Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

Спеціальність 072

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

з навчальної дисципліни

«Вища математика»

Харків 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

спеціальність 072

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичних занять

з навчальної дисципліни

«Вища математика»

Рекомендовано кафедрою вищої математики,
будівельної та теоретичної механіки.
Протокол № 7 від 16.11.2021

Харків
ХНУБА
2021

Методичні вказівки до практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» першого (бакалаврського) рівня/ Укладач: О.В. Бабаєва. Харків: ХНУБА, 2021. 80 с.

Укладач: О.В. Бабаєва

Рецензент О.М. Стасенко

Кафедра вищої математики, будівельної та теоретичної механіки

© Бабаєва О.В., 2021 рік

ВСТУП

Основна мета методичних вказівок — надати допомогу здобувачам вищої освіти під час вивчення теоретичного матеріалу навчальної дисципліни «Вища математика», оволодіти навичками та прийомами розв'язування задач та прикладів.

Представлений матеріал відповідає змісту та послідовності викладання його на лекційних заняттях. Методичні вказівки містять: навчальний матеріал для проведення практичних занять, питання для самоперевірки, задачі для виконання домашніх завдань, бібліографічний список.

Методичні вказівки доцільно використовувати як для роботи в аудиторії,так і під час індивідуальної та самостійної роботи здобувачів вищої освіти.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1

Матриці. Визначники n–го порядку, їх властивості. Методи обчислення визначників. Правило Крамера для розв'язання системи лінійних рівнянь Знаходження розв'язків систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці.

Вектори та дії з ними. Проекція вектора на вісь. Координати вектора. Розподіл відрізка у даному відношенні. Скалярний, векторний та змішаний добутки векторів. Їх властивості та застосування.

Розв'язання прикладів

Приклад 1

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно визначається **різниця *C* двох матриць** $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{m\times n}$**:**

$$C=A-B,\ c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}\quad (i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}). \qquad (1.2)$$

Приклад 2

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \end{pmatrix},\quad k=3,\quad k\cdot A=\begin{pmatrix} 21 & 15 & -12 \\ 3 & 0 & -24 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3 Знайти добуток матриць $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3\cdot 1+1\cdot(-2) & 3\cdot 0+1\cdot 4 & 3\cdot 2+1\cdot 3 \\ (-2)\cdot 1+5\cdot(-2) & (-2)\cdot 0+5\cdot 4 & (-2)\cdot 2+5\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ -12 & 20 & 11 \end{pmatrix}.$

Приклад 4 Знайти A^{-1}, якщо $A=\begin{pmatrix}4 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}$.

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці

$$\det A = 4\cdot1\cdot0+3\cdot2\cdot(-2)+1\cdot(-2)\cdot0-(3\cdot1\cdot0+1\cdot(-2)\cdot0+4\cdot2\cdot(-2))=-12+16=4\neq0,$$

тому обернена матриця існує.

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} для кожного елемента матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 0\end{vmatrix}=4,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}=0,\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix}=0,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=-5,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & -2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=2,\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=6.$$

За формулою обчислення оберненої матриці маємо:

$$A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 0 & -4\\ 6 & 0 & -8\\ -5 & 2 & 6\end{pmatrix}.$$

Приклад 5 Обчислити визначник $\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 4\\ -2 & 5 & 1\end{vmatrix}$

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 3 & 4\\ -2 & 5 & 1\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot1+(-2)\cdot1\cdot5+(-2)\cdot1\cdot4-(-2)\cdot3\cdot(-2)-2\cdot5\cdot4-1\cdot1\cdot1=-65.$$

Приклад 6 Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases}5x_1-2x_2=23,\\ 8x_1+3x_2=12\end{cases}$

методом Крамера;

Розв'язання. Для розв'язання системи за правилом Крамера треба обчислити визначники:

$$\Delta=\begin{vmatrix}5 & -2\\ 8 & 3\end{vmatrix}=15+16=31,\ \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}23 & -2\\ 12 & 3\end{vmatrix}=69+24=93,\ \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}5 & 23\\ 8 & 12\end{vmatrix}=60-184=-124.$$

Тоді $x_1=\dfrac{\Delta_{x_1}}{\Delta}=\dfrac{93}{31}=3,\quad x_2=\dfrac{\Delta_{x_2}}{\Delta}=\dfrac{-124}{31}=-4.$

Приклад 7 Розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases}3x_1-3x_2+2x_3=2,\\ 4x_1-5x_2+2x_3=1,\\ 5x_1-6x_2+4x_3=3\end{cases}$$

а) методом Крамера;

б) матричним способом.

Зробити перевірку.

Розв'язання.

а) Обчислимо визначники

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-3&2\\4&-5&2\\5&-6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&2\\-1&-5&2\\-1&-6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&-3&2\\0&1&-2\\-1&-6&4\end{vmatrix}=(-1)^{3+1}(-1)\begin{vmatrix}-3&2\\1&-2\end{vmatrix}=(-1)(6-2)=-4\,,$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}2&-3&2\\1&-5&2\\3&-6&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&7&-2\\1&-5&2\\0&9&-2\end{vmatrix}=(-1)^{2+1}1\begin{vmatrix}7&-2\\9&-2\end{vmatrix}=(-1)(-14-(-18))=-4,$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix}3&2&2\\4&1&2\\5&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&0&-2\\4&1&2\\-7&0&-2\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}1\begin{vmatrix}-5&-2\\-7&-2\end{vmatrix}=(10-14)=-4,$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix}3&-3&2\\4&-5&1\\5&-6&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&7&0\\4&-5&1\\-7&9&0\end{vmatrix}=(-1)^{2+3}1\begin{vmatrix}-5&7\\-7&9\end{vmatrix}=(-1)(-45-(-49))=-4.$$

Звідки за формулами Крамера

$$x_1=\frac{\Delta x_1}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1,\qquad x_2=\frac{\Delta x_2}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1,\qquad x_3=\frac{\Delta x_3}{\Delta}=\frac{-4}{-4}=1;$$

б) Розв'язок системи матричним способом знаходиться за формулою

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Складемо матриці $A=\begin{pmatrix}3&-3&2\\4&-5&2\\5&-6&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}.$

Знайдемо обернену матрицю системи

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix},$$

для цього обчислимо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-5&2\\-6&4\end{vmatrix}=-8,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-3&2\\-6&4\end{vmatrix}=0,\qquad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-3&2\\-5&2\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4&2\\5&4\end{vmatrix}=-6,\qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&2\\5&4\end{vmatrix}=2,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&2\\4&2\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4&-5\\5&-6\end{vmatrix}=1,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&-3\\5&-6\end{vmatrix}=3,\qquad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&-3\\4&-5\end{vmatrix}=-3,$$

з пункту а) відомо, що $\Delta=-4$, отже

$$X=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-8&0&4\\-6&2&2\\1&3&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}(-8)\cdot2+0\cdot1+4\cdot3\\(-6)\cdot2+2\cdot1+2\cdot3\\1\cdot2+3\cdot1+(-3)\cdot3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

або $x_1 = 1,\ \ x_2 = 1,\ \ x_3 = 1$.
Перевірка.

$$\begin{cases} 3\cdot 1 - 3\cdot 1 + 2\cdot 1 = 2, \\ 4\cdot 1 - 5\cdot 1 + 2\cdot 1 = 1 \\ 5\cdot 1 - 6\cdot 1 + 4\cdot 1 = 3, \end{cases}, \quad \begin{cases} 2 = 2, \\ 1 = 1, \\ 3 = 3. \end{cases}.$$

Приклад 8 Обчислити модулі суми і різниці векторів $\vec{a} = \{3;\ -5; 8\}$ і $\vec{b} = \{-1;\ 1; -4\}$.

Розв'язання. Знайдемо вектори $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$

$\vec{a} + \vec{b} = \{3-1;\ -5+1;\ 8-4\} = \{2;\ -4;\ 4\}$, $\quad \vec{a} - \vec{b} = \{3+1;\ -5-1;\ 8+4\} = \{4;\ -6;\ 12\}$.

Далі матимемо:

$$\left|\vec{a} + \vec{b}\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4} = \sqrt{36} = 6; \quad \left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12} = \sqrt{196} = 14.$$

Приклад 9 Дано вектори $\vec{a} = (-1;2;5)$, $\vec{b} = (3;1;-2)$, $\vec{c} = (4;1;7)$.
Необхідно:
1 знайти орти векторів $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$;
2 перевірити, чи є вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ попарно перпендикулярними;
3 перевірити вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на колінеарність;
4 перевірити, чи є вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ компланарними;
5 знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
6 обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Розв'язання. 1 Скористаємося формулами:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|}\right), \text{ де } |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Дійсно,

$$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30};\ \vec{a}^0 = \left(\frac{-1}{\sqrt{30}}; \frac{2}{\sqrt{30}}; \frac{5}{\sqrt{30}}\right).$$

$$\left|\vec{b}\right| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14};\ \vec{b}^0 = \left(\frac{3}{\sqrt{14}}; \frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{-2}{\sqrt{14}}\right).$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{16+1+49} = \sqrt{66};\ \vec{c}^0 = \left(\frac{4}{\sqrt{66}}; \frac{1}{\sqrt{66}}; \frac{7}{\sqrt{66}}\right).$$

2 Скористаємося умовою перпендикулярності:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0,$$

$$\vec{a} \perp \vec{c} \Leftrightarrow a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 0,$$

$$\vec{b} \perp \vec{c} \Leftrightarrow b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0.$$

Обчислимо скалярні добутки векторів

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ =(-1)·3+2·1+5·(-2)= -11≠ 0, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не перпендикулярні;

$\vec{a}\cdot\vec{c}$ =(-1)·4+2·1+5·7= 33≠ 0, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні;

$\vec{b}\cdot\vec{c}$ =3·4+1·1+(-2)·7= -1≠ 0, тобто вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ не перпендикулярні.

3 Скористаємося умовою колінеарності:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

$\frac{-1}{3}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{5}{-2}$, тобто вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні;

4 Скористаємось умовою компланарності трьох векторів

$$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 7 \end{vmatrix}=-7-16+15-(20+42+2)=-72,$$

$\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$, тобто вектори $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ не компланарні.

5 Площу паралелограма знайдемо за формулою:

$$S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left\|\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\right\|,$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-9\vec{i}+13\vec{j}-7\vec{k}.$$

Отже, $S_{пар}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{(-9)^2+13^2+(-7)^2}=\sqrt{299}$ (кв.од.).

6 Об’єм паралелепіпеда знайдемо за допомогою формули:

$$V=\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|=\left\|\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}\right\|.$$

Отже, $V=\left\|\begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -7 \end{vmatrix}\right\|=|26|=26$ (куб.од.).

Приклад 10 Дано вершини трикутника:

$$A(-1;-2;4),\ B(-4;-2;0),C(3;-2;1).$$

Обчислити його внутрішній кут при вершині B.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори $\vec{BA}$ і $\vec{BC}$ (рис.1.3).

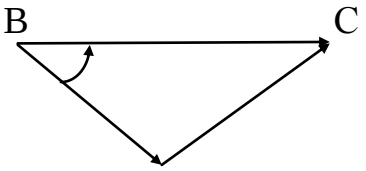

Рис. 1.1

Тоді $\hat{B} = \left(\vec{BA}, \hat{} \vec{BC}\right)$. Через те що

$\vec{BA}$ ={-1+4; -2+2; 4-0}={3; 0; 4},

$\vec{BC}$ ={3+4; -2+2; 1-0 }={7;0; 1},

Тоді:

$$\cos\hat{B} = \frac{3\cdot 7 + 0\cdot 0 + 4\cdot 1}{\sqrt{3^2+0^2+4^2}\cdot\sqrt{7^2+0^2+1^2}} = \frac{21+4}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}} = \frac{25}{5\cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $\hat{B} = 45^0$.

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення матриці.
2 Що називають розміром матриці?
3 Яка матриця називається оберненою і за якою формулою вона знаходиться?
4 Дати означення визначників другого та третього порядку.
5 Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?
6 За яких умов визначник може дорівнювати нулю?
7 Яку систему називають лінійною?
8 Напишіть формули Крамера.
9 Дайте означення вектора і його довжини.
10 Що називається скалярним, векторним, мішаним добутком векторів?
11 Як виконуються операції над векторами, які задані координатами?
12 Сформулюйте умови паралельності, перпендикулярності і компланарності векторів.
13 Сформулюйте приклади застосування скалярного, векторного, мішаного добутків.

Домашнє завдання
Вправи

1 Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a+1 & в-c \\ a^2+a & aв-ac \end{vmatrix}$.

Відповідь: а) 18; б) 10; в) 0; г) 0.

2 Розв'язати рівняння:а) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$; б) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix} = 0$;

Відповідь: а) $x_1 = -\frac{1}{6}$; $x_2 = \frac{3}{2}$; б) $x_1 = 2$; $x_{2,3} = -2 \pm i$.

3 Обчислити визначники:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$;

Відповідь: а) 0; б) 87.

4. Знайти розв'язок системи лінійних рівнянь.

а) $\begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$

Відповідь: а) $x=y=z=1$; б)) $x=1, y=3, z=5$.

5. Відомі дві координати вектора: $a_x = 4$; $a_y = -12$. Знайти його третю координату a_z, якщо $\left|\vec{a}\right| = 13$

Відповідь: $a_z = \pm 3$.

6. Знайти початок вектора $\vec{a}$ ={2; −3; −1}, якщо його кінець збігається з точкою $M(1; -1; 2)$.

Відповідь: $(-1; 2; 3)$.

7. Знайти орт вектора $\vec{a}$ ={2; -3;-1}.

Відповідь: $\vec{a}^0$ ={$\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13}$};

8 Дано три послідовні вершини паралелограма $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$, $C(5; 0; 2)$. Знайти його четверту вершину D та кут між векторами $\vec{AC}$ і $\vec{BD}$.

Відповідь: $D(-1; 1; 1)$; $\left(\widehat{\vec{AC}, \vec{BD}}\right) = 120^0$.

ПАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2

Рівняння лінії. Полярна та декартова системи координат. Різні види рівняння прямої. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих, точка перетину

Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їхні властивості. Загальне рівняння кривої другого порядку

Задача 1 Знайти точки перетину ліній $x^2 + y^2 = 25$ і $x + 7y - 25 = 0$.

Розв'язання. Щоб знайти точки перетину треба розв'язати систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x + 7y - 25 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння системи $x = -7y + 25$. Підставляючи це значення в перше рівняння системи, матимемо $49y^2 - 350y + 625 + y^2 = 25$.

Після спрощення одержимо $y^2 - 7y - 12 = 0$, звідки $y_1 = 3$, $y_2 = 4$. Тоді $x_1 = 7 \cdot 3 + 25 = 4$, $x_2 = -7 \cdot 4 + 25 = -3$.

Отже, лінії перетинаються у двох точках: $M_1(4:3)$ і $M_2(-3:4)$.

Задача 2 Через точку перетину прямих $3x - 4y - 29 = 0\ (l_1)$ і $2x + 5y + 19 = 0\ (l_2)$ проведено пряму паралельно прямій $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 0\ (l_3)$. Скласти її рівняння.

Розв'язання. Знайдемо точку перетину прямих, розв'язуючи систему:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 29, \\ 2x + 5y = -19. \end{cases}$$

Обчислимо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 15+8=23; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 29 & -4 \\ -19 & 5 \end{vmatrix} = 154 - 76 = 69;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 29 \\ 2 & -19 \end{vmatrix} = -57 - 58 = -115.$$

Тоді за формулами Крамера: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{69}{23} = 3; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-115}{23} = -5.$

Таким чином, точка перетину прямих $M_0(3;-5)$.

Використовуючи тепер рівняння (4.7) і умову паралельності двох прямих (4.6), а також враховуючи, що $x_0 = 3$, $y_0 = -5$, $k = k_3 = -\frac{5}{4}$ матимемо:

$$y + 5 = -\frac{5}{4}(x - 3) \quad \text{або} \quad 5x + 4y + 5 = 0.$$

Отже, $5x + 4y + 5 = 0$ — рівняння шуканої прямої. Зауважимо, що рівняння цієї прямої можна знайти інакше. Для цього треба рівняння прямої l записати у загальному вигляді : $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1 \Rightarrow 5x + 4y - 20 = 0$.

За умовою шукана пряма l паралельна прямій l_3, тому її рівняння можна шукати у вигляді $5x + 4y + C = 0$. Через те що точка $M_0(3;-5)$ належить цій прямій, її координати задовольняють рівнянню і тому $5 \cdot 3 + 4 \cdot (-5) + C = 0$, звідки $C = 5$. Таким чином, рівняння прямої l буде

$$5x + 4y + 5 = 0.$$

Задача 3 Скласти рівняння прямої l, яка проходить через точку $M_0(2;1)$ перпендикулярно до даної прямої $2x + 3y + 4 = 0$ (l_1).

Розв'язання. Будемо шукати рівняння прямої l у вигляді:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Через те, що за умовою задачі $l \perp l_1$, $kk_1 = -1$, звідки $k = \frac{3}{2}$. Враховуючи також, що $x = 2$, $y = 1$ остаточно матимемо:

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \quad \text{або } 3x - 2y - 4 = 0 \text{ рівняння прямої } l$$

Задача 4 Знайти проекцію точки $P(-6;4)$ на пряму $4x - 5y + 3 = 0$ (l_1)

Розв'язання. Точка $P(-6;4)$ не належить прямій , бо 4(-6)-54+3 $\neq 0$. Таким чином проекцією точки P на пряму буде основа перпендикуляра, опущеного з цієї точки на пряму l_1 , або інакше точка перетину прямих $P_1 = PP_1 \cap l_l$ (рис. 1.13).

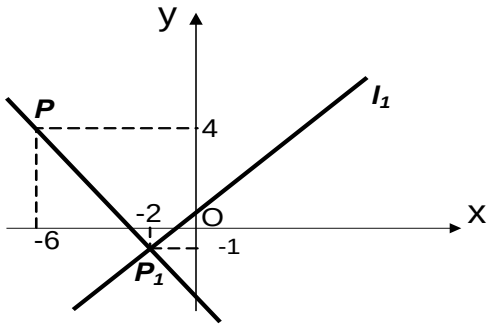

Рис. 2.1

Щоб знайти P_1, складемо спочатку рівняння PP_1: $y - y_p = k(x - x_p)$. Через те , що $PP_1 \perp l_1$, $k = -\frac{1}{k_1} = -\frac{5}{4}$, бо $k_1 = -\frac{A_1}{B_1} = -\frac{4}{-5} = \frac{4}{5}$. Тоді рівняння PP_1 набуде вигляду $y - 4 = -\frac{5}{4}(x+6)$, або $5x + 4y + 14 = 0$.

Розв'язуючи систему $\begin{cases} 4x - 5y + 3 = 0, \\ 5x + 4y + 14 = 0, \end{cases}$ знаходимо P_1 (-2;-1).

Задача 5 Скласти рівняння прямих , які проходять через точку (0;1) під кутом 45^0 до прямої $y = 2x + 1$.

Розв'язання. Кутові коефіцієнти шуканих прямих знайдемо за відповідною формулою Тут $tg\alpha = tg45 = 1$, $k_2 = 2$.

Отже , $1 = \left| \frac{2 - k_1}{1 + 2k_2} \right|$, звідки $a)$ $1 = \frac{2 - k_1}{1 + 2k_1}$, $1 + 2k_1 = 2 - k_1$, $k_1 = \frac{1}{3}$;

$b)$ $1 = 1 - \frac{2 - k_1}{1 + 2k_1}$, $1 + 2k_1 = -2 + k_1$, $k_1 = -3$.

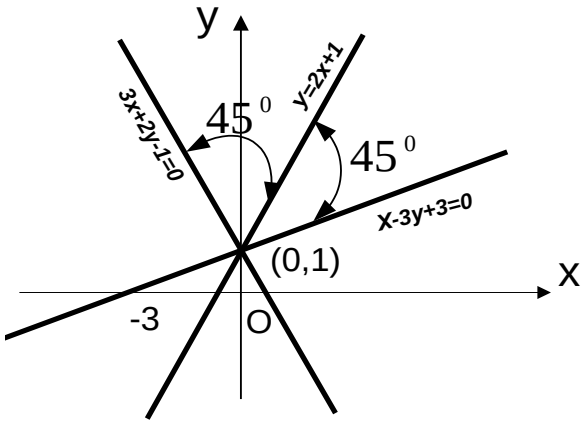

Рис. 2.2

Напишемо рівняння шуканих прямих:

а) $y-1=\frac{1}{3}(x-0)$ або $x-3y+3=0$

б) $y-1=-3(x-0)$ або $3x+y-1=0$

Таким чином, $x-3y+3=0$ і $3x+y-1=0$ – рівняння шуканих прямих (див. рис. 1.14). Зауважимо, що знайдені прямі перпендикулярні.

Задача 6 Скласти рівняння кола, якщо точки $A(3;2)$ і $B(-1;6)$ є кінцями одного з його діаметрів.

Розв'язання. За умовою AB – діаметр кола. це означає, що його центр знаходиться на середині відрізка AB. Маємо:

$$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3-1}{2}=1;$$

$$y_C=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{2+6}{2}=4.$$

Тобто $C(1;4)$- центр кола. Тепер ясно, що рівняння кола треба шукати у вигляді $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$. Підставляючи в це рівняння замість змінних координат координати точки A або B (кожна з них належить колу) і враховуючи, що $x_0=1$, $y_0=4$, матимемо: $(3-1)^2+(2-4)^2=R^2$, звідки $R^2=8$.

Отже, рівняння шуканого кола $(x-1)^2+(y-4)^2=8$.

Задача 7 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{3}{5}$.

Розв'язання.За умовою $2a=20$, $\varepsilon=\frac{3}{5}$. Тоді $a=10$, а згідно з формулою $\varepsilon=\frac{c}{a}$: $c=a\cdot\varepsilon=10\cdot\frac{3}{5}=6$. Тепер із співвідношення $b^2=a^2-c^2$ знаходимо: $b^2=100-36=64$. Підставляючи значення $a^2=100$ і $b^2=64$ в рівняння еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, одержимо $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. Це і є рівняння шуканого еліпса.

Задача 8 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на вісі ординат симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

Розв'язання. За умовою фокуси еліпса лежать на вісі ординат, тому його мала вісь $2a = 16$**,** а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}$. Отже, $a = 8$, $c = \frac{3}{5}b$.

Із співвідношення $a^2 = b^2 - c^2$ маємо: $64 = b^2 - \frac{9}{25}b^2$ або $64 = \frac{16}{25}b^2$, звідки $b^2 = 100$. Таким чином, рівняння шуканого еліпса $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$.

Задача 9 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на вісі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c = 10$, а ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

Розв'язання. За умовою задачі фокуси гіперболи розташовані на вісі ординат, тому її рівняння буде мати вигляд: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Параметри a и b визначаються із системи: $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ \varepsilon = \frac{c}{b}. \end{cases}$

Враховуючи, що $c = 5$, маємо: $\begin{cases} a^2 + b^2 = 25, \\ \frac{5}{b} = \frac{5}{3}; \end{cases}$ $\begin{cases} a^2 = 16, \\ b = 3. \end{cases}$

Таким чином, рівняння гіперболи має вигляд: $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$.

Задача 10 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо вона проходить через точку $M_1(-5;3)$ і її ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$.

Розв'язання. Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Підставляючи в це рівняння замість змінних координат x і y координати точки M_1 (бо вона належить гіперболі), одержуємо: $\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$. За умовою $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$, звідки $c=a\sqrt{2}$. Тоді із співвідношення $b^2=c^2-a^2$ матимемо $b^2=2a^2-a^2=a^2$.

Таким чином, для знаходження невідомих параметрів a і b гіперболи маємо систему: $\begin{cases}\frac{25}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1,\\ b^2=a^2.\end{cases}$ Розв‘язуючи цю систему, знаходимо: $a^2=b^2=16$.

Отже, шукане рівняння гіперболи $x^2-y^2=16$.

Задача 11 Шляхом паралельного переносу осей координат привести до найпростішого вигляду; установити, які геометричні образи вони визначають і побудувати ці образи.

$9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$;

$\left(9x^2-54x\right)-\left(16y^2+64y\right)-127=0$;

$9\left(x^2-6x\right)-16\left(y^2+4y\right)-127=0$;

$9\left(x^2-6x+9\right)-81-16\left(y^2+4y+4\right)+64-127=0$;

$9\left(x-3\right)^2-16\left(y+2\right)^2=144$;

$\frac{\left(x-3\right)^2}{16}-\frac{\left(y+2\right)^2}{9}=1$;

$x-3=X$, $y+2=Y$;

$\frac{X^2}{16}-\frac{Y^2}{9}=1.$

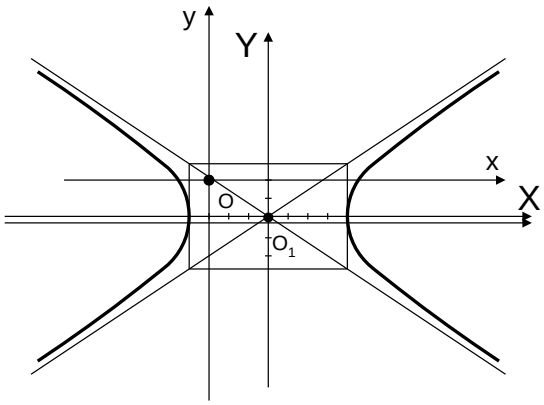

Рис. 2.3

Це рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої $a=4$, уявна $b=3$.

Точка $O_1(3;-2)$ - новий початок координат (центр гіперболи) (рис. 1.20).

Питання для самоперевірки

1 Який вигляд має загальне рівняння кривої другого порядку?
2 Виведіть канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболи.
3 Які геометричні властивості еліпса, гіперболи і параболи?
4 Що називається асимптотами гіперболи?
5

Домашнє завдання

Вправи

1 Скласти рівняння кола, яке проходить через точку $M_1(2;6)$, а його центр знаходиться у точці $C(-1;2)$.

Відповідь: $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

2 Коло дотикається до осі Ox в початку координат і проходить через точку $A(0;-4)$. Скласти його рівняння.

Відповідь: $x^2+y^2+4y=0$.

3 Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(-1;3)$, $B(0;2)$, $C(1;-1)$.

Відповідь: $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

4 Скласти рівняння кола, яке проходить через початок координат, а його центр знаходиться у точці $C(6;-8)$.

Відповідь: $(x-6)^2+(y+8)^2=100$.

5 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на вісі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо він проходить через точку $M_1\left(2;-\frac{5}{3}\right)$ і його ексцентриситет $\varepsilon=\frac{2}{3}$.

Відповідь: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$.

6 Обчислити ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між його фокусами видно з вершин малої осі під прямим кутом.

Відповідь: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7 Скласти рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси знаходяться у точках $(\pm 12;0)$.

Відповідь: $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3

Функція. Основні властивості. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними. Границя функції. Перша та друга особливі границі Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції

Приклад 1 Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}\left(4x^2-6x+3\right)$.

Розв'язання. Застосовуючи послідовно теореми I, 3, 4, 7 одержимо

$$\lim_{x\to 2}\left(4x^2-6x+3\right)=\lim_{x\to 2}\left(4x^2\right)-\lim_{x\to 2}(6x)+\lim_{x\to 2}3=4\lim_{x\to 2}x^2-6\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}3=4\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-6\lim_{x\to 2}x+3=$$
$$=16-12+3=7.$$

Або:

$$\lim_{x\to 2}\left(4x^2-6x+3\right)=4\cdot 2^2-6\cdot 2+3=7.$$

Приклад 2 Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x+1}{x-3}$.

Розв'язання. Щоб перевірити можливість використання теореми 6, треба переконатися в тому, що при граничному значенні аргументу знаменник не дорівнює нулю. При $x=2$ знаменник $x-3$ дорівнює $2-3=-1\neq 0$, а це означає, що теорему про границю частки можна застосувати.

Отже, використавши теорему 6, а також теореми I, 4 і 7 одержимо:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-x+1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}3}=$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x^2\right)-2+1}{2-3}=\frac{4-2+1}{-1}=-3.$$

При безпосередній підстановці граничного значення аргументу $x=2$ у вираз функції матимемо такий самий результат:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x=1}{x-3}=\frac{4-2+1}{2-3}=-3.$$

Приклад 3 Знайти $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$

Розв'язання. Для визначення границі елементарної функції досить у вираз цієї функції підставити граничне значення її аргументу. Тоді

$$\lim_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^3-3}{x^4+x^2=1}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2-3}{\left(\sqrt{3}\right)^4+\left(\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{0}{9+3+1}=\frac{0}{13}=0.$$

Приклад 4 Знайти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1-x}$.

Розв'язання. Границя знаменника дорівнює нулю, тому теорему 6 безпосередньо застосувати не можна, тому що ділення на нуль неможливе. Якщо $\lim\limits_{x\to1}(1-x)=0$, то $1-x$ є величина нескінченно мала, а обернена до неї

$\dfrac{1}{1-x}$ – нескінченно велика. Отже, умовно можна записати, що $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{x-1}=\infty$.

Приклад 5 Знайти $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

Розв'язання. При $x\to1$ чисельник і знаменник даного дробу прямують до нуля. Тому безпосередньо застосування теореми про границю частки тут неможливе. Розкладаючи чисельник і знаменник даного дробу на множники, одержуємо:

$$x^2-2x+1=(x-1)^2,\quad x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1).$$

Тоді

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

Приклад 6 Знайти $\lim\limits_{x\to1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$. Розкладаючи на множники чисельник за формулою $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, а знаменник за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$, матимемо:

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1),$$

$$6x^2-5x+1=0,\qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12},\qquad x_1=\frac{1}{2},\qquad x_2=\frac{1}{3}.$$

$6x^2-5x+1=6(x-1/2)(x-1/3)=(2x-1)(3x-1)$. Отже,

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to 1/2}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{1+1+1}{3/2-1}=6.$$

Приклад 7 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник у точці $x=0$ мають границю, яка дорівнює нулю. Застосувати теорему про границю частки не можна. Тому помножимо чисельник і знаменник дробу на добуток $\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(\sqrt{x^2+16}-4\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+16}+4\right)}{\left(x^2+16-16\right)\left(\sqrt{x^2+1+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+1}+1}=\frac{8}{2}=4.$$

Приклад 8 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Розв'язання. Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

Цей приклад можна було б розв'язати ще й так. При $x\to 0$ $\sin 3x\sim 3x$,

тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=\lim_{x\to 0}3=3.$$

Приклад 9 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{tg5x}$.

Розв'язання. Через те що при $x\to 0$ $tg5x\sim 5x$ *і* $tg2x\sim 2x$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{tg5x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

Приклад 10 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$ і при $x\to 0$

$\sin^2\frac{x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$, матимемо $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}$.

Приклад 11 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x-\sin x}{x^3}$.

Розв'язання. Чисельник і знаменник цього дробу при $x=0$ перетворюється на нуль. Тому застосувати теорему про границю дробу не можна. Перетворимо дріб, додавши чисельник у вигляді добутку:

$$\frac{tg\ x-\sin x}{x^3}=\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\frac{\sin x\left(1-\cos x\right)}{x^{3\cdot}\cdot\cos x}=\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos x}.$$

Тепер дістанемо:

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cdot\cos}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2/4}{x^2}=\frac{1}{2},$$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1,\grave{a}\sin\frac{2x}{2}\sim\frac{x^2}{4}$ при $x\to 0$.Таким чином,

$$\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ x-\sin\ x}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Приклад 12 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

Розв'язання. Ні чисельник , ні знаменник не мають границі при $x\to\infty$. Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на x^4. Дістанемо

$$-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}.$$

Оскільки при $x\to\infty$:

$$1/x\to 0,\quad 1/x^3\to 0,\quad 3/x^2\to 0,\quad 1/x^4\to 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – I. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Приклад 13 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

Розв'язання. При $x\to\infty$ чисельник і знаменник необмежено збільшується (одержуємо невизначеність виду $\frac{\infty}{\infty}$). Поділивши чисельник і знаменник на x^4, тобто на старшу степінь x, і використавши властивості границь, одержимо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^4-5x}{x^2-3x+1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}} = \frac{1-0}{0-0+0} = \frac{1}{0} = \infty,$$

а це означає, що границя функції не існує.

Приклад 14 Знайти $\lim\limits_{x\to x} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$.

Розв'язання. Тут також маємо невизначеність виду $\infty-\infty$. Помноживши і поділивши дану функцію на $\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right.$, одержимо

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)\left(\sqrt{x^2-5x+6}+x\right)}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-5x+6x-x^2}{\sqrt{x^2-5x+6}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x+6}{\sqrt{x^2}-5x+6+x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-5+6/x}{\sqrt{1-5/x+6/x^2}+1} = -5/2.$$

Приклад 15 Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Розв'язання. При підстановці граничного значення x у вираз функції маємо невизначеність 1^∞. Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}\cdot\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-2/3}.$$

Приклад 16 Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{1/2x}$.

Розв'язання. Маємо

$$\lim_{x\to 0}\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{1/2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+tg^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{tg^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2\sqrt{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}}=e^{1/2}.$$

При розв'язуванні прикладу прийнято до уваги, що при $x\to 0$ $tg^2\sqrt{x}\sim\left(\sqrt{x}\right)^2=x$.

Приклад 17 Знайти односторонні границі функції $y=e^{\frac{1}{1-x}}$ при $x\to 1$.

Розв'язання. Символічно всі міркування коротко можна записати так:

$$\lim_{x\to 1-0}y=\lim_{x\to 1-0}e^{\frac{1}{1-x}}=e^{\frac{1}{1-(1-0)}}=e^{\frac{1}{+0}}=e^{+\infty}=+\infty.$$

$$\lim_{x\to 1+0}y=\lim_{x\to 1+0}e^{\frac{1}{1-x}}=e^{\frac{1}{1-(1+0)}}=e^{\frac{1}{1-1-0}}=e^{\frac{1}{-0}}=e^{-\infty}=\frac{1}{e^{+\infty}}=0.$$

Отже, $f(1+0)=0$, $f(1-0)=+\infty$.

Приклад. 18 Дослідити функцію $y=2^{\frac{1}{x}}$ на неперервність у точках $x=3$ і $x=0$.

Розв'язання. За означенням функція неперервна в точці x_0, якщо $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$. Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При $x=3$ маємо

$$y(3)=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2};$$

$$\lim_{x\to 3+0} y=\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{3+0}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}, \qquad \lim_{x\to 3-0} y=\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{3-0}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при $x=3$ виконується, отже, в цій точці функція неперервна.

Проведемо аналогічні дослідження при $x\to 0$:

$$y(0)=2^{\frac{1}{0}} \text{ не існує,}$$

$$\lim_{x\to +0} y=\lim_{x\to +0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}=+\infty; \quad \lim_{x\to -0} y=\lim_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{+\infty}}=\frac{2}{+\infty}=0$$

Умова неперервності при $x=0$ не виконується, отже, в точці $x=0$ функція розривна (має нескінченний розрив).

Приклад 19 Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y=\begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad x<1, \\ x^2-2, & \text{якщо} \quad 1\le x\le 1, \\ 1, & \text{якщо} \quad x>1. \end{cases}$$

Розв'язання. Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y=-1$, $y=x^2-2$, ³ $y=1$

є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною лише в тих точках, де міняється її аналітичний вираз, тобто в точках $x=-1$ ³ $x=1$. Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо :

$$\left.\begin{aligned} & y(-1)=(-1)^2-2=1-2=-1 \\ & \lim_{x\to -1+0} y=\lim_{x\to -1+0}\left(x^2-2\right)=-1 \\ & \lim_{x\to -1-0} y=\lim_{x\to -1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{aligned}\right\} \text{Задана функція неперервна в точці } x=-1$$

$$\left.\begin{aligned} & y(1)=1^2-2=1-2=-1 \\ & \lim_{x\to 1+0} y=\lim_{x\to 1+0} 1=1 \\ & \lim_{x\to 1-0} y=\lim_{x\to 1-0}\left(x^2-2\right)=-1 \end{aligned}\right\} \text{Задана функція розривна в точці } x=1$$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь; крім точки x=1. Побудуємо графік функції. На інтервалі $(-\infty:-1)$ її графіком буде пряма $y=-1$, на відрізку $[-1:1]$ — парабола $y=x^2-2$ і, нарешті, на інтервалі $(1:+\infty)$ — пряма $y=1$(рис. 3.1).

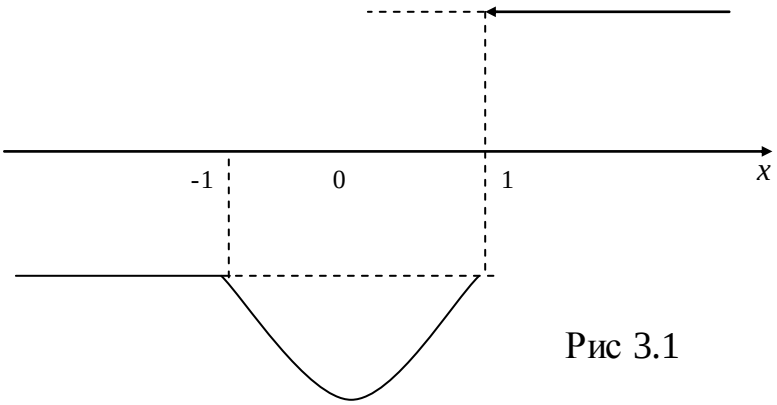

Рис 3.1

Питання для самоперевірки

1 Що називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$?

2 Навести приклад функції $y=f(x)$, яка має границі при $x \to x_0$; не має границі при $x \to x_0$.

3 Що називається границею функції при $x \to +\infty$, при $x \to -\infty$?

4 Навести приклад функції $y=f(x)$, яка має границю при $x \to +\infty, x \to -\infty$; не має границі при $x \to +\infty, x \to -\infty$.

5 Яка функція $y=f(x)$, називається нескінченно великою величиною при $x \to x_0$, при $x \to \pm\infty$? Навести приклади.

6 Яка функція $y=f(x)$ називається нескінченно малою величиною при $x \to x_0$, при $x \to \pm\infty$? Навести приклади.

7 Який найпростіший зв'язок існує між нескінченно великими і нескінченно малими величинами?

8 Яка функція називається обмеженою в інтервалі? при $x \to x_0$? При $x \to \pm\infty$?

9 Сформулювати правила граничного переходу у випадку арифметичних дій.

10 Чому дорівнює границя сталої величини?

11 Чому дорівнює границя нескінченно малої величини?

12 Сформулювати ознаку існування границі функції, яка міститься між двома функціями, які мають одну і ту саму границю.

13 У чому суть першої чудової границі?

14 Що являє собою друга чудова границя?

Домашнє завдання
Вправи

1 Знайти границі

1 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$. Відповідь: 9.

2 $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$. Відповідь: $-\dfrac{2}{5}$.

3 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$. Відповідь: $\dfrac{1}{2}$.

4 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{x^2+1}-x\right)$. Відповідь: 0.

5 $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2+49}$. Відповідь: $-\dfrac{1}{56}$.

6 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$. Відповідь: $\dfrac{2}{3}$.

7 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{tgx}\right)$. Відповідь: 0.

8 $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left[\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) tg\, x\right]$. Відповідь: 1.

Вказівка. Покласти $\dfrac{\pi}{2}-x=z$. Тоді при $x\to\dfrac{\pi}{2}$ $z\to 0$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4

Похідна функцій. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання функції. Таблиця похідних. Похідна оберненої, неявної, параметрично заданої функції. Диференціал функції.

Розв'язання прикладів і задач

Застосовуючи правила і формули диференціювання, знайти похідні функцій.

Приклад 1 $y = 3x^2 - 5x + 1$.

Розв'язання. Застосовуючи послідовно правила (8), (7), (9а) і формулу (12), дістаємо

$$y' = (3x^2)' - (5x)' + (1)' = 3(x^2)' - 5(x)' + 0 = 3 \cdot 2x - 5 \cdot 1 = 6x - 5.$$

Приклад 2 $y = ax^2 + bx + c$.

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі маємо

$$y' = (ax^2)' + (bx)' + (c)' = a(x^2)' + b(x)' + 0 = a \cdot 2x + b \cdot 1 = 2ax + b.$$

Приклад 3 $y = 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$.

Розв'язання. Використовуючи послідовно правила (8), (9а), (7) і формули (13) і (14), знаходимо

$$y' = \left(2\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\sqrt[4]{3}\right)' = 2\left(\sqrt{x}\right)' - \left(\frac{1}{x}\right)' + \left(\sqrt[4]{3}\right)' =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right)' + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2}.$$

При знаходженні похідних в подібних прикладах проміжні дії можна виконувати усно, записуючи лише остаточний результат диференціювання. Наприклад, $y = 2x^3 + 5\sqrt{x} - 3$, $y' = 6x^2 + \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$.

Прилад 4 $f(z) = \dfrac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{z}$. Знайти $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)$.

Розв'язання. Потрібно знайти значення похідної при $z=\frac{1}{4}$. Для цього спочатку знайдемо $f'(z)$, а потім обчислимо її значення при заданому значенні аргументу. Попередньо виконаємо тотожні перетворення $f(z)$:

$$f(z)=2z^2-3+z^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{z}.$$

Згідно з правилами (2), (3), (3), (4) і формулою (9)

$$f'(z)=\left(2z^2\right)'-\left(3\right)'+\left(z^{-\frac{1}{2}}\right)'-\left(\frac{1}{z}\right)'=4z-\frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{z^2}.$$

При $z=\frac{1}{4}$ $\quad f'\left(\frac{1}{4}\right)=4\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=1-4+16=13.$

Приклад 5 Знайти y', якщо $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$.

Розв'язання. На основі правил (1), (2), (3), (4) і формули (9), одержимо

$$y'=(x^2-3x+3)'\cdot(x^2+2x-1)+(x^2-3x+3)\cdot(x^2+2x-1)'=$$

$$=(2x-3)(x^2+2x-1)+(x^2-3x+3)(2x+2)=$$

$$=2x^3+4x^2-2x-3x^2-6x+3+2x^3+2x^2-6x^2-6x+6x+6=4x^3-3x^2-8x+9.$$

Приклад 6 $S(t)=\frac{3t^2+1}{t-1}$. Знайти $S'(t)$.

Розв'язання. Використовуючи правило (6) і формулу (9), дістанемо

$$S'(t)=\left(\frac{3t^2+1}{t-1}\right)'=\frac{\left(3t^2+1\right)'\cdot(t-1)-\left(3t^2+1\right)\cdot(t-1)'}{(t-1)^2}=\frac{6t\cdot(t-1)-\left(3t^2+1\right)\cdot 1}{(t-1)^2}=$$

$$=\frac{6t^2-6t-3t^2-1}{(t-1)^2}=\frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}.$$

Приклад 7 Знайти похідну функції $y=\frac{2}{x^3-1}$.

Розв'язання. Маємо $y'=\left(\frac{2}{x^3-1}\right)'=-\frac{2\left(x^3-1\right)'}{\left(x^3-1\right)^2}=-\frac{2\cdot 3x^2}{\left(x^3-1\right)^2}=-\frac{6x^2}{\left(x^3-1\right)^2}$.

Приклад 8 $y=\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$. Знайти y'.

Розв'язання. $y'=\left(\frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\left(1-x^3\right)'=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(0-3x^2\right)=-\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}$.

Приклад 9 $S(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$. Обчислити $S'(0)$ і $S'(2)$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо $S'(t)$:

$$S'(t)=\left(\frac{3}{5-t}\right)'+\left(\frac{t^2}{5}\right)'=-\frac{3(5-t)'}{(5-t)^2}+\frac{1}{5}\left(t^2\right)'=\frac{3}{(5-t)^2}+\frac{2t}{5}.$$

Підставляючи значення аргументу t у вираз для похідної, дістанемо

$$S'(0)=\frac{3}{(5-0)^2}+\frac{2\cdot 0}{5}=\frac{3}{25};\qquad S'(2)=\frac{3}{(5-2)^2}+\frac{2\cdot 2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{17}{15}=1\frac{2}{15}.$$

Приклад 10 Знайти $z'(0)$, якщо $z(t)=\left(\sqrt{t}^{\,3}+1\right)\cdot t$.

Розв'язання. Перепишемо задану функцію у вигляді $z(t)=\left(t^{\frac{3}{2}}+1\right)\cdot t=t^{\frac{5}{2}}+t$.

Тоді $z'(t)=\left(t^{\frac{5}{2}}\right)'+(t)'=\frac{5}{2}t^{\frac{3}{2}}+1$. При $t=0$ одержимо $z'(0)=\frac{5}{2}\cdot 0+1=1$.

Задача 11 Який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої $y=\frac{4}{15}x^5-\frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x=1$?

Розв'язання. Знаходимо похідну $y'=\frac{4}{3}x^4-\frac{1}{3}x^2$. При $x=1$ $y'(1)=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$,

тобто $tg\alpha=1$, звідки $\alpha=45^\circ$.

Задача 12 Точка рухається по прямій так, що її відстань від початкового пункту через t секунд дорівнює $S=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2$;

а) в які моменти точка була в початковому пункті?

б) в які моменти її швидкість дорівнювала нулю?

Розв'язання. Виходячи із механічного тлумачення похідної за формулою (3), маємо

$$v(t)=S'(t)=\left(\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2\right)'=t^3-12t^2+32t=t\left(t^2-12t+32\right)=t(t-4)(t-8).$$

Розв'язуючи рівняння $v(t)=0$, тобто $t(t-4)(t-8)=0,$ знаходимо $t_1=0,\ t_2=4$ і $t_3=8$.

Точка буде в початковому пункті тоді, коли $S(t)=0$.

Оскільки $S(t)=\frac{1}{4}t^4-4t^3+16t^2=\frac{1}{4}t^2\left(t^2-16t+64\right)=\frac{1}{4}t^2(t-8)^2$, то розв'язуючи рівняння $\frac{1}{4}t^2(t-8)^2=0$, знаходимо $t_1=0$ і $t_2=8$.

Таким чином, точка була в початковому пункті при $t_1=0$ і $t_2=8$, а її швидкість дорівнювала нулю при $t_1=0,\ t_2=4$ і $t_3=8$.

Диференціювання складної функції

Нагадаємо, що коли $y=y(u)$ і $u=u(x)$ – диференційовані функції, то складна функція $y=y\left[u(x)\right]$ є також диференційованою, причому

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Це правило поширюється на ланцюжок із будь-якого скінченного числа диференційованих функцій: похідна складної функції дорівнює добутку похідних функцій, які її складають.

Розв'язання прикладів

Продиференціювати дані функції.

Приклад 1 $y=(x^2+1)^4$.

Розв'язання. Маємо окладну степеневу функцію з проміжним аргументом $u=x^2+1$. Тому функцію можна подати у вигляді $y=u^4$, де $u=x^2+1$.

За формулою (11)

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \left(u^4\right)'_u \left(x^2+1\right)'_x = 4u^3 \cdot 2x = 8x\left(x^2+1\right)^3.$$

Приклад 2 $y = \sin 3x$.

Розв'язання. Аргументом синуса даної функції є не x, а $3x$ (функція від x). Отже, маємо складну функцію, яку можна подати у вигляді $y = \sin u$, де $u = 3x$.

Тоді за формулою (11)

$$y'_x = \left(\sin u\right)'_u \left(3x\right)'_x = \cos u \cdot 3 = 3\cos 3x.$$

Приклад 3 $y = \ln^2 x = \left(\ln x\right)^2$.

Розв'язання. Це складна степенева функція з проміжним аргументом $u = \ln x$. Функція може бути подана у вигляді $y = u^2$, де $u = \ln x$.

Знаходячи похідні y'_u і u'_x та підставляючи одержані вирази матимемо

$$y'_u = 2u = 2\ln x,\ u'_x = \frac{1}{x};\quad y'_x = \frac{2\ln x}{x}.$$

Приклад 4 $y = 3^{\sin x}$.

Розв'язання. Подавши дану функцію у вигляді $y = 3^u$, де $u = \sin x$, за правилом диференціювання складної функції маємо

$$y'_x = 3^u \ln 3 \cdot \cos x = 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 3.$$

Приклад 5 $y = arctg\, x^2$.

Розв'язання. Покладемо $y = arctg u$, де $u = x^2$. Тоді

$$y'_x = \left(arctg\, u\right)'_u \left(x^2\right)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}.$$

Приклад 6 $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання. Подавши функцію у вигляді $y = e^u$, $u = \sqrt{v}$, $v = \ln x$ і скориставшись правилом диференціювання складної функції, дістанемо

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = \left(e^u\right)'_u \left(\sqrt{v}\right)'_v \left(\ln x\right)'_x = e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{x} = e^{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

Зауважимо, що при диференціюванні складної функції немає потреби робити такі докладні записи. Результат слід записувати відразу.

Приклад 7 $y=\left(1+\sin^2 x\right)^4$.

Розв'язання. Покладемо $y=u^4,\ u=1+v,\ v=z^2,\ z=\sin x.$ Тоді за правилом диференціювання складної функції

$$y'_x=y'_u u'_v v'_z z'_x=\left(u^4\right)'_u\left(1+v\right)'_v\left(z^2\right)'_z\left(\sin x\right)'_x=4u^3(0+1)\cdot 2z\cdot\cos x=$$

$$=4(1+\sin^2 x)^3\cdot 2\sin x\cdot\cos x=4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x.$$

Розв'язання цього прикладу коротко можна записати так:

$$y'_x=4\left(1+\sin^2 x\right)^3\left(1+\sin^2 x\right)'=4(1+\sin^2 x)^3\left(0+2\sin x\left(\sin x\right)'\right)=$$

$$=4(1+\sin^2 x)^3\cdot 2\sin x\cdot\cos x=4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x,$$

або ще коротше: $y'_x=4(1+\sin^2 x)^3(0+2\sin x\cdot\cos x)=4(1+\sin^2 x)^3\sin 2x.$

Приклад 8 $y=\log_3\left(x^2-1\right).$

Розв'язання. Знаходимо

$$y'=\frac{1}{(x^2-1)\ln 3}\left(x^2-1\right)'=\frac{2x}{(x^2-1)\ln 3}.$$

Приклад 9 $y=\ln^4\sin x=\left(\ln\sin x\right)^4$.

Розв'язання. Застосовуючи послідовно відповідні формули, матимемо

$$y'=4\left(\ln\sin x\right)^3\frac{1}{\sin x}\cos x=4\ln^3\sin x\cdot ctgx.$$

Приклад 10 $y=\sqrt[3]{\ln\sin\frac{x+3}{4}}=\left(\ln\sin\frac{x+3}{4}\right)^{\frac{1}{3}}.$

Розв'язання. Як і в попередньому прикладі, маємо

$$y'=\frac{1}{3}\left(\ln\sin\frac{x+3}{4}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{x+3}{4}}\cdot\cos\frac{x+3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{ctg\frac{x+3}{4}}{12\sqrt[3]{\ln^2\sin\frac{x+3}{4}}}.$$

Приклад 11 $y=\log_3\left(x^2-\sin x\right)$.

Розв'язання. Маємо складну логарифмічну функцію с проміжним аргументом $x^2-\sin x$. Продиференціювавши її, одержимо

$$y'=\frac{1}{\left(x^2-\sin x\right)\ln 3}\left(2x-\cos x\right).$$

Приклад 12 Знайти похідну $y'=\frac{dy}{dx}$ від неявної функції $5x^3+3y-2=0$.

Розв'язання. Маємо неявно задану функцію. Продиференціюємо обидві частини рівняння по x, враховуючи при цьому, що y є функцією від x:

$15x^2+3y'=0$ або $5x^2+y'=0$.

Розв'язуючи здобуте рівняння відносно y', знаходимо $y'=-5x^2$.

Виражаючи із вихідного рівняння y через x і диференціюючи y як явну функцію, одержимо

$$y=\frac{2-5x^3}{3};\quad y'=\frac{1}{3}\left(2-5x^3\right)'=\frac{1}{3}\left(-15x^2\right)=-5x^2.$$

Приклад 13 $y=\cos(x+y)$. Знайти $y'=\frac{dy}{dx}$.

Розв'язання. Скориставшись правилом диференціювання неявної функції, матимемо $y'=-\sin(x+y)(1+y')$ або $y'+y'\sin(x+y)=-\sin(x+y)$.

Звідси $y'=-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

Слід відзначити, що розв'язання рівняння $y=\cos(x+y)$. відносно y неможливо.

Приклад 14 $x^3+y^3-3axy=0$. Знайти y'.

Розв'язання. Продиференціюємо обидві частини рівняння по x, враховуючи, що y є функцією від x. Одержимо

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a\left(y + xy'\right) = 0.$$

Для знаходження y' визначаємо такі перетворення:

$$x^2 + y^2y' - a\left(y + xy'\right) = 0;$$

$$x^2 + y^2y' - ay - axy' = 0;$$

$$\left(y^2 - ax\right)y' = ay - x^2, \text{ звідки } y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

Приклад 15 Знайти y', якщо $x^4 + y^4 = x^2y^2$.

Розв'язання. Діючи, як і в попередньому прикладі, будемо мати

$$4x^3 + 4y^3y' = 2xy^2 + x^2 \cdot 2yy';$$

$$2x^3 + 2y^3y' = xy^2 + x^2yy';$$

$$\left(2y^3 - x^2y\right)y' = xy^2 - 2x^3;$$

$$y' = \frac{xy^2 - 2x^3}{2y^3 - x^2y}.$$

Приклад 16 $2y\ln y = x$. Знайти y'.

Розв'язання. Диференціюючи обидві частини рівняння по x, одержимо

$$2\left(y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y'\right) = 1.$$

Після спрощення матимемо $y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2}$;

$$y'\left(\ln y + 1\right) = \frac{1}{2};$$

$$y' = \frac{1}{2\left(1 + \ln y\right)}.$$

Приклад 17 Знайти y'_x, якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2, \\ y = t - t^3. \end{cases}$

Розв'язання. Відомо, що коли функція y аргументу x задана параметричним рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, то

$$y'_x=\frac{y'_t}{y'_x}$$

Знаходимо $x'_t=\left(1-t^2\right)'=-2t$ і $y'_t=\left(t-t^3\right)'=1-3t^2$. Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули (27), дістанемо

$$y'_x=\frac{1-3t^2}{-2t}=\frac{3t^2-1}{2t}.$$

Приклад 18 Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x=a\cos^3\varphi, \\ y=b\sin^3\varphi. \end{cases}$

Розв'язання. Параметром функції є змінна φ. Тому формула для знаходження похідної записується так: $y'_x=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}$.

Знаходимо $x'_\varphi=a\cdot 3\cos^2\varphi\cdot(-\sin\varphi)$ і $y'_\varphi=b\cdot 3\sin^2\varphi\cos\varphi$.

Отже, $y'_x=-\frac{3b\sin^2\varphi\cos\varphi}{3a\cos^2\varphi\sin\varphi}=-\frac{b}{a}tg\varphi$.

Приклад 19 Знайти $\frac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x=\ln(1+t^2), \\ y=t-arctg\,t. \end{cases}$

Розв'язання. Маємо $x'_t=\frac{1}{1+t^2}\cdot 2t=\frac{2t}{1+t^2}$; $y'_t=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{1+t^2-1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}$.

Підставляючи знайдені вирази для x'_t і y'_t до формули (27), дістанемо

$$y'_x=\frac{t^2}{1+t^2}:\frac{2t}{1+t^2}=\frac{t^2\left(1+t^2\right)}{\left(1+t^2\right)2t}=\frac{t}{2}.$$

Прилад 20 Знайти другу похідну від функції $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

Розв'язання. Послідовно диференціюючи функцію, одержимо

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = \left(\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}.$$

Приклад 21 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$.

Розв'язання. При $x \to 0$ чисельник і знаменник дробу прямує до нуля, тобто маємо невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Застосовуючи правило Лопіталя, знаходимо $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{1} = \frac{0}{1} = 0.$

Приклад 22 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}$.

Розв'язання. Переконуємося, що має місце невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$. Після застосування правила Лопіталя і алгебраїчних перетворень одержимо:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - arctgx}{x^3}. = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{3x^2\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{3}.$$

Питання для самоперевірки

1 Що називається приростом аргументу і приростом функції?
2 Дайте означення похідної функції.
3 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування похідної функції в точці x_0.
4 У чому полягає геометричне тлумачення похідної?
5 Яке механічне тлумачення має похідна?
6 Запишіть рівняння дотичної та нормалі до кривої.
7 Що називають кутом між двома кривими?
8 ормулюйте основні правила диференціювання функції.
9 пишіть таблицю похідних основних елементарних функцій.
10 у функцію називають складною?
Згадайте правило диференціювання складної функції.

Домашнє завдання
Вправи

Продиференціювати задані функції.

1 $y=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}.$ Відповідь: $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

2 $u=\dfrac{v^5}{v^3-2}.$ Відповідь: $\dfrac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}.$

3 $z=\dfrac{1}{t^2+t+1}.$ Відповідь: $-\dfrac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}.$

4 $\rho=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi.$ Відповідь: $\varphi\cos\varphi.$

5 $S=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}.$ Відповідь: $\dfrac{1}{1+\cos t}.$

6 $y=\left(x^2-2x+3\right)\cdot e^x.$ Відповідь: $e^x\left(x^2+1\right).$

7 $y=x^2\log_3 x.$ Відповідь: $2x\log_3 x+\dfrac{x}{\ln 3}.$

8 $f(x)=3x-2\sqrt{x}.$ Знайти $f'(1);\ f'(4);\ f'(a^2).$

Відповідь: $f'(1)=2;\ f'(4)=2{,}5;\ f(a^2)=3-\dfrac{1}{|a|}.$

9 $u(t)=\left(t^2+t+2\right)^{\frac{3}{2}}.$ Відповідь: $\dfrac{3}{2}\left(2t+1\right)\sqrt{t^2+t+2.}$

10 $y=3\sin\left(3x+5\right).$ Відповідь: $9\cos\left(3x+5\right).$

11 $y=\cos^3 4x.$ Відповідь: $-12\cos^2 4x\sin 4x.$

12 $y=\sin^2\left(\cos 3x\right).$ Відповідь: $-3\sin 3x\sin\left(2\cos 3x\right).$

3 $y=\arcsin\dfrac{2}{x}.$ Відповідь: $-\dfrac{2}{|x|\sqrt{x^2-4}}.$

14 $y=arctg^2\dfrac{1}{x}.$ Відповідь: $-\dfrac{2arctg\dfrac{1}{x}}{1+x^2}.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5

Первісна. Невизначений інтеграл. Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування.

Таблиця невизначених інтегралів. Основні методи інтегрування

Із таблиці похідних і означення невизначеного інтеграла можна скласти таблицю невизначених інтегралів.

$$\int Odu = \int Ou'_x dx = C. \quad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx == u + C. \quad (2)$$

$$\int u^{\alpha} du = \int u^{\alpha} u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. \quad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C \quad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C. \quad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C. \quad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C. \quad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C. \quad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u \cdot u'_x dx = -\cos u + C. \quad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u \cdot u'_x dx = \sin u + C. \quad (10)$$

$$\int tgu du = \int tgu \cdot u'_x dx = -\ln|\cos u| + C. \quad (11)$$

$$\int ctgu du = \int ctgu \cdot u'_x dx = \ln|\sin u| + C. \quad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = tgu + C. \quad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -ctgu + C. \quad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C. \quad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \qquad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{u}{a} + C. \qquad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \qquad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C. \qquad (19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C. \qquad (20)$$

$$\int \sqrt{u^2 + A} du = \int \sqrt{u^2 + A} \cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C \qquad (21)$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \int \sqrt{a^2 - u^2} \cdot u'_x dx = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C, \ (a>0). \qquad (22)$$

Розв’язання прикладів

Приклад 1 Знайти $\int (4x^3 - 6x^2 + 5)dx$.

Розв`язання. Скориставшись властивостями 4 і 5 невизначеного інтеграла, будемо мати

$$\int (4x^3 - 6x^2 + 5) = \int 4x^3 dx - \int 6x^2 dx + \int 5dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 5\int dx.$$

Далі застосувавши до перших двох одержаних інтегралів формулу (3), а до третього – властивість 3 (формула 2), остаточно знаходимо

$$\int (4x^3 - 6x^2 + 5)dx = 4\int x^3 dx - 6\int x^2 dx + 5\int dx =$$

$$= 4\frac{x^4}{4} + C_1 - 6\frac{x^3}{3} + C_2 + 5x + C_3 = x^4 - 2x^3 + 5x + C,$$

де $C = C_1 + C_2 + C_3$.

Відзначимо, що додавати довільну сталу після знаходження кожного інтеграла, як це продемонстровано в даному прикладі, не слід. Досить усі довільні сталі підсумувати, і результат, позначений однією буквою *C*, записати наприкінці, тобто після того, як усі інтеграли будуть знайдені.

Приклад 2 Знайти $\int \left(\sqrt{x} + 1\right)\left(x - \sqrt{x} + 1\right)dx$.

Розв`язання. Помічаємо, що $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)=\left(\sqrt{x}\right)^3+1.$ Тоді

$$\int\left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)dx=\int\left[\left(\sqrt{x}\right)^3+1\right]dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int dx=\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}+x+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+x+C.$$

Приклад 3 Знайти $\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx.$

Розв`язання. Маємо

$$\int\frac{\sqrt{x}-x^3e^x+x^2}{x^3}dx=\int\left(\frac{\sqrt{x}}{x^3}-\frac{x^3e^x}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}\right)dx=$$

$$=\int x^{-\frac{5}{2}}dx-\int e^x dx+\int\frac{dx}{x}=-\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}}-e^x+\ln|x|+C=C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|.$$

Приклад 4 Знайти $\int\left(\frac{1-z}{z}\right)^2dz.$

Розв`язання. Виконуючи тотожні перетворення підінтегральної функції, будемо мати

$$f(z)=\left(\frac{1-z}{z}\right)^2=\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1.$$

Тому

$$\int\left(\frac{1-z}{z}\right)^2dz=\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1\right)dz=\int\frac{1}{z^2}dz-2\int\frac{dz}{z}+\int dz=-\frac{1}{z}-2\ln|z|+z+C.$$

Приклад 5 Знайти $\int\frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}.$

Розв`язання. Маємо

$$\int\frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3(1-x^2)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x+C.$$

Приклад 6 Знайти $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx.$

Розв`язання. Оскільки $1+\cos 2x=2\cos^2 x$, то

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}tgx + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{2}(tgx + x) + C.$$

Приклад 7 Знайти $\int tg^2 x dx.$

Розв`язання. Відомо, що $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1.$ Тому

$$\int tg^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = tgx - x + C.$$

Приклад 8 Знайти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

Розв`язання. Виконуємо тотожні перетворення над підінтегральною функцією:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

Приклад 9 Знайти $\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx.$

Розв`язання. Враховуючи, що $2x^2 = x^2 + x^2$, будемо мати

$$\int \frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx + \int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C.$$

Приклад 10 Знайти $\int tg^3 x d(tgx).$

Розв`язання. Згідно з табличним інтегралом (3) з урахуванням, що $u = tgx$, одержимо

$$\int tg^3 x d(tgx) = \frac{tg^4 x}{4} + C.$$

Приклад 11 Знайти $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$.

Розв`язання. Звільняючись від ірраціональності в знаменнику дробу підінтегрального виразу, будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} = \int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} = \int \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx}{x-x+1} =$$

$$= \int \left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx + \int (x-1)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Приклад 12 Знайти $\int \cos(\pi x+1)dx$.

Розв'язання. Оскільки

$$\int \cos u du = \sin u + C$$

і $u = \pi x + 1$ – лінійна функція, то, враховуючи формулу (23), будемо мати

$$\int \cos(\pi x+1)dx = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x+1) + C.$$

Приклад 13 Знайти $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}}$.

Розв'язання. Покладемо $x^6=t$. Тоді $6x^5dx=dt$ і

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6}\int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{(x^6)^2-3}} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3}} = \frac{1}{6}\ln\left|t+\sqrt{t^2-3}\right| + C.$$

Як видно за допомогою вказаної підстановки даний інтеграл зведений до табличного (формула 20). Повертаючись до початкової змінної, остаточно будемо мати

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6}\ln\left|x^6+\sqrt{x^{12}-3}\right| + C.$$

Приклад 14 Знайти $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання. Покладемо $x+1=t^2$. Звідси $x=t^2-1$, а $dx=2tdt$ і

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{1+t} = 2\int \frac{t}{1+t}dt = 2\int \frac{t+1-1}{1+t}dt =$$

$$= 2\int \left(1-\frac{1}{1+t}\right)dt = 2\int dt - 2\int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln\left|\sqrt{x+1}+1\right| + C.$$

Розв`язати даний приклад можна інакше. Нехай $1+\sqrt{x+1}=t$. Звідси $x=(t-1)^2-1$, а $dx=2(t-1)dt$ і

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\int\frac{2(t-1)dt}{t}=2\int\frac{t-1}{t}dt=2\int\left(1-\frac{1}{t}\right)dt=2\int dt-2\int\frac{dt}{t}=$$

$$=2t-2\ln|t|+C=2(1+\sqrt{x+1})-2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|+C.$$

Одержані результати відрізняються сталим доданком 2. Однак, обидва вони правильні, в чому можна легко переконатися шляхом їх диференціювання. Пропонуємо читачеві зробити це самостійно.

Приклад 15 Знайти $\int\frac{dz}{\sqrt{e^z+1}}$.

Розв'язання. Зробимо підстановку $e^z+1=t^2$. Продиференціювавши обидві частини рівності, одержимо $e^z dz=2tdt$. Звідси $dz=\frac{2tdt}{e^z}=\frac{2tdt}{t^2-1}$. Тоді

$$\int\frac{dz}{\sqrt{e^z+1}}=\int\frac{2tdt}{(t^2-1)t}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{e^z+1}-1}{\sqrt{e^z+1}+1}\right|+C.$$

(див. Таблицю інтегралів, формулу 18).

Приклад 16 Знайти $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

Розв'язання. I спосіб.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}=\left|\begin{array}{c}x^2-9=t^2\\2xdx=2tdt\\xdx=tdt\end{array}\right|=\int\frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2-9}}=\int\frac{tdt}{(t^2+9)t}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+9}=\frac{1}{3}arctg\,\frac{t}{3}+C=\frac{1}{3}arctg\,\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}+C.$$

Приклад 17 Знайти $\int x^2\ln xdx$.

Розв'язання. Поклавши $u(x)=lnx$, $dv(x)=x^2dx$ і застосувавши метод інтегрування частинами [$\int udv=uv-\int vdu$], одержуємо

$$\int x^2\ln xdx=\left|\begin{array}{ll}u=\ln x; & du=\frac{dx}{x}\\ dv=x^2dx; & v=\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\end{array}\right|=\frac{x^3}{3}\ln x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\int x^2dx=\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}+C=\frac{1}{9}x^3(3\ln x-1)+C.$$

Розв'язання цього прикладу можна записати ще й так:

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}\int \ln x dx^3 = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^3 d\ln x \right) = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^3 \cdot \frac{1}{x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \int x^2 dx\right) = \frac{1}{3}\left(x^3 \ln x - \frac{1}{3}x^3 \right) + C = \frac{1}{9}x^3(3\ln x - 1) + C .$$

Приклад 18 Знайти $\int x^2 \sin 3x dx$.

Розв'язання. Покладемо $u=x^2, dv=\sin 3x dx$. Тоді

$$du=2xdx, \quad v = \int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За допомогою метода інтегрування частинами знаходимо:

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x - \int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2xdx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\int x\cos 3x dx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x$, $dv=\cos 3x dx$, тоді

$$du = dx, v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x\cos 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \int \frac{1}{3}\sin 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати:

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3}x^2 \cos 3x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\right) + C.$$

$$= \frac{1}{27}\left(-9x^2 \cos 3x + 6x\sin 3x + 2\cos 3x\right) + C .$$

Приклад 19 Знайти $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$.

Розв'язання. Маємо

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left| \begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2 + a^2}; & du = \dfrac{2xdx}{2\sqrt{x^2 + a^2}} = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ dv = dx; & v = \int dx = x \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx + \int \frac{a^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} =$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \ln\left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right|.$$

Як видно, після інтегрування частинами в правій частині рівняння ми одержали вихідний інтеграл. Отже, розв`язавши це рівняння відносно інтеграла, знаходимо

$$2\int\sqrt{x^2+a^2}dx = x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|.$$

Звідси остаточно будемо мати

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

Приклад 20 Знайти $\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx.$

Розв'язання. Маємо інтеграл виду 1 (див. Таблицю 1). Застосувавши до його розв'язання формулу (24), одержимо

$$\int\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}dx = \left|\begin{matrix} u=x^2-3x+4; & du=(2x-3)dx \\ dv=e^{5x}dx; & v=\int e^{5x}dx=\frac{1}{5}e^{5x}\end{matrix}\right| =$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\int(2x-3)e^{5x}dx =$$

$$=\left|\begin{matrix} u=2x-3; & du=2dx \\ dv=e^{5x}dx; & v=\frac{1}{5}e^{5x}\end{matrix}\right| = \frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{5}\int e^{5x}dx\right) =$$

$$=\frac{1}{5}\left(x^2-3x+4\right)e^{5x}-\frac{1}{5}\left(\frac{2x-3}{5}e^{5x}-\frac{2}{25}e^{5x}\right)+C =$$

$$=\frac{1}{125}e^{5x}\left(25x^2-75x+100-10x+15+2\right)+C=\frac{1}{125}\left(25x^2-85x+117\right)e^{5x}+C.$$

Приклад 21 Знайти $\int xarctgxdx.$

Розв'язання. Маємо інтеграл виду 6 (див. Таблицю 1). Із формули (24)

$$\int xarctgxdx=\frac{1}{2}\int arctgxd(x^2)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int x^2darctgx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2}{1+x^2}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-\int dx+\int\frac{dx}{1+x^2}\right)=\frac{1}{2}\left(x^2arctgx-x+arctgx\right)+C$$

Приклад 22 Знайти $\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx.$

Розв'язання. Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більша, за степінь многочлена знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{l|l} \quad x^5+x^4-8 & x^3-4x \\ \hline -\quad x^5-4x^3 & x^2+x+4 \quad \text{(ціла частина)} \\ \hline \quad -\quad x^4+4x^3-8 & \end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
x^4-4x^2 \\
\hline
\quad 4x^3+4x^2-8 \\
- \\
\quad 4x^3-16x \\
\hline
\qquad 4x^2+16x-8
\end{array}
$$
(остача).

Тепер подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}.$$

Тоді

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\int\left(x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx.$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дроби. Оскільки знаменник дробу $x^3-4x=x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$ має три прості корені $x=0$, $x=2$ і $x=-2$, то його можна подати у вигляді суми трьох дробів I типу, тобто

$$\frac{x^2+4x-2}{x(x-2)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}.$$

Звільнюючись від дробових членів, одержимо

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2)$$

або

$$x^2+4x-2=(A+B+C)x^2+(2B-2C)x-4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів A, B, C:

$$\begin{array}{c|l}
x^2 & A+B+C=1, \\
x & 2B-2C=4, \\
x^0 & -4A=-2.
\end{array}$$

Розв`язавши цю систему, знаходимо $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}$.

Слід відзначити, що тут коефіцієнти *A*, *B* і *C* простіше було б знайти способом підстановки до тотожності частинних значень *x*, в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто:

$$x^2+4x-2=A(x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-2),$$

$$\begin{array}{r|l} x=0 & -2=-4A, \\ x=2 & 10=8B, \\ x=-2 & -6=8C, \end{array}$$

звідки $A=\frac{1}{2}, B=\frac{5}{4}, C=-\frac{3}{4}$.

Таким чином,

$$\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\frac{x^2+4x-2}{x^3-4x}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+4\int\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\int\frac{dx}{x}+5\int\frac{dx}{x-2}-3\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\ln|x|+5\ln|x-2|-3\ln|x+2|+C.$$

Питання для самоперевірки

1 Які основні методи інтегрування ви знаєте?
2 Продемонструйте мотод інтегрування частинами?
3 Сформулюйте правила інтегрування.
4 Сформулюйте основні властивості визначеного інтеграла.
5 Який геометричний сенс визначеного інтеграла?
6 Як обчислюється визначений інтеграл?
7 Яким чином робиться заміна змінної у визначеному інтегралі?
8 Як виглядає формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла?

Домашнє завдання
Вправи

Знайти інтеграли:

1 $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}$. Відповідь: $C-\frac{1}{8(2x-3)^4}$.

2 $\int \sqrt[5]{x^3+2}\cdot x^2 dx$. Відповідь: $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$.

3 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$. Відповідь: $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$.

7 $\int \cos(1-2x)dx$. Відповідь: $-\frac{1}{2}\sin(1-2x)+C$.

8 $\int e^x \sin e^x dx$. Відповідь: $C\text{-}cos e^x$.

9 $\int \frac{dx}{2x-1}$. Відповідь: $\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$.

10 $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$. Відповідь: $\frac{3}{2}\ln(x^2+9)-\frac{1}{3}arctg\frac{x}{3}+C$.

11 $\int \frac{3x^4+2x^2-3x+7}{x^2}dx$. Відповідь:

6 $\int xe^{-x}dx$.

Відповідь: $C\text{-}(x+1)e^{-x}$.

12 $\int x\cos^2 x dx$. Відповідь: $\frac{x^2}{4}+\frac{1}{4}x\sin 2x+\frac{1}{8}\cos 2x+C$.

Обчислити інтеграли:

1 $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$. Відповідь: $-5(\sqrt[5]{16}-1)$.

2 $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx$. Відповідь: $\frac{1}{5}(e-1)^5$.

3 $\int_0^1 \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$. Відповідь: $\frac{1}{4}$.

4 $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. Відповідь: $\frac{32}{3}$.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6

Геометричне застосування визначених інтегралів. Площа криволінійної трапеції. Об'єм тіла обертання. Довжина дуги кривої та площа поверхні обертання. Невласні інтеграли.

Приклад 1 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y=x(x-1)^2$ і віссю Ox.

Розв'язання. Функція $y=x(x-1)^2$ визначена для всіх дійсних значень x. Точки перетину графіка функції з віссю Ox обчислимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x(x-1)^2, \\ y = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1=0,\ y_1=0$ і $x_2=1,\ y_2=0$.

Таким чином, графік функції $y=x(x-1)^2$ перетинає вісь Ox в точках $(0;0)$ і $(1;0)$. Не складно переконатися в тому, що функція $y=x(x-1)^2$ має екстремум у точках $\left(\frac{1}{3};\frac{4}{27}\right)$ і $(1;0)$, а також точку перегину $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{27}\right)$. Читачеві пропонуємо перевірити це самостійно.

Використовуючи ці дані, будуємо графік функції (рис. 6.1).

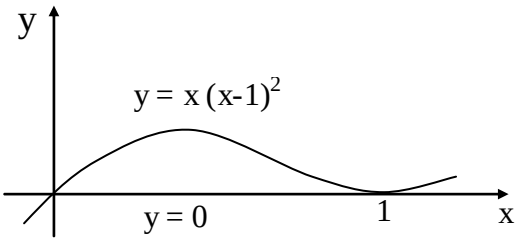

рис. 6.1

Із рис. 6.1 видно, що фігура обмежена зверху лінією $y=x(x-1)^2$, знизу $y=0$ і проекціюється на вісь Ox у відрізок $[0;1]$. Отже, $y_в=x(x-1)^2$, $y_н=0$, $a=0$, $b=1$.

Таким чином, маємо

$$S=\int_0^1 x(x-1)^2\,dx=\int_0^1\left(x^3-2x^2+x\right)dx=\left.\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{12}.$$

Приклад 2 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ і параболою $y = \dfrac{x^2}{2}$.

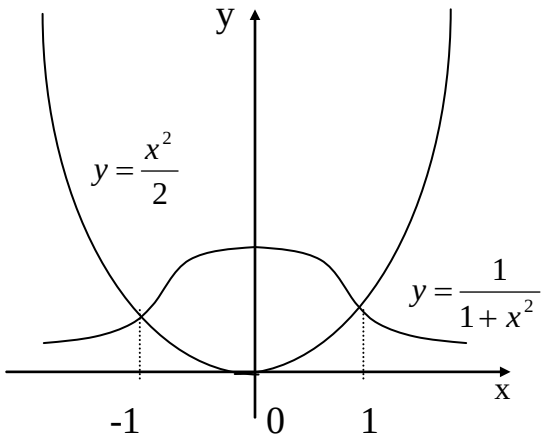

Рис. 6.2

Розв'язання. Крива $y = \dfrac{x^2}{2}$ – парабола з вершиною в точці *O(0;0)* і віссю симетрії *Oy*. Вітки параболи направлені вгору (рис.6.2). Крива $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ – локон Аньєзі. Із рівняння видно, що при будь-якому *x* функція набуває лише додатних значень, а тому її графік розташований вище осі *Ox*, а вісь *Oy* є її віссю симетрії, бо *y(–x)=y(x)*. Найбільше значення, яке дорівнює одиниці, функція набуває при *x=0,* а при $x \to \pm\infty$ $y \to 0$.

Схематично графік цієї функції зображений на рис. 3.2. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рис. 6. Площу заштрихованої фігури обчислимо за формулою:

$$S = \int_a^b \left(y_в(x) - y_н(x)\right)dx.$$

Для визначення меж інтегрування обчислимо абсциси точок перетину ліній, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ y = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Звідси $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Отже, $a = -1$, $b = 1$.

Враховуючи також, що $y_в = \dfrac{1}{1+x^2}$, а $y_н = \dfrac{x^2}{2}$ будемо мати

$$S = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx,$$

а з урахуванням симетрії фігури відносно осі *Oy* одержуємо

$$S = 2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\left(arctgx - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

Приклад 3 Обчислити площу петлі лінії $y^2 = x(x-1)^2$.

Розв'язання. Побудуємо графік лінії (рис.3.3). Фігура розташована симетрично відносно осі *Ox*, а тому досить обчислити площу верхньої частини, яка розташована над віссю *Ox,* і результат подвоїти. Відрізок інтегрування $[0;1]$.Підставляючи до цієї формули $y_в = -\sqrt{x}(x-1)$, $y_н=0$, $a=0$, $b=1$, одержимо:

$$S = -2\int_{0}^{1}\sqrt{x}(x-1)dx = -2\int_{0}^{1}\left(x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)dx = -2\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = -2\left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{15}.$$

Приклад 4 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y^2=2x+1$ і $x - y - 1=0$.

Розв'язання. Рівняння $y^2=2x+1$ визначає параболу, а рівняння $x-y-1=0$ – пряму лінію (рис.6.4).

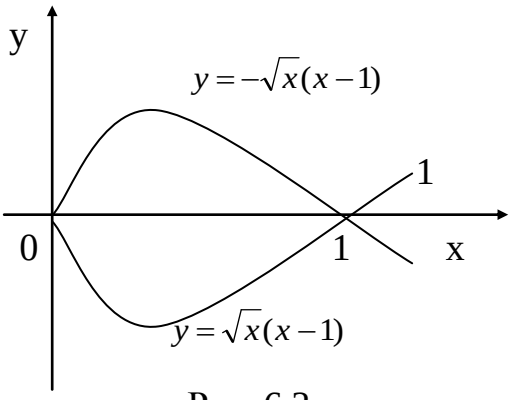

Рис. 6.3

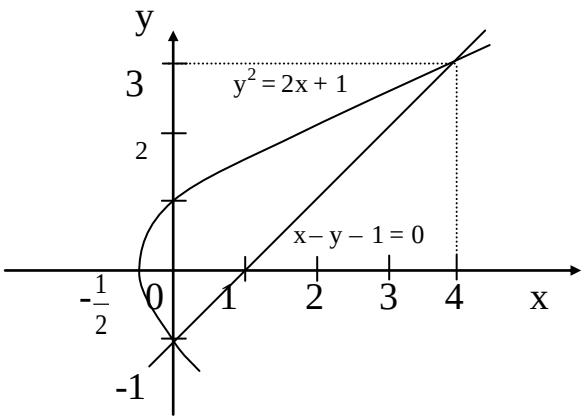

Рис. 6.4

Розв'язуючи систему рівнянь: $\begin{cases} y^2 = 2x+1, \\ x-y-1=0, \end{cases}$

обчислимо точки перетину прямої та параболи: *A(0; –1), B(4;3).*

Для обчислення площі заштрихованої фігури скористаємось формулою, в якій межі інтегрування розставленні по змінній *y*, бо в протилежному випадку фігуру треба було б розбити на дві частини, оскільки $y_н$ складається із двох різних ліній $y=-\sqrt{2x+1}$ і $y=x-1$. Отже, підставляючи до формули (41в) $x_п=y+1$, $x_л=\dfrac{y^2-1}{2}$ і враховуючи, що $-1 \le y \le 3$, одержимо

$$S=\int_{-1}^{3}\left(y+1-\frac{y^2-1}{2}\right)dy=\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{6}+\frac{3}{2}y\right)\Bigg|_{-1}^{3}=\frac{9}{2}-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{3}{2}=\frac{16}{3}.$$

Приклад 5 Обчислити площу фігури, обмеженої однією аркою циклоїди *x=a(t –sint), y=a(1 –cost)* і віссю абсцис.

Розв'язання. Фігура, обмежена однією аркою циклоїди і віссю *Ox*, показана на рис. 3.5. Крива задана параметричними рівняннями. Тому площу фігури будемо обчислювати за формулою: $S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'_t dt.$

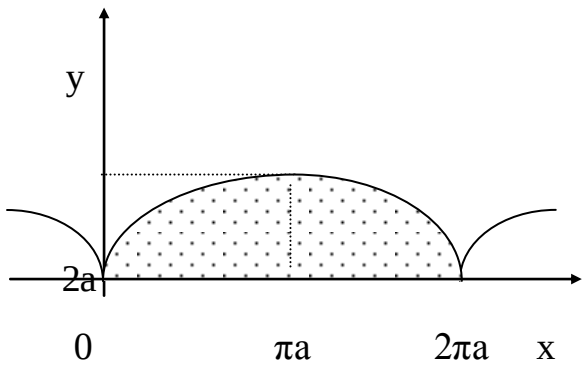

Рис. 6.5

Підставляючи до цієї формули *y=a(1 –cost)*, $x'_t=a(1-\cos t)$ і враховуючи, що $0 \le t \le 2\pi$, одержимо

$$S=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)a(1-\cos t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt=$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right) dt = a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

Приклад 7 Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням параболи $y^2=4x$ навколо своєї осі (параболоїд обертання) і площиною, перпендикулярною до його осі тавіддаленою від вершини параболи на відстань, що дорівнює одиниці.

Розв'язання. Побудуємо тіло (рис.6.6).

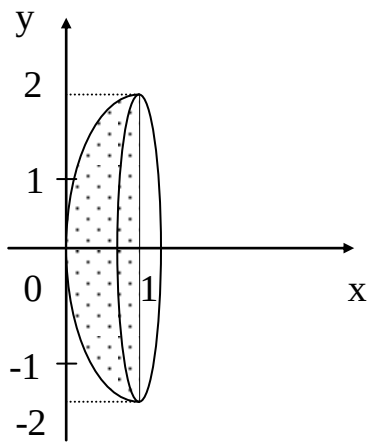

Рис.6.6

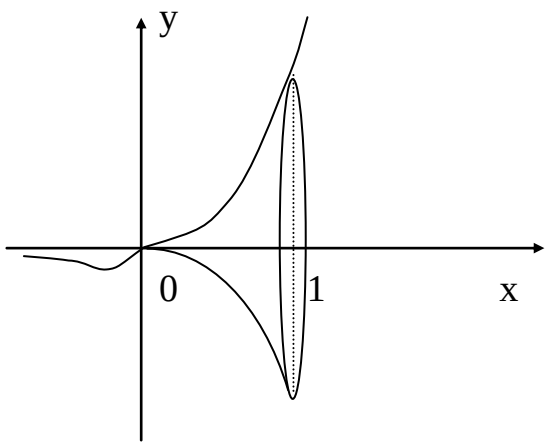

Рис. 6.7

Враховуючи, що $y_в = 2\sqrt{x}$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$, будемо мати

$$V_x = \pi \int_0^1 4x dx = 2\pi x^2 \Big|_0^1 = 2\pi.$$

Отже, шуканий об'єм дорівнює 2π.

Приклад 13 Криволінійна трапеція, обмежена лінією $y=xe^x$ і прямими $x=1$ і $y=0$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

Розв'язання. Побудуємо тіло обертання (рис.6.7). Об'єм одержаного тіла будемо обчислювати, враховуючи, що $y_в=xe^x$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$:

$$V_x = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

Використовуючи далі двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати:

$$V_x = \pi\int_0^1 x^2 e^{2x}dx = \left| \begin{array}{c} \int udv = uv - \int vdu \\ u = x^2; du = 2xdx \\ dv = e^{2x}dx; v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \int xe^{2x}dx\right)\Bigg|_0^1 = \left| \begin{array}{c} u = x; du = dx \\ dv = e^{2x}dx; v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right| =$$

$$= \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \int\frac{1}{2}e^{2x}dx\right)\Bigg|_0^1 = \pi\left(\frac{x^2}{2}e^{2x} - \frac{x}{2}e^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \pi\left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right).$$

Таким чином, шуканий об’єм дорівнює $\frac{\pi}{4}\left(e^2 - 1\right)$.

Приклад 14 Обчислити довжину дуги лінії $y=lnx$ від $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$.

Розв’язання. Обчислимо похідну функції: $y' = \frac{1}{x}$. Тоді

$$1 + \left(y'(x)\right)^2 = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1 + x^2}{x^2}.$$

За формулою довжина дуги

$$L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2} \cdot xdx = \left| \begin{array}{c} 1 + x^2 = z^2 \\ x^2 = z^2 - 1 \\ 2xdx = 2zdz \\ z_н = \sqrt{1+3} = 2 \\ z_в = \sqrt{1+8} = 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_2^3 \frac{z}{z^2 - 1} \cdot zdz = \int_2^3 \frac{z^2}{z^2 - 1}dz = \int_2^3 \frac{z^2 - 1 + 1}{z^2 - 1}dz = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{z^2 - 1}\right)dz =$$

$$=\left(z+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=3+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}=1+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{3}\right)=1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$$

Приклад 16 Обчислити довжину петлі лінії $x=t^2$, $y=t-\frac{t^3}{3}$.

Розв'язання. Оскільки межі інтегрування не задані, то слід побудувати лінію, для чого доцільно виключити параметр t із параметричних рівнянь: $y^2=x\left(1-\frac{x}{3}\right)^2$. На довжині петлі (рис.3.9) параметр t змінюється від $-\sqrt{3}$ до $\sqrt{3}$.

Із урахуванням симетрії лінії відносно осі *Ox*, обчислюємо її довжину за формулою (43б):

$$L=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2+\left(1-t^2\right)^2}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+2t^2+t^4}\,dt=$$

$$=2\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(1+t^2\right)dt=2\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}.$$

Приклад 17 Обчислити довжину дуги архімедової спіралі $r=a\varphi$ від початку до кінця першого витка.

Розв'язання. Побудуємо перший виток дуги архімедової спіралі (рис.3.10). При зміні полярного кута φ від 0 до 2π, полярний радіус r змінюється від 0 до $2\pi a$. Отже, довжина першого витка

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=\frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{\varphi^2+1}+\ln\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right)\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right)=\pi a\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right).$$

Приклад 18 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням параболи $y^2=4ax$ навколо осі абсцис від вершини до точки з абсцисою $x=3a$.

Розв'язання. Поверхня обертання показана на рис.6.8 Із рівняння параболи $y = 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}$. Тоді $y'(x) = \dfrac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, а $1 + \left(y'(x)\right)^2 = 1 + \dfrac{a}{x} = \dfrac{x+a}{x}$.

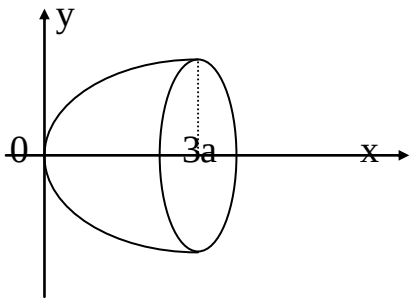

Рис. 6.8

Обчислимо площу поверхні обертання за формулою, враховуючи, що $0 \le x \le 3a$:

$$S_{п.о.} = 2\pi\int_0^{3a} 2\sqrt{a}\cdot\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{x+a}}{\sqrt{x}}dx = 4\pi\sqrt{a}\int_0^{3a}\sqrt{x+a}dx =$$

$$= 4\pi\sqrt{a}\cdot\frac{2(x+a)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{3a} = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}\left(8a\sqrt{a} - a\sqrt{a}\right) = \frac{56}{3}\pi a^2.$$

Невласні інтеграли

Приклад 19 Обчислити невласний інтеграл $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$.

Розв'язання. За означенням

$$\int_{e^2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\int_{e^2}^{b}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\Bigg|_{e^2}^{b}\right) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2\ln^2 b} + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$

Отже, даний інтеграл збігається.

Приклад 20 Дослідити на збіжність невласний інтеграл $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} > 0$ на проміжку $[1;\infty)$ *(a=1>0)* і $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}} = \dfrac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} < \dfrac{1}{x^2}$ при $x\to\infty$.

Враховуючи ознаку 5 збіжності невласних інтегралів, вихідний інтеграл $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ збігається, бо $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}} < \dfrac{1}{x^2}$ і *c=1* (*c=const*), $\alpha = 2 > 1$.

Іншими словами, із збіжності більшого невласного інтеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$ випливає збіжність меншого невласного інтеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Приклад 21 Обчислити невласний інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

Розв'язання. За означенням

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{x^2+2x+5}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{(x+1)^2+4}=$$

$$=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\left(\frac{1}{2}arctg\frac{x+1}{2}\Bigg|_a^b\right)=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\lim_{b\to+\infty}arctg\frac{b+1}{2}-\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}arctg\frac{a+1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається.

Приклад 22 Обчислити невласний інтеграл $\int_0^{+\infty}x\sin xdx$.

Розв'язання. За означенням

$$\int_0^{+\infty}x\sin xdx=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b x\sin xdx=\left|\begin{matrix}u=x;du=dx\\ dv=\sin xdx;v=-\cos x\end{matrix}\right|=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-xosx+\int\cos xdx\right)\Bigg|_0^b=\lim_{b\to+\infty}\left(-x\cos x+\sin x\right)\Bigg|_0^b=$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(-b\cos b+\sin b\right).$$

Оскільки остання границя не існує, то невласний інтеграл розбігається.

Приклад 23 Показати, що невласний інтеграл $\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ збігається.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ не обмежена в будь-якому околі точки $x=0$ і неперервна при $-1\le x<0$ і $0<x\le 8$. Отже, маємо невласний інтеграл від необмеженої функції.

Скориставшись означенням невласного інтеграла від необмеженої функції, одержимо

$$\int_{-1}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{0-\varepsilon_1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{0+\varepsilon_2}^{8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{-1}^{0-\varepsilon_1}\right)+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\Bigg|_{0+\varepsilon_2}^{8}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(\left(-\varepsilon_1\right)^{\frac{2}{3}}-1\right)+\frac{3}{2}\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(4-\left(\varepsilon_2\right)^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{3}{2}\left(-1+4\right)=\frac{9}{2}.$$

Таким чином, даний інтеграл збігається.

Приклад 24 Обчислити невласний інтеграл $\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання. Підінтегральна функція $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ не визначена в точці *x=1,* яка співпадає з нижньою границею інтегрування, причому при $x\to 1$ функція $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ необмежено зростає. Тому за означенням

$$\int_{1}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0}\ln\ln x\Bigg|_{1+\varepsilon}^{2}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\ln\ln 2-\ln\ln\left(1+\varepsilon\right)\right)=\infty.$$

Таким чином, даний інтеграл розбігається.

Питання для самоперевірки

1 Як обчислюється площа фігури, обмеженої кривою, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?

2 Як обчислюється довжина кривої, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?

3 Як обчислюється об'єм тіла обертання?

4 Що називають невласним інтегралом від заданої функції з нескінченними проміжками інтегрування? Дати геометричне тлумачення та навести приклади збіжних і розбіжних інтегралів.

5 Сформулювати ознаки збіжності невласних інтегралів із нескінченними проміжками інтегрування.

6 Який невласний інтеграл називають абсолютно збіжним і який умовно збіжним?

7 Що називають невласним інтегралом від розривної функції на даному скінченому проміжку інтегрування? Надати геометричне тлумачення і навести приклади збіжних і розбіжних інтегралів.

Домашнє завдання

Вправи

1 Обчислити площу фігури, обмеженої параболами $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$.

Відповідь: $\frac{1}{3}$.

2 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=e^{-x}$, $y=e^{x}$ і прямою $x=1$. Відповідь: $e+\frac{1}{e}-2$.

3 Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

Вказівка. Фігура симетрична відносно осей координат. При зміні аргументу x на чверті площі від 0 до a параметр t змінюється від $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Відповідь: $\frac{3}{8}\pi a^2$.

4 Фігура, обмежена дугами парабол $y^2=x$ і $x^2=y$, обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

Відповідь: $0{,}3\pi$.

5 Обчислити довжину дуги кривої $y=\frac{1}{4}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$ від $x_1=0$ до $x_2=3$.

Відповідь: $\frac{1}{4}\left(e^{6}-e^{-6}\right)$.

6 Обчислити довжину дуги лінії $\begin{cases} x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t, \\ y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t \end{cases}$ від $t_1=0$ до $t_2=\pi$. Відповідь: $\frac{\pi^3}{3}$.

Обчислити невласний інтеграл або встановити його розбіжність

1 $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2(x+1)}$. Відповідь: $1-\ln 2$.

2 $\int\limits_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$. Відповідь: розбігається.

3 $\int\limits_0^{\infty}xe^{-x^2}dx$. Відповідь: $\frac{1}{2}$.

4 $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$. Відповідь: розбігається.

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7

Диференціальні рівнянь I порядку. Задача Коші. Рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння, однорідні відносно змінних. Диференціальні рівнянь II порядку

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = -\frac{yx}{x+1}$.

Розв'язання. Наведене рівняння – диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними ($f(y)=y$, $g(x) = -\frac{x}{x+1}$ і тому неперервність функції $g(x)$ порушується при $x = -1$). Відокремимо змінні й виконаємо інтегрування.

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{x}{x+1}dx \Rightarrow \int\frac{1}{y}dy = -\int\frac{x}{x+1}dx \Rightarrow \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln|C|, \quad C \neq 0$$

(вибір довільної сталої у вигляді $\ln|C|$ пов'язаний лише із зручностями для подальшого потенціювання). Оскільки $-x = \ln e^{-x}$ і сума логарифмів дорівнює логарифму добутку, то

$$\ln|y| = \ln(|C||x+1|e^{-x}) \Leftrightarrow y = C(x+1)e^{-x}.$$

При відокремленні змінних (в результаті ділення на y) був загублений розв'язок $y \equiv 0$. Зауважимо, що цей (нульовий) розв'язок визначається при C = 0. Отже, будь-який розв'язок заданого диференціального рівняння визначається за формулою $y = C(x+1)e^{-x}$, де C – довільна стала.

Приклад 2 Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$xy(1+x^2)dy - (1+y^2)dx = 0.$$

Розв'язання. Маємо $M_1(x) = 1,\ N_1(y) = \left(1+y^2\right),\ M_2(x) = x\left(1+x^2\right),\ N_2(y) = y$.

Поділивши обидві частини рівності на $N_1(y)\cdot M_2(x)$, отримаємо рівняння з відокремленими змінними: $\frac{y}{1+y^2}dy - \frac{1}{x(1+x^2)}dx = 0$. Оскільки $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$, то задане рівняння перепишемо в такому вигляді: $\frac{y}{1+y^2}dy - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)dx = 0$.

Отже $\int \frac{y}{1+y^2}dy - \int \frac{dx}{x} + \int \frac{xdx}{1+x^2} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\left[(1+x^2)(1+y^2)\right] - \ln x = c$.

Позначимо $c = \ln c_1$ та отримаємо $(1+x^2)(1+y^2) = c_1 x^2$.

Очевидно, що $x = 0$ є частинним розв'язком нашого рівняння і його треба додати до отриманого загального розв'язку.

Приклад 3 Знайти загальний розв'язок рівняння $\left(1+e^{2x}\right)y^2 y' = e^x$.

Розв'язання. Розв'яжемо задане рівняння відносно $y' = \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2}$.

Отже, це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними.

Підставимо $y' = \frac{dy}{dx}$ і відокремимо змінні, помноживши рівняння на $y^2 dx$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{\left(1+e^{2x}\right)y^2}, \quad y^2\,dy = \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx.$$

Звідси маємо

$$\int y^2\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx \quad \Rightarrow \quad \int y^2 dy = \int \frac{e^x dx}{1+\left(e^x\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{y^3}{3} = \operatorname{arctg} e^x + C \quad \Rightarrow$$

$y^3 = 3\operatorname{arctg} e^x + C$, звідки маємо загальний розв'язок $y = \sqrt[3]{3\operatorname{arctg} e^x + C}$.

Приклад 4 Знайти частинний інтеграл рівняння $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{\frac{x}{y}}$, якщо $y|_{x=1} = 9$.

Розв'язання. Так як $\frac{dy}{dx} = 3\sqrt{\frac{x}{y}} = 3\sqrt{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}$, то це диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними (тут $f(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$, $g(x) = 3\sqrt{x}$). Помноживши рівняння на $\sqrt{y}\,dx$, дістанемо $\sqrt{y}\,dy = 3\sqrt{x}\,dx$.

Інтегруємо дане рівняння:

$\int \sqrt{y}\,dy = 3\int \sqrt{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad \int y^{\frac{1}{2}}\,dy = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 3\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$, звідки знаходимо загальний інтеграл $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}C$, або $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + C$.

Знайдемо частинний інтеграл. За умовою задачі $y = 9$ при $x = 1$. Підставляючи вказані значення y та x у формулу (8), знаходимо сталу C: $9^{\frac{3}{2}} = 3 \cdot 1^{\frac{3}{2}} + C$, $27 = 3 + C$, $C = 24$.

Підставивши знайдене значення $C = 24$ у формулу $\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = 3\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$, дістаємо частинний інтеграл заданого диференціального рівняння – $y^{\frac{3}{2}} = 3x^{\frac{3}{2}} + 24$.

Приклад 5 Знайти загальний розв'язок заданого диференціального рівняння $y' = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$.

Розв'язання. Праву частину даного рівняння $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x^2}$ можна надати у вигляді: $f(x, y) = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$.

Остаточно маємо $y' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)$. Застосуємо підстановку $u = \frac{y}{x}$, $y = ux$, $y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{1 + u^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u'x = \frac{1 + u^2}{2} - u \quad \Rightarrow \quad u'x = \frac{u^2 - 2u + 1}{2} \quad \Rightarrow \quad u'x = \frac{(u-1)^2}{2} \quad \Rightarrow$$

$$u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}.$$

Диференціальне рівняння $u' = \frac{(u-1)^2}{2} \cdot \frac{1}{x}$ – рівняння з відокремлюваними змінними. Розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dx}=\frac{(u-1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{2du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{-2}{u-1}=\ln|x|+\ln C \Rightarrow$$

$$\frac{-2}{u-1}=\ln C|x|.$$

Підставимо в отримане рівняння $u=\frac{y}{x}$: $\frac{-2}{\frac{y}{x}-1}=\ln C|x| \Rightarrow \frac{-2x}{y-x}=\ln C|x|$, звідки знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y=x-\frac{2x}{\ln C|x|}$.

Приклад 6 Розв'язати рівняння $y'-\frac{2}{x}y=2x^3$. Відповідь надати у вигляді загального розв'язку.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку виду $y'+p(x)y=q(x)$. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y=uv$. Тоді $y'=u'v+uv'$. Підставляємо y та y' у задане рівняння: $u'v+uv'-\frac{2uv}{x}=2x^3$ $\Rightarrow u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=2x^3$.

Виберемо функцію v таким чином, щоб $v'-\frac{2v}{x}=0$. Знаходимо v:

$$v'=\frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v}=2\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v|=2\ln|x|$$

$\Rightarrow \ln|v|=\ln x^2$, звідки $v=x^2$.

Зауважимо, що оскільки в якості функції v ми вибираємо один з розв'язків рівняння $v'-\frac{2v}{x}=0$, то тут після інтегрування диференціального рівняння для знаходження v, покладаємо $C=0$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u'v+u\left(v'-\frac{2v}{x}\right)=2x^3$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\cdot x^2=2x^3$ або $u'=\frac{2x^3}{x^2}$. Знаходимо u:

$$\frac{du}{dx}=2x \Rightarrow du=2x\,dx \Rightarrow \int du=\int 2x\,dx \Rightarrow u=2\cdot\frac{x^2}{2}+C \Rightarrow u=x^2+C.$$

За формулою $y=uv$ знаходимо загальний розв'язок заданого диференціального рівняння – $y=uv=\left(x^2+C\right)x^2$.

Приклад 7 Розв'язати рівняння $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\cos^2 x$. Відповідь надати у вигляді загального розв'язку.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y=uv$. Тоді $y'=u'v+uv'$. Після підстановки у рівняння отримаємо: $u'v+uv'+uv\,\mathrm{tg}\,x=\cos^2 x$ $\Rightarrow$ $u'v+u\left(v'+v\,\mathrm{tg}\,x\right)=\cos^2 x$.

Виберемо функцію v так, щоб $v'+v\,\mathrm{tg}\,x=0$. Знаходимо v:

$v'+v\,\mathrm{tg}\,x=0 \Rightarrow \frac{dv}{dx}=-v\,\mathrm{tg}\,x \Rightarrow \frac{dv}{v}=-\mathrm{tg}\,x\,dx \Rightarrow \int\frac{dv}{v}=-\int\mathrm{tg}\,x\,dx \Rightarrow$ $\ln|v|=\ln|\cos x|$, звідки $v=\cos x$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u'v+u\left(v'+v\,\mathrm{tg}\,x\right)=\cos^2 x$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$u'\cdot\cos x=\cos^2 x \Rightarrow u'=\frac{\cos^2 x}{\cos x} \Rightarrow \frac{du}{dx}=\cos x \Rightarrow du=\cos x\,dx \Rightarrow \int du=\int\cos x\,dx$, звідки $u=\sin x+C$.

Розв'язок рівняння шукали у вигляді $y=uv$, тому маємо $y=\left(\sin x+C\right)\cos x$.

Приклад 8 Розв'язати рівняння $x^2y'+5xy+4=0$. Відповідь надати у вигляді загального розв'язку.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $y'+p(x)y=q(x)$. Таким чином отримаємо $y'+\frac{5xy}{x^2}=-\frac{4}{x^2} \Rightarrow y'+\frac{5y}{x}=-\frac{4}{x^2}$.

Отже, маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y=uv$. Після підстановки у рівняння $y=uv$ та $y'=u'v+uv'$ отримаємо:

$$u'v+uv'+\frac{5uv}{x}=-\frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; u'v+u\left(v'+\frac{5v}{x}\right)=-\frac{4}{x^2}.$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'+\frac{5v}{x}=0$. Знаходимо v: $\frac{dv}{dx}=-\frac{5v}{x} \;\Rightarrow$ $\frac{dv}{v}=-5\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int\frac{dv}{v}=-5\int\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln|v|=-5\ln|x| \;\Rightarrow\; \ln|v|=\ln\frac{1}{|x^5|}$, звідки $v=\frac{1}{x^5}$.

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u'v+u\left(v'+\frac{5v}{x}\right)=-\frac{4}{x^2}$, отримуємо рівняння для знаходження u: $u'\cdot\frac{1}{x^5}=-\frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; u'=-\frac{4}{x^2}\cdot x^5 \;\Rightarrow$ $\frac{du}{dx}=-4x^3 \;\Rightarrow\; du=-4x^3dx \;\Rightarrow\; \int du=-4\int x^3dx \;\Rightarrow\; u=-4\cdot\frac{x^4}{4}+C \;\Rightarrow\; u=-x^4+C$.

Отже, загальний розв'язок рівняння має вигляд $y=uv=\frac{C-x^4}{x^5}$.

Приклад 9 Розв'язати задачу Коші для рівняння $y'-\frac{2x}{x^2+1}y=x\sqrt{x^2+1}$, якщо $y|_{x=0}=2$. Відповідь надати у вигляді частинного розв'язку.

Розв'язання. Маємо лінійне диференціальне рівняння першого порядку. Його розв'язок шукаємо у вигляді $y=uv$. Після підстановки у рівняння $y=uv$ та $y'=u'v+uv'$ отримаємо:

$$u'v+uv'-\frac{2x}{x^2+1}uv=x\sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; u'v+u\left(v'-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x\sqrt{x^2+1}.$$

Виберемо функцію v так, щоб $v'-\frac{2xv}{x^2+1}=0$. Знаходимо v: $\frac{dv}{dx}=\frac{2xv}{x^2+1} \;\Rightarrow$

$$\frac{dv}{v}=\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{2x}{x^2+1}dx \;\Rightarrow\; \ln|v|=\ln|x^2+1| \;\Rightarrow\; v=x^2+1.$$

Підставляючи знайдену функцію v в рівняння $u'v+u\left(v'-\frac{2x}{x^2+1}v\right)=x\sqrt{x^2+1}$, отримуємо рівняння для знаходження u:

$$u'\left(x^2+1\right)=x\sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; u'=x\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x^2+1} \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \;\Rightarrow\; du=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx.$$

$\int du = \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \Rightarrow u = \sqrt{x^2+1} + C$.

Отже, загальний розв'язок має вигляд $y = uv = \left(\sqrt{x^2+1} + C\right) \cdot \left(x^2+1\right)$.

Знайдемо частинний розв'язок. За умовою задачі $y = 2$ при $x = 0$. Тоді отримаємо $2 = (1+C) \cdot 1 \Rightarrow C = 1$.

Отже, частинний розв'язок має вигляд $y = \left(\sqrt{x^2+1} + 1\right)\left(x^2+1\right)$ або $y = \sqrt{\left(x^2+1\right)^3} + x^2 + 1$.

Приклад 10 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = Y + \bar{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2 + 1 = 0$; звідки $k^2 = -1$, $k_{1,2} = \pm\sqrt{-1}; k_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \pm i$. Маємо випадок уявних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$. В нашому випадку α=0, β=1. Отже, $y_1(x) = \cos x; y_2(x) = \sin x$, а $\bar{y} = C_1\cos x + C_2 \sin x$.

Щоб за формулою $Y = y_2\int \frac{y_1(x) f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2(x) f(x)}{W} dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Тоді

$$Y(x) = \sin x \int \frac{\cos x \cdot 1}{1 \cdot \sin^3 x} dx - \cos x \int \frac{\sin x \cdot 1}{1 \cdot \sin^3 x} dx = \sin x \int \cos x \sin^{-3} x dx - \cos x \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \sin x \left(\frac{\sin^{-2} x}{-2}\right) - \cos x\left(-ctgx\right) = -\frac{1}{2\sin x} + \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{-1 + 2\cos^2 x}{2\sin x} = \frac{\cos 2x}{2\sin x}.$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y} + Y$: $y = C_1\cos x + C_2 \sin x + \frac{\cos 2x}{2\sin x}$.

Приклад 11 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.

Розв'язання. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = Y + \bar{y}$ Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' - 2y' + y = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2 - 2k + 1 = 0$; звідки $(k-1)^2 = 0$, $k_1 = k_2 = k = 1$. Корені дійсні та рівні. Тоді фундаментальна системо розв'язків має вигляд $y_1 = e^{kx} = e^x$, $y_2 = xe^{kx} = xe^x$. За формулою $y = (C_1 + C_2 x)e^{kx}$ записуємо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння: $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 x e^x$.

Обчислимо визначник Вронського:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^x(e^x + xe^x) - xe^x e^x = e^{2x} \neq 0.$$

Тоді $Y(x) = xe^x \int \frac{e^x \cdot \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} dx - e^x \int \frac{xe^x \cdot \frac{e^x}{x}}{e^{2x}} dx = xe^x \int \frac{1}{x} dx - e^x \int dx = xe^x \ln|x| - e^x x$.

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо у вигляді: $y = \bar{y} + Y = C_1 e^x + C_2 x e^x + xe^x \ln|x| - xe^x$ або $y = C_1 e^x + C_3 x e^x + xe^x \ln|x|$, де $C_3 = C_2 - 1$.

Приклад 12 Методом варіації довільних сталих знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$.

Розв'язання. Задане рівняння є неоднорідне лінійне рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами. Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді $y = Y + \bar{y}$. Знайдемо спочатку загальний розв'язок $\bar{y}$ відповідного однорідного рівняння $y'' - y' = 0$, для чого складемо характеристичне рівняння: $k^2 - k = 0$; запишемо його у вигляді $k(k-1) = 0$, звідки $k_1 = 0$; $k_2 = 1$. Маємо випадок дійсних та різних коренів характеристичного рівняння. Тоді $y_1(x) = e^{k_1 x}$, $y_2(x) = e^{k_2 x}$. Отже, $y_1(x) = e^{0x} = 1$; $y_2(x) = e^{1x} = e^x$, а $\bar{y} = C_1 + C_2 e^x$.

Щоб за формулою $Y = y_2 \int \frac{y_1(x) f(x)}{W} dx - y_1 \int \frac{y_2(x) f(x)}{W} dx$ знайти частинний розв'язок заданого неоднорідного рівняння, спочатку визначимо $W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$:

$$W(x)=\begin{vmatrix}1 & e^x\\ 0 & e^x\end{vmatrix}=e^x-0=e^x\neq 0.$$

Тоді

$$Y(x)=e^x\int\frac{1\cdot\frac{e^x}{1+e^x}}{e^x}dx-1\cdot\int\frac{e^x\cdot\frac{e^x}{1+e^x}}{e^x}dx=e^x\int\frac{1}{1+e^x}dx-\int\frac{e^x}{1+e^x}dx=e^x\int\frac{1}{1+e^x}dx-\ln\left(1+e^x\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}u=1+e^x\\ du=e^xdx\\ dx=\frac{du}{u-1}\end{vmatrix}=e^x\int\frac{du}{(u-1)u}-\ln(1+e^x)=-e^x\int\frac{u-1-u}{(u-1)u}du-\ln(1+e^x)=-e^x\int\frac{1}{u}du+e^x\int\frac{1}{u-1}du-\ln(1+e^x)=$$

$$=-e^x\ln|u|+e^x\ln|u-1|-\ln(1+e^x)=e^x\ln\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$$

Остаточно, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння знайдемо як суму $\bar{y}+Y: y=C_1+C_2e^x+e^x\ln\frac{e^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)$.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.

Наведемо таблицю найпростіших правих частин *f(x)* рівняння $y''+py'+qy=f(x)$ та відповідних видів частинних розв'язків *Y*.

Вид правої частини рівняння $y''+py'+qy=f(x)$	Вид частинного розв'язку *Y*
$f(x)=P_n(x)$ (багаточлен *n*-го степеню)	$Y=x^sQ_n(x)$, де $S=\begin{cases}0, якщо\, k_1\neq 0\neq k_2\\ 1, якщо\, k_1=0\neq k_2\end{cases}$ $Q_n(x)$ – багаточлен *n*-го степеню, коефіцієнти якого треба визначити
$f(x)=P_n(x)e^{ax}$	$Y=x^SQ_n(x)e^{ax}$, де $S=\begin{cases}0, якщо\ k_1\neq a\neq k_2\\ 1, якщо\ k_1=a\neq k_2\\ 2, якщо\ k_1=a=k_2\end{cases}$
$f(x)=A\cos bx+B\sin bx$ (*A*, *B*, *b* – числа)	$Y=x^s(M\cos bx+N\sin bx)$, де $S=\begin{cases}0, якщо\, k_1\neq bi\neq k_2\\ 1, якщо\, k_1=bi\neq k_2\end{cases}$, *M*, *N* – коефіцієнти, які треба визначити

У загальному випадку, коли $f(x)=e^{ax}\left[P_n(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx\right]$, де $P_n(x)$; $Q_m(x)$ – багаточлени з дійсними коефіцієнтами степеню відповідно *n* і *m*, тоді:

$Y = x^s e^{ax}\left[R_k(x)\cos bx + T_k(x)\sin bx\right]$, де $k=max\{n, m\}$; $R_k(x)$, $T_k(x)$ – багаточлени степеню k, коефіцієнти яких треба визначити;

$$S = \begin{cases} 0, якщо\, k_1 \neq a+bi \neq k_2 \\ 1, якщо\, k_1 = a+bi \neq k_2 \\ 2, якщо\, k_1 = a+bi = k_2 \end{cases}.$$

Розв'язання прикладів

Приклад 1 Знайти загальний розв'язок рівняння $2y'' + y' - y = 2e^x$.

Розв'язання. Дане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y = \bar{y} + Y$. Для знаходження $\bar{y}$ розв'язуємо лінійне однорідне диференціальне рівняння, що йому відповідає $2y'' + y' - y = 0$. Складемо характеристичне рівняння $2к^2+к-1=0$. Його корені $к_1 = -1$ і $k_2 = \frac{1}{2}$. Отже, $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$.

Права частина $f(x) = 2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x) = P_n(x)e^{ax}$, де n=0, a=1, тому $Y = Ae^x$ бо $a \neq k_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y' = Ae^x, Y'' = Ae^x$. Підставимо Y, Y', Y'' в дане рівняння: $2Ae^x + Ae^x - Ae^x \equiv 2e^x$, звідки знаходимо A=1. Отже, $Y = e^x$. Тоді загальний розв`язок рівняння $2y'' + y' - y = 2e^x$ має вигляд: $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$.

Приклад 2 Знайти загальний розв`язок рівняння $y'' + 7y' + 6y = \sin x$.

**Розв`язання.** Переконуємося, що дане рівняння є лінійним неоднорідним II порядку зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, тому його загальний розв'язок шукаємо у вигляді $y = \bar{y} + Y$. Розв`язуємо відповідне йому однорідне рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$. Його характеристичне рівняння $к^2-7к+6=0$ має корені $к_1=1$, $к_2=6$. Отже, $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$. Права частина даного рівняння $f(x) = \sin x$ являє собою функцію вигляду $f(x) = A\cos bx + B\sin bx$, де $A=0$, $B=1$, b=1. Оскільки $bi = 1 \neq k_{1,2}$, то $Y = M\cos x + N\sin x$, де M і N - коефіцієнти, які треба визначити. Диференціюючи Y двічі, знаходимо:

$Y' = -M\sin x + N\cos x$, $Y'' = -M\cos x - N\sin x$.

Підставимо вирази Y, Y', Y'' в рівняння $y'' + 7y' + 6y = \sin x$:

$-M\cos x - N\sin x - 7(-M\sin x + N\cos x) + 6(M\cos x + N\sin x) = \sin x$.

У лівій частині отриманої тотожності зведемо подібні доданки:

$(5M-7N)\cos x+(7M-5N)\sin x\equiv 0\cos x+\sin x.$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$ в обох частинах тотожності, одержимо систему рівнянь $\begin{cases}5M-7N=0,\\7M+5N=1.\end{cases}$

Розв`язавши її, знаходимо $M=\frac{7}{74}, N=\frac{5}{74}$. Отже, $Y=\frac{7}{74}\cos x+\frac{5}{74}\sin x.$

Таким чином, загальний розв`язок даного рівняння має вигляд $y=C_1e^x+C_2e^{6x}+\frac{7}{74}\cos x+\frac{5}{74}\sin x.$

Питання для самоперевірки

1 Поняття диференціального рівняння.

2 Порядок диференціального рівняння.

3 Що називається розв'язком диференціального рівняння?

4 Яка задача називається задачею Коші? За яких умов існує єдиний розв'язок задачі Коші?

5 Поняття загального і частинного розв'язку диференціального рівняння.

6 Геометричний зміст розв'язків дифрівняння.

7 Дифрівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

8 Які диференціальні рівняння першого порядку називають рівняннями однорідними відносно змінних

9 Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням першого порядку?

10 Що називають розв'язком лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку?

11 Як має вигляд частинний розв'язок ЛНДР II порядку?

12 Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

13 Який вигляд має частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною у випадках:

1) $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x);$

2) $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x};$

3) $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$?

Домашнє завдання

Вправи

1 $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2+1}$. Відповідь: $y = \left(C_1 + C_2 x - \ln\sqrt{1+x^2} + x\,arctgx\right)e^x$.

2 $y'' + y = ctgx$. Відповідь: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right|$.

3 $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$. Відповідь: $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + \cos x\ln|\cos x|$.

4 $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^x}{\cos x}$. Відповідь: $y = e^{2x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + \cos x\ln|\cos x|\right)$.

Знайти загальний або частинний розв`язок наступних диференціальних рівнянь.

1 $y'' + 2y' + 5y = -\dfrac{17}{2}\cos 2x.$

Відповідь: $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) - \dfrac{1}{2}\cos 2x - 2\sin 2x.$

2 $y'' - 2y' + 2y = 2x.$

Відповідь: $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + x + 1.$

3 $y'' - 3y' + 2y = f(x),$ якщо

1) $f(x) = 10e^{-x}.$

Відповідь : $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \dfrac{5}{3}e^{-x}.$

2) $f(x) = 2\sin x.$

Відповідь: $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \dfrac{3}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\sin x.$

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8

Числові ряди. Збіжність рядів. Степеневі ряди. Область збіжності степеневого ряду.

Приклад 1 Для ряду $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots$ знайти суму n перших членів ряду S_n, довести збіжність ряду, користуючись означенням збіжності.

Розв'язання. Зауважимо, що дріб

$$\frac{3^n+2^n}{6^n}=\frac{3^n}{6^n}+\frac{2^n}{6^n}=\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Кожний член ряду подамо у вигляді цієї суми, і часткову суму ряду зможемо записати таким чином: $S_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right).$

Проведемо групування доданків

$$S_n=\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]+\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right].$$

Вирази в квадратних дужках є сумами n перших членів геометричної послідовності зі знаменником $q_1=\frac{1}{2}, q_2=\frac{1}{3},$ тому S_n можна записати у вигляді

$$S_n=\frac{u_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}.$$

Знайдемо границю S_n:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3^n}\right)=\frac{3}{2}.$$

Отже, даний ряд збігається і його сума дорівнює $S=\frac{3}{2}.$

Приклад 2 Дослідити збіжність ряду $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

Розв'язання. Маємо $u_n=\frac{1}{\ln(n+1)}$. Для порівняння обираємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$ який розбігається. Ряд $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n}+\ldots$ також розбігається, він отриманий із гармонічного ряду відкиданням першого члена. Оскільки $\ln 2<2,$ $\ln 3<3,\ldots,$ $\ln n<n,$ $\ln(n+1)<n+1,$ то $\frac{1}{\ln 2}>\frac{1}{2};\frac{1}{\ln 3}>\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}.$ Отже, члени дослідженого ряду є більшими за члени розбіжного ряду. На основі другої ознаки порівняння рядів він розбігається.

Приклад 3 Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$.

Розв'язання. Для порівняння обираємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Цей ряд збіжний, оскільки $p = 2 > 1$.

За третьою ознакою порівняння рядів

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2-4n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2}=1\neq 0.$$

Границя відношення загальних членів рядів існує, отже, заданий ряд так само, як і обраний, збігається.

Приклад 4 Дослідити збіжність ряду $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}+\ldots$

Розв'язання. Маємо $u_n=\frac{1+n}{1+n^2}$. У якості ряду порівняння обираємо гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, який при $p = 1$ розбігається. Застосовуючи третю ознаку порівняння рядів, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{1+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{1+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2}=1\neq 0.$$

Робимо висновок про те, що обидва ряди одночасно розбігаються.

Приклад 5 Дослідити на збіжність ряд $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$

Розв'язання. Це ряд, що має додатні члени, загальний член ряду $u_n=\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n$. Застосовуючи радикальну ознаку Коші, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\arcsin\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{1}{n}=0<1,$$

отже, ряд збігається.

Приклад 6 Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$.

Розв'язання. При $n\to\infty$ u_n являє невизначеність вигляду $0\cdot(\infty-\infty)$. Перетворимо u_n:

$$u_n=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n-1})^2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=\frac{n+1-n+1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=\frac{2}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}.$$

У якості еталонного ряду застосуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, який збігається при $p=\frac{1}{2}>1.$

Застосовуючи третю ознаку порівняння рядів

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{\frac{3}{2}}}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}=2\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=1\neq 0,$$

робимо висновок про те, що обидва ряди одночасно збігаються.

Приклад 7 Довести збіжність ряду $\frac{1}{5!}+\frac{1}{8!}+...+\frac{1}{(3n+2)!}+...$

Розв'язання. Це ряд, що має додатні члени. Загальний член ряду $u_n=\frac{1}{(3n+2)!}$ містить факторіал, тому збіжність дослідимо за ознакою Даламбера.

Замінивши у u_n величину n на $n+1$, знайдемо

$$u_{n+1}=\frac{1}{[3(n+1)+2]!}=\frac{1}{(3n+5)!}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)!}{(3n+5)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)!}{(3n+2)!(3n+3)(3n+4)(3n+5)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(3n+3)(3n+4)(3n+5)}=0<1,$$

отже, ряд збігається.

Приклад 8 Дослідити на збіжність ряд $arctg1+arctg^2\frac{1}{2}+...+arctg^n\frac{1}{n}+...$

Розв'язання. Це ряд, що має додатні члени, загальний член ряду $u_n=(\ arctg\frac{1}{n}\ )^n$. Застосовуючи радикальну ознаку Коші, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(arctg\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}arctg\frac{1}{n}=0<1,$$

отже, ряд збігається.

Приклад 9 Дослідити на збіжність ряд $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+..+\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}+...$

Розв'язання. Даний ряд має додатні спадні члени

$$\frac{1}{2\ln 2}>\frac{1}{3\ln 3}>...>\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}>...$$

Розглянемо функцію $f(n)=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, частинні значення якої дорівнюють членам ряду при n = 1,2,3,...

$$f(1)=\frac{1}{2\ln 2},\ f(2)=\frac{1}{3\ln 3},\ldots,f(n)=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)},\ldots$$

Невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(n)dn=\int_1^{\infty}\frac{dn}{(n+1)\ln(n+1)}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{d(\ln(n+1))}{\ln(n+1)}=\lim_{b\to\infty}\ln\left|\ln(n+1)\right|_1^b=$$

$$=\lim_{b\to\infty}(\ln\left|\ln(b+1)-\ln\left|\ln 2\right|\right|)=\infty,$$

інтеграл розбігається. За інтегральною ознакою Коші ряд також розбігається.

Приклад 10 Дослідити ряд на збіжність $2-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$

Розв`язання. Даний ряд є знакопочережним. Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1\neq 0.$$

Для цього ряду не виконується друга умова ознаки Лейбніця, тому ряд розбігається.

Приклад 10 Дослідити ряд на збіжність $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$.

Розв'язання. Оскільки заданий ряд є знакопочережним, то перевіряємо виконання умов ознаки Лейбніца:

1 $1>\frac{1}{3!}>\frac{1}{5!}>\ldots>\frac{1}{(2n-1)!}>\ldots$

2 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n-1)!}=0.$

Умови виконані, а це означає, що ряд збігається. Складаємо ряд із абсолютних величин членів даного ряду: $1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)!}+\ldots$

За ознакою Даламбера маємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n-1)!2n(2n+1)}=0<1.$$

Даний ряд збігається. Отже, він збігається абсолютно.

Приклад 11 Дослідити знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжності.

$$\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}+\ldots$$

Розв'язання. Даний ряд є знакопочережним. Члени ряду спадають

$$\frac{1}{\ln 2}>\frac{1}{\ln 3}>\frac{1}{\ln 4}>\ldots>\frac{1}{\ln(n+1)}>\ldots \text{ і } \lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}=0.$$

Умови ознаки Лейбніца виконані, а це означає, що ряд збігається умовно. Перевіримо ряд на абсолютну збіжність, складаючи ряд із абсолютних величин даного ряду:

$$\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$$

Отриманий ряд за другою ознакою порівняння розбігається. Таким чином, даний ряд збігається умовно.

Приклад 12 Дослідити знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2}.$$

Розв'язання. Даний ряд є знакопочережним. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $2>1>\frac{8}{3}>\ldots>\frac{2^n}{n^2}>\ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(2^n\right)'}{\left(n^2\right)'}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\ln 2}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n\ln^2 2}{2}=\infty.$

Друга умова ознаки Лейбніца не виконується, тому ряд розбігається.

Приклад 13 Знайти область збіжності ряду

$$\frac{x+1}{1\cdot 2}+\frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2}+\ldots+\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n}+\ldots$$

Розв`язання. Для даного функціонального ряду запишемо

$$u_n=\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n};u_{n+1}=\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Обчислимо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{n+1}}{|x|^n}\cdot\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}|x+1|.$$

На основі ознаки Даламбера можна стверджувати, що ряд збігається і причому абсолютно, якщо $\frac{1}{2}|x+1|<1$ або -1 <x < 1 ; ряд розбігається, якщо $\frac{1}{2}|x+1|>1$, тобто якщо - ∞ < x < - 3 або 1 < x < ∞. При x = 1 отримаємо гармонічний ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, який розбігається, а при x = -3 – ряд: $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots$, який відповідно до ознаки Лейбніца збігається умовно.

Отже, даний ряд збігається при $-3\le x<1.$

Приклад 14 Знайти область збіжності степеневого ряду

$$10x+100x^2+1000x^3+\ldots+10^n x^n+\ldots$$

Розв'язання. Даний ряд є повним степеневим за степенями x. Знайдемо радіус збіжності за формулою (4.6) при $a_n = 10^n$;

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{10^n}} = \frac{1}{10}.$$

Для всіх $x \in \left]-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right[$ ряд збігається. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках $x = -\frac{1}{10}$ і $x = \frac{1}{10}$.

При $x = -\frac{1}{10}$ отримаємо знакопочережний ряд $-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$, який розбігається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 1$.

При $x = \frac{1}{10}$ отримаємо знакододатний ряд 1+1+1+..., який розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності числового ряду $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n| = 1 \neq 0$.

Отже, областю збіжності степеневого ряду є інтервал $\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$.

Приклад 15 Знайти область збіжності степеневого ряду

$$x + \frac{x^2}{20} + \frac{x^3}{300} + \ldots + \frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}} + \ldots$$

Розв'язання. Даний ряд є повним степеневим за степенями x.

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 10^{n-1}}; \qquad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)10^n}.$$

Радіус збіжності

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)10^n}{n10^{n-1}} = 10\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = 10.$$

Для всіх $x \in \left]-10;10\right[$ ряд збігається.

При x = - 10 отримаємо знакопочережний ряд

$$-10 + \frac{10}{2} - \frac{10}{3} + \ldots + (-1)^n\frac{10}{n} + \ldots$$

Для нього виконуються умови ознаки Лейбніца. Ряд збігається.

При $x = 10$ отримаємо знакододатний ряд

$$10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{3} + \ldots + \frac{10}{n} + \ldots = 10\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right).$$

Даний ряд розбігається, оскільки є гармонічним рядом, помноженим на 10. Отже, областю збіжності даного ряду є інтервал $\left[-10;10\right[$.

Приклад 16 Розвинути многочлен $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ за степенями двочлена (x + 1).

Розв'язання. Обчислимо значення функції та її похідних при $x = a$= - 1

$$f(x)=x^3+3x^2-2x+4, \qquad f(-1)=-1+3+2+4=8,$$
$$f'(x)=3x^2+6x-2, \qquad f(-1)=3-6-2=-5,$$
$$f''(x)=6x+6, \qquad f''(-1)=-6+6=0,$$
$$f'''(x)=6, \qquad f'''(-1)=6.$$

Підставляючи дані значення в ряд Тейлора, отримаємо

$$x^3+3x^2-2x+4=8-5(x+1)+\frac{0\cdot(x+1)^2}{2!}+\frac{6(x+1)^3}{3!}=8-5(x+1)+(x+1)^3.$$

Основні елементарні функції можна розвинути в ряд Маклорена

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots, \ (-\infty<x<\infty), \tag{8.1}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots, \ (-\infty<x<\infty), \tag{8.2}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\ldots, \ (-\infty<x<\infty), \tag{8.3}$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots, \ (-1<x<1), \tag{8.4}$$

$$\arcsin x=\int_0^x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx=x+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots\ldots+\frac{1\cdot3\cdot5..(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+..\right], (-1\le x\le1), \tag{8.5}$$

$$arctgx=\int_0^x(1+x^2)^{-1}dx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots, \ (-1\le x\le1), \tag{8.6}$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x(1+x)^{-1}dx=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots, \ (-1<x\le1). \tag{8.7}$$

Приклад 17 Розвинути функцію $f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}$ в околі точки x = 0, скориставшись формулою розвинення в ряд Маклорена функції $(1+x)^m$.

Розв'язання. Перетворимо дану функцію, замінивши x на $\left(-\frac{x^3}{8}\right)$:

$$f(x)=\sqrt[3]{8-x^3}=\sqrt[3]{8\left(1-\frac{x^3}{8}\right)}=2\left(1-\frac{x^3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}=$$

$$=2\left[1+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^3}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^2+\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\frac{1}{n!}\left(-\frac{x^3}{8}\right)^n+\ldots\right]=$$

$$=2\left[1-\frac{x^3}{3\cdot8}-\ldots-\frac{2\cdot5\ldots(3n-4)}{3^n\cdot n!}\cdot\frac{x^{3n}}{8^n}-\ldots\right]=$$

$$=2-2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\frac{2}{3^2\cdot2!}\left(\frac{x}{2}\right)^6+\ldots+\frac{2\cdot5\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{3n}+\ldots\right].$$

Питання для самоперевірки

1 Дайте означення числового ряду, його загального члена, частинної суми збіжного й розбіжного рядів.

3 Сформулюйте й доведіть основні властивості числових рядів.

4 Сформулюйте необхідну ознаку збіжності ряду й наслідок цієї ознаки.

5 Сформулюйте й доведіть ознаку Даламбера і Коші (радикальну й інтегральну) збіжності рядів, наведіть приклади застосування цих ознак.

6 Дослідження збіжності узагальненого гармонічного ряду за допомогою інтегральної ознаки Коші.

7 Дайте означення знакопочережного ряду.

8 Дайте означення абсолютно й умовно збіжних знакозмінних рядів.

9 Сформулюйте зауваження до ознаки Лейбніца про заміну суми ряду сумою n перших членів ряду.

10 Розвинути функції $\sin x$, $\cos x$, e^x, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$ в ряд Маклорена, знайдіть проміжок збіжності.

Домашнє завдання

Вправи

Дослідити на збіжність ряди.

1 $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^2}+\ldots$

Відповідь: ряд збігається абсолютно

2 $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$

Відповідь: ряд збігається умовно.

3 $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\frac{27}{8}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+\ldots$

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

Знайти область збіжності степеневих рядів:

4 $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

Відповідь: $-1<x<1$.

5 $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$

Відповідь: $-1\le x\le 1$.

6 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-5)^n}{n3^n}$.

Відповідь: $2<x\le 8$.

7 Розвинути многочлен $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степенями (x-4).

Відповідь: $(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$.

СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука, 1985.

3. Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

4. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. шк., 2001.

5. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : В. 2т.- М. : Наука, 1985.

6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

7. Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. – М.: Айрис- пресс, 2004.

8. О. В. Бабаєва. Вища математика. Тексти лекцій для здобувачів вищої освіти спеціальності 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» першого (бакалаврського) рівня ХНУБА, 2021. – 120 с.

9. Методичні вказівки до виконання індивідуальної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» першого (бакалаврського) рівня. /Укладач: О.В. Бабаєва. ХНУБА, 2021– 68 с.

10. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» першого (бакалаврського) рівня. /Укладач: О.В. Бабаєва.2021– 52 с.

ЗМІСТ

Практичне заняття 1 ……... 3
Практичне заняття 2 ……... 10
Практичне заняття 3 ……... 17
Практичне заняття 4 ……... 26
Практичне заняття 5 ……... 36
Практичне заняття 6 ……... 48
Практичне заняття 7 ……... 59
Практичне заняття 8 ……... 71
Список джерел інформації…….. 79

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з навчальної дисципліни «Вища математика» для здобувачів вищої освіти спеціальності 072 «Фінанси, банківська справа та страхування» першого (бакалаврського) рівня

Укладач БАБАЄВА Олена Вікторівна

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

За редакцією автора

План 2022 р., поз. 199.22
Підп. до друку 8.12.21 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсетний.
Riso-друк. Гарнітура Times New Roman. Ум. друк. арк. 4,0
Тираж 50 прим. Зам. № 6927. Безкоштовно.

ХНУБА, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури