - x)^3$, що відрізана прямою $x = 0, (x \geq 0)$.

Варіант 18

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$ і $y = x + 2$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$ $x = -1$, $x = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Варіант 19

1 Знайти площу фігури, обмеженої першим витком спіралі Архімеда $r = a\varphi$ і полярною віссю.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$, $y = x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \leq x \leq 2$.

Варіант 20

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $r = 2 - \cos\varphi$ і $r = \cos\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = x$, $y = \frac{x}{2}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = -\ln\cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$.

Варіант 21

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x + y = 6$, $y = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* криволінійної трапеції, що обмежена лініями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases} \text{ і } y = 4$$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$, $0 \leq \varphi \leq 3\pi$.

Варіант 22

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2(2 + \cos\varphi)$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 = \frac{3}{2}x$, $x^2 + y^2 = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$, $0 \leq x \leq 3$.

Варіант 23

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sin 2\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = tgx$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $x = -\frac{\pi}{4}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}$, $1 \le x \le 2$.

Варіант 24

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 3\sin 3\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $y^3 = 4x^2$ і $y = 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Варіант 25

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t^3}{3} \end{cases}$ і $x = 4$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = 2^x$, $y = 4^x$, $x = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

Варіант 26

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 4$ і $x = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

2 Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2(1 + \cos\varphi)$, що розташована в області, яка обмежена колом $r = 2$.

Варіант 27

1 Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1 - \cos\varphi)$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі *Ox* кривої $y^2 = 4x$ від її вершини до точки з абсцисою $x = 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

Варіант 28

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = ae^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{4} - 1$ і $y = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{2}{\pi}\ln\cos\frac{\pi x}{2}$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

Варіант 29

1 Знайти площу фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ і віссю абсцис.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2 + x - 4 = 0$ і $x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = e^{a\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Варіант 30

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 12\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Oy* фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$ і $y = -x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = 6(1 + \sin\varphi)$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$.

Завдання 2.3 Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

Варіант 1

1. $y'\sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$.
2. $(x + 2y)dx - xdy = 0$, $y(1) = 1$.
3. $y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x$.

Варіант 2

1. $y' = \frac{2x}{3y^2 + 1}$.
2. $3xy' = x + 4y$, $y(1) = 1$.
3. $y' = e^{2x} - ye^x$.

Варіант 3

1. $y' = y \cdot tgx$.
2. $xy^2 y' = x^3 + y^3$, $y(1) = 3$.
3. $xy' - 3y = x + 1$.

Варіант 4

1. $y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.
2. $xy' - x\cos^2\frac{y}{x} = y$.
3. $\frac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$.

Варіант 5

1. $y^2 y' + x^2 = 1$.
2. $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.
3. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$.

Варіант 6

1. $y' = y^2\cos 2x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
2. $xy' = 2y$.
3. $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

Варіант 7

1. $y' = \frac{4y}{x^2 - 4}$.
2. $yy' + x = 0$.

Варіант 8

1. $y' = \frac{x^2 - 2}{1 - y^3}$.
2. $3xy' = x + 4y$.

3. $xydx + (x+1)dy = 0$.

Варіант 9

1. $y' = e^{x+y}$.
2. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.
3. $y' - y\operatorname{ctg}x = \operatorname{tg}^2 x$.

Варіант 10

1. $y \cdot y' + x = 5$.
2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $xy' + y = \ln x + 1$.
3. $xy' - 2y = 2x^4, \quad y(2) = 8$.

Варіант 11

1. $(x^2+1)y' - 4xy = 0$.
2. $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.
3. $x(1+x^2)dy = (y + yx^2 - x^2)dx$, $y\big|_{x=1} = -\frac{\pi}{4}$.

Варіант 12

1. $yy' = (1-3x^2)y^{-2}$.
2. $y' - \frac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$.
3. $(x+1)\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^2$.

Варіант 13

1. $y'\operatorname{tg}x - y = 1$.
2. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.
3. $y' - 2xe^x y^3 - y = 0, \quad y\big|_{x=0} = 1$.

Варіант 14

1. $yy' = -\frac{2x}{\cos y}$.
2. $(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}\cdot dy = 0$.
3. $(y' - y)x = e^x, \quad y\big|_{x=1} = e$.

Варіант 15

1. $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.
2. $(y + 2\sqrt{xy})dx - xdy = 0, \quad y(e) = e$.
3. $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.

Варіант 16

1. $(1+x^2)dy + ydx = 0$.
2. $xdy - ydx = x\sin^2\frac{y}{x}\cdot dx$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Варіант 17

1. $y' = \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y$.
2. $(x+y)dx + (x+2y)dy = 0$.
3. $tds - 2sdt = t^2\ln t \cdot dt$.

Варіант 18

1. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$.
2. $y = x(y' + \sqrt[x]{e^y})$.
3. $y' - y\operatorname{tg}x = \sin 2x, \quad y(\pi) = \frac{4}{3}$.

Варіант 19

1. $(x+1)y' = xy$.
2. $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$.
3. $y' + \frac{1-2x}{x^2 - x} = 1, \quad y(2) = -2\ln 2$.

Варіант 20

1. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.
2. $y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$.
3. $y'\operatorname{ctg}x - y = 2\cos^2 x\operatorname{ctg}x$.

Варіант 21

Варіант 22

1. $ydx + ctg\,xdy = 0$.
2. $3xy' = x + 4y, \quad y(1) = 1$.
3. $(\varphi^2 - 1)r' - \varphi r = \varphi^3 - \varphi$.

1. $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$.
2. $xy' - 3y = \dfrac{x^2}{y}$.
3. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, \quad y\big|_{x=1} = 1$.

Варіант 23

1. $xydx = -(x+1)dy$.
2. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right)dy = 0, \quad y\big|_{x=0} = 2.$
3. $xy' - 2y = x + 1$.

Варіант 24

1. $y' - y\sin 2x = 0$.
2. $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$.
3. $y'\cos x + y\sin x = 1, y(0) = 1$.

Варіант 25

1. $yy' = \dfrac{2+x}{y}$.
2. $y' = \dfrac{x+2y}{x}$.
3. $y' + (1 + \dfrac{1}{x^2})y = e^{\frac{1}{x}}$.

Варіант 26

1. $S\,\mathrm{tg}\,t \cdot dt + dS = 0$.
2. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}, \quad y(-1) = 2$.
3. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 4x + 5$.

Варіант 27

1. $(1+y^2)xdx + (1+x^2)dy = 0$.
2. $xy'\sin\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x$.
3. $y' + \dfrac{3y}{x} = 7x^3 + 2x^2$.

Варіант 28

1. $y' = y^2\cos 2x, \quad y(\dfrac{\pi}{2}) = 1$,
2. $xy'\sin\dfrac{y}{x} = y\sin\dfrac{y}{x} - x$.
3. $y' + \dfrac{y}{x+1} = 3x - 1$.

Варіант 29

1. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.
2. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.
3. $tdx + (x - t\sin t)dt = 0$.

Варіант 30

1. $(x+1)y' + xy = 0$.
2. $tx' + t\cos\dfrac{x}{t} - x + t = 0$.
3. $y'\cos x - 2y\sin x = 2$.

Завдання 2.4 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $2y'' - 9y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 6$.
2. $y'' + 4y' + 5y = 0$

Варіант 2

1. $2y'' + 5y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
2. $y'' - 2y' = 5y = 0.$

3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Варіант 3

1. $3y'' + 5y'' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0.$
3. $y'' + 2y' + y = 0$

Варіант 4

1. $4y'' + y' - 3y = 0, y(0) = 1{,}5, y'(0) = 0{,}25.$
2. $y'' + 4y = 0.$
3. $y'' - 2y' + y = 0.$

3. $4y'' + 4y' + y = 0.$

Варіант 5

1. $10y'' - 3y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0{,}1.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 8y' + 16y = 0.$

Варіант 6

1. $3y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7.$
2. $y'' + 9y = 0.$
3. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

Варіант 7

1. $3y'' + 2y' - 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{14}{3}.$
2. $y'' - 4y' + 29y = 0.$
3. $0{,}04y'' + 0{,}4y' + y = 0.$

Варіант 8

1. $4y'' - 17y' = 15y = 0, y(0) = 7, y'(0) = 0{,}5.$
2. $y'' + 16y = 0.$
3. $y'' + y' + 0{,}25y = 0.$

Варіант 9

1. $5y'' - 8y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{5}.$
2. $y'' - 8y' + 20y = 0.$
3. $y'' - 14y' + 49y = 0.$

Варіант 10

1. $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$
2. $y'' + 8y' + 25y = 0.$
3. $25y'' - 10y' + y = 0.$

Варіант 11

1. $2y'' - 7y' + 6y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 4.$
2. $y'' + 25y = 0.$
3. $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

Варіант 12

1. $y'' - y' - 12y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 10.$
2. $y'' - 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 16y' + 64y = 0.$

Варіант 13

1. $y'' + 14y' + 24y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 20.$
2. $y'' - 4y' + 5y = 0.$
3. $\frac{1}{4}y'' - y' + y = 0.$

Варіант 14

1. $y'' - 11y' - 60y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 4.$
2. $y'' + y' = 0.$
3. $9y'' + 24y' + 16y = 0.$

Варіант 15

1. $y'' - y' - 20y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 8.$
2. $y'' - 6y' + 10y = 0.$
3. $4y'' - 20y' + 25y = 0.$

Варіант 16

1. $9y'' - 6y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$
3. $y'' - 10y' = 0.$

Варіант 17

1. $y'' + 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 4y = 0.$

Варіант 18

1. $y'' + 7y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6.$
2. $\frac{4}{9}y'' - \frac{4}{3}y'' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

Варіант 19

1. $4y'' - 8y' + 5y = 0, y(0) - 2, y'(0) = 3.$
2. $y'' + 5y' - 14y = 0.$
3. $16y'' - 40y' + 25y = 0.$

Варіант 20

1. $y'' + 4y' - 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 8.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $169y'' + 26y' + y = 0.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' = 0, y(0)2, y'(0)2.$
2. $y'' - 6y' + 34y = 0.$
3. $y'' - 22y' + 121y = 0.$

Варіант 22

1. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $81y'' - 18y' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 17y = 0.$

Варіант 23

1. $y'' - 3y' - 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$
2. $100y'' - 20y' + y = 0.$
3. $y'' - 6y' + 25y = 0.$

Варіант 24

1. $4y'' - 7y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{4}.$
2. $y'' + 10y' + 61y = 0.$
3. $121y'' - 44y' + 4y = 0.$

Варіант 25

1. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1.$
2. $y'' - 8y' + 15y = 0.$
3. $17y'' + 2y' + y = 0.$

Варіант 26

1. $3y'' + 7y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + 49y = 0.$
3. $4y'' - 28y' + 49y = 0.$

Варіант 27

1. $y'' + 4y' + 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 5y' - 14y = 0.$
3. $1{,}44y'' - 2{,}4y' + y = 0.$

Варіант 28

1. $2y'' - 3y' - 35y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5.$
2. $y'' - 14y' + 58y = 0.$
3. $81y'' - 36y'' + 4y = 0.$

Варіант 29

1. $y'' - 13y' + 22y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 3.$
2. $y'' + 81y = 0.$
3. $y'' - 30y' + 225y = 0.$

Варіант 30

1. $5y'' - 6y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' + 26y = 0.$
3. $y'' - 5y' + 6{,}25y = 0.$

Завдання 2.5 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1, y(0) = \frac{29}{32}, y'(0) = -\frac{3}{8}.$
2. $y'' + 4y = 8\sin 2x.$

Варіант 2

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y''(0) = 11.$
2. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + \cos 2x.$

Варіант 3

1. $y'' + 4y = 8x, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$

Варіант 4

1. $y'' + 4y' + 4y = 5e^{3x}, y(0) = \frac{1}{5}, y'(0) = \frac{8}{5}.$
2. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$

Варіант 5

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}, y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 3y' = 9x.$

Варіант 6

1. $y'' + 4y = 4\sin x, y(0) = 0, y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$

Варіант 7

1. $y'' - 2y' = x^2 - x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

Варіант 8

1. $y'' + y = x^2, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

2. $y'' + 2y' + 2y = 4\sin 2x + 2\cos 2x.$

2. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 2k\sin kt.$

Варіант 9

1. $y'' - 2y' + 10y = 5x + 9, y(0) = 4, y'(0) = 6{,}5.$
2. $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx.$

Варіант 10

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$
2. $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 2.$

Варіант 11

1. $y'' + y = \cos 2x, y(0) = -\dfrac{1}{3}, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 4y = 4e^{2x}x^2.$

Варіант 12

1. $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0.$
2. $y'' + y = 4\sin x.$

Варіант 13

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x + 3, y(0) = 2, y'(0) = 6.$
2. $y'' + 2y' - 3y = e^x x^2.$

Варіант 14

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

Варіант 15

1. $y'' - 3y' = x + \cos x, y(0) = -\dfrac{1}{10}, y'(0) = -\dfrac{1}{9}.$
2. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$

Варіант 16

1. $y'' - 2y' + y = e^x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$
2. $y'' + 4y' + 8y = 20\sin 2x.$

Варіант 17

1. $y'' - 4y = 8x + 3, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
2. $y'' + 9y = e^x \cos 3x.$

Варіант 18

1. $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

Варіант 19

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y'(0) = 11.$
2. $y'' + 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$

Варіант 20

1. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, y(0) = \dfrac{4}{3}, y'(0) = \dfrac{1}{27}.$
2. $y'' + 4y' = 8e^{4x}.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, y(0) = 2, y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' = 6e^{3x}.$

Варіант 22

1. $4y'' + y' - 3y = 3x^2 + x.$
2. $y'' - y = 8e^x, y(0) = 2, y'(0) = 4.$

Варіант 23

1. $y'' + 4y = \sin x, y(0) = y'(0) = 1.$
2. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$

Варіант 24

1. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x.$

Варіант 25

1. $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x, y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' - 8y' + 16y = 32x.$

Варіант 26

1. $y'' - 2y' + y = 4\sin x + 4\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' + y' = 49 - 2x^2.$

Варіант 27

1. $y'' - 3y' = 6 - 3x^2, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2. $y'' + y = \sin x - \cos x.$

Варіант 28

1. $y'' - 2y' + y = 16e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x + 3.$

Варіант 29

1. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Варіант 30

1. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + y' = 49 - 24x^3.$

2. $y'' + 2y' + y = 3\sin x.$

Завдання 2.6 Дослідити збіжність числових рядів.

1.01

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{tg\frac{1}{n}}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3^n(n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{-n^2}$.

1.02

а) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{2n+1}{n^3(n^2-1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}(n^4+2)}{(n+1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$.

1.03

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}+n-4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+3)!}{(2n+5)5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} \frac{1}{2^n}$.

1.04

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\frac{2}{n}}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{7n+2}\right)^{\frac{n}{3}}$.

1.05

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\frac{2n^2+1}{2n^2+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n!}\sin\frac{3}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{7^n}$.

1.06

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}\sin\frac{1}{2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n\sqrt[5]{n^3}}{(n+2)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n}{7n+2}\right)^{-n}$.

1.07

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n+5n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(4n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{8n+1}\right)^{\frac{n}{5}}$.

1.08

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\sqrt[4]{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n(n+3)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3n+2)^n}$.

1.09

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(3n+4)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n^2-2)}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{5n}$.

1.10

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{6n^3-5}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n3^{n+2}}{5^n}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^5 n}$.

1.11

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n^2+n-4}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{arctg\frac{2}{n}}{(n+3)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^n\frac{\pi}{3^n}$.

1.12

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n+2}{n3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2)\ln^2(3n+2)}$.

1.13 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+5}{2n^2+6n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{9n+4}\right)^{3n}$.

1.14 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{5n^3-1}{5n^3+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\ln^2(n\sqrt{2})}$.

1.15 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^2+3)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{2\pi}{5n}$.

1.16 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}\sqrt[5]{n}}{n!}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(5n)}$.

1.17 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n-2)(n+5)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{1}{7^n}$.

1.18 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{5}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln n}}$.

1.19 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+\ln^3 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-3}\sqrt{n^2+4}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+1}\right)^{2n}$.

1.20 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n^2+5)(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+5)}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$.

1.21 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\sqrt[5]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^n}{6^{n^2}}$.

1.22 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}arctg\frac{1}{(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^3 n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n}{n+3}\right)^n$.

1.23 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^3(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2+2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$.

1.24 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(n+1)}{n!6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{7n+3}\right)^{2n}$.

1.25 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{3}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n}}$.

1.26 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{\pi}{3\sqrt[4]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n(n+3)!}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

1.27 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\sqrt[7]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\ln^n(n+4)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt[6]{\ln(n+2)}}$.

1.28 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\left(\frac{n+3}{5n+2}\right)^{3n}}$.

1.29 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+\sin^2 2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\arcsin^n\frac{1}{2n}}$.

1.30 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{1}{3n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(3n-1)!}$; в) $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{(n-4)\ln(n-4)}$.

Завдання 2.7 Установити, як збігається ряд: абсолютно, умовно чи розбігається.

2.01 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+2}{n(n+3)}$.

2.02 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(n+2)}$.

2.03 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$.

2.04 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[5]{4n+5}}$.

2.05 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos\frac{2\pi}{5n}$.

2.06 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{2n}$.

2.07 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+3)5^{3n}}$.

2.08 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt[5]{n^2}}$.

2.09 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5n+2}}$.

2.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln(n+3)}{n+3}$.

2.11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln(3n)}$.

2.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+5)3^{2n+3}}$.

2.13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)$.

2.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin 4^n}{4^n}$.

2.15 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{arctg\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{3n+1}}$.

2.16 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+5)\left(\frac{8}{3}\right)^n}$.

2.17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n^2+1}{n^4+5n^2+4}$.

2.18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}tg\frac{\pi}{9^n}$.

2.19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n}{5^n}$.

2.20 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{3^n(n+1)!}$.

2.21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{(n+4)^n}$.

2.22 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3(n+2)}$.

2.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{tgn\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

2.24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2n}{7n+5}$.

2.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^5}$.

2.26 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{n^2}$.

2.27 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{2^n(3n+1)}$.

2.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+4n+1}$.

2.29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n(n+2)}{7^n}$.

2.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^4}{e^n}$.

Завдання 2.8 Знайти радіус та область збіжності степеневого ряду.

3.01 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n3^n}$.

3.02 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n2^n}$.

3.03 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\sqrt{(2n-1)7^n}}$.

3.04 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^{n+1}5^n}$.

3.05 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}x^{2n+1}}{(3n-1)^2}$.

3.06 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{8^n(n+3)}$.

3.07 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n(4n+3)}$.

3.08 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)x^n}{2^n(n^2+6)}$.

3.09 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

3.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n x^n}{\sqrt[7]{n}}$.

3.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)(x-4)^n}{2^n(n+1)}$.

3.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+1)x^{2n}}{9^n}$.

3.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n}}{7^n}x^n$.

3.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^n}{6n+5}$.

3.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n.$

3.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+3)!}.$

3.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x-3)^n}{(n^2+2)5^n}.$

3.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n3^{n+2}}.$

3.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+3)7^{n+1}}.$

3.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n}}{9^n(n+4)}.$

3.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)x^n}{5^n(n^2+1)}.$

3.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n^2 5^n}.$

3.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{\sqrt{n^5+2}}.$

3.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2\sqrt{n^3+3}}.$

3.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^{n+1}}.$

3.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{(n^2+5)2^n}.$

3.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n x^n}{(n+5)!}.$

3.28 $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n+1}x^{2n-2}.$

3.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt{n+2}}{7^n}x^n.$

3.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n x^n}{\sqrt[7]{n^2}}.$

Завдання 2.9 Розвинути функцію в ряд Тейлора.

4.1 $f(x)=\ln(x+2)$ за степенями $x-1$.

4.2 $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $x+1$.

4.3 $f(x)=\sqrt{x}$ за степенями $x-4$.

4.4 $f(x)=\frac{1}{x+2}$ за степенями $x-1$.

4.5 $f(x)=e^{3x}$ за степенями $x-1$.

4.6 $f(x)=\frac{1}{x-4}$ за степенями $x+2$.

4.7 $f(x)=\ln(x+2)$ за степенями $x-1$.

4.8 $f(x)=e^x$ за степенями $x+1$.

4.9 $f(x)=\ln(x+5)$ за степенями $x-1$.

4.10 $f(x)=e^{\frac{x}{a}}$ за степенями $x-a$

4.11 $f(x)=\cos x$ за степенями $x-\frac{\pi}{2}$.

4.12 $f(x)=x^4$ за степенями $x+1$.

4.13 $f(x)=x^3-3x$ за степенями $x-1$.

4.14 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ за степенями $x+1$.

4.15 $f(x)=\cos^2 x$ за степенями $x-\frac{\pi}{4}$.

4.16 $f(x)=\sqrt{x^3}$ за степенями $x-3$.

4.17 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ за степенями $x-\frac{\pi}{2}$. **4.18** $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $x-5$.

4.19 $f(x)=3x^4+6x^3-2$ за степенями $x-1$. **4.20** $f(x)=tgx$ за степенями $x-\frac{\pi}{4}$.

4.21 $f(x)=\sin 3x$ за степенями $x+\frac{\pi}{3}$. **4.22** $f(x)=\sin x$ за степенями $x-\frac{\pi}{2}$.

4.23 $f(x)=x^4-4x^2$ за степенями $x+2$. **4.24** $f(x)=\cos x$ за степенями $x-\frac{\pi}{4}$.

4.25 $f(x)=x^3-2x^2+5x$ за степенями $x-1$. **4.26** $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $x-1$.

4.27 $f(x)=x^3-2x^2-5$ за степенями $x+4$. **4.28** $f(x)=e^x$ за степенями $x+2$.

4.29 $f(x)=\cos^2 x$ за степенями $x-\frac{\pi}{3}$. **4.30** $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$ за степенями $x-1$.

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 2.1 Знайти невизначені інтеграли

1 $\int\frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x}$.

2 $\int x^2\sin 3x dx$.

3 $\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx$.

4 $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}$.

5 $\int\cos^4 x\sin^5 x dx$.

Розв'язання.

1 Оскільки похідна виразу $5+7tgx$ дорівнює $\frac{7}{\cos^2 x}$, а множник $\frac{1}{\cos^2 x}$ відрізняється від цієї похідної лише сталим множником *7,* то змінною інтегрування тут можна вважати вираз $5+7tgx$, і, таким чином, знайти інтеграл:

$$\int\frac{dx}{(5+7tgx)\cos^2 x}=\frac{1}{7}\int\frac{1}{5+7tgx}\cdot\frac{7}{\cos^2 x}dx=\left|\begin{matrix}u=5+7tgx\\ u_x'=\frac{7}{\cos^2 x}\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{7}\int\frac{1}{u}\cdot u_x' dx=\frac{1}{7}\ln|5+7tgx|+C.$$

2 Покладемо $u=x^2$, $dv=\sin 3x dx$. Тоді

$$du=2xdx,\quad v=\int\sin 3x dx=\frac{1}{3}\int\sin 3x d(3x)=-\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою інтегрування частинами знаходимо

$$\int x^2\sin 3x dx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2xdx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3x dx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x,\ dv=\cos 3xdx,$ тоді

$$du = dx, v = \int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\int \cos 3xd(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x\cos 3xdx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3xdx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2 \sin 3xdx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right) + C.$$

$$= \frac{1}{27}\left(-9x^2 \cos 3x + 6x\sin 3x + 2\cos 3x\right) + C.$$

3 Переконуємося, що підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Враховуючи, що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x=0$ і $x=3$ – прості, а $x=1$- двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів A, B, C, D:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}$. Отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-3)(x-1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int \frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx = \int\left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx =$$

$$= -\int\frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3} - \int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

4 Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=2$, $n_2=3$, $n_3=4$, тому $к=12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Покладемо $x=t^{12}$. Тоді

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{c} x = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{array} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12t^{11}dt =$$

$$= 12\int \frac{t^{17}dt}{t^3(t^5-1)} = 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \quad t^{14} \quad\quad\quad\quad\quad\quad \Big| \, t^5 - 1 \\ -\; t^{14} - t^9 \quad\quad\quad\quad \Big| \, t^9 + t^4 \\ \hline \quad\quad t^9 \\ \quad -\; t^9 - t^4 \\ \hline \quad\quad\quad t^4 \end{array} \right| =$$

$$= 12\int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5-1} \right) dt = 12\left(\int t^9 dt + \int t^4 dt + \frac{1}{5}\int \frac{5t^4 dt}{t^5-1} \right) =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left|t^5 - 1\right| \right) + C = \frac{6}{5}\left(t^{10} + 2t^5 + 2\ln\left|t^5 - 1\right| \right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln\left|\sqrt[12]{x^5} - 1\right| \right) + C.$$

5 Маємо інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де $m=5$, $n=4$.

Враховуючи, що $m=5>0$ і непарне, одержимо

$$\int \cos^4 x \sin^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \cos^4 x (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int t^4 (1-t^2)^2 dt = -\int t^4 (1 - 2t^2 + t^4) dt =$$

$$= -\int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \right) + C = -\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} \right) + C.$$

Завдання 2.2 Розв’язати задачі.

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ і параболою $y = \dfrac{x^2}{2}$.

2 Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням параболи $y^2=4x$ навколо своєї осі (параболоїд обертання) і площиною, перпендикулярною до його осі та віддаленою від вершини параболи на відстань, що дорівнює одиниці.

3 Обчислити довжину петлі лінії $x=t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$.

Розв'язання.

1 Крива $y = \frac{x^2}{2}$ – парабола з вершиною в точці $O(0;0)$ і віссю симетрії Oy. Вітки параболи направлені вгору (рис. 2.1).

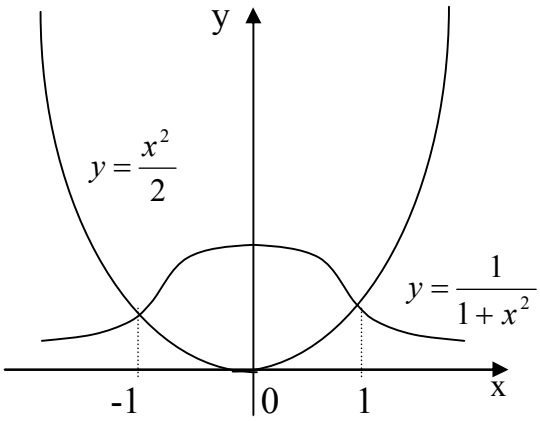

Рис. 2.1

Крива $y = \frac{1}{1+x^2}$ – локон Аньєзі. Із рівняння видно, що при будь-якому x функція набуває лише додатних значень, а тому її графік розташований вище осі Ox, а вісь Oy є її віссю симетрії, бо $y(-x)=y(x)$. Найбільше значення, яке дорівнює одиниці, функція набуває при $x=0$, а при $x \to \pm\infty$ $y \to 0$.

Схематично графік цієї функції зображений на рис. 2.1. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рис. 2.1. Площу заштрихованої фігури обчислимо за формулою:

$$S = \int_a^b \left(y_в(x) - y_н(x)\right)dx .$$

Для визначення меж інтегрування обчислимо абсциси точок перетину ліній, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2}, \\ y = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Звідси $x_1= -1$, $x_2=1$. Отже, $a= -1$, $b=1$.

Враховуючи також, що $y_в = \frac{1}{1+x^2}$, а $y_н = \frac{x^2}{2}$ будемо мати $S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx$, а з урахуванням симетрії фігури відносно осі Oy одержуємо

$$S = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\left(arctgx - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

2 Побудуємо тіло (рис.2.2).

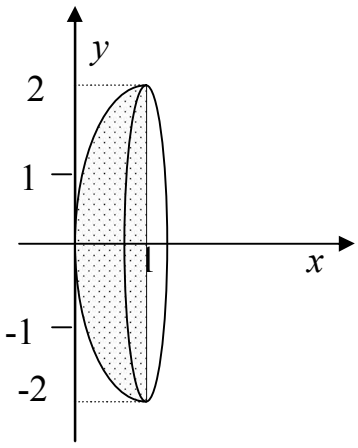

Рис. 2.2

Враховуючи, що $y_в = 2\sqrt{x}$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$, за формулою

$$V_x = \pi\int_a^b \left(y_в{}^2(x) - y_н{}^2(x)\right)dx$$

будемо мати

$$V_x = \pi\int_0^1 4xdx = 2\pi x^2\Big|_0^1 = 2\pi.$$

3 Оскільки межі інтегрування не задані, то слід побудувати лінію, для чого доцільно виключити параметр t із параметричних рівнянь: $y^2 = x\left(1 - \frac{x}{3}\right)^2$. На довжині петлі (рис.2.3) параметр t змінюється від $-\sqrt{3}$ до $\sqrt{3}$.

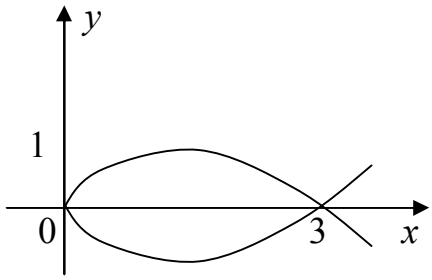

Рис. 2.3

Із урахуванням симетрії лінії відносно осі *Ox*, обчислюємо її довжину за формулою: $L=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt.$

$$L=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2+\left(1-t^2\right)^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+2t^2+t^4}\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(1+t^2\right)dt=2\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}.$$

Зауважимо, що при добуванні квадратного кореня з виразу $\left(1+t^2\right)^2$ враховано, що $1+t^2>0$ для всіх дійсних значень t.

Завдання 2.3 Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

1 $yy'=\dfrac{1-2x}{y}$.

2 $y'=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

3 $y'-ytgx=\sec x$, $y(0)=0$.

Розв'язання.

1 Розв`яжемо рівняння відносно y': $y'=\dfrac{1-2x}{y^2}$. Отримаємо рівняння типу $y'=f_1(x)f_2(y)$, оскільки $\dfrac{1-2x}{y^2}=(1-2x)\dfrac{1}{y^2}$. Замінимо y' на $\dfrac{dy}{dx}$, тоді $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-2x}{y^2}$.

Помноживши обидві частини на y^2dx, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$y^2dy=(1-2x)dx,$$

інтегруючи яке, знаходимо $\dfrac{y^3}{3}=x-x^2+C$ (загальний інтеграл)

або, розв`язавши відносно y, $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$ (загальний розв'язок).

2 Це рівняння типу $y'=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тобто однорідне відносно змінних x і y диференціальне рівняння першого порядку.

Зробимо заміну $\dfrac{y}{x}=u(x)$, звідки $y=ux$, а $y'=u'x+u.$. Підставляючи ці вирази в дане рівняння, отримаємо

$$u'x+u=\frac{1}{u}+u \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx}=\frac{1}{u},$$

а після відокремлювання змінних $udu = \frac{dx}{x}$. Інтегруючи цю рівність, знаходимо $\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{1}{2}\ln|C|$ або $u^2 = \ln|Cx^2|$. Повертаючись до y, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння $\frac{y^2}{x^2} = \ln|Cx^2|$, а, розв`язавши відносно $y$, – загальний розв`язок рівняння

$$y = \pm\sqrt{\ln|Cx^2|}.$$

3 Задане рівняння є лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Знайдемо спочатку його загальний розв`язок. Для цього покладемо $y = uv$, $y' = u'v + v'u$ і підставимо знайдені вирази в рівняння

$$u'v + v'u - uvtgx = \sec x$$

або

$$u'v + u(v' - vtgx) = \sec x.$$

Тоді

1. $v' - vtgx = 0;$

$\frac{dv}{dx} = vtgx;$

$\frac{dv}{v} = tgxdx;$

$\ln|v| = -\ln|\cos x|;$

$v = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.$

2. $u'v = \sec x;$

$u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x};$

$u' = 1;$

$u = x + C.$

$y = uv = (x + C)\frac{1}{\cos x}$ - загальний розв`язок.

При x=0 і y=0 знаходимо значення довільної сталої C

$$0 = (0 + C)\frac{1}{\cos 0} \Rightarrow C = 0.$$

Отже, шуканий частинний розв`язок рівняння буде мати наступний вигляд: $y = \frac{x}{\cos x}$.

Завдання 2.4 Знайти загальний або частинний розв’язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 6; y'(0) = 10.$

2 $y'' - 2y' + y = 0.$

3 $y'' + 6y' + 13y = 0.$

Розв’язання.

1 Спочатку знайдемо загальний розв`язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння $\kappa^2$–4$\kappa$+3 = 0. Його корені $\kappa_1$ = 1 і $\kappa_2$ = 3 дійсні й різні, тому загальний розв`язок має вигляд $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. Диференціюючи y, отримаємо $y' = C_1e^x + 3C_2e^{3x}$. Використовуючи початкові умови, знаходимо значення C_1 і C_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6 = C_1 + C_2, \\ 10 = C_1 + 3C_2. \end{cases}$$

Розв`язуючи систему, одержимо $C_1 = 4$, $C_2 = 2$. Підставляючи ці значення в загальний розв`язок, знаходимо шуканий частинний розв`язок $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

2 Складемо характеристичне рівняння $к^2 - 2к + 1 = 0$.

Оскільки $к^2 - 2к + 1 = (к-1)^2 = 0$, $к_1 = к_2 = 1$. Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні, тому загальний розв`язок запишемо у вигляді $y = (C_1 + C_2 x)e^x$.

3 Складемо характеристичне рівняння $к^2 + 6к + 13 = 0$. Його корені знайдемо за формулою $k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, згідно з якою

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm \sqrt{4i} = -3 \pm 2i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ($к_{1,2} = \alpha \pm \beta i$). Отже, $\alpha = -3$; $\beta = 2$. Тоді загальний розв`язок даного рівняння набуде вигляду

$$y = e^{3x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

Завдання 2.5 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $2y'' + y' - y = 2e^x$.

2 $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

Розв'язання.

1 Дане рівняння є ЛНДР – 2 зі сталими коефіцієнтами й спеціальною правою частиною. Його загальний розв`язок шукаємо у вигляді $y = \bar{y} + Y$. Для знаходження $\bar{y}$ ЛОДР – 2, яке відповідає даному ЛНДР – 2: $2y'' + y' - y = 0$.

Складемо характеристичне рівняння $2к^2 + к - 1 = 0$. Його корені $к_1 = -1$ і $k_2 = \frac{1}{2}$. Отже,

$$\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}.$$

Підставимо Y, Y', Y'' в дане рівняння: $2Ae^x + Ae^x - Ae^x \equiv 2e^x$. Права частина $f(x) = 2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, де $\alpha = 1$, а $n = 0$, тому $Y = Ae^x$ бо $\alpha \neq к_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y' = Ae^x, Y'' = Ae^x$. Звідки знаходимо $A = 1$. Отже, $Y = e^x$, а загальний розв`язок вихідного рівняння

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x.$$

2 Зведемо рівняння до загального вигляду: $y'' + y = -\sin 2x$.

Далі, розв`язуючи його відповідним методом, будемо мати:

$$y = \bar{y} + Y;$$

$$y'' + y = 0; \quad к^2 + 1 = 0; \quad к_{1,2} = \pm i; \quad \alpha = 0; \beta = 1;$$

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Оскільки $f(x) = -\sin 2x$, то $b = 2(\pm bi = \pm 2i \neq k_{1,2})$ і тому

$$\begin{array}{c|l} 1 & Y = M\cos 2x + N\sin 2x \\ 0 & Y' = -2M\sin 2x + 2N\cos 2x \\ 1 & Y'' = -4M\cos 2x - 4N\sin 2x \end{array} \qquad \begin{array}{c|l} \cos 2x & M - 4M = 0; M = 0; \\ \sin 2x & N - 3N = -1; N = \frac{1}{3} \end{array}.$$

Отже, $Y = \frac{1}{3}\sin 2x$ і загальний розв`язок неоднорідного рівняння набуде вигляду: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$.

Знаходимо $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3}\cos 2x.$ Ураховуючи початкові умови: при $x = \pi; y = y' = 1,$ отримаємо систему

$$\begin{cases} 1 = -C_1, \\ 1 = -C_2 + \frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знаходимо $C_1 = -1,$ $C_2 = -\frac{1}{3}.$ Підставляючи числові значення C_1 і C_2 в загальний розв`язок, одержимо шуканий частинний розв`язок

$$y = -\cos x - \frac{1}{3}\sin x + \frac{1}{3}\sin 2x.$$

Завдання 2.6 Дослідити збіжність числових рядів.

1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}.$

2 $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \ldots + \frac{n^2}{3^n} + \ldots$

3 $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \ldots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \ldots$

Розв'язання.

1 Для порівняння обираємо ряд узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Цей ряд збіжний, оскільки $p = 2 > 1$.

За третьою ознакою порівняння рядів маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 - 4n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1 \neq 0.$$

Границя відношення загальних членів рядів існує, отже, заданий ряд так само, як і обраний, збігається.

2 Це ряд, що має додатні члени. Застосуємо до нього ознаку Даламбера. Запишемо $(n+1)$ – й член ряду $u_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2 3^n}{3^{n+1}n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{3n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{6n}=\frac{1}{3}<1,$$

таким чином, ряд збігається.

3 Це ряд, що має додатні члени, його загальний член $u^n=\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n$. Отже, доцільно застосувати радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0<1,$$

таким чином, даний ряд збігається.

Завдання 2.7 Установити, як збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$: абсолютно, умовно чи розбігається.

Розв'язання.

Даний ряд є знакопочережним. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{2-\ln 2}+\frac{1}{3-\ln 3}>\ldots>\frac{1}{n-\ln n}>\ldots$

2) $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0.$

Обидві умови виконуються, тому ряд збігається.

Ряд, складений із абсолютних величин даного ряду, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ розбігається за другою ознакою порівняння, оскільки має місце нерівність $\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$. Отже, даний ряд збігається умовно.

Завдання 2.8 Знайти радіус та область збіжності степеневого ряду

$$10x+100x^2+1000x^3+\ldots+10^n x^n+\ldots$$

Розв'язання. Даний ряд є повним степеневим за степенями x. Знайдемо радіус збіжності за формулою $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$ при $a_n=10^n$;

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n}}=\frac{1}{10}.$$

Для всіх $x \in \left]-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right[$ ряд збігається. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках $x=-\frac{1}{10}$ і $x=\frac{1}{10}$.

При $x=-\frac{1}{10}$ отримаємо знакопочережний ряд $-1+1-1+...+(-1)^n+...$, який розбігається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$.

При $x=\frac{1}{10}$ отримаємо знакододатний ряд 1+1+1+..., який розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності числового ряду $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1\neq 0$.

Отже, областю збіжності степеневого ряду є інтервал $\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$.

Завдання 2.9 Розвинути функцію *f(x)= lnx* в ряд Тейлора за степенями (*x*-1).

Розв'язання.

Обчислимо значення функції та її похідних при *x* = *a* = 1 функції

$f(x) = lnx,$ $\qquad f(1) = ln1 = 0,$

$f'(x)=\frac{1}{x},$ $\qquad f'(1)=1,$

$f''(x)=-x^{-2},$ $\qquad f''(1)=-1,$

$f'''(x)=1\cdot 2x^{-3},$ $\qquad f'''(1)=1\cdot 2=2!,$

$f^{IV}(x)=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4},$ $\qquad f^{IV}(1)=-1\cdot 2\cdot 3=3!,$

....

$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n},$ $\quad f^{(n)}(1)=(-1)^{n-1}(n-1)!.$

Підставляючи дані значення до ряду Тейлора для довільної функції, отримаємо

$$\ln x = 0+(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2!}+\frac{2!(x-1)^3}{3!}+...+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(x-1)^n}{n!}+...=$$

$$=x-1-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+...$$

Бібліографічний список

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.

2 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука, 1985.

3 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

4 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. шк., 2001.

5 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : В. 2т.- М. : Наука, 1985.

6 Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: Справочник. – К.: Наук. думка, 1979.

7 Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах – Т.3. – М.: Высш. шк., 1978.

8 Натансон И.П. Краткий курс высшей математики.- М.: Физматгиз, 1963.

9 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972.

10 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

11 Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х.:ДСВ Основа, 1995.

12 Станішевский С.О. Вища математика. – Х.: ХДАМГ, 2002.

13 Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965.

14 Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. – М.: Айрис- пресс, 2004.

15 Маркушевич А.И. Замечательные кривые. – М.:Наука, 1978.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Математика для економістів (вища математика)» для студентів спеціальності 051 «Економіка»

Укладач: Стасенко Олександр Миколайович

Відповідальний за випуск А.П. Харченко

За редакцією автора

План 2017р., поз.
Підп. до друку 21.10.2016
Надруковано на ризографі.
Тираж 50 прим.

Формат 60х84 1/16.
Обл. -вид. арк.
Умов. друк. арк. 3,5
Зам. №3608.

Папір друк. № 2.
Безкоштовно.

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та віддруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури