



**Міністерство освіти і науки України**

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

**Є.В. Поклонський**

**Методичні вказівки до практичних занять  
з курсу «Вища та прикладна математика»  
для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»**

**Харків 2016**



**Міністерство освіти і науки України**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

**спеціальність 073**

**Є.В. Поклонський**

**Методичні вказівки до практичних занять**  
**з курсу «Вища та прикладна математика»**  
**для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»**

Затверджено на засіданні кафедри  
вищої математики  
Протокол № 2 від 26.09.2016

**Харків 2016**

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»/ Укладач Поклонський Є.В. – Харків: ХНУБА, 2016. - 282с.

Рецензент А.Ю. Петрова

Кафедра вищої математики

## ВСТУП

Основна мета методичних вказівок до практичних занять – надати допомогу студентам у вивченні курсу «Вища та прикладна математика», оволодіти навичками та прийомами розв’язування задач та прикладів.

Представлений матеріал відповідає змісту та послідовності викладання його на лекційних заняттях. Методичні вказівки містять: програму навчальної дисципліни, навчальний матеріал для проведення практичних занять, питання для самоперевірки, задачі для виконання домашніх завдань зміст теоретичного матеріалу, що потрібно вивчити перед кожним практичним заняттям, бібліографічний список, а також додатки у вигляді таблиць функцій та параметрів.

Методичні вказівки доцільно використовувати як для роботи в аудиторії, так і для індивідуальної самостійної роботи.

## ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

### Модуль 1 (1-й семестр)

**Змістовий модуль 1. Лінійна алгебра. Векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ в математичний аналіз. Похідна. Функція багатьох змінних.**

**Тема 1.** Матриці. Визначники. Системи  $n$ -лінійних рівнянь з  $n$  невідомими.

**Тема 2.** Системи  $n$ -лінійних рівнянь з  $m$  невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі. Метод Гауса і Жордана-Гауса.

**Тема 3.** Векторна алгебра.

**Тема 4.** Аналітична геометрія на площині.

**Тема 5.** Аналітична геометрія у просторі.

**Тема 6.** Вступ в математичний аналіз.

**Тема 7.** Похідна функції однієї змінної.

**Тема 8.** Застосування похідної функції однієї змінної.

**Тема 9.** Функції багатьох змінних.

**Змістовий модуль 2. Невизначений інтеграл. Застосування визначеного інтегралу. Диференціальні рівняння. Ряди.**

**Тема 10.** Невизначений інтеграл.

**Тема 11.** Інтегрування раціональних дробів, тригонометричних і ірраціональних виразів.

**Тема 12.** Визначений інтеграл.

**Тема 13.** Застосування визначеного інтеграла.

**Тема 14.** Диференціальні рівняння першого порядку.

**Тема 15.** Диференціальні рівняння другого порядку.

**Тема 16.** Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

**Тема 17.** Числові ряди.

**Тема 18.** Функціональні ряди.

## **Модуль 2 (2-й семестр)**

### **Змістовий модуль 3. Теорія ймовірностей. Основні поняття математичної статистики.**

**Тема 19.** Випадкові події. Основні поняття.

**Тема 20.** Алгебра подій. Основні теореми.

**Тема 21.** Повторні випробування.

**Тема 22.** Випадкові величини. Закони розподілу.

**Тема 23.** Нормальний, рівномірний та показниковий закони розподілу.

**Тема 24.** Числові характеристики випадкових величин.

**Тема 25.** Закон великих чисел. Основні поняття математичної статистики.

**Тема 26.** Статистичні оцінки. Точкові та інтегральні оцінки.

### **Змістовий модуль 4. Статистична залежність. Статистичні гіпотези. Математичне програмування.**

**Тема 27.** Статистична залежність. Парна регресія.

**Тема 28.** Поняття про множинну лінійну та нелінійну регресію. Перевірка статистичних гіпотез.

**Тема 29.** Загальна задача математичного програмування. Постановка задачі лінійного програмування (ЛП).

**Тема 30.** Основні властивості розв'язків задачі ЛП. Геометричний розв'язок задачі ЛП.

**Тема 31.** Симплекс-метод розв'язання задачі ЛП.

**Тема 32.** Двоїста задача ЛП, економічна інтерпретація.

**Тема 33.** Постановка задачі цілочислового лінійного програмування. Метод Гоморі.

**Тема 34.** Транспортна задача. Початковий опорний план.

**Тема 35.** Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі..

**Тема 36.** Поняття про динамічне програмування.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1. Матриці. Визначники. Системи $n$ -лінійних рівнянь з $n$ невідомими.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Обчислити визначник

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$$

**Розв'язання.** Використовуючи правило обчислення визначника другого порядку, маємо:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

**Приклад 2** Розв'язати нерівність  $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$ .

**Розв'язання.** Після обчислення визначника одержимо  $2x^2 - 12x < 14$  або  $x^2 - 6x - 7 < 0$ . Розкладемо ліву частину одержаної нерівності на множники:  $(x+1)(x-7) < 0$ . Для одержання розв'язків цієї нерівності застосуємо метод інтервалів (рис.1.1).

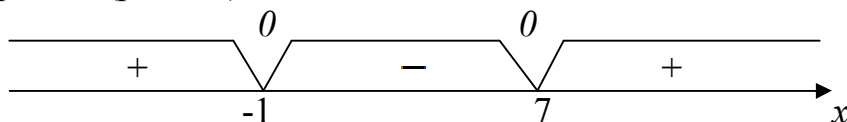


Рис.1.1

Таким чином, розв'язок нерівності:  $x \in (-1; 7)$ .

**Приклад 3** Обчислити визначник  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$ .

**Розв'язання:** Згідно з означенням визначника третього порядку маємо:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = 60 + 0 - 5 - 0 - 0 + 32 = 87.$$

**Приклад 4** Розв'язати систему лінійних рівнянь 
$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 23, \\ 8x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases}$$

методом Крамера;

**Розв'язання.** Для розв'язання системи за правилом Крамера обчислюємо головний та додаткові визначники системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 16 = 31, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 23 & -2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix} = 69 + 24 = 93, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 5 & 23 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 60 - 184 = -124.$$

$$\text{Тоді } x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{93}{31} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-124}{31} = -4.$$

**Приклад 5** Знайти матрицю

$$A = 2 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Використовуючи правила множення матриць на число та додавання матриць, знаходимо

$$A = 2 \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 7 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 6 & 14 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}_{3 \times 2} - \begin{pmatrix} 12 & -15 \\ -3 & -3 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 10+12 & 4-15 \\ 6-3 & 14-3 \\ -8-6 & 10+0 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 22 & -11 \\ 3 & 11 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}_{3 \times 2}$$

**Приклад 6** Знайти добуток  $A B$ , якщо  $A = (3 \ 2)$ ,  $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

**Розв'язання.** Матриця  $A$  має розмір  $1 \times 2$ , матриця  $B$  має розмір  $2 \times 1$ , тому добуток  $A B$  існує і в матрицею розміру  $1 \times 1$ .

$$AB = (3 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1)) = (1).$$

**Приклад 7** Знайти добуток  $ABC$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$ ,

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Задані матриці мають розмір  $2 \times 2$ , тому їх можна перемножити, причому одержимо матрицю того самого розміру. Помножимо спочатку  $A$  на  $B$ :

$$AB = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-28) + 3 \cdot 38 & 4 \cdot 93 + 3 \cdot (-126) \\ 7 \cdot (-28) + 5 \cdot 38 & 7 \cdot 93 + 5 \cdot (-126) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix}.$$

Тепер помножимо одержану матрицю на матрицю  $C$ :

$$ABC = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + (-6) \cdot 2 & 2 \cdot 3 + (-6) \cdot 1 \\ -6 \cdot 7 + 21 \cdot 2 & (-6) \cdot 3 + 21 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Приклад 8** Знайти матрицю  $C = B - 2A^T$ , якщо  $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}.$$

**Розв'язання.** Маємо,  $A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$ .



$$\text{Тоді } C - B - 2A^T = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 10 & -5 \\ 3 & 16 \end{pmatrix}_{3 \times 2} - 2 \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{3 \times 2}.$$

**Приклад 9** Установити, що система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1, \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases}$$

має єдиний розв'язок і знайти його за правилом Крамера.

**Розв'язання.** Для розв'язання системи за правилом Крамера потрібно обчислити головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -1 & -5 & 2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}(-1) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(6-2) = -4$$

Оскільки  $-4 \neq 0$ , то система має єдиний розв'язок. Обчислимо додаткові визначники системи:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 3 & -6 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}1 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 9 & -2 \end{vmatrix} = (-1)(-14 - (-18)) = -4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}1 \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = (10-14) = -4,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 1 \\ 5 & -6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 7 & 0 \\ 4 & -5 & 1 \\ -7 & 9 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3}1 \begin{vmatrix} -5 & 7 \\ -7 & 9 \end{vmatrix} = (-1)(-45 - (-49)) = -4.$$

$$\text{Тоді } x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

$$\text{Перевірка: } \begin{cases} 3 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 2, \\ 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1, \\ 5 \cdot 1 - 6 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2, \\ 1 = 1, \\ 3 = 3. \end{cases}$$

**Приклад 10** Знайти розв'язок системи за допомогою оберненої матриці.

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

**Розв'язання.** У матричній формі дану систему можна записати таким чином:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3 \times 1},$$

або коротко  $AX = C$ , звідки  $X = A^{-1}C$ , де  $A^{-1}$  – матриця, обернена до матриці  $A$ .

Обернена матриця  $A^{-1}$  існує, бо  $\Delta = \det A = -8 \neq 0$ .

Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці  $A$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(4 + 1) = 3,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 3) = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2 + 4) = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6.$$

За формулою знаходження оберненої матриці одержуємо:

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо шуканий розв'язок

$$X = AC^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 + 6 + 7 \\ 2 + 2 + 5 \\ 4 - 4 + 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/8 \\ -9/8 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Отже,  $x_1 = -11/8$ ;  $x_2 = -9/8$ ;  $x_3 = -3/4$ ;

### Домашнє завдання

**Теорія.** Системи  $n$ -лінійних рівнянь з  $m$  невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі. Метод Гауса і Жордана-Гауса.. [20], с. 11–21.

### Вправи

1 Обчислити визначники:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} a+1 & b-c \\ a^2+a & av-ac \end{vmatrix}.$$

Відповідь: а) 18; б) 10; в) 0; г) 0.

2 Розв'язати рівняння:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} \cos 8x & -\sin 5x \\ \sin 8x & \cos 5x \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{Відповідь: а) } x_1 = -\frac{1}{6}; \quad x_2 = \frac{3}{2}; \quad \text{б) } x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{в) } x = \frac{\pi}{6}(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

3 Розв'язати нерівності:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 2x-3 & -1 \\ 7 & 2x \end{vmatrix} \leq 11.$$

$$\text{Відповідь: а) } x > 3; \quad \text{б) } -0,5 \leq x \leq 2.$$

4 Установити, що система має єдиний розв'язок і знайти його за правилом Крамера.

$$\text{а) } \begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x+y=5, \\ x+3z=16, \\ 5y-z=10. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: а) } x=y=z=1; \quad \text{б) } x=1, y=3, z=5.$$

5 Знайти матрицю  $D = 2A + BC - A^2$ , якщо

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 32 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{6 Знайти союзну матрицю для матриці } A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } \hat{A} = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -17 & 21 & -11 \\ -10 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

7 Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{і перевірити, що } AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

$$\text{Відповідь: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 1 \\ -11 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

8 Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

матричним способом.

Відповідь:  $x_1=2, x_2=1, x_3=0$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Дати означення визначників другого та третього порядку.
- 2 Дати означення мінору елемента визначника.
- 3 Що називають алгебраїчним доповненням елемента визначника?
- 4 Навести правило обчислення визначника  $n$  – го порядку.
- 5 Які перетворення не змінюють величину визначника?
- 6 Яке перетворення змінює лише знак визначника?
- 7 За яких умов визначник може дорівнювати нулю?
- 8 Дати означення матриці.
- 9 Що називають розміром матриці?
- 10 Які існують види матриць?
- 11 Сформулюйте правила додавання, віднімання матриць, множення матриці на число і множення матриць.
- 12 Яка матриця називається оберненою і за якою формулою вона знаходиться?
- 13 Які існують методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь?
- 14 Яку систему називають лінійною?
- 15 Яку систему лінійних рівнянь називають сумісною, несумісною, визначеною і невизначеною?
- 16 Напишіть формули Крамера.
- 17 У чому полягає матричний спосіб розв'язання системи лінійних рівнянь?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2.** Системи  $n$ -лінійних рівнянь з  $m$  невідомими. Теорема Кронекера-Капеллі. Метод Гауса і Жордана-Гауса.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

**Розв'язання.**

1. Спосіб окантування мінорів. Для цього обчислимо спочатку мінор другого порядку, розташований в правому верхньому куті цієї матриці:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Міnor третього порядку, що окантовує його:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -12 - 2 - 1 - 18 = -33 \neq 0.$$

Мінори четвертого порядку, які окантовують міnor  $M_3$

$$M'_4 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -7 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -18 & 13 & -4 & 2 \\ 13 & -10 & 3 & 1 \\ -23 & 16 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -18 & 13 & 2 \\ 13 & -10 & 1 \\ 23 & 16 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -44 & 33 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 66 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} -44 & 33 \\ -88 & 66 \end{vmatrix} = 0.$$

$$M''_4 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 12 & 5 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ 0 & 12 & 3 \\ 0 & 12 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Міnorів п'ятого порядку і вищих матриця  $A$  не має, тому її ранг дорівнює трьом.

Таким чином,  $\text{rang} A = 3$

2 3 допомогою елементарних перетворень матриці зводимо її до діагональної. При цьому ранг матриці не змінюється.

Для цього виконаємо такі елементарні перетворення:

1 поміняємо місцями перший і другий рядки;

2 спочатку елементи першого рядка помножимо на  $-2$  і додамо до відповідних елементів другого рядка; потім елементи першого рядка помножимо на  $-4$  і додамо до відповідних елементів четвертого рядка;

3 помножимо елементи першого стовпця по черзі на  $2$ ,  $-1$ ,  $4$ ,  $-2$  і додамо відповідно до елементів другого, третього, четвертого і п'ятого стовпців;

4 розділимо елементи четвертого стовпця на  $3$ ;

5 поміняємо місцями другий і четвертий рядки;

6 віднімемо від елементів другого рядка відповідні елементи третього рядка;

7 спочатку помножимо елементи другого рядка на  $-4$  і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця; потім елементи другого стовпця помножимо на  $3$  і додамо до відповідних елементів п'ятого стовпця;

8 віднімемо від елементів третього рядка відповідні елементи четвертого рядка;

9 спочатку помножимо елементи третього стовпця на  $(-3)$  і додамо до відповідних елементів четвертого стовпця; потім елементи третього стовпця помножимо на  $4$  і додамо до відповідних елементів п'ятого стовпця.

Всі елементарні перетворення, які ми виконали, зручно записати так:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 3 \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \\
&\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Через те що на головній діагоналі одержаної матриці лише три елементи відмінні від нуля, то її ранг дорівнює трьом, а тому і ранг даної матриці  $A$  також дорівнює трьом, бо ці матриці еквівалентні.

Отже,  $\text{rang} A = 3$ .

**Приклад 2** За теоремою Кронекера - Капеллі дослідити систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

і у випадку її сумісності знайти всі розв'язки матричним способом.

**Розв'язання.** Складемо матрицю системи

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ і розширену матрицю } B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ранги цих матриць способом окантування мінорів. Мінор другого порядку, розташований в лівому верхньому куту матриці  $A$ :

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Мінор третього порядку, що окантовує його:

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

Мінорів вищого порядку матриця  $A$  не має. Тому  $\text{rang} A = 3$ .

Через те що для матриці  $B$  не можна скласти мінору четвертого порядку (матриця  $B$  має лише три рядки), то її ранг також дорівнює трьом.

Таким чином,  $\text{rang} A = \text{rang} B = n = 3$  і дорівнює числу невідомих, отже, згідно з теоремою Кронекера - Капеллі, система має єдиний розв'язок. Знайдемо його матричним способом. У матричній формі дану систему можна записати так:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3 \times 1},$$

або коротко  $AX = C$ , звідки  $X = A^{-1}C$ , де  $A^{-1}$  – матриця, обернена до матриці  $A$ .

Обернена матриця  $A^{-1}$  існує, бо  $\Delta = \det A = -8 \neq 0$  (обчислення дивіться вище).

Знайдемо алгебраїчні доповнення для кожного елемента матриці  $A$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 3 = -2, & A_{21} &= -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -(4 + 1) = 3, \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 - 3) = 2, & A_{22} &= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1, \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 5 = 4, & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(2 + 4) = -2, \end{aligned}$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7,$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(6 - 1) = -5,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -10 + 4 = -6.$$

Оскільки

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Тепер знайдемо шуканий розв'язок

$$X = AC^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 + 6 + 7 \\ 2 + 2 + 5 \\ 4 - 4 + 6 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/8 \\ -9/8 \\ -3/4 \end{pmatrix}.$$

Отже,  $x_1 = -11/8$ ;  $x_2 = -9/8$ ;  $x_3 = -3/4$ ;

**Приклад 3** Дослідити систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

за теоремою Кронекера – Капеллі і у випадку сумісності розв'язати її.

**Розв'язання.** Знайдемо ранги матриці системи

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 \\ 7 & -4 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & -4 & -6 \end{pmatrix} \text{ і розширеної матриці } B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Міnor  $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = 23 \neq 0$ . Мінори третього порядку, які його окантовують,

дорівнюють нулю. Дійсно,  $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 7 & -4 & 3 \\ 5 & 7 & -6 \end{vmatrix} = 72 + 196 - 75 + 80 - 63 - 210 = 0$ . Тому

$$\text{rang} A = 2.$$

Для знаходження рангу матриці  $B$  досить обчислити лише один міnor третього порядку

$$\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix}, \text{ який окантовує міnor } \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}, \text{ бо всі інші вже знайдені і}$$

дорівнюють нулю.

$$\text{Отже, } \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 7 & -4 & 5 \\ 5 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -23 \neq 0, \text{ а тому } \text{rang} B = 3.$$

Через те  $\text{rang} A \neq \text{rang} B$ , завдана система несумісна.

**Приклад 4** Розв'язати систему методом Гауса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Працювати зручніше не з самою системою, а з матрицею з коефіцієнтів при невідомих і вільних членів за допомогою елементарних перетворень:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{I} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{bmatrix} \xrightarrow{II} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{III}$$

I. Помножимо елементи 1-го рядка по черзі на -2, -1, -3 і додамо відповідно до елементів 2-го, 3-го і 4-го рядків.



II. Поділимо елементи 4-го рядка на -4.

III. Поміняємо місцями 2-ий і 4-ий рядки.

$$\begin{matrix} \sim_{III} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \end{bmatrix} & \sim_{IV} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} & \sim_V & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

IV. Помножимо елементи 2-го рядка по черзі на 1 і 3 і додамо відповідно до елементів 3-го і 4-го рядків.

V. Помножимо елементи 3-го рядка на 2 і додамо до елементів 4-го рядка і в одержаній матриці елементи 3-го рядка помножимо на -1.

VI. Елементи четвертого рядка поділимо на 3.

Одержуємо матрицю, що еквівалентно даній і має той самий ранг:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Очевидно, що ця матриця має ранг, що дорівнює 4. Тобто ранги матриці системи і розширеної матриці системи однакові і дорівнюють числу невідомих (система визначена).

Ми одержали трикутну матрицю, яка відповідає наступній системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ x_3 - 2x_4 = -5 \\ x_4 = 4 \end{cases}$$

Ця система має трикутну форму.

З цієї системи всі невідомі визначаються послідовно, а саме:

$$x_4 = 4$$

$$x_3 = -5 + 2 \cdot 4 = 3$$

$$x_2 = 3 + 3 - 4 = 2$$

$$x_1 = 4 - 2 + 3 - 4 = 1$$

Розв'язок системи має вигляд (1;2;3;4).

**Приклад5.** Розв'язати систему рівнянь методом Жордана-Гауса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

Складаємо матрицю коефіцієнтів вільних членів

$$\begin{bmatrix} [1] & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Перший елемент 1-го стовпця – ключовий:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & -1 & 4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

Змінимо знаки в 4-му рядку:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -5 & 7 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

4-ий елемент 2-го стовпця – ключовий:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & 7 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Віднімемо з 3-го рядка 2-ий і викреслимо 3-ій рядок

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

4-ий елемент 2-го рядка – ключовий

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0,6 & 0 & 0,4 \\ 0 & 0 & -13 & 20 & 7 \\ 0 & 1 & -0,75 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}$$

Ми бачимо, що ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці і дорівнює 3, тобто система містить три базисних невідомих  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_4$  і одне вільне невідоме  $x_3$ . Одержуємо наступну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 0,6x_3 - 0,4 \\ -13x_3 + 20x_4 = 7 \\ x_2 - 0,75x_3 = 0,25 \end{cases}$$

Звідси знаходимо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = 0,4 + 0,6x_3 \\ x_2 = 0,25 + 0,75x_3 \\ x_4 = 0,35 + 0,65x_3 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_1 = 0,4 + 0,6t \\ x_2 = 0,25 + 0,75t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0,35 + 0,65t \end{cases},$$

де  $t$  – довільне число.

### Домашнє завдання

**Теорія** Основні поняття векторної алгебри. Лінійні операції над векторами. Проекція вектора на вісь. Координати вектора. Добутки векторів та їх застосування. Правила дій над векторами, заданими своїми координатами. [20], с. 22 – 31.

### Вправи

1 Знайти ранг матриці  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ .

Відповідь:  $r(B)=3$

2 Знайти ранг матриці  $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ .

Відповідь:  $r(C)=3$

За допомогою теореми Кронекера – Капеллі дослідити системи лінійних рівнянь і у випадку їх сумісності, знайти всі розв'язки.

3  $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

Відповідь:  $r(A)=2, \quad r(B)=3$ . Система сумісна.

4  $\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 - 6x_3 = -14, \\ 3x_1 - 12x_2 - 5x_3 = -4, \\ 2x_1 - 6x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$

Відповідь:  $r(A)= \quad r(B)=3$ . Система сумісна.  $x_1=-2, \quad x_2=-1, \quad x_3=2$ .

Розв'язати системи методом Гауса

$$5 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -8, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -15, \end{cases}$$

Відповідь:  $x_1=1, x_2=2, x_3=5, x_4=-2$ .

$$6 \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

Відповідь: Система несумісна.

Розв'язати системи методом Жордана-Гауса

$$7 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$$

Відповідь: Система сумісна.  $x_1=x_3+x_4+5x_5-16, x_2=23-2x_3-2x_4+6x_5$ .

$$8 \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Відповідь: Система несумісна.

9 При яких значеннях  $\lambda$  система

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

Відповідь:  $\lambda = 5$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Дати означення ранга матриці.
- 2 Що таке базисний мінор матриці?
- 3 В чому полягають елементарні перетворення матриці?
- 4 Сформулювати теорему Кронекера-Капеллі.
- 5 Який розв'язок має однорідна система двох лінійних рівнянь з трьома невідомими?
- 6 В чому полягає метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь?
- 7 В чому полягає метод Жордана-Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь?

### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3. Векторна алгебра.

#### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Обчислити довжину вектора  $\vec{a} = \{6; 3; -2\}$  і його напрямні косинуси.

**Розв'язання.** Використовуючи формули

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

одержимо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{49} = 7; \cos \alpha = \frac{6}{7}; \cos \beta = \frac{3}{7}; \cos \gamma = -\frac{2}{7}.$$

**Приклад 2** Знайти точку  $N$ , з якою збігається кінець вектора  $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$ , якщо його початок збігається з точкою  $M(1; 2; -3)$ .

**Розв'язання.** Нехай точка  $N$  має координати  $x, y, z$ . Тоді за формулами  $\vec{a} = MN = \{x_N - 1; y_N - 2; z_N + 3\}$ , а за умовою  $\vec{a} = \{3; -1; 4\}$ .

Отже,

$$x_N - 1 = 3; y_N - 2 = -1; z_N + 3 = 4;$$

звідки

$$x_N = 4; y_N = 1; z_N = 1.$$

Таким чином,  $N(4; 1; 1)$  - шукана точка.

**Приклад 3** Знайти орт вектора  $\vec{a} = \{6; -2; -3\}$ .

**Розв'язання.** Відомо, що орт  $\vec{a}^0$  вектора  $\vec{a}$  має напрям вектора  $\vec{a}$  і довжину, що дорівнює одиниці. Тому  $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left( \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \frac{a_z}{|\vec{a}|} \right)$ .

За формулою обчислення модуля вектора знаходимо:

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\text{Отже, } \vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \left\{ \frac{6}{7}; \frac{-2}{7}; \frac{-3}{7} \right\}.$$

**Приклад 4** Обчислити модулі суми і різниці векторів  $\vec{a} = \{3; -5; 8\}$  і  $\vec{b} = \{-1; 1; -4\}$ .

**Розв'язання.** Знайдемо координати векторів  $\vec{a} + \vec{b}$  і  $\vec{a} - \vec{b}$ :

$$\vec{a} + \vec{b} = \{3 - 1; -5 + 1; 8 - 4\} = \{2; -4; 4\}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \{3 + 1; -5 - 1; 8 + 4\} = \{4; -6; 12\}.$$

Далі за формулою обчислення модуля вектора матимемо:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6; \quad |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = \sqrt{196} = 14.$$

Таким чином, модуль суми векторів  $\vec{a}$  і  $\vec{b}$  дорівнює 6, а модуль їх різниці дорівнює 14.

**Приклад 5** Дано сили  $\vec{F}_1 \{ 3; -4; 2 \}$ ,  $\vec{F}_2 = \{ 2; 3; -5 \}$ ,  $\vec{F}_3 = \{ -3; -2; 4 \}$ , що прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли її точка прикладання, рухаючись прямолінійно, переміщується з точки  $M_1 = (5; 3; -7)$  в точку  $M_2 = (4; -1; -4)$ .

**Розв'язання.** Механічна інтерпретація скалярного добутку двох векторів полягає у тому, що робота  $A$  сталої сили  $\vec{F}$  на прямолінійній ділянці шляху  $\vec{S}$ , дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення, тобто  $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$ .

Для розв'язання задачі знайдемо спочатку рівнодійну цих сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \{ 3+2-3; -4+3-2; 2-5+4 \} = \{ 2; -3; 1 \}.$$

Вектор переміщення  $\vec{S} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \{ 4; -3; -1-3; -4+7 \} = \{ -1; -4; 3 \}$ . Тоді одержимо:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = -2 + 12 + 3 = 13.$$

**Приклад 6** Дано вершини чотирикутника  $A(1; -2; 2)$ ,  $B(1; 4; 0)$ ,  $C(-4; 1; 1)$ ,  $D(-5; -5; 3)$ . Довести, що його діагоналі  $AC$  і  $BD$  взаємно перпендикулярні.

**Розв'язання.** Розглянемо вектори діагоналей  $\vec{AC}$  і  $\vec{BD}$ :

$$\vec{AC} = \{ -4; -1; 1+2; 1-2 \} = \{ -5; 3; -1 \}, \quad \vec{BD} = \{ -5; -1; -5-4; 3-0 \} = \{ -6; -9; 3 \},$$

Обчислимо скалярний добуток векторів  $\vec{AC}$  і  $\vec{BD}$ .

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-9) + (-1) \cdot 3 = 0.$$

Оскільки скалярний добуток векторів дорівнює нулю, тоді вони взаємно перпендикулярні, отже, взаємно перпендикулярні й діагоналі чотирикутника.

**Приклад 7** Дано вершини трикутника  $A(-1; -2; 4)$ ,  $B(-4; -2; 1)$ ,  $C(3; 1; 1)$ . Обчислити його внутрішній кут при вершині  $B$ .

**Розв'язання.** Розглянемо вектори  $\vec{BA}$  і  $\vec{BC}$  (рис.3.1).

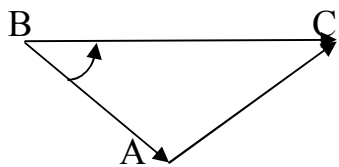


Рис. 3.1

Тоді  $\hat{B} = \left( \vec{BA}, \vec{BC} \right)$ . Оскільки

$$\vec{BA} = \{ -1+4; -2+2; 4-0 \} = \{ 3; 0; 4 \},$$

$$\vec{BC} = \{ 3+4; -2+2; 1-0 \} = \{ 7; 0; 1 \},$$

то:

$$\cos \hat{B} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{21 + 4}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{50}} = \frac{25}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже,  $\hat{B} = 45^\circ$ .

**Приклад 8** Дано вектори  $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} - \vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 12\vec{k}$ .

Обчислити  $np_{\vec{n}}(\vec{a} + \vec{b})$ .

**Розв'язання.** За формулою обчислення проекції вектора на вектор

одержуємо:  $np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{c}|}$ .

Знайдемо спочатку координати вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ . Оскільки  $\vec{a} = \{3; -6; -1\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 4; -5\}$ ,  $\vec{a} + \vec{b} = \{3+1; -6+4; -1; -5\} = \{4; -2; -6\}$ .

Далі, використовуючи вище зазначену формулу, одержимо:

$$np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3 \cdot 4 + (-4) \cdot 2 + 12 \cdot (-6)}{\sqrt{9 + 16 + 144}} = 4.$$

**Приклад 9** Дано вершини трикутника  $A(-1; -1; 2), B(5; -6; 2), C(1; 3; -1)$ . Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини  $B$  на сторону  $AC$ .

**Розв'язання.** Зробимо схематичний рисунок (рис.3.2).

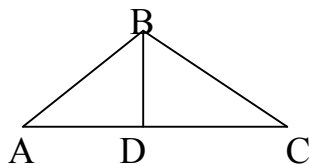


Рис.3.2

Із елементарної математики відомо, що

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD. \text{ Отже, шукана висота } BD = \frac{2S}{AC}.$$

Для знаходження величин, що входять до цієї формули, скористаємося засобами векторної алгебри. Для цього розглянемо вектори

$$\vec{AB} = \{4; -5; 0\} \text{ і } \vec{AC} = \{0; 4; -3\}. \text{ Тоді } AC = |\vec{AC}| = \sqrt{16 + 9} = 5, \text{ а } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|.$$

Оскільки:

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= 15\vec{i} + 12\vec{j} + 16\vec{k} = \{15; 12; 16\}, \text{ то } |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{225 + 144 + 256} = \sqrt{625} = 25.$$

Отже,  $2S_{\triangle ABC} = 25$

Таким чином, шукана висота  $BD = \frac{25}{5} = 5$ .

**Приклад 10** Сила  $\vec{F} = \{2; -4; 5\}$  прикладена до точки  $A(4; -2; 3)$ . Знайти момент цієї сили відносно точки  $B(5; -6; 2)$ .

**Розв'язання.** За формулою обчислення моменту сили відносно точки маємо:

$$\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F}.$$

Ураховуючи, що

$$\vec{BA} = \{4; -3; -2-2; 3+1\} = \{1; -4; 4\}, \vec{F} = \{2; -4; 5\},$$

одержимо

$$\vec{M} = \vec{BA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

**Приклад 11** Обчислити мішаний добуток  $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$ , якщо  $\vec{a} = \{1; -1; 3\}$ ,  $\vec{b} = \{-2; 2; 1\}$ ,  $\vec{c} = \{3-2; 1; 4\}$ .

**Розв'язання.** Згідно з формулою обчислення мішаного добутку трьох векторів маємо:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7.$$

**Приклад 12** Установити, чи компланарні вектори:

- 1)  $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$ ,  $\vec{b} = \{1; -1; 3\}$ ,  $\vec{c} = \{1; 9; -11\}$ ,
- 2)  $\vec{a} = \{3; -2; 1\}$ ,  $\vec{b} = \{2; 1; 2\}$ ,  $\vec{c} = \{3; -1; -2\}$ .

**Розв'язання.**

$$1) \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -9 & -11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, вектори компланарні, оскільки їх мішаний добуток дорівнює нулю.

$$2) \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -26.$$

Таким чином, вектори не компланарні, оскільки їх мішаний добуток відмінний від нуля.

**Приклад 13** Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(5; 5; 4)$ ,  $C(3; 2; -1)$ ,  $D(4; 1; 3)$ .

**Розв'язання.** Відомо, що об'єм тетраедра  $V$  дорівнює шостій частині об'єму паралелепіпеда  $V$ . Отже, достатньо обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ .

Знайдемо вектори  $\vec{AB} = \{3; 6; 3\}$ ,  $\vec{AC} = \{1; 3; -2\}$ ,  $\vec{AD} = \{2; 2; 2\}$ . Таким чином, їх мішаний добуток

$$\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$



Звідки,  $V_n = |-18| = 18$  куб. од. Тепер знайдемо об'єм тетраедра:

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} V_n = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3 \text{ куб. од.}$$

**Приклад 14** Дано вершини тетраедра  $A(2; 3; 1)$ ,  $B(4; 1; -2)$ ,  $C(6; 3; 7)$ ,  $D(5; -4; 8)$ . Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини  $D$ .

**Розв'язання.** Зробимо схематичний рисунок 3.3. Відомо, що об'єм тетраедра  $V$  обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H,$$

де  $S_{\text{осн}}$  - площа основи;  $H$  - висота.

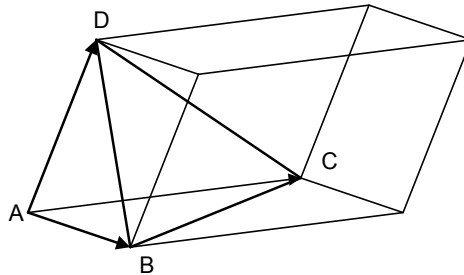


Рис.3.3

Отже,  $H = \frac{3V}{S_{\text{осн}}}$ . Таким чином, щоб знайти висоту тетраедра, необхідно знайти його об'єм і площу основи. Об'єм обчислюємо, як у прикладі 13. Маємо:

$$\vec{AB} = \{ 2; -2; -3 \}, \vec{AC} = \{ 4; 0; 6 \}, \vec{AD} = \{ -7; -7; 7 \}.$$

$$\vec{AB} \vec{AC} \vec{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -7 & -7 \end{vmatrix} = 308.$$

$$\text{Таким чином, } V = \frac{308}{36} = \frac{154}{3} \text{ куб. од.}$$

Площа основи  $S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$  (площа трикутника, побудованого на векторах  $\vec{AB}$  і  $\vec{AC}$ ). Оскільки, що

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k},$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28.$$

$$\text{Таким чином, } S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} \cdot 28 = 14 \text{ куб. од.}$$

Отже, шукана висота

$$H = \frac{3^{\frac{154}{3}}}{14} = 11.$$

### Домашнє завдання

**Теорія** Системи координат на площині та їх перетворення. Лінії на площині та їх рівняння. [20], с. 32 – 51.

### Вправи

1 Відомі дві координати вектора:  $a_x = 4$ ;  $a_y = -12$ . Знайти його третю координату  $a_z$ , якщо  $\left| \vec{a} \right| = 13$

Відповідь:  $a_z = \pm 3$ .

2 Знайти початок вектора  $\vec{a} = \{2; -3; -1\}$ , якщо його кінець збігається з точкою  $M(1; -1; 2)$ .

Відповідь:  $(-1; 2; 3)$ .

3 Знайти орт вектора  $\vec{a} = \{2; -3; -1\}$ .

Відповідь:  $\vec{a}^0 = \left\{ \frac{3}{13}; \frac{4}{13}; -\frac{12}{13} \right\}$ ;

4 Вектор утворює з осями  $Ox$  і  $Oy$  кути  $40^\circ$  і  $80^\circ$ . Знайти кут, який утворює цей вектор з віссю  $Ox$ .

Відповідь:  $128^\circ$ .

5 Побудувати паралелограм на векторах  $\vec{OA} = \vec{i} + \vec{j}$  і  $\vec{OB} = \vec{k} - 3\vec{j}$ . Знайти його діагоналі.

Відповідь:  $\vec{OC} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ ;  $OC = \sqrt{6}$ ;  $\vec{AB} = -\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ ;  $AB = 3\sqrt{2}$ .

6 Відомі три послідовні вершини паралелограма  $A(1; -2; 3)$ ,  $B(3; 2; 1)$ ;  $C(6; 4; 4)$ . Знайти його четверту вершину.

Відповідь:  $D(4, 0, 6)$ .

7 Побудувати вектор  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ ; знайти його довжину і напрям.

Відповідь:  $\left| \vec{a} \right| = 7$ ,  $\cos \alpha = \frac{2}{7}$ ,  $\cos \beta = \frac{3}{7}$ ,  $\cos \gamma = \frac{6}{7}$ .

8 Обчислити роботу, яку виконує сила  $\vec{F} = \{3; -2; -5\}$ , коли її точка прикладання, пересуваючись прямолінійно, переміщається із точки  $A(2; -3; 5)$  в точку  $B(3; -2; -1)$ .

Відповідь: 31.

9 Визначити, при якому значенні  $\alpha$  вектори  $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$  і

$\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$  взаємно перпендикулярні.

Відповідь:  $\alpha = -6$ .

10 Дано вектори  $\vec{a} = \{1; -3; 4\}$ ,  $\vec{b} = \{3; -4; 2\}$ ,  $\vec{c} = \{-1; 1; 4\}$ . Обчислити  $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}} \vec{a}$ .

Відповідь: 5.

11 Дано вектори  $\vec{a} = \{3; -1; -2\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 2; -1\}$ . Знайти координати вектора  $(2\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b}$ .

Відповідь:  $\{10; 2; 14\}$ .

12 Дано вершини трикутника  $A(3; 2; -3)$ ,  $B(5; 1; -1)$ ,  $C(1; -2; 1)$ . Знайти його зовнішній кут при вершині  $A$ .

Відповідь:  $\arccos\left(-\frac{4}{9}\right)$ .

13 Обчислити довжини діагоналей і площу паралелограма, побудованого на векторах  $\vec{a} = -\vec{k} - \vec{j}$  і  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ .

Відповідь:  $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{5}$ ,  $S = \sqrt{6}$ .

14 Установити, чи компланарні вектори  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , якщо  $\vec{a} = \{2; -1; 2\}$ ,  $\vec{b} = \{1; 2; -3\}$ ,  $\vec{c} = \{3; -4; 7\}$ .

Відповідь: компланарні.

15 Довести, що точки  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(0; 1; 5)$ ,  $C(-1; 2; 1)$ ,  $D(2; 1; 3)$  належать одній площині.

16 Обчислити об'єм тетраедра, вершини якого знаходяться в точках  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(5; 5; 4)$ ,  $C(3; 2; -1)$ ,  $D(4; 1; 3)$

Відповідь: 3 куб. од.

### Питання для самоперевірки

1 Дайте означення вектора і його довжини.

2 Що називається базисом на площині та у просторі?

3 Які вектори називають колінеарними, компланарними, рівними між собою?

4 Що називають координатами вектора?

5 Як розкласти вектор за координатним базисом?

6 Як визначаються операції додавання, віднімання, множення на число?

7 Що називається скалярним, векторним, мішаним добутком векторів?

8 Як виконуються операції над векторами, які задані координатами?

9 Сформулюйте умови паралельності, перпендикулярності і компланарності векторів.

10 Сформулюйте приклади застосування скалярного, векторного, мішаного добутків.

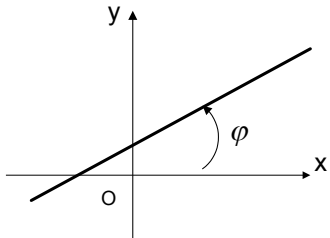
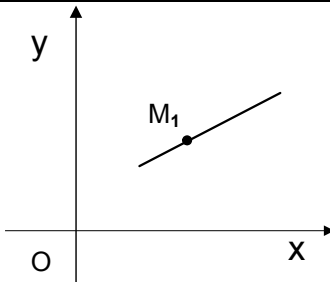
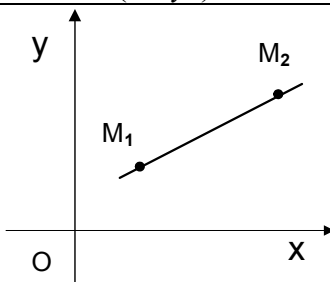
## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4. Аналітична геометрія на площині.

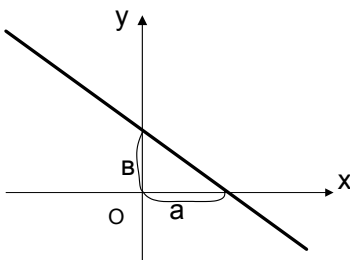
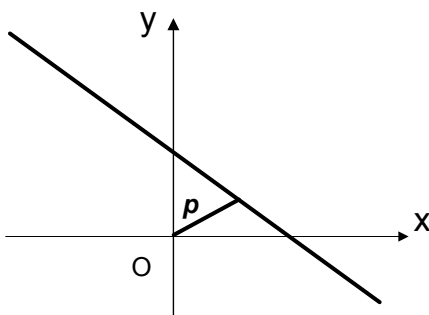
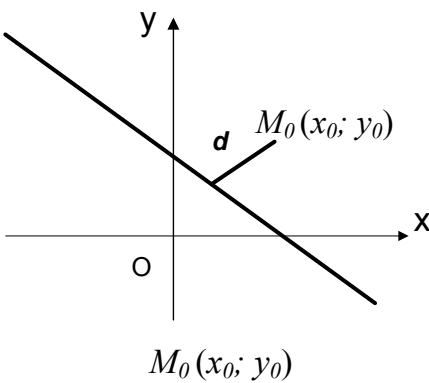
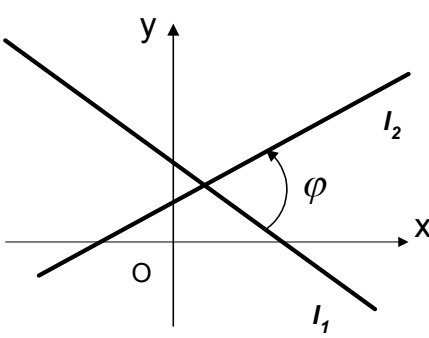
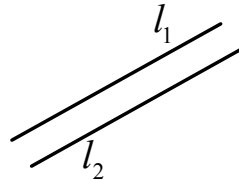
### Системи координат на площині та їх перетворення.

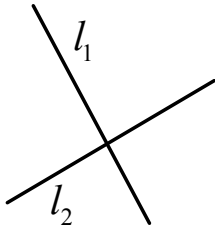
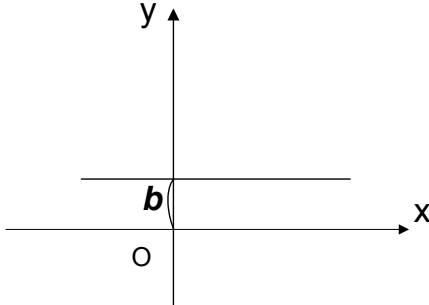
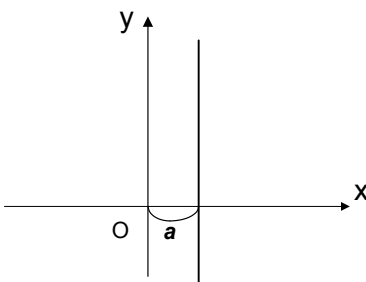
#### Лінії на площині та їх рівняння.

Наведемо основні формули та означення, що викладено на лекції 3, для наочності при розв'язанні прикладів.

Таблиця 4.1 Пряма лінія та її рівняння

| № | Назва                                                                                | Спосіб завдання                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | Рівняння                                                |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| 1 | 2                                                                                    | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 4                                                       |
| 1 | Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом                                               |  <p><math>k = \operatorname{tg} \varphi</math> - кутовий коефіцієнт (<math>\varphi</math> - кут нахилу прямої до додатного напрямку осі <math>Ox</math>),<br/> <math>b</math> - відрізок, який пряма відтинає на осі <math>Oy</math>.</p> | $y = kx + b$                                            |
| 2 | Рівняння прямої, яка проходить через задану точку $M_1(x_1; y_1)$ в заданому напрямі |  <p><math>M_1(x_1; y_1) \in l</math></p>                                                                                                                                                                                                | $y - y_0 = k(x - x_0)$                                  |
| 3 | Рівняння прямої, яка проходить через дві точки                                       |  <p><math>M_1(x_1; y_1) \in l</math><br/> <math>M_2(x_2; y_2) \in l</math><br/> <math>k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}</math></p>                                                                            | $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ |

|   |                                 |                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|---|---------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4 | Рівняння прямої у відрізках     |    | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$ де $a$ і $b$ - довжини відрізків, які пряма відтинає на осях координат;                                                                                                                                                                         |
| 5 | Загальне рівняння прямої        | $k = -\frac{A}{B}$ $e = -\frac{C}{B}$                                               | $Ax + By + C = 0.$                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 6 | Нормальне рівняння прямої       |    | $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ або $\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$                                                                                                                                                                                      |
| 7 | Відстань від точки до прямої    |  | $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + C }{\sqrt{A^2 + B^2}}.$                                                                                                                                                                                                                                |
| 8 | Кут між двома прямими           |  | $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$ якщо рівняння прямих задані у вигляді $y = kx + b$ , або $\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$ якщо рівняння прямих задані у вигляді $Ax + By + C = 0.$ |
| 9 | Умова паралельності двох прямих |  | $k_1 = k_2,$ або $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$                                                                                                                                                                                                        |

|    |                                                        |                                                                                                                                                   |                                                                    |
|----|--------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
|    |                                                        | $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$<br>$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$                                                                                      |                                                                    |
| 10 | Умова перпендикулярності двох прямих                   | <br>$l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$<br>$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ | $\kappa_1 \cdot \kappa_2 = -1$ ,<br>або<br>$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ . |
| 11 | Умова збіжності двох прямих                            | $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$<br>$l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$                                                                                      | $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ .            |
| 12 | Рівняння прямої, яка проходить через початок координат |                                                                                                                                                   | $y = kx$ ,<br>або<br>$Ax + By = 0$ .                               |
| 13 | Рівняння прямої, що паралельна осі абсцис              |                                                                | $y = b$ ,<br>або<br>$By + C = 0$ .                                 |
| 14 | Рівняння прямої, що паралельна осі ординат             |                                                                | $x = a$ ,<br>або<br>$Ax + C = 0$ .                                 |
| 15 | Рівняння осі абсцис                                    |                                                                                                                                                   | $y = 0$ .                                                          |
| 16 | Рівняння осі ординат                                   |                                                                                                                                                   | $x = 0$ .                                                          |

### Криві другого порядку

#### Коло

Колом називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (центра) (рис. 4.1).

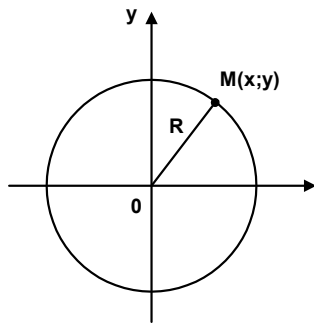


Рис. 4.1 а)

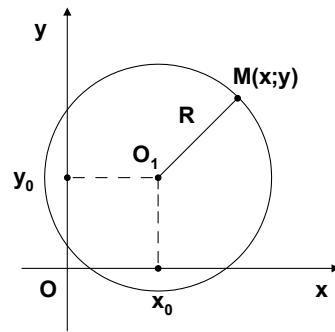


Рис. 4.1 б)

Якщо центр кола точка  $O(0;0)$ , а радіус  $R$ , тоді його рівняння має вигляд:

$$x^2 + y^2 = R^2 \quad (\text{рис.4.1 а}).$$

Рівняння кола з центром в точці  $O_1(x_0; y_0)$  і радіуса  $R$ :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (\text{рис. 4.1 б}).$$

### Еліпс

Еліпсом називається геометричне місце точок на площині, сума відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величина стала.

Канонічне рівняння еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Точки  $A_1(a; 0)$ ,  $A_2(-a; 0)$ ,  $B_1(0; b)$ ,  $B_2(0; -b)$  - вершини еліпса,  $MF_1 = r_1$ ,  $MF_2 = r_2$  - фокальні радіуси (рис. 4.2).

а)  $r_1 + r_2 = 2a$ ;

$A_1A_2 = 2a$  – велика вісь;

$B_1B_2 = 2b$  – мала вісь;

$OA_1 = a$  – велика піввісь;

$OB_1 = b$  – мала піввісь;

$F_1F_2 = 2c$  - відстань між фокусами

$F_1(c; 0)$  і  $F_2(-c; 0)$ ;

$$c^2 = a^2 - b^2; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \text{ - ексцентриситет}$$

( $\varepsilon < 1$ , бо  $c < a$ ).

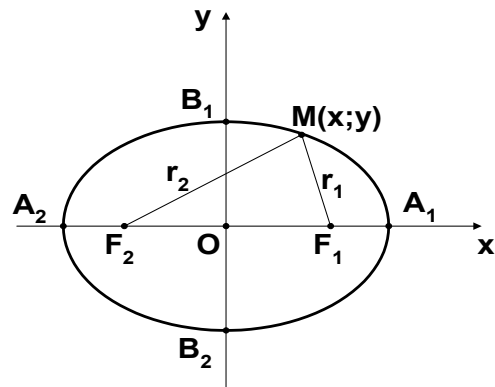


Рис. 4.2 а)

б)  $r_1 + r_2 = 2b$ ;

$A_1A_2 = 2a$  – мала вісь;

$B_1B_2 = 2b$  – велика вісь;

$OA_1 = a$  – мала піввісь;

$OB_1 = b$  – велика піввісь;

$F_1F_2 = 2c$  - відстань між фокусами

$F_1(0; c)$  і  $F_2(0; -c)$ ;

$$c^2 = b^2 - a^2; \quad \varepsilon = \frac{c}{b} \text{ - ексцентриситет}$$

( $\varepsilon < 1$ , бо  $c < b$ ).

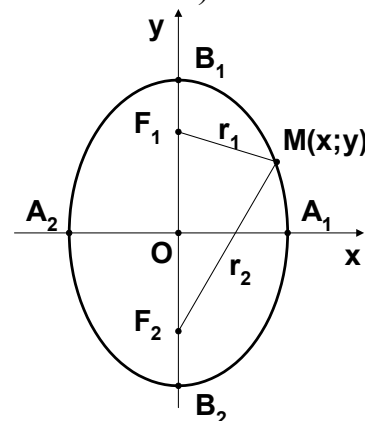


Рис. 4.2 б)

Зазначимо, що фокуси еліпса завжди знаходяться на його великій осі.  
При  $a = b$  одержимо  $x^2 + y^2 = a^2$  - рівняння кола.

### Гіпербола

Гіперболою називається геометричне місце точок на площині, різниця відстаней яких до двох заданих точок (фокусів) є величина стала (рис. 4.3).

Канонічне рівняння гіперболи  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  або  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ .

а) для гіперболи  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$r_1 - r_2 = \pm 2a;$$

Точки  $A_1(a; 0)$ ,  $A_2(-a; 0)$  - вершини;

$A_1A_2 = 2a$  - дійсна вісь;

$B_1B_2 = 2b$  - уявна вісь;

$OA_1 = a$  - дійсна піввісь;

$OB_1 = b$  - уявна піввісь;

$F_1F_2 = 2c$  - відстань між фокусами

$F_1(c; 0)$  і  $F_2(-c; 0)$ ;

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad \varepsilon = \frac{c}{a} \text{ - ексцентриситет}$$

( $\varepsilon > 1$ , бо  $c > a$ ).

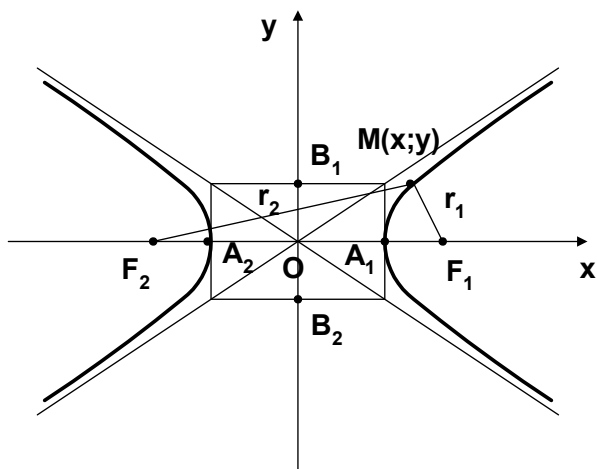


Рис. 4.3 а)

б) для гіперболи  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$

$$r_1 - r_2 = \pm 2b;$$

Точки  $B_1(0; b)$ ,  $B_2(0; -b)$  - вершини;

$B_1B_2 = 2b$  - дійсна вісь;

$A_1A_2 = 2a$  - уявна вісь;

$OB_1 = b$  - дійсна піввісь;

$OA_1 = a$  - уявна піввісь;

$F_1F_2 = 2c$  - відстань між фокусами

$F_1(0; c)$  і  $F_2(0; -c)$ ;

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad \varepsilon = \frac{c}{b} \text{ - ексцентриситет}$$

( $\varepsilon > 1$ , бо  $c > b$ ).

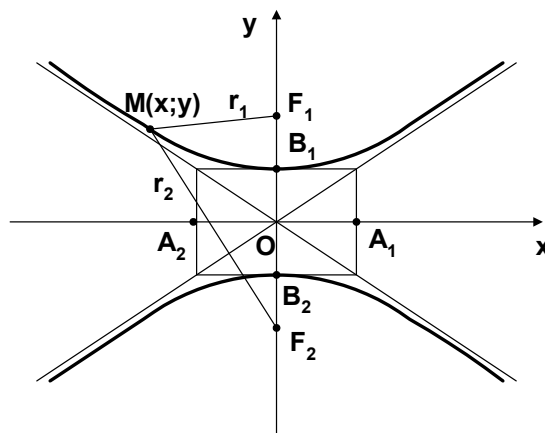


Рис. 4.3 б)

Рівняння асимптот гіперболи  $y = \pm \frac{b}{a} x$ .

Слід зазначити, що фокуси гіперболи завжди знаходяться на її дійсній осі. Гіперболу, в якій  $a = b$ , називають рівнобічною і її рівняння  $x^2 - y^2 = a^2$  або  $y^2 - x^2 = a^2$ .

### Парабола

Параболою називається геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

Канонічне рівняння параболи  $y^2 = \pm 2px$  або  $x^2 = \pm 2py$ ,



де  $p$  – відстань від фокуса до директриси.

Точка  $O(0; 0)$  - вершина параболі,  $MF = r$  - фокальний радіус,  $d$  - відстань від точки  $M(x; y)$  до директриси (рис. 4.4).

За означенням параболі  $r = d$ .

Для парабол  $y^2 = \pm 2px$  рівняння директрис  $x = \mp \frac{p}{2}$ , координати фокуса  $F\left(\pm \frac{p}{2}; 0\right)$  (рис. 4.4 а, б)).

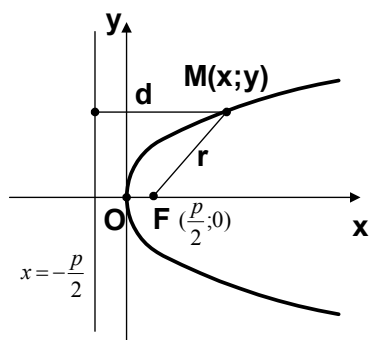


Рис. 4.4 а)

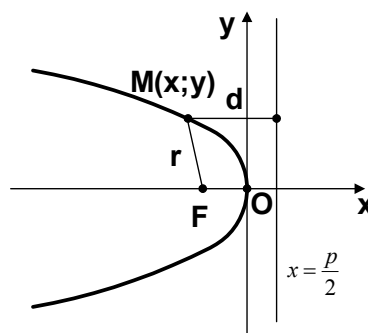


Рис. 4.4 б)

Для парабол  $x^2 = \pm 2py$  рівняння директрис  $y = \mp \frac{p}{2}$ , координати фокуса  $F\left(0; \pm \frac{p}{2}\right)$  (рис. 4.4 в, г)).

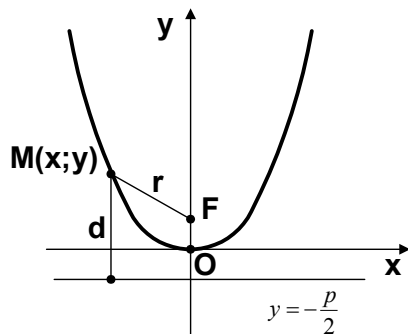


Рис. 4.4 в)

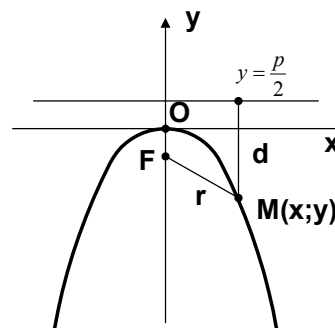


Рис. 4.4 г)

Фокус параболі завжди знаходиться на її осі симетрії.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Скласти рівняння геометричного місця точок, сума квадратів відстаней від яких до точок  $M_1(-3; 0)$  і  $M_2(3; 0)$  дорівнює 50.

**Розв'язання.** Нехай  $M(x; y)$  - довільна точка шуканої лінії. За умовою  $MM_1^2 + MM_2^2 = 50$ , або в координатній формі

$$\left(\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + \sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2 = 50,$$

звідки  $x^2 + 6x + 9 + y^2 + x^2 - 6x + 9 + y^2 = 50$ , або  $x^2 + y^2 = 16$ . Одержали рівняння кола.

**Приклад 2** Установити, яка лінія визначаються в полярних координатах рівнянням  $r = 4\cos\varphi$  і побудувати її.

**Розв'язання.** Щоб побудувати криву, задану рівнянням  $r = 4\cos\varphi$ , складемо таблицю значень  $\varphi$  і  $r$  (таблиця 4.2):

Таблиця 4.2

|               |   |                      |                 |                 |                  |       |                  |                  |                  |        |
|---------------|---|----------------------|-----------------|-----------------|------------------|-------|------------------|------------------|------------------|--------|
| $\varphi$     | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $2\pi$ |
| $\cos\varphi$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$   | 0               | $-\frac{1}{2}$   | -1    | $-\frac{1}{2}$   | 0                | $\frac{1}{2}$    | 1      |
| $r$           | 4 | $2\sqrt{3}$          | 2               | 0               | —                | —     | —                | 0                | 2                | 4      |

За даними таблиці побудуємо криву (рис. 4.5).

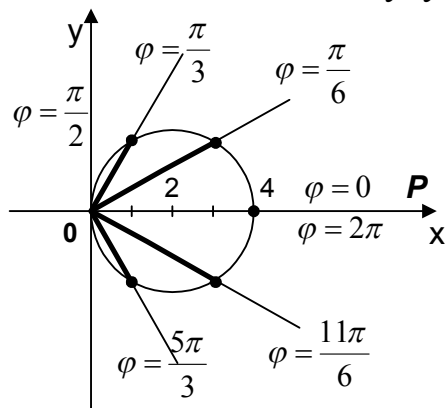


Рис. 4.5

Зазначимо, що функція  $\cos\varphi$  – парна, тому крива буде симетричною відносно полярної осі.

Одержана крива є коло з діаметром  $2R = 4$ , який збігається з полярною віссю.

Щоб переконатися в цьому, переведемо рівняння  $r = 4\cos\varphi$  в прямокутну декартову систему координат. Для цього помножимо

обидві частини рівняння на  $r$ . Тоді  $r^2 = 4r\cos\varphi$ . Враховуючи формули переходу від полярної системи координат до декартової, одержуємо:

$$x^2 + y^2 = 4x, \text{ або } (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Таким чином, дійсно маємо рівняння кола з центром у точці  $O_1(2:0)$  і радіуса 2 одиниці (див. рис. 4.5).

**Приклад 3** Скласти рівняння прямої  $l$ , яка проходить через точку  $M_0(2;1)$  перпендикулярно до даної прямої  $2x + 3y + 4 = 0$  ( $l_1$ ).

**Розв'язання.** Будемо шукати рівняння прямої  $l$  у вигляді:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Оскільки за умовою задачі  $l \perp l_1$ ,  $kk_1 = -1$ , звідки  $k = \frac{3}{2}$ . Враховуючи також, що  $x = 2$ ,  $y = 1$  остаточно матимемо:

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \text{ або } 3x - 2y - 4 = 0 \text{ рівняння прямої } l.$$

**Приклад 4** Визначити за яких значень  $m$ ,  $n$  прямі  $mx + 8y + n = 0$  і  $2x + my - 1 = 0$  1) паралельні, 2) збігаються, 3) перпендикулярні?

**Розв'язання.** Згідно з умовою паралельності прямих:

$$\frac{m}{2} = \frac{8}{m} \neq \frac{n}{-1}.$$

Розв'язуючи рівняння  $\frac{m}{2} = \frac{8}{m}$ , одержимо  $m = \pm 4$ . Тоді при  $m = 4$  з

нерівності  $\frac{8}{m} \neq \frac{n}{-1}$  маємо  $n \neq -2$ , а при  $m = -4$   $n \neq -2$ . Таким чином, задані прямі паралельні, якщо  $m = 4$ ,  $n \neq -2$  або  $m = -4$ ,  $n \neq 2$ .

Якщо прямі збігаються, тоді :

$$\frac{m}{2} = \frac{8}{m} = \frac{n}{-1},$$

звідки одержуємо, що  $m = 4$ ,  $n = -2$  або  $m = -4$ ,  $n = 2$ . Прямі перпендикулярні, якщо  $2m + 8n = 0$ , звідки  $m = 0$ . При цьому  $n$  може набувати довільних значень.

**Приклад 5** Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M(2;3)$  і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини, рахуючи кожний відрізок від початку координат.

**Розв'язання.** Шукатимемо рівняння прямої у відрізках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

За умовою  $|a| = |b|$ . Тоді, якщо  $ab > 0$ , то рівняння прямої  $x + y = a$ , якщо  $ab < 0$ , то рівняння набуде вигляду  $x - y = a$ . Точка  $M(2;3)$  належить кожній з цих прямих, тому її координати задовольняють кожному рівнянню. Підставляючи в рівняння  $x + y = a$ , замість змінних координат, координати точки  $M$ , одержимо  $2+3=a$ , звідки  $a=5$ . Отже, рівняння шуканої прямої в цьому випадку буде  $x + y = 5$  або  $x + y - 5 = 0$ . При  $x=2$  і  $y=3$  з рівняння  $x - y = a$  маємо  $2 - 3 = a$ , звідки  $a = -1$ . Таким чином, у цьому випадку рівняння шуканої прямої буде  $x - y + 1 = 0$ .

Зазначимо, що коли  $a = b = 0$ , записати рівняння шуканої прямої у вигляді  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  не можна, бо це рівняння втрачає значення. У цьому випадку рівняння прямої треба шукати у вигляді  $y = kx$  або  $Ax + By = 0$ , бо умова  $a = b = 0$  означає, що пряма проходить через початок координат. Отже, застосовуючи рівняння прямої, що проходить через початок координат, і враховуючи, що точка  $M$  належить цій прямій, матимемо ще одне рівняння шуканої прямої:  $y = kx$ ,  $3 = 2k$ ,  $k = \frac{3}{2}$ ,  $y = \frac{3}{2}x$ ,  $3x - 2y = 0$ .

Таким чином умові задачі задовольняють три прямі:

$$x + y - 5 = 0, \quad x - y + 1 = 0, \quad 3x - 2y = 0.$$

**Приклад 6** Задані координати вершин трикутника  $ABC$ :  $A(3;-2)$ ,  $B(1;4)$ ,  $C(-2;1)$ . Методами аналітичної геометрії

- 1) скласти рівняння сторони  $AB$ ;
- 2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини  $C$ ;
- 3) обчислити довжину висоти  $CD$ ;
- 4) знайти площу трикутника;
- 5) знайти внутрішній кут трикутника при вершині  $A$  (рис. 4.6).

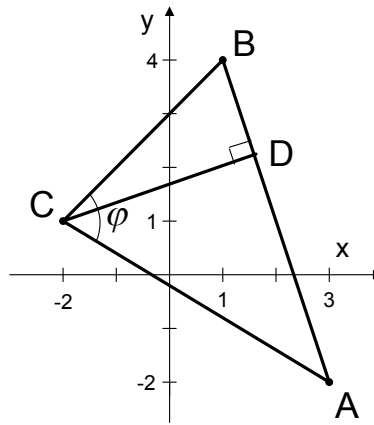


Рис. 4.6

**Розв'язання.** 1) Запишемо рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки  $A(x_1, y_1)$  і  $B(x_2, y_2)$  :

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Для  $A(3; -2)$ ,  $B(1; 4)$  маємо:  $\frac{x - 3}{1 - 3} = \frac{y - (-2)}{4 - (-2)}$ ;  $\frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 2}{6}$ ;

$-3(x - 3) = y + 2$ ;  $3x + y - 7 = 0$  - загальне рівняння прямої  $AB$ ;

$y = -3x + 7$  - рівняння прямої  $AB$  з кутовим коефіцієнтом,  $k_{AB} = -3$ .

2) Складемо рівняння прямої  $CD \perp AB$ . З умови перпендикулярності прямих  $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} \Rightarrow k_{CD} = \frac{1}{3}$ .

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через точку  $C(x_0; y_0)$ :  $y - y_0 = k(x - x_0)$ . Для  $C(-2; 1)$  маємо:  $y - 1 = \frac{1}{3}(x + 2)$ , тобто  $x - 3y + 5 = 0$  - загальне рівняння прямої  $CD$ .

3) Довжину висоти  $CD$  знайдемо як відстань від точки  $C(x_0; y_0)$  до прямої  $AB$  за формулою:  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ , де  $Ax + By + C = 0$  - рівняння прямої  $AB$ .  $d = \frac{|3 \cdot (-2) + 1 - 7|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$  (од.).

4) Площа трикутника дорівнює половині добутку довжини сторони на довжину висоти, яка опущена на цю сторону:  $S_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot h_a$ , тобто  $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD$ .

Довжину сторони  $AB$  знайдемо за формулою

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

$$AB = \sqrt{(1 - 3)^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (6)^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Тоді

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{6\sqrt{10}}{5} = 12 \text{ (кв. од.)}$$

5) Тангенс кута  $\varphi$  - кута між прямими  $AC$  і  $BC$  знайдемо за формулою

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}}$$

$$k_{AC} = -\frac{3}{5}; \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1 - 4}{-2 - 1} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - 1 \cdot \frac{3}{5}} = 4,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} 4 \approx 76^\circ.$$

**Приклад 7** Дві сторони квадрата лежать на прямих  $5x - 12y - 65 = 0$  і  $5x - 12y + 26 = 0$ . Обчислити його площу.

**Розв'язання.** Для обчислення площі квадрата треба знайти довжину його сторони. Для цього досить знайти відстань між паралельними прямими  $5x - 12y - 65 = 0$ ,  $5x - 12y + 26 = 0$ , на яких розташовані дві сторони квадрату. (умову паралельності цих прямих перевіряти самостійно). Знайдемо на одній з цих прямих, наприклад, на прямій  $5x - 12y - 65 = 0$ , координати будь-якої точки. Для цього покладемо  $y = 0$ . Тоді  $5x - 65 = 0$ , звідки  $x = 13$ . Таким чином, точка  $M(13; 0)$  належить прямій  $5x - 12y - 65 = 0$ . Після цього задача зводиться до знаходження відстані від точки  $M$  до прямої  $5x - 12y + 26 = 0$ . За формулою  $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$  маємо  $d = \frac{|5 \cdot 13 - 12 \cdot 0 + 26|}{\sqrt{25 + 144}} = 7$ . Отже, довжина сторони квадрата дорівнює 7, а його площа  $S = 7^2 = 49$  кв. од.

**Приклад 8** Скласти рівняння кола, якщо точки  $A(3; 2)$  і  $B(-1; 6)$  є кінцями одного з його діаметрів.

**Розв'язання.** За умовою  $AB$  – діаметр кола, це означає, що його центр знаходиться на середині відрізка  $AB$ . За формулами ділення відрізка навпіл:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4.$$

Тобто  $C(1; 4)$  – центр кола. Тепер ясно, що рівняння кола треба шукати у вигляді  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ . Підставляючи в це рівняння замість змінних координат координати точки  $A$  або  $B$  (кожна з них належить колу) і враховуючи, що  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = 4$ , матимемо:  $(3 - 1)^2 + (2 - 4)^2 = R^2$ , звідки  $R^2 = 8$ .

$$\text{Отже, рівняння шуканого кола } (x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 8.$$

**Приклад 9** Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його велика вісь дорівнює 20, а ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{3}{5}$ .

**Розв'язання.** За умовою  $2a = 20$ ,  $\varepsilon = \frac{3}{5}$ . Тоді  $a = 10$ , а згідно з формулою

$$\varepsilon = \frac{c}{a}: \quad c = a \cdot \varepsilon = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6. \quad \text{Тепер із співвідношення } b^2 = a^2 - c^2 \text{ знаходимо:}$$

$b^2 = 100 - 36 = 64$ . Підставляючи значення  $a^2 = 100$  і  $b^2 = 64$  в рівняння еліпса  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , одержимо  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ . Це і є рівняння шуканого еліпса.

**Приклад 10** Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 16, а ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{3}{5}$ .

**Розв'язання.** За умовою фокуси еліпса лежать на осі ординат, тому його мала вісь  $2a = 16$ , а ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{c}{b} = \frac{3}{5}$ . Отже,  $a = 8$ ,  $c = \frac{3}{5}b$ .

Із співвідношення  $a^2 = b^2 - c^2$  маємо:  $64 = b^2 - \frac{9}{25}b^2$  або  $64 = \frac{16}{25}b^2$ , звідки  $b^2 = 100$ . Таким чином, рівняння шуканого еліпса  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ .

**Приклад 11** Скласти найпростіше рівняння еліпса, в якого відстані одного з фокусів від кінців великої осі дорівнюють 5 і 1.

**Розв'язання.** Нехай  $A_1A_2 = 2a$  - велика вісь еліпса,  $F_1$  - один з його фокусів (рис. 4.7). За умовою  $A_2F_1 = 5$ ,  $F_1A_1 = 1$ . Тоді

$A_2A_1 = A_2F_1 + F_1A_1 = 5 + 1 = 6$ . Отже,  $2a = 6$ , звідки  $a = OA_1 = 3$ ,  $OF_1 = OA_1 - F_1A_1 = 3 - 1 = 2$ , тобто  $c = 2$ . Із співвідношення  $b^2 = a^2 - c^2$  маємо:  $b^2 = 9 - 4 = 5$ . Підставляючи значення  $b^2 = 5$  і  $a^2 = 9$  в канонічне рівняння еліпса, одержуємо:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

Це і є рівняння шуканого еліпса.

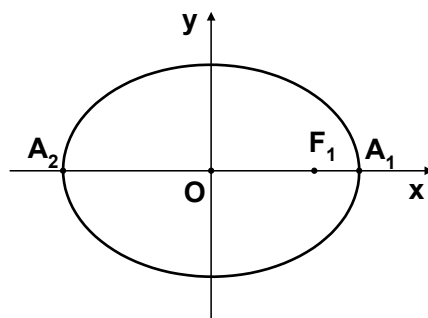


Рис. 4.7

**Приклад 12** Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот  $y = \pm \frac{4}{3}x$  і відстань між фокусами  $2c = 20$ .

**Розв'язання.** Шукатимемо рівняння гіперболи у вигляді  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Параметри  $a$  і  $b$  знайдемо з системи: 
$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи:  $b = \frac{4}{3}a$ . Підставляючи цей вираз у друге рівняння системи, одержуємо:  $a^2 + \frac{16}{9}a^2 = 100$ , звідки  $a^2 = 36$ . Тоді  $b^2 = 100 - 36 = 64$  і шукане рівняння гіперболи:  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ .

**Приклад 13** Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами  $2c = 10$ , а ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{5}{3}$ .

**Розв'язання.** За умовою задачі фокуси гіперболи розташовані на осі ординат, тому її рівняння буде мати вигляд:  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ .

Параметри  $a$  і  $b$  визначаються із системи: 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, \\ \varepsilon = \frac{c}{b}. \end{cases}$$

Враховуючи, що  $c = 5$ , маємо: 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25, \\ \frac{5}{b} = \frac{5}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 16, \\ b = 3. \end{cases}$$

Таким чином, рівняння гіперболи має вигляд:  $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$ .

**Приклад 14** Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо вона проходить через точку  $M_1(-5; 3)$  і її ексцентриситет дорівнює  $\sqrt{2}$ .

**Розв'язання.** Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Підставляючи в це рівняння замість змінних координат  $x$  і  $y$  координати точки  $M_1$  (бо вона належить гіперболі), одержуємо:  $\frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ . За умовою  $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$ , звідки  $c = a\sqrt{2}$ . Тоді із співвідношення  $b^2 = c^2 - a^2$  матимемо  $b^2 = 2a^2 - a^2 = a^2$ .

Таким чином, для знаходження невідомих параметрів  $a$  і  $b$  гіперболи маємо систему: 
$$\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1, \\ b^2 = a^2. \end{cases}$$
 Розв'язуючи цю систему, знаходимо:  $a^2 = b^2 = 16$ .

Отже, шукане рівняння гіперболи  $x^2 - y^2 = 16$ .

**Приклад 15** Скласти найпростіше рівняння гіперболи, симетричної відносно координатних осей, якщо вона перетинає вісь  $Oy$  і проходить через точки  $M_1(24; 5\sqrt{5})$  і  $M_2(0; 5)$ . Знайти фокуси цієї гіперболи.

**Розв'язання.** Рівняння гіперболи шукатимемо у вигляді  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ .

Оскільки точки  $M_1$  і  $M_2$  належать гіперболі, їх координати задовольняють рівнянню гіперболи. Підставляючи координати даних точок у це рівняння,

$$\text{одержуємо: } \begin{cases} \frac{125}{b^2} - \frac{576}{a^2} = 1, \\ \frac{25}{b^2} = 1. \end{cases} \quad \text{Розв'язуючи цю систему, знаходимо: } b^2 = 25, a^2 = 144.$$

Отже, шукане рівняння гіперболи має вигляд  $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$ . Із співвідношення  $c^2 = a^2 + b^2$  знаходимо  $c$ :  $c = \sqrt{25 + 144} = 13$ .

Фокуси гіперболи розташовані на осі  $Oy$ , тому  $F_1(0; 13)$ ,  $F_2(0; -13)$ .

**Приклад 16** Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться в початку координат, якщо вона симетрично розташована відносно осі  $Ox$  і проходить через точку  $M_1(-1; 3)$ .

**Розв'язання.** Оскільки вершина параболи знаходиться в точці  $O(0; 0)$ , а вісь  $Ox$  є віссю симетрії, то рівняння параболи треба шукати у вигляді  $y^2 = 2px$ .

Параметр  $p$  знайдемо з умови, що парабола проходить через точку  $M_1(-5; 3)$ . Підставляючи координати цієї точки в рівняння параболи, одержуємо  $3^2 = 2p(-1)$ , звідки  $2p = -9$ .

Отже, шукане рівняння параболи  $y^2 = -9x$ .

**Приклад 17** Скласти рівняння параболи, симетричної відносно осі  $Oy$ , якщо вона проходить через точки перетину прямої  $x + y = 0$  і кола  $x^2 + y^2 + 8y = 0$ .

**Розв'язання.** Знайдемо точки перетину прямої і кола, для чого розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y, \\ (-y)^2 + y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ 2y^2 + 8y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = -4; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = -4. \end{cases} \end{cases}$$

Отже,  $O(0; 0)$  і  $M(4; -4)$  - шукані точки перетину.

Рівняння параболи, яка симетрична відносно осі  $Oy$  і проходить через початок координат, має вигляд  $x^2 = 2py$ .



Параметр  $p$  знайдемо з умови, що парабола проходить через точку  $M(4;-4)$ . Підставляючи координати цієї точки в рівняння параболі, одержуємо  $4^2 = 2p(-4)$ , звідки  $2p = -4$ .

Таким чином, шукане рівняння параболі набуде вигляду  $x^2 = -4y$ .

### Домашнє завдання

**Теорія** Рівняння поверхні та лінії у просторі. Рівняння площини у просторі. Площина. Основні задачі. Рівняння прямої лінії у просторі. Пряма лінія у просторі. Основні задачі. Пряма і площина у просторі. Основні задачі. [20], с. 52 – 63.

### Вправи

1 Скласти рівняння траєкторії точки, яка в кожний момент руху рівновіддалена від точок  $A(5;-2)$  і  $B(-3;-2)$ .

Відповідь:  $x - 1 = 0$ .

2 Установити, яка лінія визначається рівнянням  $r = 10 \sin \varphi$  і побудувати її.

Відповідь: коло з центром  $\left(5; \frac{\pi}{2}\right)$  і радіуса 5.

3 Дано середини сторін трикутника:  $M_1(2;1), M_2(5;3), M_3(3;-4)$ . Скласти рівняння його сторін.

Відповідь:  $7x - 2y - 12 = 0; 5x + y - 28 = 0; 2x - 3y - 18 = 0$ .

4 Скласти рівняння прямої якщо точка  $P(2;3)$  є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю пряму.

Відповідь:  $2x + 3y - 13 = 0$

5 Знайти точку  $Q$ , яка симетрична точці  $P$  відносно прямої  $2x - 3y - 3 = 0$ .

Відповідь:  $Q(11;-11)$ .

6 Дано вершини трикутника:  $A(1;-1), B(-2;1), C(3;5)$ . Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з вершини  $A$  на медіану, що проведена з вершини  $B$ .

Відповідь:  $4x + y - 3 = 0$

7 Визначити, за яких значень  $m, n$  прямі  $mx - 2y - 1 = 0$ ,  $6x - 4y - n = 0$  1) мають одну спільну точку; 2) паралельні; 3) збігаються.

Відповідь: 1)  $m \neq 3$ ; 2)  $m = 3, n \neq 2$ ; 3)  $m = 3, n = 2$ .

8 Пряма  $3x - 4y - 12 = 0$  відтинає від координатного кута трикутник. Обчислити його площу.

Відповідь: 6 кв. од.

9 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_1(3;-4)$  і відтинає на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової величини кожний відрізок вважається напрямленим від початку координат.

Відповідь:  $x + y + 4 = 0$ .

10 Точка  $A(2; -5)$  є вершиною квадрата, одна сторона якого лежить на прямій  $x - 2y - 7 = 0$ . Обчислити площу цього квадрату.

Відповідь: 5 кв. од.

11 Знайти кут між двома прямими: а)  $y = -2x$ ;  $3x - y + 5 = 0$ ;

б)  $4x + 2y - 5 = 0$ ;  $6x + 3y + 1 = 0$

Відповідь: а)  $\alpha = 135^\circ$  б)  $\alpha = 0$ . Дані прямі паралельні.

12 Через точку перетину прямих  $x - y + 4 = 0$  і  $4x + 2y - 19 = 0$  проведено пряму паралельно до прямої  $2x - 3y + 6 = 0$ . Скласти її рівняння.

Відповідь:  $12x - 18y + 83 = 0$ .

13 Скласти рівняння кола, яке проходить через точку  $M_1(2; 6)$ , а його центр знаходиться у точці  $C(-1; 2)$ .

Відповідь:  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

14 Коло дотикається до осі  $Ox$  в початку координат і проходить через точку  $A(0; -4)$ . Скласти його рівняння.

Відповідь:  $x^2 + y^2 + 4y = 0$ .

15 Скласти рівняння кола, яке проходить через точки  $A(-1; 3)$ ,  $B(0; 2)$ ,  $C(1; -1)$ .

Відповідь:  $(x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 25$ .

16 Скласти рівняння кола, яке проходить через початок координат, а його центр знаходиться у точці  $C(6; -8)$ .

Відповідь:  $(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$ .

17 Скласти рівняння еліпса, фокуси якого розташовані на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо він проходить через точку  $M_1\left(2; -\frac{5}{3}\right)$  і його ексцентриситет  $\varepsilon = \frac{2}{3}$ .

Відповідь:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ .

18 Обчислити ексцентриситет еліпса, якщо відрізок між його фокусами видно з вершин малої осі під прямим кутом.

Відповідь:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

19 Скласти рівняння еліпса, якщо його велика вісь дорівнює 26, а фокуси знаходяться у точках  $(\pm 12; 0)$ .

Відповідь:  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ .

20 Обчислити площу чотирикутника, дві вершини якого лежать у фокусах еліпса  $x^2 + 5y^2 = 20$ , а дві інші збігаються з кінцями його малої осі.

Відповідь: 16 кв.од.

21 Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат симетрично відносно початку координат, якщо рівняння асимптот  $y = \pm \frac{12}{5}x$ , а відстань між вершинами дорівнює 48.

Відповідь:  $-\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{576} = 1$ .

22 Знайти півосі, фокуси, ексцентриситет і рівняння асимптот гіперболи  $16x^2 - 9y^2 = 144$ .

Відповідь:  $a = 3$ ,  $b = 4$ ,  $F_1(5; 0)$ ,  $F_2(-5; 0)$ ,  $\varepsilon = \frac{5}{3}$ ,  $y = \pm \frac{4}{3}x$ .

23 Обчислити площу трикутника, утвореного асимптотами гіперболи  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$  і прямою  $9x + 2y - 24 = 0$ .

Відповідь: 12 кв.од.

24 Обчислити ексцентриситет рівносторонньої гіперболи.

Відповідь:  $\sqrt{2}$ .

25 Скласти канонічне рівняння гіперболи, дійсна піввісь якої дорівнює 5, а ексцентриситет  $\varepsilon = 1,4$ .

Відповідь:  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ .

26 Фокуси гіперболи збігаються з фокусами еліпса  $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ . Скласти рівняння гіперболи, якщо її ексцентриситет  $\varepsilon = 2$ .

Відповідь:  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ .

27 Фокус параболи має координати  $F(-6; 0)$ , а рівняння директриси  $x - 6 = 0$ . Скласти рівняння параболи.

Відповідь:  $y^2 = -24x$ .

28 Скласти найпростіше рівняння параболи, фокус якої знаходиться у точці перетину прямої  $2x - 5y - 8 = 0$  з віссю абсцис. Побудувати цю параболу.

Відповідь:  $y^2 = 16x$ .

29 Скласти рівняння параболи, якщо вона симетрична відносно осі абсцис і проходить через точки  $O(0; 0)$  і  $M(5; 3)$ .

Відповідь:  $y^2 = 1,8x$ .

30 Парабола, симетрична відносно осі  $Oy$ , проходить через точку  $M(6; 3)$  і початок координат. Скласти її рівняння.

Відповідь:  $x^2 = 12y$ .

31 На параболі  $y^2 = 6x$  знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 5.

Відповідь:  $M_1(1; 4)$ ,  $M_2(1; -4)$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Що називається рівнянням лінії у деякій системі координат?
- 2 Які дві основні задачі розглядаються в аналітичній геометрії?
- 3 Як однозначно може бути визначено положення прямої на площині?
- 4 Яке рівняння називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом?
- 5 Виведіть рівняння прямої, яка проходить: через дві задані точки площини; через задану точку в заданому напрямі.
- 6 Запишіть умови паралельності і перпендикулярності двох прямих.
- 7 Виведіть канонічні рівняння кола, еліпса, гіперболи і параболи.
- 8 Які геометричні властивості еліпса, гіперболи і параболи?
- 9 Що називається асимптотами гіперболи?

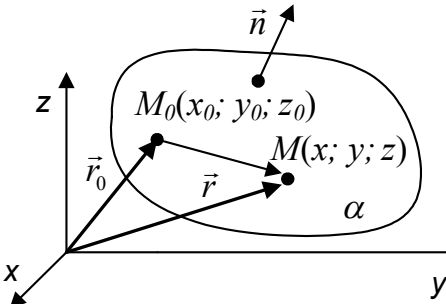
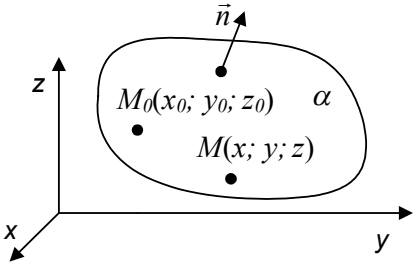
### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5. Аналітична геометрія у просторі.

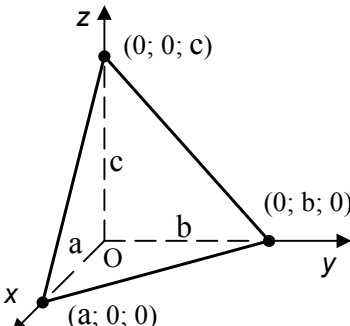
**Рівняння поверхні та лінії у просторі. Рівняння площини у просторі.**

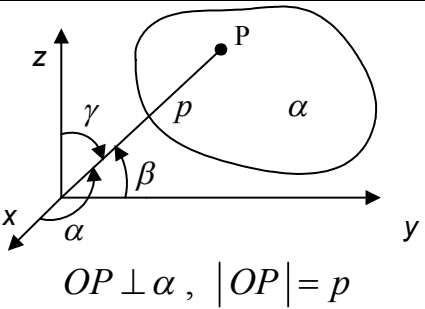
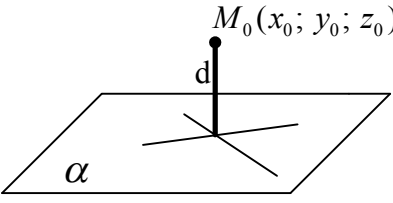
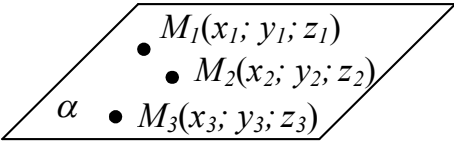
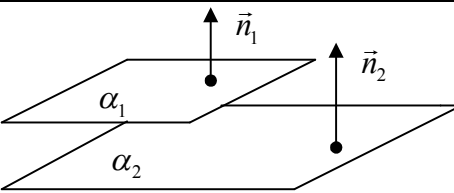
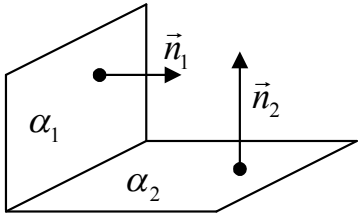
**Площина. Пряма лінія у просторі. Пряма і площина у просторі.**

**Основні задачі.**

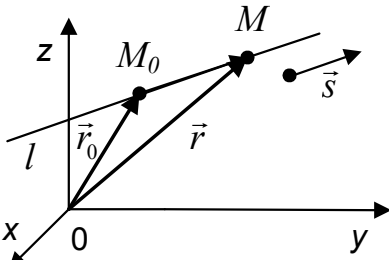
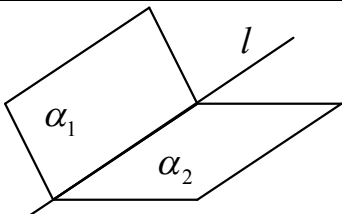
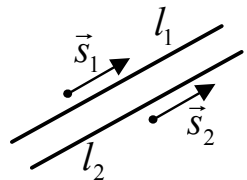
Таблиця 5.1 Площина

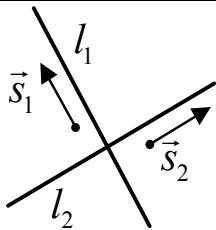
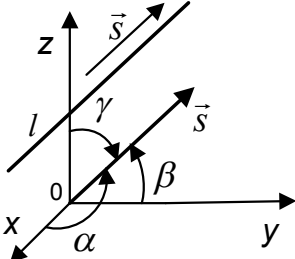
| № п/п | Назва                                                                                 | Спосіб завдання                                                                                                                                                                   | Рівняння                                  |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1     | Векторне рівняння площини                                                             |  $\vec{n} = \{A; B; C\} \perp \alpha$ $\vec{r}_0 = \{x_0; y_0; z_0\}$ $\vec{r} = \{x; y; z\}$ | $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ |
| 2     | Рівняння площини, яка проходить через задану точку в заданому напрямі (в'язка площин) |  $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \alpha$ $\vec{n} = \{A; B; C\} \perp \alpha$                          | $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$      |
| 3     | Загальне рівняння площини                                                             | $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$                                                                                                                                          | $Ax + By + Cz + D = 0$                    |

|   |                                                                                              |                                                                                     |                                                             |
|---|----------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 4 | Рівняння площини, яка проходить через початок координат                                      | $D = 0$                                                                             | $Ax + By + Cz = 0$                                          |
| 5 | Рівняння площини, яка паралельна<br>а) осі $Ox$<br>б) осі $Oy$<br>в) осі $Oz$                | $A = 0, D \neq 0$<br>$B = 0, D \neq 0$<br>$C = 0, D \neq 0$                         | $By + Cz + D = 0$<br>$Ax + Cz + D = 0$<br>$Ax + By + D = 0$ |
| 6 | Рівняння площини, яка проходить через<br>а) вісь $Ox$<br>б) вісь $Oy$<br>в) вісь $Oz$        | $A = 0, D = 0$<br>$B = 0, D = 0$<br>$C = 0, D = 0$                                  | $By + Cz = 0$<br>$Ax + Cz = 0$<br>$Ax + By = 0$             |
| 7 | Рівняння площини, яка паралельна<br>а) площині $yOz$<br>б) площині $xOz$<br>в) площині $xOy$ | $B = 0, C = 0, D \neq 0$<br>$A = 0, C = 0, D \neq 0$<br>$A = 0, B = 0, D \neq 0$    | $Ax + D = 0$<br>$By + D = 0$<br>$Cz + D = 0$                |
| 8 | Рівняння координатних площин:<br>а) площини $yOz$<br>б) площини $xOz$<br>в) площини $xOy$    | $B = 0, C = 0, D = 0$<br>$A = 0, C = 0, D = 0$<br>$A = 0, B = 0, D = 0$             | $x = 0$<br>$y = 0$<br>$z = 0$                               |
| 9 | Рівняння площини відрізках                                                                   |  | $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$               |

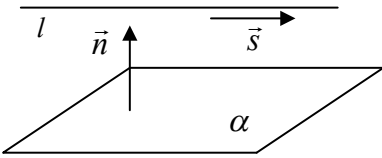
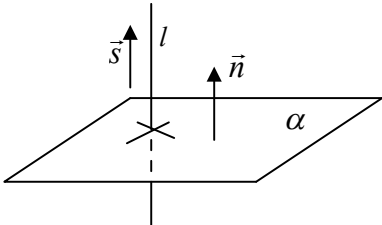
|    |                                                                              |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                               |
|----|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10 | Нормальне рівняння площини                                                   |  <p><math>OP \perp \alpha,  OP  = p</math></p>                                                                                                                                                  | $x \cdot \cos \alpha + y \cdot \cos \beta + z \cdot \cos \gamma - p = 0$ <p>або</p> $\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$ |
| 11 | Відстань від точки до площини                                                |  <p><math>Ax + By + Cz = 0 \quad (\alpha)</math></p>                                                                                                                                            | $d = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$                                                                                 |
| 12 | Рівняння площини, яка проходить через три задані точки                       |                                                                                                                                                                                                | $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$     |
| 13 | Кут між двома площинами                                                      | $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$                                                                                                                                                                                                                    | $\cos \phi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$                            |
| 14 | Умова паралельності двох площин                                              |  <p> <math>\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}</math><br/> <math>\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}</math><br/> <math>\alpha_1 \parallel \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2</math> </p> | $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$                                                                                         |
| 15 | Умова перпендикулярності двох площин                                         |  <p> <math>\alpha_1 \perp \alpha_2 \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0</math> </p>                                                                                                      | $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$                                                                                                                |
| 16 | Рівняння в'язки площин, які проходять через лінію перетину двох даних площин | $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$                                                                                                                                                                             | $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$                                                                            |

Таблиця 5.2 Пряма лінія у просторі

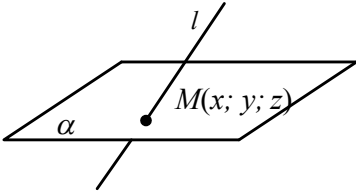
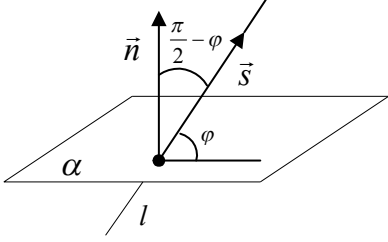
| № | Назва                                          | Спосіб завдання                                                                                                                                                                                                   | Рівняння                                                                                                                 |
|---|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | Векторне рівняння прямої                       |  $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$                                                                  | $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$                                                                                         |
| 2 | Параметричні рівняння прямої                   | $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$ $t - \text{параметр}$                                                                                                                              | $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt \end{cases}$                                               |
| 3 | Канонічні рівняння прямої                      | $M_0(x_0; y_0; z_0) \in l$ $\vec{s} = \{m, n, p\} \parallel l$                                                                                                                                                    | $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$                                                              |
| 4 | Рівняння прямої, яка проходить через дві точки | $M_1(x_1; y_1; z_1) \in l$ $M_2(x_2; y_2; z_2) \in l$                                                                                                                                                             | $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$                                      |
| 5 | Загальні рівняння прямої                       |                                                                                                                                | $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$                                |
| 6 | Кут між двома прямими                          | $\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$ $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$                                                                               | $\cos \varphi = \pm \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$ |
| 7 | Умова паралельності двох прямих                |  $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$ | $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$                                                                    |

|   |                                      |                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                           |
|---|--------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 8 | Умова перпендикулярності двох прямих |  $\vec{s}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ $\vec{s}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$ $l_1 \perp l_2 \Rightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ | $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$                                                                                                                                                                                         |
| 9 | Напрямні косинуси прямої             |  $\vec{s} = \{m; n; p\}$                                                                                               | $\cos \alpha = \frac{s_x}{ \vec{s} } = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ $\cos \beta = \frac{s_y}{ \vec{s} } = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ $\cos \gamma = \frac{s_z}{ \vec{s} } = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ |

Таблиця 5.3 Пряма і площина у просторі

| № | Назва                                     | Спосіб завдання                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Рівняння                                  |
|---|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 1 | Умова паралельності прямої і площини      |  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (l)$ $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\alpha)$ $\vec{s} = \{m; n; p\}$ $\vec{n} = \{A; B; C\}$ $\alpha \parallel l \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{s}$ | $Am + Bn + Cp = 0$                        |
| 2 | Умова перпендикулярності прямої і площини |  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (l)$ $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\alpha)$ $\vec{s} = \{m; n; p\}$ $\vec{n} = \{A; B; C\}$ $\alpha \perp l \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{s}$ | $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ |



|   |                                    |                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                                   |
|---|------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3 | Точка перетину<br>прямої і площини |  $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (l)$ $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\alpha)$ $l \cap \alpha = M(x; y; z)$ | $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$                                                                                                               |
| 4 | Кут між прямою і<br>площиною       |  $\vec{s} = \{m; n; p\}$ $\vec{n} = \{A; B; C\}$                                                                                    | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = \frac{ \vec{n} \cdot \vec{s} }{ \vec{n}  \cdot  \vec{s} }$ $\sin \varphi = \frac{ Am + Bn + Cp }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$ |

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Точка  $P(2; -1; -1)$  є основою перпендикуляра, опущеного з початку координат на площину. Скласти рівняння цієї площини.

**Розв'язання.** За умовою точка  $P$  належить шуканій площині, тому її рівняння шукатимемо у вигляді  $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ . Відомо також, що  $OP \perp \alpha$ . Отже, вектор  $\overrightarrow{OP}$  можна вважати нормальним вектором  $\vec{n} = \{A; B; C\}$  площини  $\alpha$ . Оскільки  $\overrightarrow{OP} = \vec{n} = \{2; -1; -1\}$ , бо координати точки  $O(0; 0; 0)$ , підставляючи його координати і координати точки  $P$  в рівняння площини, одержимо  $2(x-2)-(y+1)-(z+1)=0$  або  $2x-y-z-6=0$ . Це і є шукане рівняння.

**Приклад 2** Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(3; -2; -7)$  паралельно до площини  $2x-3z+5=0$  ( $\alpha_1$ ).

**Розв'язання.** Точка  $M_1$  належить шуканій площині  $\alpha$ , тому її рівняння має вигляд  $A(x-3)+B(y+2)+C(z+7)=0$  ( $\alpha$ ).

За умовою площини паралельні, тому їх нормальні вектори колінеарні, а з умови колінеарності векторів одержуємо  $\frac{A}{2} = \frac{B}{0} = \frac{C}{-3}$ . А це означає, що вектор  $\vec{n}_1 = \{2; 0; -3\}$  можна вважати нормальним вектором площини  $\alpha$ . Таким чином, рівняння цієї площини  $2(x-3)+0(y+2)-3(z+7)=0$  або  $2x-3z-27=0$ .

Цю задачу можна розв'язати інакше: якщо площини паралельні, то їх рівняння можна перетворити так, що вони відрізнятимуться лише вільними членами. Тоді рівняння площин, паралельних даній площині, матиме вигляд:

$2x - 3z + D = 0$ . Підставляючи в це рівняння замість змінних координат  $x$  і  $y$  координати точки  $M_1(3; -2; -7)$ , через яку проходить площина, одержуємо рівняння  $2 \cdot 3 - 3 \cdot (-7) + D = 0$ , звідки  $D = -27$ . Таким чином, рівняння шуканої площини набуде вигляду  $2x - 3z - 27 = 0$ .

**Приклад 3** Визначити, за яких значень  $l$  і  $m$  площини  $2x + ly + 3z - 5 = 0$  ( $\alpha_1$ ) і  $mx - 6y - 6z + 2 = 0$  ( $\alpha_2$ ) будуть паралельні.

**Розв'язання.** За умовою паралельності двох площин маємо:  $\frac{2}{m} = \frac{l}{-6} = \frac{3}{-6}$ , бо  $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\} = \{2; l; 3\}$ ,  $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\} = \{m; -6; -6\}$ .

Розв'язуючи рівняння  $\frac{2}{m} = \frac{3}{-6}$ , одержуємо  $m = \frac{2 \cdot (-6)}{3} = -4$ . Із рівняння  $\frac{l}{-6} = \frac{3}{-6}$  маємо  $l = 3$ .

Таким чином, при  $l = 3$  і  $m = -4$  площини ( $\alpha_1$ ) і ( $\alpha_2$ ) будуть паралельні.

**Приклад 4** Визначити, за яких значень  $l$  площини  $5x + y - 3z - 2 = 0$  ( $\alpha_1$ ) і  $2x + ly - 3z + 1 = 0$  ( $\alpha_2$ ) будуть перпендикулярні.

**Розв'язання.**  $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\} = \{5; 1; -3\}$  - нормальний вектор площини ( $\alpha_1$ ),  $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\} = \{2; l; -3\}$  - нормальний вектор площини ( $\alpha_2$ ).

Згідно з умовою перпендикулярності двох площин, маємо  $5 \cdot 2 + 1 \cdot l + (-3) \cdot (-3) = 0$ , звідки  $l = -19$ .

Отже, при  $l = -19$  площини ( $\alpha_1$ ) і ( $\alpha_2$ ) будуть перпендикулярні.

**Приклад 5** Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(2; -3; 3)$  паралельно до площини  $xOy$ .

**Розв'язання.** Шукана площина паралельна площині  $xOy$ , а тому її рівняння  $Cz + D = 0$ . Підставляючи в це рівняння координати точки  $M_1$  (бо вона належить їй), одержимо  $C \cdot 3 + D = 0$ , звідки  $D = -3C$ . Тепер рівняння шуканої площини набуде вигляду  $Cz - 3C = 0$  або  $C(z - 3) = 0$ . Оскільки  $C \neq 0$ ,  $z - 3 = 0$ . Це і є шукане рівняння.

**Приклад 6** Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь  $Oy$  і точку  $M_1(1; 4; -3)$ .

**Розв'язання.** Рівняння площини, яка проходить через вісь  $Oy$ , має вигляд  $Ax + Cz = 0$ . Оскільки точка  $M_1$  належить цій площині, її координати задовольняють цьому рівнянню і тому  $A \cdot 1 + C \cdot (-3) = 0$ , звідки  $A = 3C$ . Таким чином, рівняння шуканої площини набуває вигляду  $3Cx + Cz = 0$ , або  $C(3x + z) = 0$ . Оскільки  $C \neq 0$ , то  $3x + z = 0$  - шукане рівняння.

**Приклад 7** Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(2; -1; 1)$  перпендикулярно до площин  $y = 0$  ( $\alpha_1$ ) і  $2x - z + 1 = 0$  ( $\alpha_2$ ).

**Розв'язання.** Точка  $M_l$  належить шуканій площині  $\alpha$ , а тому маємо:  
 $A(x-2) - B(y+1) + C(z-1) = 0$ .

За умовою  $\alpha \perp \alpha_1 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_1 = \{0; 1; 0\}$ ,  $\alpha \perp \alpha_2 \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{n}_2 = \{2; 0; -1\}$ , а це

означає, що  $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{k}$ .

Оскільки  $\vec{n} = \{A; B; C\} = \{-1; 0; -2\}$ , то рівняння шуканої площини  
 $-(x-2) - 2(z-1) = 0$ , або  $x + 2z - 4 = 0$ .

**Приклад 8** Обчислити відстань  $d$  від точки  $M_0(-1; 1; -2)$  до площини, яка проходить через три точки:  $M_1(1; -1; 1)$ ,  $M_2(-2; 1; 3)$ ,  $M_3(4; -5; -2)$ .

**Розв'язання.** Складаємо рівняння площини, яка проходить через три точки:  $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1+1 & 3-1 \\ 4-1 & -5+1 & -2-1 \end{vmatrix} = 0$  або  $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$ .

Розкривши визначник по елементам першого рядка, одержимо:

$$2(x-1) - 3(y+1) + 6(z-1) = 0 \quad \text{або} \quad 2x - 3y + 6z - 11 = 0.$$

Тепер за формулою обчислення відстані від точки до площини, враховуючи, що  $x_0 = -1$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = -2$ ,  $A = 2$ ,  $B = -3$ ,  $C = 6$ ,  $D = -11$ , маємо:

$$d = \frac{|2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 + 6 \cdot (-2) - 11|}{\sqrt{4 + 9 + 36}} = \frac{28}{7} = 4.$$

**Приклад 9** Обчислити відстань між паралельними площинами  $2x - 3y + 6z - 14 = 0$  ( $\alpha_1$ ) і  $4x - 6y + 12z + 21 = 0$  ( $\alpha_2$ ).

**Розв'язання.** Знайдемо на одній із площин, наприклад, на площині  $\alpha_1$ , довільну точку. Для цього в рівнянні  $\alpha_1$  покладемо  $y = z = 0$ . Тоді  $2x - 14 = 0$ , звідки  $x = 7$ . Отже, знайдено точку  $M_0(7; 0; 0)$ , яка належить площині  $\alpha_1$ . Тепер задача зводиться до знаходження відстані від точки  $M_0$  до площини  $\alpha_2$ . За формулою обчислення відстані від точки до площини, враховуючи, що  $A = 4$ ,  $B = -6$ ,  $C = 12$ ,  $D = 21$ ,  $x_0 = 7$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$ , маємо:

$$d = \frac{|4 \cdot 7 - 6 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 21|}{\sqrt{16 + 36 + 144}} = \frac{49}{14} = 3,5.$$

**Приклад 10** Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(2; -3; -4)$  і відтинає на координатних осях від нуля відрізки однакової величини (вважати кожний відрізок напрямленим з початку координат).

**Розв'язання.** Шукаємо рівняння площини у відрізках, тобто у вигляді  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ . Оскільки за умовою  $a = b = c$ , рівняння площини набуде

вигляду  $x + y + z = a$ . Точка  $M_I$  належить площині, тому її координати задовольняють рівнянню  $x + y + z = a$ . Підставляючи в це рівняння координати точки  $M_I$ , одержуємо  $2 - 3 - 4 = a$ , звідки  $a = -5$ . Отже, рівняння шуканої площини  $x + y + z + 5 = 0$ .

**Приклад 11** Скласти канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(2; 0; -3)$  паралельно вектору  $\vec{a} = \{2; -3; 5\}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи канонічні рівняння і враховуючи, що  $x_0 = 2$ ,  $y_0 = 0$ ,  $z_0 = -3$ ,  $m = 2$ ,  $n = -3$ ,  $p = 5$ , одержуємо  $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$ .

Це і є шукане рівняння.

**Приклад 12** Скласти параметричне рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(1; -1; -3)$  паралельно до прямої  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{0}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи параметричні рівняння і враховуючи, що напрямний вектор  $\vec{s} = \{2; 5; 0\}$  даної прямої є також і напрямним вектором

шуканої прямої, матимемо: 
$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 + 5t, \\ z = -3. \end{cases}$$

**Приклад 13** Довести, що прямі  $(l_1) \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1 \end{cases}$  і  $(l_2) \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0, \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}$

паралельні.

**Розв'язання.** Маємо  $\vec{s}_1 = \{2; 3; -6\}$  - напрямний вектор прямої  $l_1$  і

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -4 \\ 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -9\vec{i} - 6\vec{j} - 6\vec{k} \quad \text{або} \quad \text{паралельний йому вектор}$$

$\vec{s}_2 = \{3; 2; 2\}$  - напрямний вектор прямої  $l_2$ .

Знайдемо скалярний добуток векторів  $\vec{s}_1$  і  $\vec{s}_2$ :  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = 0$ . Оскільки  $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ ,  $\vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$ . Звідси випливає, що  $l_1 \perp l_2$ . Таким чином, доведено, що дані прямі перпендикулярні.

**Приклад 14** Знайти напрямні косинуси прямої 
$$\begin{cases} x = 4 + 2t, \\ y = -3 - t, \\ z = 5 - 2t. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Направним вектором даної прямої є вектор  $\vec{s} = \{2; -1; -2\}$ .

Використовуючи формули для знаходження напрямних косинусів прямої, одержимо:

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}; \quad \cos \beta = -\frac{1}{3}; \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

**Приклад 15** Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(2; -3; 5)$  перпендикулярно до двох даних прямих:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2} \quad (l_1) \quad \text{і} \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2} \quad (l_2).$$

**Розв'язання.** Рівняння прямої  $l$  шукатимемо у вигляді  $\frac{x-2}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z-5}{p}$ .

Оскільки  $l \perp l_1$  і  $l \perp l_2$ ,  $\vec{s} \perp \vec{s}_1 = \{-1; 2; 2\}$  і  $\vec{s} \perp \vec{s}_2 = \{6; 3; -2\}$ , звідки випливає, що напрямним вектором шуканої прямої можна вважати вектор  $\vec{s} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -10\vec{i} + 10\vec{j} - 15\vec{k}$  або паралельний йому вектор  $\vec{s}_3 = \{2; -2; 3\}$ .

Отже, вважаючи, що  $m=2$ ,  $n=-2$ ,  $p=3$ , рівняння шуканої прямої набуде вигляду  $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}$ .

**Приклад 16** Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки  $M_1(2; -1; -3)$ ,  $M_2(3; 1; -5)$ . Знайти її напрямні косинуси.

**Розв'язання.** Використовуючи рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки, одержимо  $\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{1+1} = \frac{z+3}{-5+3}$  або  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{-2}$ . Напрямний вектор цієї прямої  $\vec{s} = \{m; n; p\} = \{1; 2; -2\}$ . Тепер знаходимо:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3}; \quad \cos \beta = \frac{2}{3}; \quad \cos \gamma = -\frac{2}{3}.$$

**Приклад 17** Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(2; -3; -5)$  перпендикулярно до площини  $6x-3y-5z+2=0$ .

**Розв'язання.** Запишемо канонічні рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(2; -3; -5)$ :

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+3}{n} = \frac{z+5}{p}.$$

Невідомі параметри  $m$ ,  $n$ , знайдемо з умови перпендикулярності прямої і площини. Оскільки  $l \perp \alpha$ , то  $\vec{s} \parallel \vec{n}$ , а це означає, що нормальний вектор площини  $\vec{n} = (A; B; C) = (6; -3; -5)$  можна вважати і напрямним вектором шуканої прямої. Отже,  $\vec{s} = (m; n; p) = (6; -3; -5)$ . Підставляючи координати вектора  $\vec{s} = (m; n; p) = (6; -3; -5)$  у рівняння прямої, одержуємо:

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+5}{-5}.$$

**Приклад 18** За якого значення  $n$  пряма  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{n} = \frac{z+3}{-2}$  паралельна

площині  $x-3y-6z+2=0$ ?

**Розв'язання.** Напрямний вектор прямої  $\vec{s} = (3; n; -2)$ , а нормальний вектор площини  $\vec{n} = (A; B; C) = (1; -3; 6)$ . За умовою паралельності прямої і площини:  $3 \cdot 1 + n \cdot (-3) + (-2) \cdot 6 = 0$ , звідки  $n = -3$ . Таким чином, при  $n = -3$  пряма і площина будуть паралельні.

**Приклад 19** За яких значень  $m$  і  $C$  пряма  $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$  перпендикулярна до площини  $3x-2y+Cz+1=0$ ?

**Розв'язання.** Напрямний вектор прямої  $\vec{s} = (m; 4; -3)$ , а нормальний вектор площини  $\vec{n} = (3; -2; C)$ . За умовою перпендикулярності прямої і площини:  $\frac{m}{3} = \frac{4}{-2} = \frac{-3}{C}$ . Розв'язуючи рівняння  $\frac{m}{3} = \frac{4}{-2}$ , одержуємо  $m = -6$ . Із рівняння  $\frac{4}{-2} = \frac{-3}{C}$  знаходимо, що  $C = 1,5$ . Таким чином, при  $m = -6$  і  $C = 1,5$  пряма і площина будуть перпендикулярні.

**Приклад 20** Знайти точку перетину прямої  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$  і площини  $2x+3y+z-1=0$ .

**Розв'язання.** Запишемо рівняння прямої в параметричній формі

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} = t.$$

Звідси  $x = t + 1$ ,  $y = -2t - 1$ ,  $z = 6t$ .

Розв'яжемо систему рівнянь: 
$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = -2t - 1, \\ z = 6t, \\ 2x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Підставляючи вирази для  $x$ ,  $y$ ,  $z$  в останнє рівняння системи, одержуємо  $2(t+1) + 3(-2t-1) + 6t - 1 = 0$ , або  $2t - 2 = 0$ , звідки  $t = 1$ .

Із рівняння прямої при  $t = 1$  знаходимо координати точок перетину:  
 $x = 1 + 1 = 2$ ,  $y = -2 \cdot 1 - 1 = -3$ ,  $z = 6 \cdot 1 = 6$ .

Таким чином, шуканою точкою перетину прямої і площини є точка  $M(2; -3; 6)$ .

**Приклад 21** Знайти проекцію точки  $P(5; 2; -1)$  на площину  $2x-y+3z+23=0$ .

**Розв'язання.** Насамперед зауважимо, що точка  $P$  не належить площині (пропонуємо переконатися в цьому самостійно). І, тому задача зводиться до знаходження перпендикуляра, опущеного з точки  $P$  на задану площину (рис.5.1). Використовуючи параметричні рівняння прямої у просторі і враховуючи, що нормальний вектор площини  $\vec{n} = (2; -1; 3)$  є і одночасно

нормальним вектором прямої  $PP_1$ : 
$$\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$$

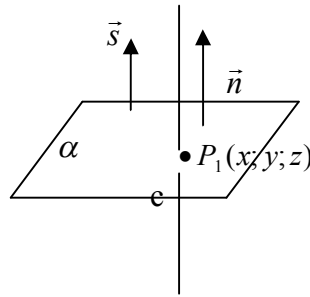


Рис. 5.1

Тепер знайдемо точку перетину прямої  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$  і площини

$$2x+3y+z-1=0, \text{ розв'язуючи систему } \begin{cases} x = 5+2t, \\ y = 2-t, \\ z = -1+3t, \\ 2x-y+3z+23=0. \end{cases}$$

Підставляючи вирази для  $x, y, z$  в останнє рівняння системи, одержуємо  $2(5+2t)-(2-t)+3(-1+3t)+23=0$ . Або  $2t-2=0$ , звідки  $t=-2$ .

При  $t=-2$  одержуємо:

$$x=5-4=1, \quad y=2-(-2)=4, \quad z=-1+3 \cdot (-2)=-7.$$

Отже, проекцією точки Р на площину є точка  $P_1(1;4;-7)$ .

**Приклад 22** Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_0(2;-3;4)$  паралельно прямим  $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{8}$  і  $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{2}$ .

**Розв'язання** Згідно з рівняння площини запишемо у вигляді

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0.$$

Через те, що  $\vec{n} = (A; B; C) \perp \vec{s}_1 = (1;2;8)$  і  $\vec{n} = (A; B; C) \perp \vec{s}_2 = (4;0;2)$ , то

$$\vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 30\vec{j} - 8\vec{k}, \text{ і тому рівняння шуканої площини набуде}$$

вигляду  $4(x-2)+30(y+3)+8(z-4)=0$ , або  $2x+15y-4z+57=0$ .

Зауважимо, що нормальним вектором шуканої прямої можна було б вважати і вектор  $\vec{n}_1 = (2;15;-4)$ , який є паралельний вектору  $\vec{n} = (4;30;-8)$ .

**Приклад 23** Знайти кут між прямою  $\begin{cases} x-y-8=0, \\ 2x+z-14=0 \end{cases}$  і площиною

$$4x-2y-2z+7=0.$$

**Розв'язання.** За формулою знаходження кута між площиною та прямою у просторі знаходимо:

$$\sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Оскільки нормальний вектор площини  $\vec{n} = (A; B; C) = (4; -2; -2)$  і

$$\text{напрямний вектор прямої } \vec{n} = \vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 30\vec{j} - 8\vec{k},$$

$$\sin \varphi = \frac{|4 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) - 2 \cdot 2|}{\sqrt{16 + 4 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{2}.$$

Отже,  $\varphi = 30^\circ$ .

### Домашнє завдання

**Теорія** Функція. Основні властивості функції. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Зв'язок між ними. Границя функції. Перша та друга особливі границі. Неперервність функції. Основні теореми про неперервні функції. [20], с. 64–86.

### Вправи

1 Скласти рівняння площини, що відтинає на осі  $Oy$  відрізок  $b = 5$  і перпендикулярна до вектора  $\vec{n} = \{3; -2; 4\}$ .

Відповідь:  $3x - 2y + 4z + 10 = 0$ .

2 Дано точки  $M_1(2; -1; 3)$  і  $M_2(4; -2; -1)$ . Скласти рівняння площини, проведеної через точку  $M_1$  перпендикулярно до вектора  $\overrightarrow{M_1M_2}$ .

Відповідь:  $2x - y - 4z + 7 = 0$ .

3 Скласти рівняння площини, яка проходить через початок координат паралельно площині  $x - 2y + z - 3 = 0$ .

Відповідь:  $x - 2y + z = 0$ .

4 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(1; -1; 2)$  паралельно площині  $2x - 3y + z - 5 = 0$ .

Відповідь:  $2x - 3y + z - 7 = 0$ .

5 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $M_1(1; 0; 1)$  і  $M_2(1; 2; -3)$  перпендикулярно до площини  $x - y + z - 1 = 0$ .

Відповідь:  $x + 2y + z - 2 = 0$ .

6 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(1; -1; 1)$  і перпендикулярно до площин  $2x - y + z - 1 = 0$  і  $x + 2y - z + 1 = 0$ .

Відповідь:  $x - 3y - 5z + 1 = 0$ .

7 Знайти відстань між паралельними площинами  $x - y + z - 1 = 0$  і  $2x - 2y + 2z - 5 = 0$ .

Відповідь:  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



8 Знайти гострий кут між площинами  $11x - 8y - 7z + 5 = 0$  і  $7x + 2y - 8z - 3 = 0$ .

Відповідь:  $\varphi = 45^\circ$ .

9 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $M_1(2; -1; 3)$  і  $M_2(3; 1; 2)$  паралельно вектору  $\vec{a} = \{3; -1; -4\}$ .

Відповідь:  $9x - y + 7z - 40 = 0$ .

10 Показати, що площини  $x - y + z - 1 = 0$  і  $2x - 2y + 2z + 3 = 0$  паралельні.

11 Показати, що площини  $x + 2y - 5z + 1 = 0$  і  $3x - 4y - z - 2 = 0$  перпендикулярні.

12 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(-5; 2; -1)$  паралельно до площини  $YOZ$ .

Відповідь:  $x + 5 = 0$ .

13 Скласти рівняння площини, яка проходить через вісь  $Ox$  і точку  $M_1(4; -1; 2)$ .

Відповідь:  $2y + z = 0$ .

14 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $M_1(2; -1; 1)$  і  $M_2(3; 1; 2)$  паралельно до осі  $Oy$ .

Відповідь:  $x - z - 1 = 0$ .

15 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_1(1; -2; 3)$  перпендикулярно до осі  $Oz$ .

Відповідь:  $z - 3 = 0$ .

16 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $M_1(1; -2; 6)$  і  $M_2(5; -4; -2)$  і відтинає на осях  $Ox$  і  $Oy$  відмінні від нуля відрізки однакової величини.

Відповідь:  $4x + 4y + z - 2 = 0$ .

17 Скласти рівняння площин, які проходять через точку  $M_1(4; 3; 2)$  і відтинають на координатних осях відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

Відповідь:  $x + y + z - 9 = 0$ ,  $x - y - z + 1 = 0$ ,  $x - y + z - 3 = 0$ ,  $x + y - z - 5 = 0$ .

18 Знайти відстань від точки  $M_1(2; 3; -1)$  до площини  $7x - 6y - 6z + 42 = 0$ .

Відповідь:  $d = 4$ .

19 Знайти відстань між паралельними площинами  $2x - 3y + 6z - 14 = 0$  і  $2x - 3y + 6z + 28 = 0$ .

Відповідь:  $d = 6$ .

20 Скласти рівняння площини, яка проходить через точки  $M_1(-2; 4; 1)$ ,  $M_2(0; 2; -1)$ ,  $M_3(2; 0; -1)$

Відповідь:  $x + y - 2 = 0$ .

21 Скласти рівняння прямої, що проходить через точку  $M_0(-4; 3; 0)$

паралельно до прямої  $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

Відповідь:  $\frac{x+4}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{5}.$

22 Знайти кут між прямою  $\begin{cases} x = 2z - 1, \\ y = -2z + 1 \end{cases}$  і прямою, яка проходить через

початок координат і через точку з координатами  $(1; -1; -1)$ .

Відповідь:  $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

23 Показати, що пряма  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$  перпендикулярна до прямої  $\begin{cases} x = z + 1, \\ y = 1 - z. \end{cases}$

24 Дано вершини трикутника  $A(2; -1; -3)$ ,  $B(5; 2; -7)$ ,  $C(-7; 11; 6)$ .

Скласти канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині  $A$ .

Відповідь:  $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7}.$

25 Довести паралельність прямих  $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$  і  $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

26 Знайти рівняння прямої, що проходить через точку  $M_0(-4; 0; 2)$

перпендикулярно до прямих  $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$  і  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-5}{2}.$

Відповідь:  $\frac{x+4}{-2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{-5}.$

27 Скласти канонічні рівняння діагоналей паралелограма, три вершини якого знаходяться в точках  $A(2; 4; 6)$ ,  $B(-3; 5; 4)$ ,  $C(8; -6; 2)$ .

Відповідь:  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-6}{-2}, \quad \frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z-4}{0}.$

28 Довести, що пряма  $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -5 + 4t \end{cases}$  паралельна площині

$4x - 3y - 6z - 5 = 0.$

29 Знайти точку перетину прямої і площини:

а)  $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}, \quad x + y - z + 2 = 0;$

б)  $\frac{x+3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-5}, \quad x - 2y + z - 15 = 0;$

$$\text{в) } \frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}, \quad x+2y-2z+6=0.$$

Відповідь: а)  $M(4;-5;1)$ ; б) пряма паралельна площині; в) пряма лежить на площині.

30 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_0(1;-2;1)$  перпендикулярно до прямої  $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

Відповідь:  $x+2y+3z=0$ .

31 За якого значення  $C$  пряма  $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z-2=0. \end{cases}$  паралельна площині  $2x-y+Cz-2=0$ ?

Відповідь:  $C=-2$ .

32 Скласти рівняння площини, яка проходить через точку  $M_0(2;-2;1)$  і пряму  $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=-3t+2, \\ z=3t-3. \end{cases}$

Відповідь:  $4x+6y+5z-1=0$ .

33 Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку  $M_0(3;1;-2)$  і точку перетину прямої  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$  і площини  $2x-3y-5z-3=0$ .

Відповідь:  $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$ .

34 Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного з точки  $(2;3;-1)$  на площину  $4x+5y-2z+3=0$ .

Відповідь:  $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z+1}{-2}$ .

35 Скласти рівняння площини, яка проходить через паралельні прямі  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z+1}{4}$ ;  $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{4}$ .

Відповідь:  $7x+y-4z-9=0$ .

36 Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму  $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$  перпендикулярно до площини  $2x+3y-z-4=0$ .

Відповідь:  $8x-5y-z-4=0$ .

37 Знайти проекцію точки  $M(3;-1;1)$  на площину  $x+2y+3z-30=0$ .

Відповідь:  $M_1(5;5;5)$ .

38 Знайти проекцію точки  $P(5;-6;7)$  на пряму  $x=7-2t$ ;  $y=-1+3t$ ;  $z=4+t$ .

Відповідь:  $P_1(9;-2;3)$ .

39 За яких значень  $n$  і  $A$  пряма  $x=3+2t$ ;  $y=-5$ ;  $z=-5+nt$ ; перпендикулярна до площини  $Ax-2y+3z-5=0$ .

Відповідь:  $A=1$ ,  $n=-4$ .

40 Знайти кут між прямою  $x = 8 - 2t$ ,  $y = 7 - 2t$ ,  $z = 9 + 4t$ , і площиною  $6x - 3y - 3z + 1 = 0$ .

Відповідь:  $\varphi = 30^\circ$ .

41 Знайти точку, симетричну точці  $P(2; -4; 5)$  відносно прямої  $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -3 + t, \\ z = 3 - 4t. \end{cases}$

Відповідь:  $P_I(-12; 2; -15)$ .

42 Знайти синус кута між прямою  $\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - 4y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$  і площиною  $x + y + 3z - 1 = 0$ .

Відповідь:  $\sin \varphi = \frac{6}{\sqrt{418}}$ .

### Питання для самоперевірки

1 Як визначаються в аналітичній геометрії лінія, поверхня та інші множини точок? Наведіть приклади.

2 Як однозначно може бути визначене положення площини у просторі?

3 Який вектор називається нормальним вектором площини?

4 Яке рівняння називають загальним рівнянням площини у просторі? У чому полягає зміст його коефіцієнтів?

5 Виведіть рівняння площини, яка проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор.

6 Виведіть рівняння площини, яка проходить через три задані точки.

7 Як однозначно може бути визначене положення прямої у просторі?

8 Який вектор називають напрямним вектором прямої?

9 Виведіть канонічні та параметричні рівняння прямої у просторі.

10 Виведіть рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

11 Як визначити кут між двома площинами; двома прямими; між прямою і площиною?

12 Сформулюйте умови паралельності та перпендикулярності двох прямих; двох площин; прямої і площини.

### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6. Вступ в математичний аналіз.

#### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Знайти область визначення функцій :

$$\text{а) } y = \frac{2}{x^2 - 3x + 2}, \text{ б) } y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}, \text{ в) } y = \arccos \frac{1 - 2x}{4}.$$

#### Розв'язання.

а) Функція визначена для всіх значень  $x$ , крім тих, за яких знаменник  $x^2 - 3x + 2$  дробу  $\frac{2}{x^2 - 3x + 2}$  перетворюється на 0. Розв'язавши рівняння

$x^2 - 3x + 2 = 0$  знаходимо  $x_1 = 1, x_2 = 2$ . Тому областю визначення даної функції є сукупність усіх дійсних чисел, крім 1 та 2, тобто

$$D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty).$$

б) Корені парного степеня існують лише для невід'ємних чисел. Тому область визначення даної функції можна розглядати як сукупність усіх значень  $x$ , що задовольняють нерівності  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ .

Розв'яжемо сказану нерівність методом інтервалів. Для цього знайдемо корені рівняння  $x^2 - 4x + 3 = 0$ . За теоремою Вієта  $x_1 = 1, x_2 = 3$ . Ці точки поділяють всю числову вісь на інтервали:  $(-\infty; 1), (1; 3), (3; +\infty)$ .

Для зручності позначимо ліву частину нерівності через  $y$  і визначимо знак  $y$  на кожному інтервалі (рис.6.1):

$$y = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3); \quad y(0) = 3 > 0; \quad y(2) = -1 < 0; \quad y(4) = 3 > 0.$$

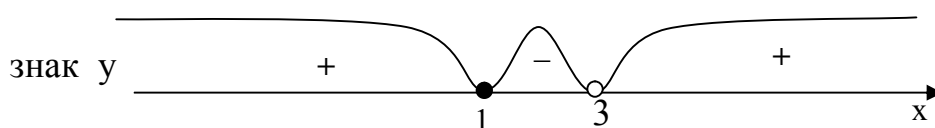


Рис.6.1

Таким чином, область визначення даної функції:

$$D(y) = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty).$$

в) Позначимо  $\frac{1-2x}{4} = t$ . Відомо, що функція  $y = \arccos t$  визначена при  $-1 \leq t \leq 1$ . Отже, задана буде визначена для всіх значень  $x$ , що задовольняють нерівності:  $-1 \leq \frac{1-2x}{4} \leq 1$ . Розв'язуючи цю нерівність, одержимо:  $-4 \leq 1-2x \leq 4$ , або  $-5 \leq -2x \leq 5$ , звідки  $\frac{5}{2} \geq x \geq -\frac{3}{2}$ . Отже, область визначення даної функції  $D(y) = \left[-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$ .

**Приклад 2** Знайти інтервали знакосталості функції  $y = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$ .

**Розв'язання.** Задана функція не існує в точках, де  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , звідки  $x_1 = 1, x_2 = 2$ . Функція дорівнює нулю при  $x = 0$ . Відкладемо одержані значення  $x$  на числовій прямій і визначимо знак  $y$  на кожному інтервалі (рис.6.2):

$$y(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)}; \quad y(-1) < 0, \quad y(0,5) > 0, \quad y(1,5) < 0, \quad y(3) > 0.$$

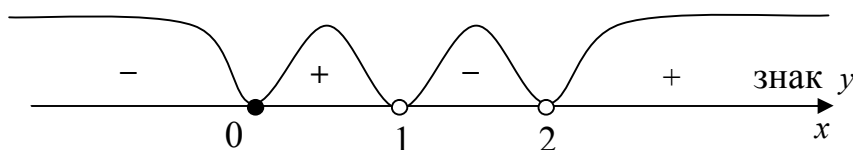


Рис.6.2

Отже,  $y < 0$  для  $x \in (-\infty; 0) \cup (1; 2)$  і  $y > 0$  для  $x \in (0; 1) \cup (2; +\infty)$ .

**Приклад 3** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right)$ .

**Розв'язання.** Функція, границю якої треба знайти, елементарна, тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^3 - 3x + 1}{x - 4} + 1 \right) = \frac{0^3 - 3 \cdot 0 + 1}{0 - 4} + 1 = \frac{3}{4}.$$

**Приклад 4** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$

**Розв'язання.** Для визначення границі елементарної функції досить у вираз цієї функції підставити граничне значення її аргументу. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 3}{(\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{0}{9 + 3 + 1} = \frac{0}{13} = 0.$$

**Приклад 5** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x}$ .

**Розв'язання.** Границя знаменника дорівнює нулю, тому теорему 6 безпосередньо застосувати не можна, тому що ділення на нуль неможливе. Якщо  $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) = 0$ , то  $1 - x$  є величина нескінченно мала, а обернена до неї

$\frac{1}{1 - x}$  – нескінченно велика. Отже, умовно можна записати, що  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1 - x} = \infty$ .

**Розкриття невизначеності виду  $\frac{0}{0}$ .**

Для розкриття цієї невизначеності користуються такими методами:

а) розкладають чисельник і знаменник на множники, після чого скорочують дріб на нескінченно малий співмножник і потім переходять до границі;

б) переносять ірраціональність з чисельника у знаменник або із знаменника в чисельник, а іноді за необхідністю – і те і друге, після чого одержаний дріб скорочують і переходять до границі;

в) використовують першу чудову границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1;$$

г) використовують властивість еквівалентності нескінченно малих величин.

Нагадаємо, що коли  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$ , то  $\alpha$  і  $\beta$  – еквівалентні нескінченно малі величини при  $x \rightarrow x_0$ , тобто  $\alpha \sim \beta$ .

При  $x \rightarrow 0$   $\sin x \sim x$ ,  $\operatorname{tg} x \sim x$ ,  $\operatorname{arsin} x \sim x$ ,  $\operatorname{arctg} x \sim x$ ,  $\ln(1 + x) \sim x$ ,  $\ell^x - 1 \sim x$ .

Зауважимо, що в таких випадках, коли чисельник або знаменник (або і чисельник, і знаменник) являє собою суму (або різницю) нескінченно малих функцій, то при обчисленні границі, взагалі кажучи, не можна заміняти окремі

додатки еквівалентними функціями. Така заміна може призвести до неправильного результату.

**Приклад 6** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$ .

**Розв'язання.** При  $x \rightarrow 1$  чисельник і знаменник даного дробу прямують до нуля. Тому безпосередньо застосування теореми про границю частки тут неможливе. Розкладаючи чисельник і знаменник даного дробу на множники, одержуємо:

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2, \quad x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1).$$

Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2}{x(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x(x + 1)} = \frac{0}{2} = 0.$$

Слід зазначити, скорочення дробу на  $x - 1$  було законним тому, що при знаходженні границі в точці  $x = 1$  значення цієї функції у точці  $x = 1$  не беремо до уваги, тобто  $x$ , прямуючи до одиниці і, отже, на нуль ми не скорочували.

**Приклад 7** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$ .

**Розв'язання.** Маємо невизначеність виду  $\frac{0}{0}$ . Розкладаючи на множники чисельник за формулою  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ , а знаменник за формулою  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , де  $x_1$  і  $x_2$  – корені рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ , маємо:

$$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1),$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{12} = \frac{5 \pm 1}{12}, \quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

$$6x^2 - 5x + 1 = 6(x - 1/2)(x - 1/3) = (2x - 1)(3x - 1).$$

Отже,

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)}{(2x - 1)(3x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{3x - 1} = \frac{1 + 1 + 1}{3/2 - 1} = 6.$$

**Приклад 8** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$ .

**Розв'язання.** Після підстановки граничного значення  $x$  маємо визначеність виду  $\frac{0}{0}$ . Звільнимися від ірраціональності у чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на спряжений чисельнику множник  $\sqrt{x - 1} + 2$ . Після скороченого дробу на нескінченно малий множник і використання теорем про границі, одержимо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x - 1} - 2)(\sqrt{x - 1} + 2)}{(x - 5)(\sqrt{x - 1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 1 - 4}{(x - 5)(\sqrt{x - 1} + 2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x - 1} + 2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**Приклад 9** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ .

**Розв'язання.** Чисельник і знаменник у точці  $x = 0$  мають границю, яка дорівнює нулю. Застосувати теорему про границю частки не можна. Тому помножимо чисельник і знаменник дробу на добуток  $(\sqrt{x^2 + 1} + 1)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{(\sqrt{x^2 + 16} - 4)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 + 1 - 1)(\sqrt{x^2 + 16} + 4)}{(x^2 + 16 - 16)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 16} + 4}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{8}{2} = 4. \end{aligned}$$

**Приклад 10** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи першу чудову границю, матимемо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

Цей приклад можна було б розв'язати ще й так. При  $x \rightarrow 0$   $\sin 3x \sim 3x$ , тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 = 3.$$

**Приклад 11** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x}$ .

**Розв'язання.** Через те що при  $x \rightarrow 0$   $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$  і  $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 5x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}.$$

**Приклад 12** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ .

**Розв'язання.** Враховуючи, що  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$  і при  $x \rightarrow 0$

$$\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}, \text{ матимемо } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 13** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$ .

**Розв'язання.** Чисельник і знаменник цього дробу при  $x = 0$  перетворюється на нуль. Тому застосувати теорему про границю дробу не можна. Перетворимо дріб, додавши чисельник у вигляді добутку:

$$\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cdot \cos x} = \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cdot \cos x}.$$

Тепер знаходимо:



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^3 \cdot \cos x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/4}{x^2} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ , а  $\sin \frac{2x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$  при  $x \rightarrow 0$ . Таким чином,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Слід зауважити, що в цьому прикладі при заміні  $\operatorname{tg} x$  на  $x$ ,  $\sin x$  на  $x$  одержали  $\frac{0}{x^3}$ , а це означало, що границя функції дорівнює нулю, а це не вірно.

### Розкриття невизначеності виду $\frac{\infty}{\infty}$

Для розкриття цієї невизначеності заданої відношенням многочленів, чисельник і знаменник ділять на найвищу, що входить до них степінь  $x$ , і потім переходять до границі.

**Приклад 14** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$ .

**Розв'язання.** Ні чисельник, ні знаменник не мають границі при  $x \rightarrow \infty$ . Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на  $x^4$ . Знаходимо

$$- \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x + 1/x^3}{1 - 3/x^2 + 1/x^4}.$$

Оскільки при  $x \rightarrow \infty$ :

$$1/x \rightarrow 0, \quad 1/x^3 \rightarrow 0, \quad 3/x^2 \rightarrow 0, \quad 1/x^4 \rightarrow 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – 1. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0.$$

**Приклад 15** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}$ .

**Розв'язання.** При  $x \rightarrow \infty$  чисельник і знаменник необмежено збільшується (одержуємо невизначеність виду  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Поділивши чисельник і знаменник на  $x^4$ , тобто на старшу степінь  $x$ , і використавши властивості границь, одержимо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \frac{1 - 0}{0 - 0 + 0} = \frac{1}{0} = \infty,$$

а це означає, що границя функції не існує.

Слід зауважити, що запис  $\frac{1}{0} = \infty$  є чисто умовним. Його треба розуміти

так:  $\frac{I}{н.м.в.} = н.в.в.$ , тобто величина, обернена до нескінченно малої є нескінченно великою.

**Приклад 16** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$ .

**Розв'язання.** Маємо невизначеність виду  $\frac{\infty}{\infty}$ . Поділивши чисельник і знаменник на  $x^2$ , тобто на старшу степінь  $x$ , і використавши властивості границь, одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 1/x^2}{2 + 1/x^2} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Далі при обчисленні границь можна користуватись таким правилом: якщо чисельник і знаменник дробу - многочлени і  $x \rightarrow \infty$ , то границя дробу дорівнює:

1) відношенню коефіцієнтів при старшій степені змінної, якщо многочлени однакової степені;

2) нулю, якщо степінь многочленна чисельника нижча за степінь многочленна знаменника;

3) нескінченності, якщо степінь многочленна чисельника вища за степінь многочленна знаменника.

**Приклад 17** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x + 3x^3}$ .

**Розв'язання.** Оскільки степені многочленів чисельника і знаменника однакові і  $x \rightarrow \infty$ , шукана границя дорівнює відношення коефіцієнтів при старшій степені  $x$ , тобто

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 3x^3}{1 + x + 3x^3} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \frac{-3}{3} = -1.$$

### Розкриття невизначеності виду $\infty - \infty$

Невизначеність такого виду розкривається одним з двох шляхів:

1) зведенням дробів до спільного знаменника, в результаті чого приходимо або до невизначеності  $\frac{0}{0}$ , або до невизначеності  $\frac{\infty}{\infty}$ ;

2) перенесенням ірраціональності з чисельника в знаменник.

**Приклад 18** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$ .

**Розв'язання.** При  $x \rightarrow 1$  задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок  $\infty - \infty$ ). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} = \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Тоді

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{1-x^3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{1+x+x^2} = -\frac{3}{3} = -1.\end{aligned}$$

**Приклад 19** Знайти  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$ .

**Розв'язання.** Тут також маємо невизначеність виду  $\infty - \infty$ . Помноживши і поділивши дану функцію на  $(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)$ , одержимо

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})(\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x)}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 6x - x^2}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x + 6}{\sqrt{x^2 - 5x + 6} + x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5 + 6/x}{\sqrt{1 - 5/x + 6/x^2} + 1} = -5/2.\end{aligned}$$

### Розкриття невизначеності виду $0 \cdot \infty$

Шляхом заміни змінної або за допомогою алгебраїчних перетворень функції невизначеність  $0 \cdot \infty$  зводиться або до невизначеності  $\frac{0}{0}$ , або до невизначеності  $\frac{\infty}{\infty}$ .

Слід зауважити, що множення можна замінити діленням на обернену величину і тому  $0 \cdot \infty$  можна розглядати як  $\frac{0}{\infty^{-1}} = \frac{0}{0}$  або як  $\frac{\infty}{0^{-1}} = \frac{\infty}{\infty}$  (як уже зазначалося, ці записи чисто умовні).

**Приклад 20** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3} \right)$ .

**Розв'язання.** При  $x \rightarrow 0$  одержуємо невизначеність виду  $0 \cdot \infty$ . Записавши в іншому вигляді дану функцію і використавши теореми про границі, матимемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{3} \right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x/3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x/3} = 3.$$

При розв'язанні цього прикладу прийнято до уваги, що при  $x \rightarrow 0$   $\operatorname{tg} \frac{x}{3} \sim \frac{x}{3}$ .

**Приклад 21** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right]$ .

**Розв'язання.** Тут також маємо невизначеність виду  $0 \cdot \infty$ .

Покладемо  $1-x = z$ . Звідси випливає, що  $z \rightarrow 0$ , оскільки  $x \rightarrow 1$ .

Тоді, виконуючи відповідні перетворення функції і переходячи до границі, знаходимо

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right] = (0 \cdot \infty) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ z \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi(1-z)}{2} \right] =$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \left[ z \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi z}{2} \right) \right] = \lim_{z \rightarrow 0} \left( z \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\pi z}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

### Розкриття невизначеності виду $1^\infty$

Для розкриття цієї невизначеності використовуємо другу чудову границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e = 2,71828\dots$$

Зазначимо, що число  $e$  ірраціональне. Логарифм за основою  $e$  називають натуральним логарифмом і позначають  $\ln x \equiv \log_e x$ .

**Приклад 22** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^{mx}$ .

**Розв'язання.** Маємо невизначеність  $1^\infty$ . Виконуючи елементарні перетворення і використовуючи формулу другої чудової границі, одержуємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^{mx} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{k}{x} \right)^{\frac{x}{k}} \right]^{\frac{k}{x} \cdot mx} = e^{km}.$$

**Приклад 23** Знайти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$ .

**Розв'язання.** При підстановці граничного значення  $x$  у вираз функції маємо невизначеність  $1^\infty$ . Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} &= (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x-4}{3x+2} - 1 \right)^{\frac{x+1}{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{3x-4-3x-2}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-6}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{-6}{3x+2} \right)^{\frac{3x+2}{-6}} \right]^{\frac{-6}{3x+2} \cdot \frac{x+1}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(x+1)}{3x+2}} = e^{-2/3}. \end{aligned}$$

**Приклад 24** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/2x}$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{1/2x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}} \right]^{\frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}{2x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x}} = e^{1/2}.$$

При розв'язанні прикладу прийнято до уваги, що при  $x \rightarrow 0$   $\operatorname{tg}^2 \sqrt{x} \sim (\sqrt{x})^2 = x$ .

**Приклад 25** Знайти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$ .

**Розв'язання.** У результаті підстановки граничного значення  $x$  маємо невизначеність  $\frac{0}{0}$ . Використавши формули потенціювання і другу чудову границю, одержимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} &= \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{a+x}{a}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left( 1 + \frac{x}{a} \right)^{1/x} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x}{a} \right)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \left( 1 + \frac{x}{a} \right)^{\frac{a}{x}} \right]^{\frac{1}{a}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

**Приклад 26** Установити, чи функція  $y = 2^{1/x}$  неперервною або розривною для  $x = 3$  і  $x = 0$ .

**Розв'язання.** За означенням функція неперервна в точці  $x_0$ , якщо  $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0)$ . Перевіримо виконання цієї умови в даних точках.

При  $x = 3$  маємо:  $y(3) = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}$ ;

$$\lim_{x \rightarrow 3+0} y = \lim_{x \rightarrow 3+0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{3+0}} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}; \quad \lim_{x \rightarrow 3-0} y = \lim_{x \rightarrow 3-0} 2^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{3-0}} = 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}.$$

Умова неперервності при  $x = 3$  виконується, отже, в точці  $x = 3$  функція неперервна. Проведемо аналогічні міркування при  $x \rightarrow 0$ :  $y(0) = 2^{1/0}$  не існує, бо ділення на нуль не можливо.

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = \lim_{x \rightarrow -0} 2^{1/x} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Умова неперервності при  $x = 0$  не виконується, отже, в точці  $x = 0$  функція розривна (має нескінченний розрив).

**Приклад 27** Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{якщо } 1 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій  $y = -1$ ,  $y = x^2 - 2$ , і  $y = 1$  є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною тільки в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз, тобто в точках  $x = -1$  і  $x = 1$ . Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо:

$$\left. \begin{aligned} y(-1) &= (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1+0} y &= \lim_{x \rightarrow -1+0} (x^2 - 2) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1-0} y &= \lim_{x \rightarrow -1-0} (x^2 - 2) = -1 \end{aligned} \right\} \text{Задана функція неперервна в точці } x = -1$$

$$\left. \begin{aligned} y(1) &= 1^2 - 2 = 1 - 2 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1+0} y &= \lim_{x \rightarrow 1+0} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} y &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 - 2) = -1 \end{aligned} \right\} \text{Задана функція розривна в точці } x = 1$$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь, крім точки  $x=1$ . Побудуємо графік функції. На інтервалі  $(-\infty; -1)$  її графіком буде пряма  $y = -1$ , на відрізку  $[-1; 1]$  — парабола  $y = x^2 - 2$  і, нарешті, на інтервалі  $(1; +\infty)$  — пряма  $y = 1$  (рис. 6.3).

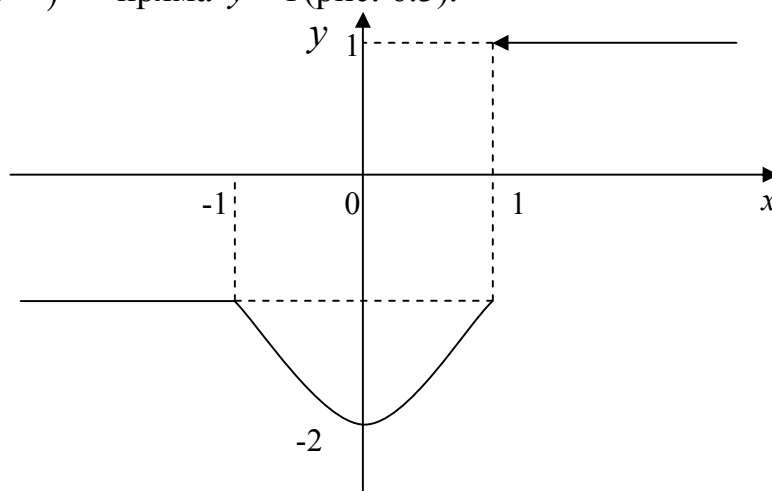


Рис. 6.3

**Приклад 28** Знайти точки розриву функції  $y = \frac{x}{x^2 - 4}$  і дослідити характер розриву.

**Розв'язання.** Відомо, що частка від ділення двох неперервних функцій є функція неперервна в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю. Оскільки  $x^2 - 4 = 0$  при  $x = \pm 2$ , задана функція має дві точки розриву:  $x = -2$  і  $x = 2$ .

Досліджуємо характер розриву функції в цих точках. Для цього обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} y = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2+0}{(-2+0-2)(-2+0+2)} = \frac{-2}{-0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} y = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2-0}{(-2-0-2)(-2-0+2)} = \frac{-2}{+0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{2+0}{(2+0-2)(2+0+2)} = \frac{2}{+0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2-0}{(2-0-2)(2-0+2)} = \frac{2}{-0} = -\infty.$$

Таким чином, в точках  $x=-2$  і  $x=2$  функція має нескінченний розрив або розрив другого роду (рис.6.4).

Слід зазначити, що функція  $y = \frac{x}{x^2-4}$  непарна, а тому достатньо було б дослідити характер розриву лише в точці  $x=2$ .

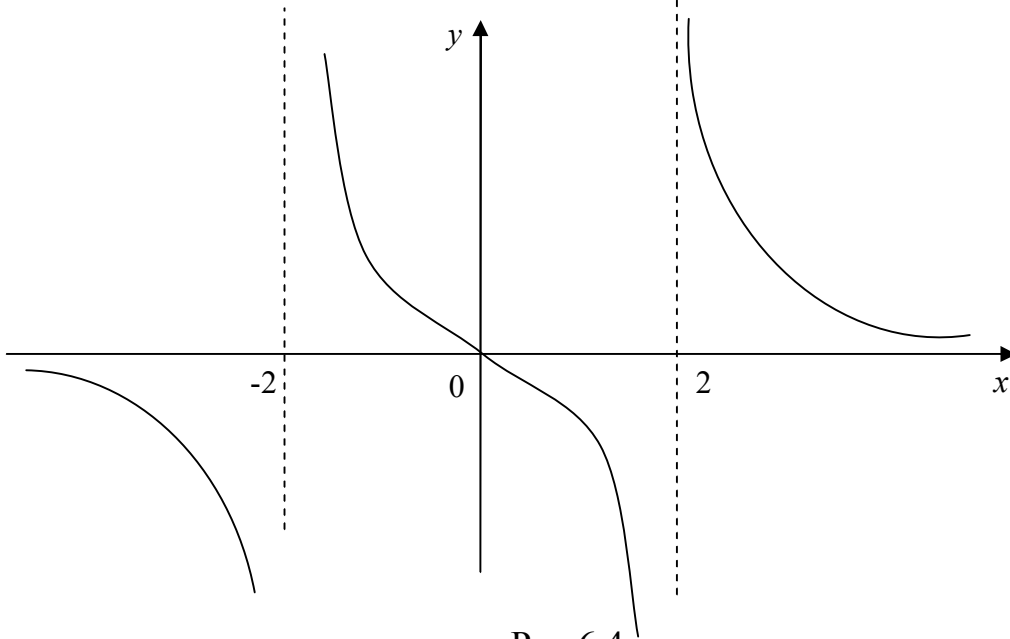


Рис.6.4

### Домашнє завдання

**Теорія** Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної. Правила диференціювання функції. Таблиця похідних. Диференціал функції. [20], с. 78–86.

### Вправи

1 Знайти область визначення функцій:

а)  $y = \frac{1}{x^2+1}$ . Відповідь: вся числова вісь.

б)  $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$ . Відповідь:  $[-1; 1]$ .

в)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$ . Відповідь:  $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ .

г)  $y = \arcsin \frac{x}{2}$ . Відповідь:  $[-4; 4]$ .

2 Знайти корені функцій і інтервали знакосталості, якщо а)  $y = x^2 - 5x + 6$ ,

б)  $y = |x|$ .

Відповідь: а)  $y=0$  при  $x=2$  і  $x=3$ ;  $y>0$  при  $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$ ;  $y<0$  при  $x \in (2; 3)$ , б)  $y=0$  при  $x=0$ ;  $y>0$  при  $x \neq 0$ .

3 Знайди область визначення функцій.

а)  $y = \sqrt{3-x} + \arcsin \frac{3-2x}{5}$ . Відповідь:  $[-1; 3]$ .

б)  $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{\frac{1}{x-2}} - \lg(2x-3)$ . Відповідь:  $(3/2; 2) \cup (2; +\infty)$ .

в)  $y = \sqrt{x-1} + 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x^2+1}$ . Відповідь:  $x=1$ .

4 Знайти границі

4.1  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$ .

Відповідь: 9.

4.2  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$ .

Відповідь:  $-\frac{2}{5}$ .

4.3  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2}$ .

4.4  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$ .

Відповідь: 0.

4.5  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ .

Відповідь:  $-\frac{1}{56}$ .

4.6  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$ .

Відповідь: 0.

4.7  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$ .

Відповідь:  $\frac{2}{3}$ .

4.8  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$ .

Відповідь: 0.

4.9  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}$ .

Відповідь:  $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$ .

4.17  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2} \right)^{2x^2+1}$ .

Відповідь:  $e^2$ .

4.18  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - 1}{x^2}$ .

Відповідь: 0,5.

4.19  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$ .

Відповідь:  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

4.20  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x}{1 - 2x^3}$ .

Відповідь: -2,5.

4.21  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x+1}$ .

Відповідь: -2.

4.22  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x^2}{1-x^2} + 2^{1/x} \right)$ .

Відповідь: -4.

4.23  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}$ .

Відповідь: 1.

4.24  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-4x})$ .

Відповідь: -2.

4.25  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x}{x \sin x}$ .

Відповідь: 3.



$$4.10 \quad \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left[ \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right]$$

Відповідь: 1.

$$4.11 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x-2} \right)^{2x-1}$$

Відповідь:  $e^6$ .

$$4.12 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^2$$

Відповідь:  $e^2$ .

$$4.13 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+kx)}{x}$$

Відповідь:  $k$ .

$$4.14 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$$

Відповідь: -2.

$$4.15 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3 - \sqrt{2x+9}}$$

Відповідь: -9.

$$4.16 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 2x}{\sin x}$$

Відповідь: 5.

$$4.26 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - 5x + 1}$$

Відповідь:  $\frac{5}{3}$ .

$$4.27 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{1}{x+2} - \frac{12}{x^3+8} \right)$$

Відповідь:  $-\frac{1}{2}$ .

$$4.28 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$$

Відповідь: 4.

$$4.29 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x)$$

Відповідь:  $\frac{3}{5}$ .

$$4.30 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2+5} - x \right)$$

Відповідь: 0.

$$4.31 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x \cdot \sin 3x}{x^2 + x^3}$$

Відповідь: 24.

$$4.32 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{3 \operatorname{ctg}^2 x}$$

Відповідь:  $e^3$ .

5 Дослідити на неперервність і побудувати графік функції

$$y = \begin{cases} e^x, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Відповідь:  $x = 0$  – точка розриву першого роду.

6 Знайти точки розриву функції  $y = \frac{x+1}{x^2-2x+3}$  і установити характер розриву.

Відповідь:  $x = 3$  – точка розриву другого роду;  $x = -1$  – точка усувного розриву.

### Питання для самоперевірки

- 1 Дайте означення функції.
- 2 Що називається границею функції у точці  $x_0$ ?
- 3 Яка функція називається неперервною в точці?
- 4 Сформулюйте властивості неперервних функцій.
- 5 Яка точка називається точкою розриву функції?
- 6 Дайте класифікацію точок розриву функцій. Наведіть приклади.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7. Похідна функції однієї змінної.

**Похідна. Геометричний та механічний зміст похідної.**

**Правила диференціювання функцій. Таблиця похідних.**

**Диференціал функції. Основні правила диференціювання функцій**

$$(C)' = 0 \quad (C = \text{const});$$

$$(u + v - z)' = u' + v' + z';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$(Cu)' = Cu';$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{1}{C}u';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v + v' \cdot u}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}, \quad v \neq 0;$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \text{ або } \frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx}, \text{ якщо } y = f(u),$$

де  $u = \varphi(x)$  – правило диференціювання складної функції.

Таблиця 7.1 – Таблиця похідних

| $y = f(x)$                                      | $y = f(u)$ , де $u = \varphi(x)$ , тобто $y = f(\varphi(x))$ |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $(x^n)' = nx^{n-1}$                             | $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$                                 |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$             | $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$                 |
| $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$    | $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$        |
| $(\sin x)' = \cos x$                            | $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$                                |
| $(\cos x)' = -\sin x$                           | $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$                               |
| $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$   | $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$       |
| $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$           |

|                                                 |                                                          |
|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $(a^x)' = a^x \ln a$                            | $(au)' = a^u \ln a \cdot u'; 0 < a \neq 1$               |
| $(e^x)' = e^x$                                  | $(e^u)' = e^u \cdot u'$                                  |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$                        | $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$                        |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$               | $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u', 0 < a \neq 1$ |
| $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$         | $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$         |
| $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$        | $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$        |
| $(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$                 | $(\arctg u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$                 |
| $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ | $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ |

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Використовуючи означення похідної, знайти похідну функції  $y = 3x^2 - 4x$ .

**Розв'язання.** Для даної функції маємо

$$1) y + \Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - 4(x + \Delta x) = 3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4 \cdot \Delta x;$$

$$2) \Delta y = (3x^2 + 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4x - 4 \cdot \Delta x) - (3x^2 - 4x) = 6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4 \cdot \Delta x;$$

$$3) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6x \cdot \Delta x + 3(\Delta x)^2 - 4 \cdot \Delta x}{\Delta x} = 6x - 4 + 3 \cdot \Delta x;$$

$$4) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x - 4 + 3 \cdot \Delta x) = 6x - 4.$$

Таким чином,  $y' = 6x - 4$ .

**Приклад 2** Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої  $y = 5x^2 - 3x + 2$  у точці з абсцисою  $x = 1$ .

**Розв'язання.** За умовою задачі  $x_0 = 1$ . Тоді  $f(x_0) = f(1) = 5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2 = 4$ .

Знайдемо похідну функції  $y = 5x^2 - 3x + 2$  у точці  $x_0 = 1$ . Вона дорівнює

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(5(1 + \Delta x)^2 - 3(1 + \Delta x) + 2) - (5 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 2)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (7 + 5 \cdot \Delta x) = 7. \end{aligned}$$

Рівняння шуканої дотичної і нормалі мають відповідно вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

У нашому прикладі:  $y - 4 = 7(x - 1)$  і  $y - 4 = -\frac{1}{7}(x - 1)$ , або

$$7x - y - 3 = 0 \quad \text{і} \quad x + 7y - 29 = 0.$$

**Приклад 3**  $y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3}$ .

**Розв'язання.** Використовуючи послідовно правила диференціювання та таблицю похідних, знаходимо:

$$\begin{aligned} y' &= (2\sqrt{x})' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sqrt[4]{3})' = 2(\sqrt{x})' - \left(\frac{1}{x}\right)' + (\sqrt[4]{3})' = \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 0 = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2} = \frac{\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x} + 1}{x^2}. \end{aligned}$$

**Приклад 4**  $f(z) = \frac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{z}$ . Знайти  $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ .

**Розв'язання.** Потрібно знайти значення похідної при  $z = \frac{1}{4}$ . Для цього спочатку знайдемо  $f'(z)$ , а потім обчислимо її значення при заданому значенні аргументу. Попередньо виконаємо тотожні перетворення  $f(z)$ :

$$f(z) = 2z^2 - 3 + z^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{z}.$$

Згідно з правилами диференціювання та таблицею похідних

$$f'(z) = (2z^2)' - (3)' + \left(z^{-\frac{1}{2}}\right)' - \left(\frac{1}{z}\right)' = 4z - \frac{1}{2}z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{z^2}.$$

При  $z = \frac{1}{4}$   $f'\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 1 - 4 + 16 = 13$ .

**Приклад 5** Який кут утворює з віссю абсцис дотична до кривої  $y = \frac{4}{15}x^5 - \frac{1}{9}x^3$ , проведена в точці з абсцисою  $x = 1$ ?

**Розв'язання.** Знаходимо похідну  $y' = \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$ . При  $x = 1$   $y'(1) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$ , тобто  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ , звідки  $\alpha = 45^\circ$ .

**Приклад 6** Точка рухається по прямій так, що її відстань від початкового пункту через  $t$  секунд дорівнює  $S = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$ ;

- в які моменти точка була в початковому пункті?
- в які моменти її швидкість дорівнювала нулю?

**Розв'язання.** Виходячи із механічного тлумачення похідної, маємо:

$$v(t) = S'(t) = \left( \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2 \right)' = t^3 - 12t^2 + 32t = t(t^2 - 12t + 32) = t(t-4)(t-8).$$

Розв'язуючи рівняння  $v(t) = 0$ , тобто  $t(t-4)(t-8) = 0$ , знаходимо  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 4$  і  $t_3 = 8$ .

Точка буде в початковому пункті тоді, коли  $S(t) = 0$ . Оскільки  $S(t) = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2 = \frac{1}{4}t^2(t^2 - 16t + 64) = \frac{1}{4}t^2(t-8)^2$ , то розв'язуючи рівняння  $\frac{1}{4}t^2(t-8)^2 = 0$ , знаходимо  $t_1 = 0$  і  $t_2 = 8$ .

Таким чином, точка була в початковому пункті при  $t_1 = 0$  і  $t_2 = 8$ , а її швидкість дорівнювала нулю при  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 4$  і  $t_3 = 8$ .

**Приклад 7** Тіло масою 3 кг рухається прямолінійно за законом

$$S = 1 + t + t^2,$$

де  $S$  виражено в сантиметрах,  $t$  – в секундах. Обчислити кінетичну енергію тіла  $\left( T = \frac{mv^2}{2} \right)$  через 5 секунд після початку руху.

**Розв'язання.**  $v(t) = S'(t) = (1 + t + t^2)' = 1 + 2t$ . Через 5 секунд після початку руху швидкість тіла дорівнюватиме  $v(5) = 11$ , а його кінетична енергія

$$T(5) = \frac{3 \cdot 121}{2} = 181,5 \cdot 10^3 \text{ ерг.}$$

**Приклад 8** Знайти похідну функції  $y = e^{\sqrt{\ln x}}$ .

**Розв'язання.** Подавши функцію у вигляді  $y = e^u$ ,  $u = \sqrt{v}$ ,  $v = \ln x$  і скориставшись правилом диференціювання складної функції, знайдемо

$$y'_x = y'_u u'_v v'_x = (e^u)'_u (\sqrt{v})'_v (\ln x)'_x = e^u \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot \frac{1}{x} = e^{\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

**Приклад 9** Знайти похідну функції  $y = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{x+3}{4}} = \left( \ln \sin \frac{x+3}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$ .

**Розв'язання.** Як і в попередньому прикладі, маємо

$$y' = \frac{1}{3} \left( \ln \sin \frac{x+3}{4} \right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x+3}{4}} \cdot \cos \frac{x+3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\operatorname{ctg} \frac{x+3}{4}}{12 \sqrt[3]{\ln^2 \sin \frac{x+3}{4}}}.$$

**Приклад 10** Знайти похідну функції  $y = x^3 \arctg x^3$ .

**Розв'язання.** Диференціюючи дану функцію як добуток і складну функцію, знаходимо

$$y' = (x^3)' \arctg x^3 + x^3 (\arctg x^3)' = 3x^2 \arctg x^3 + x^3 \frac{1}{1 + (x^3)^2} 3x^2 =$$

$$= 3x^2 \left( \frac{x^3}{1+x^6} + \operatorname{arctg} x^3 \right).$$

**Приклад 11** Знайти похідну  $y' = \frac{dy}{dx}$  від неявної функції

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

**Розв'язання.** Продиференціюємо обидві частини рівняння по  $x$ , враховуючи, що  $y$  є функцією від  $x$ . Одержимо

$$3x^2 + 3y^2 y' - 3a(y + xy') = 0.$$

Для знаходження  $y'$  визначаємо такі перетворення:

$$x^2 + y^2 y' - a(y + xy') = 0;$$

$$x^2 + y^2 y' - ay - axy' = 0;$$

$$(y^2 - ax)y' = ay - x^2, \text{ звідки } y' = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$$

**Приклад 12** Знайти похідну  $y' = \frac{dy}{dx}$  від неявної функції  $2y \ln y = x$ .

**Розв'язання.** Диференціюючи обидві частини рівняння по  $x$ , одержимо

$$2 \left( y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y' \right) = 1.$$

Після спрощення матимемо  $y' \cdot \ln y + y \cdot \frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2};$

$$y'(\ln y + 1) = \frac{1}{2};$$

$$y' = \frac{1}{2(1 + \ln y)}.$$

**Приклад 13** Знайти  $\frac{dy}{dx}$ , якщо  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \operatorname{arctg} t. \end{cases}$

**Розв'язання.** Маємо  $x'_t = \frac{1}{1+t^2} \cdot 2t = \frac{2t}{1+t^2}; \quad y'_t = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$

Підставляючи знайдені вирази для  $x'_t$  і  $y'_t$  до формули  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ , знаходимо

$$y'_x = \frac{t^2}{1+t^2} : \frac{2t}{1+t^2} = \frac{t^2(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \frac{t}{2}.$$

**Приклад 14** Скласти рівняння дотичної і нормалі до астрои́ди  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos^3 t, \\ y = \sqrt{2} \sin^3 t, \end{cases}$  проведених в точці, для якої  $t = \frac{\pi}{4}$ .

**Розв'язання.** При  $t = \frac{\pi}{4}$  маємо  $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos^3 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin^3 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ .

Отже,  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$  – точка, яка належить астрои́ді, дотичної і нормалі.

За формулою знаходження похідної функції, заданої параметрично, маємо:  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\sqrt{2} \sin^3 t)'_t}{(\sqrt{2} \cos^3 t)'_t} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3 \sin^2 t \cos t}{\sqrt{2} \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t)} = -\operatorname{tg} t$ .

При  $t = \frac{\pi}{4}$   $f'(x_0) = y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = -1$ .

Таким чином, рівняння дотичної набуває вигляд

$$y - \frac{1}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right) \text{ або } x + y - 1 = 0,$$

а рівнянням нормалі буде мати наступний вигляд:

$$y - \frac{1}{2} = x - \frac{1}{2} \text{ або } x - y = 0.$$

**Приклад 15** Продиференціювати функцію, використовуючи правило логарифмічного диференціювання

$$y = (x^2 + 1)^{\sin x}.$$

**Розв'язання.** Задача функція є степенево-показниковою, оскільки і основа степеня  $(x^2 + 1)$ , і показник степеня  $\sin x$  є функціями від  $x$ . За формулою для знаходження похідної степенево-показникової функції маємо:

$$\begin{aligned} y' &= \sin x \cdot (x^2 + 1)^{\sin x - 1} \cdot 2x + (x^2 + 1)^{\sin x} \ln(x^2 + 1) \cdot \cos x = \\ &= (x^2 + 1)^{\sin x} \left( \frac{2x \sin x}{x^2 + 1} + \cos x \ln(x^2 + 1) \right). \end{aligned}$$

**Приклад 16** Продиференціювати функцію, використовуючи правило логарифмічного диференціювання

$$y = x^{\frac{1}{x}}.$$

**Розв'язання.** За формулою для знаходження похідної степенево-показникової функції знаходимо

$$y' = \frac{1}{x} \cdot x^{\frac{1}{x} - 1} \cdot 1 + x^{\frac{1}{x}} \ln x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x} - 2} - x^{\frac{1}{x} - 2} \ln x = x^{\frac{1}{x} - 2} (1 - \ln x).$$

**Приклад 17** Знайти диференціал функції  $S = \frac{1}{1 - t^2}$ .

**Розв'язання.** За формулою  $dy = y' dx = f'(x) dx$ , маємо:

$$dS = \left( \frac{1}{1 - t^2} \right)' dt = -\frac{-2t}{(1 - t^2)^2} dt = \frac{2t dt}{(1 - t^2)^2}.$$

**Приклад 18** Знайти диференціал функції  $y = \operatorname{tg}^2 x$ .

**Розв'язання.**  $dy = (tg^2 x)' dx = y = 2tgx \frac{1}{\cos^2 x} dx = \frac{2tgx}{\cos^2 x} dx.$

**Приклад 19** Знайти диференціал функції  $y = 5^{\ln tgx}$ .

**Розв'язання.**  $dy = (5^{\ln tgx})' dx =$   
 $= 5^{\ln tgx} \ln 5 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx = 5^{\ln tgx} \ln 5 \cdot \frac{1}{\sin x \cos x} dx = 5^{\ln tgx} \frac{2 \ln 5}{\sin 2x} dx.$

### Домашнє завдання

**Теорія** Основні теореми диференціального числення. Дослідження функції за допомогою похідної. [20], с. 87–95.

### Вправи

Продиференціювати задані функції.

1  $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}.$

Відповідь:  $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

2  $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1).$

Відповідь:  $3,5x^2 \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

3  $u = \frac{v^5}{v^3 - 2}.$

Відповідь:  $\frac{2v^4(v^3 - 5)}{(v^3 - 2)^2}.$

4  $z = \frac{1}{t^2 + t + 1}.$

Відповідь:  $-\frac{2t + 1}{(t^2 + t + 1)^2}.$

5  $\rho = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi.$

Відповідь:  $\varphi \cos \varphi.$

6  $S = \frac{\sin t}{1 + \cos t}.$

Відповідь:  $\frac{1}{1 + \cos t}.$

7  $y = (x^2 - 2x + 3) \cdot e^x.$

Відповідь:  $e^x(x^2 + 1).$

8  $y = x^3 - 3^x.$

Відповідь:  $3x^2 - 3^x \ln 3.$

9  $y = e(\cos x + \sin x).$

Відповідь:  $2e^x \cos x.$

10  $y = x^2 \log_3 x.$

Відповідь:  $2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3}.$

11  $y = \frac{1}{\ln x}.$

Відповідь:  $-\frac{1}{x \ln^2 x}.$

12  $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}.$  Знайти  $f'(1); f'(4); f'(a^2).$

Відповідь:  $f'(1) = 2; f'(4) = 2,5; f'(a^2) = 3 - \frac{1}{|a|}.$

13  $\rho(\varphi) = \frac{\varphi}{1 - \varphi^2}.$  Знайти  $\rho'(2)$  і  $\rho'(0).$  Відповідь:  $\rho'(2) = \frac{5}{9}; \rho'(0) = 1.$

14  $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^2}.$  Знайти  $f'(-1); f'(2); f'\left(\frac{1}{a}\right).$



Відповідь:  $f'(-1) = -8$ ;  $f'(2) = \frac{19}{16}$ ;  $f'\left(\frac{1}{a}\right) = 3a^4 + 10a^3 - a^2$ .

15 Скласти рівняння дотичних до лінії  $y = x - \frac{1}{x}$  в точках її перетину з віссю абсцис.

Відповідь:  $y = 2x - 2$ ;  $y = 2x + 2$ .

16 Скласти рівняння нормалі до лінії  $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$  в точці а абсцисою  $x = 3$ .

Відповідь:  $27x - 3y - 79 = 0$ .

17 Тіло рухається вздовж прямої за законом  $S = 5t^3 + 1$ , де шлях  $S$  визначається в метрах, а час  $t$  - в секундах. Якою була швидкість тіла через 2 секунди після початку руху

Відповідь:  $v = 60$  м/с.

Знайти похідну складних функцій.

18  $u(t) = (t^2 + t + 2)^{\frac{3}{2}}$ .

Відповідь:  $\frac{3}{2}(2t + 1)\sqrt{t^2 + t + 2}$ .

19  $y = 3\sin(3x + 5)$ .

Відповідь:  $9\cos(3x + 5)$ .

20  $y = \cos^3 4x$ .

Відповідь:  $-12\cos^2 4x \sin 4x$ .

21  $y = \sin^2(\cos 3x)$ .

Відповідь:  $-3\sin 3x \sin(2\cos 3x)$ .

22  $y = \arcsin \frac{2}{x}$ .

Відповідь:  $-\frac{2}{|x|\sqrt{x^2 - 4}}$ .

23  $y = \arctg^2 \frac{1}{x}$ .

Відповідь:  $-\frac{2\arctg \frac{1}{x}}{1 + x^2}$ .

24  $y = \sqrt{\ln x}$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$ .

25  $y = \ln(x^2 - 4x)$ .

Відповідь:  $\frac{2x - 4}{x^2 - 4x}$ .

26  $y = 10^{2x-3}$ .

Відповідь:  $2 \cdot 10^{2x-3} \ln 10$ .

27  $y = \sin e^{x^2+3x-2}$ .

Відповідь:  $\cos e^{x^2+3x-2} \cdot e^{x^2+3x-2} (2x + 3)$ .

28  $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$ .

Відповідь:  $10^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} \ln 10\right)$ .

29  $y = \lg(x - \cos x)$ .

Відповідь:  $\frac{1 + \sin x}{(x - \cos x) \ln 10}$ .

30  $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$ .

Відповідь:  $\frac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$ .

31  $y = \ln(x \sin x \sqrt{1 - x^2})$ .

Відповідь:  $\frac{1}{x} - \frac{x}{1 - x^2} + \operatorname{ctgx}$ .

$$32 \quad y = e^{\arcsin 2x}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

$$33 \quad y = (2x^2 - 7)^5.$$

$$\text{Відповідь: } 20x(2x^2 - 7)^4.$$

$$34 \quad y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

$$\text{Відповідь: } -\sin 4x.$$

$$35 \quad y = \frac{1}{(1 + \sin 2x)^3}.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{6 \cos 2x}{(1 + \sin 2x)^4}.$$

$$36 \quad y = -ctg^3 x + 3ctg x + 3x.$$

$$\text{Відповідь: } 3ctg^4 x.$$

$$37 \quad y = \ln \frac{ae^x}{bx^2 + c}.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{bx^2 - 2bx + c}{bx^2 + c}.$$

Знайти похідні від заданих функцій.

$$38 \quad y^3 - 3y + 2ax = 0.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{2a}{3(1 - y^2)}.$$

$$39 \quad \cos(xy) = x.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{1 + y \sin(xy)}{x \sin(xy)}.$$

$$40 \quad y = 1 + xe^y.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{e^y}{2 - y}.$$

$$41 \quad \begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ x = \frac{t-1}{t}. \end{cases}$$

$$\text{Відповідь: } -1.$$

$$\text{Вказівка: } x = \frac{t+1}{t} = 1 + \frac{1}{t}; \quad y = \frac{t-1}{t} = 1 - \frac{1}{t}.$$

$$42 \quad y = x^{\sin x}.$$

$$\text{Відповідь: } x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

$$43 \quad y = 2x^{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Відповідь: } x^{\sqrt{x} - \frac{1}{2}} (2 + \ln x).$$

44 Скласти рівняння дотичної і нормалі до лінії

$$x = 2 \ln ctg t + 1, \quad y = t g t + ctg t \quad \text{в точці, для якої } t = \frac{\pi}{4}. \quad \text{Відповідь: } y = 2, \quad x = 1.$$

Знайти диференціали заданих функцій.

$$45 \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}.$$

$$\text{Відповідь: } -\frac{6x^2 dx}{(x^3 - 1)^2}.$$

$$46 \quad y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}.$$

$$\text{Відповідь: } -2^{-\frac{1}{\cos x}} \ln 2 \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx.$$

$$47 \quad y = \frac{x}{2} \sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2} \arcsin \frac{x}{7}.$$

$$\text{Відповідь: } \sqrt{49 - x^2} dx.$$

### Питання для самоперевірки

- 1 Що називається похідною функції?
- 2 У чому полягає фізичний та геометричний зміст похідної?
- 3 Сформулюйте правила диференціювання.
- 4 Запишіть таблицю похідних.
- 5 Що називається похідною другого порядку?
- 6 Дайте означення диференціалу функції.
- 7 У чому полягає зв'язок між диференційованістю функції та існуванням її похідної?
- 8 Запишіть правила обчислення диференціалів.

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8.** Застосування похідної функції однієї змінної.

### Розв'язання прикладів

Обчислити границі за правилом Лопіталю.

**Приклад 1**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$ .

**Розв'язання.** При  $x \rightarrow 0$  чисельник і знаменник дробу прямує до нуля, тобто маємо невизначеність вигляду  $\frac{0}{0}$ . Застосовуючи правило Лопіталю,

знаходимо  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{1} = \frac{0}{1} = 0$ .

**Приклад 2**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ .

**Розв'язання.** Переконаємося, що має місце невизначеність вигляду  $\frac{0}{0}$ .

Після застосування правила Лопіталю і алгебраїчних перетворень одержимо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{3x^2(1+x^2)} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{3}.$$

**Приклад 3**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ .

**Розв'язання.** Після підстановки граничного значення  $x$  маємо невизначеність вигляду  $\frac{0}{0}$ . Застосовуючи правило Лопіталю, знаходимо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} \cdot 2x}{-\sin x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} e^{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = -2 \cdot 1 \cdot 1 = -2.$$

**Приклад 4**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ .

**Розв'язання.** Застосовуючи правило Лопіталю тричі, дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2.$$

**Приклад 5**  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$

**Розв'язання.** Переконаємося, що має місце невизначеність вигляду  $\infty - \infty$ . Правило Лопітала застосовувати неможна. Тому виконаємо спочатку алгебраїчні перетворення:  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x}.$

Тепер після підстановки граничного значення  $x$  маємо невизначеність вигляду  $\frac{0}{0}$ . За правилом Лопітала знаходимо

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \left( \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином,  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{2}.$

**Приклад 6**  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right).$

**Розв'язання.** Після елементарних перетворень дограничної функції знаходимо границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right) = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^{-2}} \right) = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (-2x^{-3})}{-2x^{-3}} = e^{+\infty} = \infty.$$

**Приклад 7** Знайти асимптоти кривої  $y = \frac{x^2 + 5x + 3}{x - 2}.$

**Розв'язання.** Задана функція не існує при  $x = 2$ . Оскільки  $\lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x + 3}{x - 2} = \infty$ , то пряма  $x = 2$  є вертикальною асимптотою.

Для знаходження похилих асимптот обчислимо коефіцієнти  $k$  і  $b$ :

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 5x + 3}{x(x-2)} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = 1, \text{ оскільки степені многочленів чисельника і знаменника однакові;}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left( \frac{x^2 + 5x + 3}{x-2} - x \right) = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^2 + 5x + 3 - x^2 + 2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{7x + 3}{x-2} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = 7.$$

Підставляючи значення  $k = 1$  і  $b = 7$  в рівняння  $y = kx + b$ , одержимо  $y = x + 7$ . Таким чином, пряма  $y = x + 7$  – похила асимптота кривої.

**Приклад 8** Знайти екстремуми функції  $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$ .

**Розв'язання.** Задана функція визначена і диференційована в інтервалі  $(-\infty; +\infty)$ .  $x > 0$ . Її похідна  $y'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x+1)(x-3)$ .

Знайдемо критичні точки:  $y'(x) = 0$ , якщо  $x = -1$  і  $x = 3$ ;  $y'(x) \neq \infty$ .

В інтервалах  $(-\infty; -1)$  і  $(3; +\infty)$  похідна  $y'(x)$  додатна, бо  $y'(-2) > 0$  і  $y'(-4) > 0$ , а в інтервалі  $(-1; 3)$  вона від'ємна, бо  $y'(0) < 0$ .

Визначимо, які із критичних точок є екстремальними (рис. 8.1).

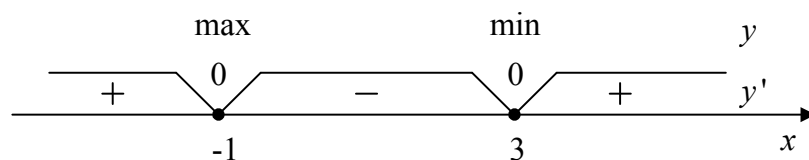


Рис.8.1

Обчислюємо значення функції в екстремальних точках, тобто знаходимо шукані екстремуми:

$$y_{\max} = y(-1) = -2 - 6 + 18 + 7 = 17, \quad y_{\min} = y(3) = 54 - 54 - 54 + 7 = -47.$$

**Приклад 9** Знайти екстремум функції  $y = x - \ln(1 + x^2)$ .

**Розв'язання.** Задана функція визначена на всій числовій осі, бо  $1 + x^2 > 0$

для будь-яких  $x$ .  $x > 0$ . Її похідна  $y'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{(1-x)^2}{1+x^2} \geq 0$ ,

отже, функція зростає, екстремумів немає.

**Приклад 10** Знайти найбільше і найменше значення функції  $y = x^4 - 2x^2 + 5$  на відрізку  $[-2; 2]$ .

**Розв'язання.** Знаходимо  $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$ . Знаходимо критичні точки першого роду:  $y'(x) = 0$ , якщо  $x = 0$ ,  $x = 1$  і  $x = -1$ ;  $y'(x) \neq \infty$ . Відзначимо, що всі знайдені точки належать відрізку  $[-2; 2]$ .

Обчислимо значення функції в критичних точках і на кінцях відрізка:

$y(-2) = 13$ ,  $y(-1) = 4$ ,  $y(0) = 5$ ,  $y(1) = 4$ ,  $y(2) = 13$ . Із одержаних значень вибираємо найбільше і найменше:  $y_{\min} = 4$ ,  $y_{\max} = 13$ .

**Приклад 11** За допомогою другої похідної знайти екстремуми функції  $y = \frac{x}{\ln x}$ .

**Розв'язання.** Задана функція визначена для всіх  $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ .

$$\text{Знаходимо } y' = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x};$$

$$y'' = \frac{\frac{1}{x} \ln^2 x - 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot (\ln x - 1)}{(\ln^2 x)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot (\ln x - 2 \ln x + 2)}{\ln^4 x} = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x}.$$

$y'(x)=0$ , якщо  $\ln x - 1 = 0$ , звідки  $x = e$  – стаціонарна точка. Обчислюючи значення другої похідної при  $x = e$ , маємо  $y''(e) = e^{-1} > 0$ . Отже,  $(e; e)$  – точка мінімуму.

**Приклад 12** Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції  $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$ .

**Розв'язання.** Діятимемо за правилом знаходження інтервалів опуклості і вгнутості та точок перегину графіка функції:

1 задана функція визначена для всіх  $x \in R$ .

2  $y'(x) = 3x^2 - 10x + 3$ ;

3  $y''(x) = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ ;

4  $y''(x) = 0$ , якщо  $3x - 5 = 0$ , тобто  $x = \frac{5}{3}$ ;  $y''(x) \neq \infty$ ;

5 для  $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$   $y''(x) < 0$ , бо, наприклад,  $y''(0) = -10 < 0$ , а для  $x \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$   $y''(x) > 0$ , оскільки, наприклад,  $y''(4) = 14 > 0$ , отже,

в інтервалі  $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$  крива є опуклою, а в інтервалі  $\left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$  – вгнутою;

6 в точці  $x = \frac{5}{3}$  друга похідна даної функції дорівнює нулю і при переході через точку змінює знак, а це означає, що  $x = \frac{5}{3}$  є абсцисою точки перегину кривої;

7 обчислюючи значення функції  $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$  при  $x = \frac{5}{3}$ , одержимо:

$y\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{250}{27}$ . Таким чином,  $M\left(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27}\right)$  – точка перегину графіка даної функції.

**Приклад 13** Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки перегину графіка функції  $y = \ln(1 + x^2)$ .

**Розв'язання.** Задана функція визначена на всій числовій осі, оскільки  $1 + x^2 > 0$  для всіх  $x \in R$ . Диференціюючи її двічі, одержимо:  $y'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ ,

$y''(x) = 2 \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$ . Друга похідна існує на всій числовій осі і

обертається в нуль при  $x = -1$  і  $x = 1$ . Ці точки розділять числову вісь на три інтервали:  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 1)$  і  $(1; +\infty)$  (рис.8.2), в кожному з яких похідна  $y''(x)$  зберігає знак. Визначаючи знак другої похідної в довільно взятій точці кожного інтервалу, одержимо:  $y''(-2) < 0$ ,  $y''(0) > 0$ ,  $y''(2) < 0$ . При визначенні знака

другої похідної слід враховувати, що знаменник  $(1+x^2)^2 > 0$  при всіх значеннях  $x \in \mathbb{R}$ .

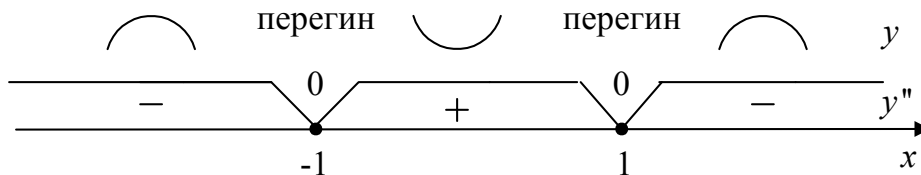


Рис. 8.2

Обчислюючи значення функції  $y = \ln(1+x^2)$  при  $x = \pm 1$ , знаходимо:  $y(-1) = y(1) = \ln 2$ . Таким чином, графік функції  $y = \ln(1+x^2)$  є опуклим в інтервалах  $(-\infty; -1)$  та  $(1; +\infty)$  і вгнутим в інтервалі  $(-1; 1)$ . Крива має дві точки перегину:  $(-1; \ln 2)$  і  $(1; \ln 2)$ .

**Приклад 14** Провести повне дослідження функції  $y = \frac{x^2}{x^2-1}$  і побудувати її графік за результатами дослідження.

**Розв'язання.** 1  $x^2 - 1 \neq 0$ ,  $x \neq \pm 1$ ;  $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ .

2  $x = -1$  і  $x = 1$  – точки розриву;

$(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 1)$  і  $(1; +\infty)$  – інтервали неперервності функції.

3  $y(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2-1} = \frac{x^2}{x^2-1} = y(x)$ . Отже, задана функція є парною. Її

графік розташований симетрично відносно осі  $Oy$ , тому подальші дослідження досить проводити лише для  $x \geq 0$ .

4 При  $x = 0$   $y = 0$ ; при  $y = 0$   $x = 0$ , тобто графік функції проходить через точку початок координат.

5  $y = 0$  при  $x = 0$ ;  $y = \infty$  при  $x = \pm 1$ ;

$y < 0$  в інтервалі  $(0; 1)$  і  $y > 0$  в інтервалі  $(1; +\infty)$  (рис. 8.3).

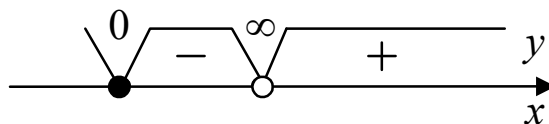


Рис. 8.3

6  $x = 1$  – точка розриву функції.

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(1+0)^2}{(1+0-1)(1+0+1)} = \frac{1}{+0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{(1-0)^2}{(1-0-1)(1-0+1)} = \frac{1}{-0} = -\infty.$$

Отже,  $x = 1$  – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти  $y = kx + b$ , де

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x \cdot (x^2 - 1)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = 1.$$

Отже, пряма  $y = 1$  – горизонтальна асимптота.

$$7 \quad y' = \left( \frac{x^2}{x^2 - 1} \right)' = \frac{2x(x^2 - 1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2};$$

$y'(x) = 0$ , якщо  $x = 0$ ;  $y'(x) = \infty$ , якщо  $x = \pm 1$ ,  $y_{\max} = y(0) = 0$  (рис. 8.4).

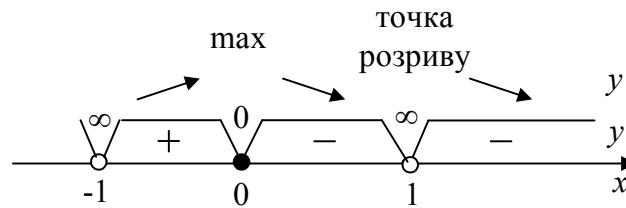


Рис. 8.4

$$8 \quad y'' = \left( \frac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \right)' = -2 \left( \frac{x}{(x^2 - 1)^2} \right)' =$$

$$= -2 \frac{(x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot x}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= -2 \frac{(x^2 - 1)(x^2 - 1 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3}.$$

$y''(x) \neq 0$ ;  $y''(x) = \infty$  при  $x = \pm 1$  (рис. 8.5).

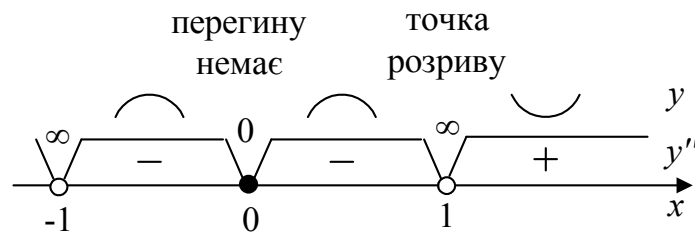


Рис. 8.5

9 Будуємо графік функції (рис. 8.6) за результатами дослідження і додатковими точками  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}$ ,  $y(1,5) = 1,8$ ,  $y(2) = \frac{4}{3}$ .



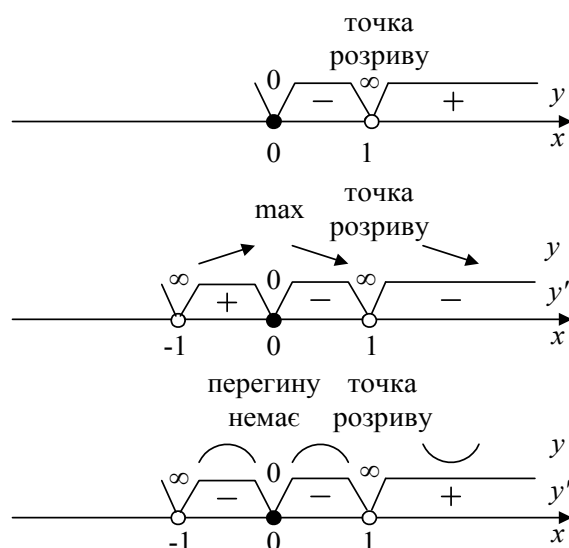
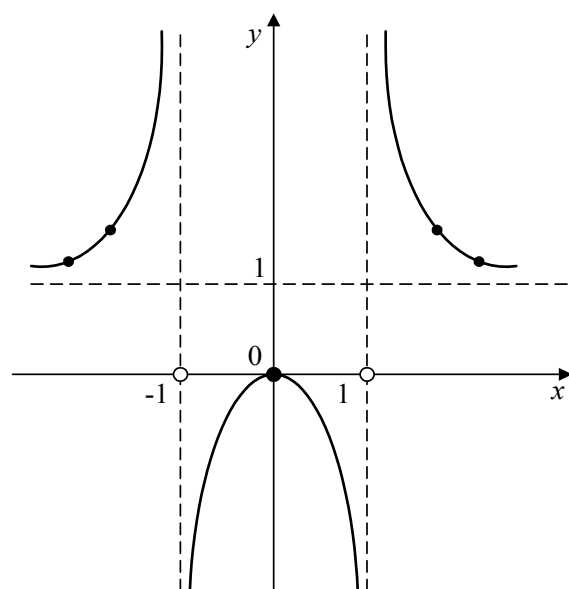


Рис. 8.6

### Домашнє завдання

**Теорія** Означення функції багатьох змінних. Частинні похідні та диференціали функцій двох змінних. Екстремуми функцій багатьох змінних. Похідна за напрямом. Градієнт. [20], с. 96 –107.

### Вправи

Обчислити границі за правилом Лопіталя.

1  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 3x}.$

Відповідь: 1.

2  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{-\sin x}}{\cos x \cdot \sin x}.$

Відповідь: 3.

3  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1 + 2 \ln \sin x}.$

Відповідь: 0,5.

4  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right).$

Відповідь: -1.

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1} \right).$$

Відповідь: - 0,5.

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right).$$

Відповідь: 0.

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x \cdot \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \right).$$

Відповідь: 1.

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}.$$

Відповідь:  $\frac{3}{e}$ .

Знайти асимптоти заданих кривих.

$$9 \quad y = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Відповідь:  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ .

$$10 \quad y = \frac{3x^2}{x^2 + 5}.$$

Відповідь:  $y = 3$ .

$$11 \quad y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$$

Відповідь:  $x = 0$ ,  $y = x$ .

12 Показати, що функція  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$  зростає в будь-якому інтервалі, який не містить точку  $x = 0$ .

$$13 \quad \text{Знайти інтервали монотонності функції } y = \frac{x}{\ln x}.$$

Відповідь: в інтервалах  $(0;1)$  і  $(1;e)$  функція спадає, а в інтервалі  $(e; +\infty)$  функція зростає.

$$14 \quad \text{Знайти екстремуми функції } y = 2x^3 - 3x^2.$$

Відповідь:  $y_{\max} = y(0) = 0$ ,  $y_{\min} = y(1) = -1$ .

$$15 \quad \text{Знайти екстремуми функції } y = x - \ln(1 - x).$$

Відповідь:  $y_{\min} = y(0) = 0$ .

16 Знайти найбільше і найменше значення функції  $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$  на відрізьку  $[-1;2]$ .

Відповідь:  $y_{\min} = -10$ ,  $y_{\max} = 2$ .

$$17 \quad \text{За допомогою другої похідної знайти екстремуми функції } y = x^2 e^{-x}.$$

Відповідь:  $y_{\max} = y(2) = \frac{4}{e^2}$ ,  $y_{\min} = y(0) = 0$ .

18 Знайти інтервали опуклості і вгнутості та точки переги́ну кривої  $y = x^4(12 \ln x - 7)$ .

Відповідь: в інтервалі  $(0;1)$  крива опукла, а в інтервалі  $(1; +\infty)$  – вгнута. Точка переги́ну  $(1; -7)$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Яка функція називається зростаючою (спадаючою) на проміжку?
- 2 Сформулюйте необхідну і достатню умови зростання (спадання) функції на проміжку.
- 3 Що називають максимумом (мінімумом) функції в точці?
- 4 Сформулюйте достатню умову існування екстремуму.
- 5 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування інтервалів опуклості (вгнутості) кривої.
- 6 Сформулюйте необхідну і достатню умови існування точок перегину кривої.
- 7 Сформулюйте правило Лопітала.
- 8 Сформулюйте основні теореми диференціального числення.
- 9 Що називають асимптотою кривої?
- 10 Яку пряму називають вертикальною асимптотою?
- 11 За яких умов існують похилі і горизонтальні асимптоти і як їх визначають?

### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9. Функції багатьох змінних.

#### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Знайти і зобразити геометрично область існування функції  $z = \ln(y^2 - 4x + 8)$ .

**Розв'язання.** Логарифм визначений для додатних значень його аргументу, тому  $y^2 - 4x + 8 > 0$ , звідки  $y^2 > 4(x - 2)$ . Ніяких інших обмежень на змінні  $x$  і  $y$  не дано.

Щоб зобразити геометрично область визначення даної функції, побудуємо спочатку її межу, тобто графік функції  $y^2 = 4(x - 2)$ .

Це рівняння визначає параболу з вершиною в точці  $O(2;0)$  і віссю симетрії  $Ox$  (рис. 9.1).

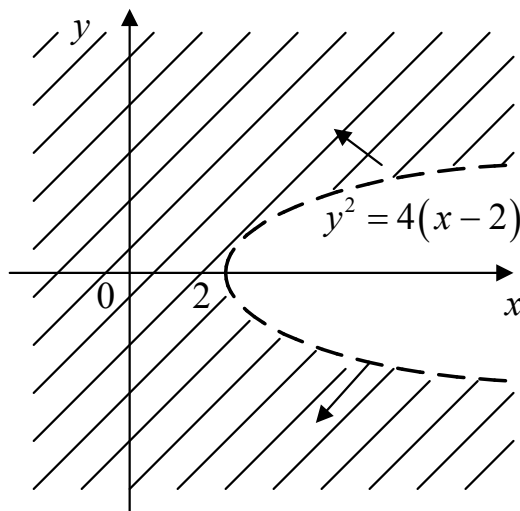


Рис. 9.1

Парабола поділила всю площину на дві частини – внутрішню і зовнішню

по відношенню до параболи. Для точок однієї з цих частин виконується нерівність  $y^2 > 4(x-2)$ , а для другої -  $y^2 < 4(x-2)$ . На самій параболі  $y^2 = 4(x-2)$ . Щоб встановити, яка з цих двох частин є областю визначення даної функції, тобто задовольняє умові  $y^2 > 4(x-2)$ , досить перевірити цю умову для якої-небудь однієї точки, яка не лежить на параболі. Наприклад, початок координат  $O(0;0)$  знаходиться зовні від параболи і задовольняє потрібній умові  $0 > 4(0-2)$ .

Отже, областю існування даної функції є множина точок площини  $xOy$ , які знаходяться зовні від параболи. Сама парабола в область існування функції не входить, бо для точок параболи  $y^2 - 4x + 8 = 0$ , а логарифм нуля не визначений.

**Приклад 2** Знайти і зобразити геометрично область визначення функції  $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$ .

**Розв'язання.** Функція визначена за умови  $x \neq 0$  і  $-1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1$ , що рівносильно розв'язанню двох систем:  $\begin{cases} x > 0, \\ 1-x \leq y \leq 1+x \end{cases}$  і  $\begin{cases} x < 0, \\ 1-x \geq y \geq 1+x. \end{cases}$

Зобразимо розв'язки кожної із систем графічно (рис. 9.2).

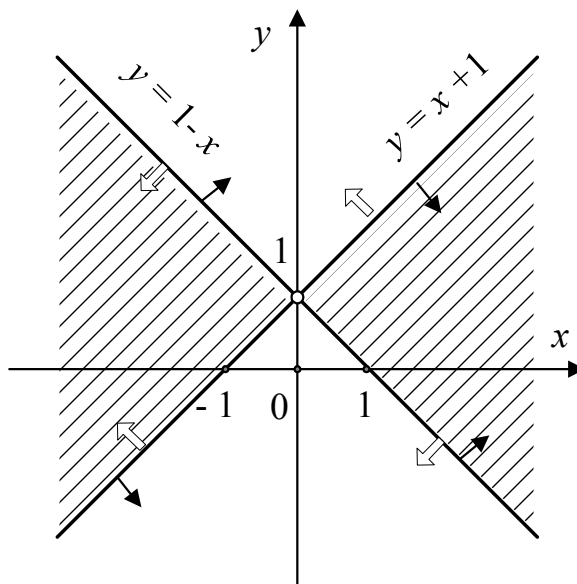


Рис. 9.2

Першій системі задовольняють точки, які розташовані всередині правого вертикального кута, утвореного прямими  $y = 1+x$  і  $y = 1-x$ , але без точки  $(0;1)$ , другій - точки, які розташовані всередині лівого вертикального кута, утвореного цими самими прямими і також без точки  $(0;1)$ .

Отже, областю визначення даної функції є внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими  $y = 1+x$  і  $y = 1-x$ , включаючи

ці прямі, але без точки їх перетину  $(0;1)$ , бо при  $x=0$  задана функція не визначена.

**Приклад 3** Знайти точки розриву функції  $f(x; y) = \frac{3}{4 - x^2 - y^2}$ .

**Розв'язання.** Задана функція невизначена, а отже і розривна там, де її знаменник обертається в нуль, тобто в точках, для яких  $4 - x^2 - y^2 = 0$ . Таким чином, задана функція розривна в кожній точці кола  $x^2 + y^2 = 4$  (лінія розриву).

**Приклад 4** Дослідити на неперервність функцію  $z = \frac{x^2 + 2y + 4}{y^2 - 2x}$ .

**Розв'язання.** Функція  $z$  неперервна як відношення двох многочленів в усіх точках, де  $y^2 - 2x \neq 0$ . Точки розриву розташовані на параболі  $y^2 = 2x$ . При наближенні точки  $M(x; y)$  до будь-якої точки цієї параболі задана функція  $z$  нескінченно зростає.

**Приклад 5** Знайти частинні похідні функції  $z = x^2 - 3xy + 4y^2$ .

**Розв'язання.** Як уже визначалося, функцію кількох змінних можна диференціювати за будь-якою змінною, вважаючи всі інші сталими, і за тими самими правилами і формулами, що і функцію однієї змінної. Тому, припустивши, що  $y$  є сталим, знаходимо частинну похідну від даної функції

$$\text{по } x: \frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - 3xy + 4y^2)'_x = (x^2)'_x - (3xy)'_x + (4y^2)'_x = 2x - 3y(x)'_x + 0 = \\ = 2x - 3y \cdot 1 = 2x - 3y.$$

Припускаючи тепер, що  $x$  залишається сталим, знаходимо частинну похідну від даної функції по  $y$ :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - 3xy + 4y^2)'_y = (x^2)'_y - (3xy)'_y + (4y^2)'_y = 0 - 3x \cdot 1 + 8y = -3x + 8y.$$

**Приклад 6** Обчислити  $f'_x(2;1)$  і  $f'_y(2;1)$ , якщо  $f(x; y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ .

**Розв'язання.** Знайдемо спочатку частинні похідні від даної функції в

$$\text{точці } (x; y): f'_x(x; y) = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(y + \frac{1}{y}\right); \\ f'_y(x; y) = \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} = \frac{1}{2\sqrt{xy + \frac{x}{y}}} \cdot \left(x - \frac{x}{y^2}\right).$$

Обчислимо тепер їх значення в точці  $(2;1)$ , тобто при  $x=2$ ,  $y=1$ :

$$f'_x(2;1) = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} \cdot (1+1) = \frac{1}{2}; \quad f'_y(2;1) = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\substack{x=2 \\ y=1}} = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} \cdot (2-2) = 0.$$

Отже,  $f'_x(2;1) = \frac{1}{2}$  і  $f'_y(2;1) = 0$  – шукані значення частинних похідних заданої функції в заданій точці.

**Приклад 7** Показати, що функція  $z = y \ln(x^2 - y^2)$  задовольняє рівнянню  $\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$ .

**Розв'язання.** Знаходимо  $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot 2x = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$ ;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) + y \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (-2y) = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}.$$

Підставляючи вирази частинних похідних в ліву частину рівняння, отримаємо тотожність:  $\frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \left( \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \right) =$

$$= \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} - \frac{2y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{y} \ln(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2}.$$

Отже, функція  $z$  задовольняє даному рівнянню.

**Приклад 8** Знайти частинні диференціали функції  $z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4$  по кожній із незалежних змінних.

**Розв'язання.** Задана функція  $z$  залежить від двох змінних  $x$  і  $y$ . Отже, можна знайти два її частинних диференціали  $d_x z$  і  $d_y z$ . Згідно з означенням  $d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx$ ,  $d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy$ . Знайдемо частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4)'_x = y^3 - 6xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4)'_y = 3xy^2 - 6x^2y + 8y^3.$$

Підставляючи вирази частинних похідних у формули частинних диференціалів, остаточно дістанемо

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = (y^3 - 6xy^2) dx; \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = (3xy^2 - 6x^2y + 8y^3) dy.$$

**Приклад 9** Знайти повний диференціал функції  $S = x^2 \ln t$

**Розв'язання.** Задана функція  $S$  залежить від двох змінних  $x$  і  $t$ , тому

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x} dx + \frac{\partial S}{\partial t} dt.$$

Враховуючи, що  $\frac{\partial S}{\partial x} = (x^2 \ln t)'_x = 2x \ln t$ ;  $\frac{\partial S}{\partial t} = (x^2 \ln t)'_t = x^2 \cdot \frac{1}{t}$ , шуканий

диференціал  $dS = 2x \ln t dx + \frac{x^2}{t} dt$ .

**Приклад 10** Знайти частинні похідні другого порядку функції  $z = (x^2 + y)^5$ .

**Розв'язання.** Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left[ (x^2 + y)^5 \right]_x' = 5(x^2 + y)^4 (x^2 + y)_x' = 5(x^2 + y)^4 \cdot 2x = 10x(x^2 + y)^4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left[ (x^2 + y)^5 \right]_y' = 5(x^2 + y)^4 (x^2 + y)_y' = 5(x^2 + y)^4 \cdot 1 = 5(x^2 + y)^4.$$

Диференціюючи кожен із одержаних похідних (функцій) по  $x$  і по  $y$ , знаходимо частинні похідні другого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left[ 10x(x^2 + y)^4 \right]_x' = 10 \left( (x^2 + y)^4 + 4x(x^2 + y)^3 \cdot 2x \right) = 10(x^2 + y)^3 (x^2 + y + 8x^2) = \\ &= 10(x^2 + y)^3 (9x^2 + y); \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left[ 10x(x^2 + y)^4 \right]_y' = 10x \cdot 4(x^2 + y)^3 \cdot 1 = 40x(x^2 + y)^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left[ 5(x^2 + y)^4 \right]_x' = 5 \cdot 4(x^2 + y)^3 \cdot 2x = 40x(x^2 + y)^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left[ 5(x^2 + y)^4 \right]_y' = 5 \cdot 4(x^2 + y)^3 \cdot 1 = 20(x^2 + y)^3.$$

**Приклад 11**  $z = e^x (\cos y + x \sin y)$ . Показати, що  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

**Розв'язання.** Знаходимо частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$ :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (e^x (\cos y + x \sin y))_x' = e^x (\cos y + x \sin y) + e^x (0 + \sin y) = e^x (\cos y + x \sin y + \sin y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (e^x (\cos y + x \sin y))_y' = e^x (-\sin y + x \cos y).$$

Тепер маємо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) = [e^x (\cos y + x \sin y + \sin y)]_y' = e^x (-\sin y + x \cos y + \cos y);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) = [e^x (-\sin y + x \cos y)]_x' = e^x (-\sin y + x \cos y) + e^x (0 + \cos y) = \\ &= e^x (-\sin y + x \cos y + \cos y). \end{aligned}$$

Порівнюючи між собою результати для  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$  і  $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ , бачимо, що вони однакові. Отже,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ .

**Приклад 12**  $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Показати, що  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

**Розв'язання.** Перетворимо задану функцію  $u$  таким чином:

$$u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \ln(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Тепер знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = -\frac{x}{x^2 + y^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2y = -\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)'_x = -\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left( -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)'_y = -\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Підставляючи вирази похідних  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  і  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  у задане рівняння, будемо

$$\text{мати } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{0}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

Отже, якщо  $u = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , то  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

**Приклад 13** Знайти  $d^2 z$ , якщо  $z = e^x \cos y$ .

**Розв'язання.** Скористаємось формулою для знаходження повного диференціала другого порядку функції двох змінних, згідно з якою

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2.$$

Ураховуючи, що  $\frac{\partial z}{\partial x} = (e^x \cos y)'_x = e^x \cos y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = (e^x \cos y)'_y = -e^x \sin y$ ,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -e^x \cos y, \quad \text{будемо мати}$$

$$d^2 z = e^x \cos y dx^2 - 2e^x \sin y dx dy - e^x \cos y dy^2.$$

**Приклад 14** Знайти екстремуми функції  $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$ .

**Розв'язання.** Знаходимо частинні похідні першого порядку даної функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30 = 3(x^2 + y^2 - 10);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 18 = 6(xy - 3).$$

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо після елементарних перетворень систему



$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 10 = 0 \\ 2xy = 6 \end{cases}.$$

Додаючи і віднімаючи почленно рівняння цієї системи, матимемо

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4 \end{cases},$$

або

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 16 \\ (x - y)^2 = 4 \end{cases},$$

звідки

$$\begin{cases} x + y = \pm 4 \\ x - y = \pm 2 \end{cases}.$$

Розв'язуючи останню систему, рівносильну даній, знаходимо стаціонарні точки:  $M_1(3;1)$ ,  $M_2(1;3)$ ,  $M_3(-1;-3)$ ,  $M_4(-3;-1)$ .

Тепер знайдемо частинні похідні другого порядку даної функції

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

і складемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x \cdot 6y \\ 6y \cdot 6x \end{vmatrix} = 36x^2 - 36y^2 = 36(x^2 - y^2).$$

Переконаємося, що

$$1) \Delta(M_1) = 36(9 - 1) = 288 > 0, \quad A_1 = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{M_1} = 6 \cdot 3 = 18 > 0, \text{ отже } M_1(3;1) -$$

точка мінімуму;

$$2) \Delta(M_2) = 36(1 - 9) = -288 < 0, \text{ отже у точці } M_2 \text{ екстремуму немає;}$$

$$3) \Delta(M_3) = 36(1 - 9) = -288 < 0, \text{ отже у точці } M_3 \text{ екстремуму немає;}$$

$$4) \Delta(M_4) = 36(9 - 1) = 288 > 0, \quad A_4 = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{M_4} = 6(-3) = -18 < 0, \text{ отже } M_4 -$$

точка максимуму.

Таким чином, задана функція має два екстремуми: у точці  $M_1(3;1)$  - мінімум,  $z_{\min} = f(3;1) = -72$ ; у точці  $M_4(-3;-1)$  максимум,  $z_{\max} = f(-3;-1) = 72$ .

**Приклад 15** Знайти екстремум функції  $z = x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

**Розв'язання.** Задана функція визначена і диференційовна скрізь, крім

$x = 0$  і  $y = 0$ . Тому подальші дослідження будемо виконувати за умов  $x \neq 0$  і  $y \neq 0$ .

Знаходимо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - \frac{1}{x^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - \frac{1}{y^2}.$$

Прирівнюючи ці похідні до нуля, одержимо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + y - \frac{1}{x^2} = 0, \\ x + 2y - \frac{1}{y^2} = 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} 2x^3 + x^2y - 1 = 0, \\ xy^2 + 2y^3 - 1 = 0. \end{cases}$$

з якої знаходимо стаціонарні точки даної функції. Віднімаючи від першого рівняння системи друге, одержуємо:

$$\begin{aligned} 2(x^3 - y^3) + xy(x - y) &= 0 \Leftrightarrow (x - y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - y) \left( 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\frac{x}{y} + 2 \right) &= 0, \quad \text{бо } y \neq 0. \end{aligned}$$

З останньої рівності випливає, або  $x - y = 0$ , або  $2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\frac{x}{y} + 2 = 0$ . Але останнє рівняння дійсних розв'язків не має, бо  $D = b^2 - 4ac = 9 - 16 < 0$ . Отже,  $x = y$ . Тоді із першого рівняння системи маємо:

$$2x^3 + x^3 - 1 = 0,$$

звідки  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ .

Таким чином,  $x = y = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ , тобто  $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$  - стаціонарна точка.

Перевіримо, чи є екстремум у точці  $M$  з допомогою достатніх умов. Для цього знайдемо спочатку другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 + \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 + \frac{2}{y^3}.$$

Підставляючи в частинні похідні другого порядку координати стаціонарної точки  $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$ , одержимо

$$A = 2 + 2 \cdot 3 = 8, \quad B = 1, \quad C = 2 + 2 \cdot 3 = 8.$$

Обчислюючи далі визначник

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 64 - 1 = 63 > 0$$

і враховуючи, що  $A = 8 > 0$ , робимо висновок:  $M\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$  - точка локального мінімуму, причому

$$z_{\min} = z\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right) = \sqrt[3]{3} \cdot 3.$$

**Приклад 16** Знайти найбільше і найменше значення функції  $z = x^2 - y^2$  в колі  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

**Розв'язання.** Знаходимо перші частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$  і  $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$ .

Розв'язуючи систему рівнянь  $\begin{cases} 2x = 0, \\ -2y = 0, \end{cases}$  знаходимо одну критичну точку  $O(0;0)$ , в якій значення функції дорівнює нулю.

Знайдемо найбільше і найменше значення функції  $z$  на межі, тобто на колі  $x^2 + y^2 = 4$ . Оскільки на колі змінні  $x$  і  $y$  зв'язані співвідношенням  $x^2 + y^2 = 4$ , то для точок кола функцію  $z = x^2 - y^2$  можна подати як функцію однієї змінної  $x$ :  $z = z(x) = x^2 - (4 - x^2) = 2x^2 - 4$ , причому  $-2 \leq x \leq 2$ .

Отже, знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних на колі  $x^2 + y^2 = 4$  зведено до знаходження найбільшого і найменшого значень функції однієї змінної  $z = 2x^2 - 4$  на відрізку  $(-2;2)$ . Знаходимо критичні точки цієї функції на інтервалі  $(-2;2)$  і обчислюємо значення функції у цих точках і на кінцях відрізка:

$$z' = 4x = 0 \text{ при } x = 0 \text{ (критична точка); } z(0) = -4;$$

$z(-2) = z(2) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$ . Таким чином, функція має найбільше значення, яке дорівнює 4, і найменше значення, яке дорівнює -4.

Отже, найбільшого значення функція  $z = x^2 - y^2$  в колі  $x^2 + y^2 \leq 4$  набуває у точках  $M_1(-2;0)$  і  $M_2(2;0)$  кола  $x^2 + y^2 = 4$  і найменшого - у точках  $M_3(0;2)$  і  $M_4(0;-2)$  цього самого кола.

**Приклад 17** Знайти похідну функції  $z = x^3 - y^3$  у точці  $M(1;1)$  у напрямі  $\vec{l}$ , який утворює з віссю  $Ox$  кут  $\alpha = 60^\circ$ .

**Розв'язання.** За формулою знаходження похідної за напрямком маємо:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha.$$

Ураховуючи, що

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_M = (3x^2) \Big|_M = 3, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_M = (-3y^2) \Big|_M = -3,$$

знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 3 \frac{1}{2} - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3(1-\sqrt{3})}{2}.$$

**Приклад 18** Знайти градієнт функції  $z = 3x^2 - 6xy + y^2$  в точці

$M_1\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$ , його модуль та напрямні косинуси.

**Розв'язання.** За формулою  $gradz = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$ . Частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  функції  $z = 3x^2 - 6xy + y^2$  у точці  $M_1\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}\right)$  відповідно дорівнюють:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_1} = (6x - 6y) \Big|_{\substack{x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{2}}} = 6\left(-\frac{1}{3}\right) - 6\left(-\frac{1}{2}\right) = 1;$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_1} = (-6x + 2y) \Big|_{\substack{x=-\frac{1}{3} \\ y=-\frac{1}{2}}} = -6\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1.$$

Отже,  $gradz|_{M_1} = \vec{i} + \vec{j}$ .

Модуль градієнта і його напрямні косинуси у точці  $M_1$  відповідно дорівнюють:

$$|gradz|_{M_1} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \beta = \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким чином, можна зробити висновок, що градієнт даної функції у точці  $M_1$  напрямлений вздовж бісектриси першого координатного кута.

### Домашнє завдання

**Теорія** Первісна. Невизначений інтеграл. Таблиця невизначених інтегралів. [20], с. 108 – 113.

### Вправи

Знайти область визначення наведених функцій і зобразити її геометрично.

1  $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ .

Відповідь:  $x^2 + y^2 \geq 1$  – частина площини зовні одиничного кола з центром в початку координат, включаючи і саме коло.

2  $z = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$ .

Відповідь: внутрішня частина кола  $x^2 + y^2 < 1$  (без межі).

3  $z = \arcsin \frac{x}{y^2}$ .

Відповідь: частина площини між двома параболою  $y^2 = x$  і  $y^2 = -x$ , включаючи межу за винятком точки  $O(0;0)$ .

Дослідити наступні функції на неперервність і знайти точки розриву, якщо такі існують.

$$4 \quad z = \frac{2x-3}{x^2+y^2-4}.$$

$$\text{Відповідь: } x^2 + y^2 = 4.$$

$$5 \quad z = \ln(9 - x^2 - y^2).$$

Відповідь: функція неперервна в області визначення. Лінія розриву – коло  $x^2 + y^2 = 9$ .

Знайти частинні похідні першого порядку наступних функцій.

$$6 \quad z = x^3 y - y^3 x.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y - y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3xy^2.$$

$$7 \quad z = (5x^2 y - y^3 + 7)^3.$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\partial z}{\partial x} = 30xy(5x^2 y - y^3 + 7)^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3(5x^2 y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2).$$

$$8 \quad z = \ln\left(x + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

$$\text{Відповідь: } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$9 \quad \text{Показати, що функція } z = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \text{ задовольняє рівнянню}$$

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^3}{y}.$$

$$10 \quad \text{Знайти частинні диференціали функції } z = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

$$\text{Відповідь: } d_x z = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} dx, \quad d_y z = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} dy.$$

Знайти повні диференціали наступних функцій:

$$11 \quad z = x^2 + \sin y.$$

$$\text{Відповідь: } dz = 2x dx + \cos y dy.$$

$$12 \quad z = x \cdot 2^y.$$

$$\text{Відповідь: } dz = 2^y dx + x 2^y \ln 2 dy.$$

$$13 \quad z = \arcsin \frac{x}{y}.$$

$$\text{Відповідь: } dz = \frac{y dx - x dy}{y \sqrt{y^2 - x^2}}.$$

$$14 \quad z = \ln(e^x + e^y). \text{ Довести, що } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \text{ і що } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0.$$

15 Знайти повний диференціал другого порядку функції

$$z = x^2 + y^2 - xy - 2x + y + 7.$$

$$\text{Відповідь: } 2(dx^2 - dx dy + dy^2).$$

16 Знайти  $d^2z$ , якщо  $z = x \ln \frac{y}{x}$ . Відповідь:  $-\frac{dx^2}{x} + 2\frac{dxdy}{y} - x\frac{dy^2}{y^2}$ .

17 Знайти точки екстремуму функції  $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$ .

Відповідь: (2;-2).

18 Знайти екстремуми функції  $z = x^3 + y^3 - 3xy$ .

Відповідь: у точці (0;0) немає екстремуму. У точці (1;1) - мінімум.

19 Знайти найбільше і найменше значення функції  $z = e^{-x^2-y^2}(2x^2 + 3y^2)$  в колі  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

Відповідь:  $z_{\text{нб}} = \frac{3}{e}$  у точках (0;±1);  $z_{\text{нм}} = 0$  у точці (0;0).

20 Знайти похідну функції  $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$  у точці  $M_0(1;1)$  у напрямі бісектриси першого координатного кута.

Відповідь:  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

21 Знайти похідну функції  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  у напрямі вектора  $\vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  в будь-якій точці та в точках  $M_1(1;3)$  і  $M_2(2;1)$ .

Відповідь:  $\frac{4x-3y}{5(x^2+y^2)^2}$ ;  $-\frac{1}{100}$ ;  $\frac{1}{25}$ .

22 Знайти найбільшу швидкість зростання поля  $u = \ln(x^2 + 4y^2)$  у точці  $M_0(6;4;0)$ .

Відповідь:  $\frac{\sqrt{73}}{25}$ .

23 Знайти точку, в якій градієнт функції  $z = \ln(x + \frac{1}{y})$  дорівнює  $\vec{i} - \frac{16}{9}\vec{j}$ .

Відповідь:  $(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4})$ ,  $(\frac{7}{3}; -\frac{3}{4})$ .

### Питання для самоперевірки

1 Дайте означення функції двох (кількох) незалежних змінних.

2 Що називають областю визначення функції двох (кількох) змінних?

3 Що називається графіком функції двох змінних?

4 Дайте означення границі функції  $z = f(x; y)$  при  $x \rightarrow x_0$ ,  $y \rightarrow y_0$ .

5 Дайте означення неперервності функції двох незалежних змінних в точці і в області. Наведіть приклади розривних функцій.

6 Дайте означення частинної похідної функції двох незалежних змінних по одній із них. Поширити це означення на функції багатьох змінних.

7 У чому полягає геометричний зміст частинних похідних функції  $z = f(x; y)$  в системі декартових координат?

8 Що називають частинним приростом і частинним диференціалом по  $x$  функції  $z = f(x; y)$ ? Як виражається частинний диференціал функції через її частинну похідну?

9 У чому полягає геометричний зміст частинних диференціалів функції  $z = f(x; y)$  в системі декартових координат?

10 Що називається повним приростом і повним диференціалом функції  $z = f(x; y)$ ? Як виражається повний диференціал функції через її частинні похідні?

11 Яка функція кількох змінних називається диференційованою?

12 Сформулюйте достатню умову диференційованості функції в точці.

13 Дайте означення точки екстремуму (максимуму і мінімуму) функції двох змінних.

14 У чому полягає необхідна умова екстремуму функції двох незалежних змінних? Який її геометричний зміст?

15 Сформулюйте достатні умови екстремуму функції двох змінних. Чи може функція  $z = f(x; y)$  у критичних точках не мати екстремуму?

16 Сформулюйте правило знаходження найбільшого і найменшого значень функції двох змінних у заданій замкненій області.

17 Чи завжди функція  $z = f(x; y)$  має найменше і найбільше значення у замкненій області  $D$ ?

18 Що називають скалярним полем?

19 Дайте означення похідної у заданому напрямі в даній точці для функції двох змінних.

20 У яких точках скалярного поля похідна у будь-якому напрямі дорівнює нулю?

21 Дайте означення градієнта скалярного поля. За яких умов  $\text{grad} z$ , де  $z = f(x; y)$ , може дорівнювати нульовому вектору? Що показує градієнт?

22 Як виражається похідна у напрямі в даній точці через градієнт і одиничний вектор цього напрямку?

23 Виразити похідну поля у точці  $M(x; y)$  у будь-якому напрямі  $\vec{l}$  з допомогою  $\text{grad} z$ .

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10. Невизначений інтеграл.

### Таблиця невизначених інтегралів

$$\int Odu = \int Ou'_x dx = C. \quad (1)$$

$$\int du = \int u'_x dx = u + C. \quad (2)$$

$$\int u^\alpha du = \int u^\alpha u'_x dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1. \quad (3)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C. \quad (4)$$

$$\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2} = -\frac{1}{u} + C. \quad (5)$$

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{u'_x dx}{u} = \ln|u| + C. \quad (6)$$

$$\int a^u du = \int a^u u'_x dx = \frac{a^u}{\ln a} + C. \quad (7)$$

$$\int e^u du = \int e^u u'_x dx = e^u + C. \quad (8)$$

$$\int \sin u du = \int \sin u \cdot u'_x dx = -\cos u + C. \quad (9)$$

$$\int \cos u du = \int \cos u \cdot u'_x dx = \sin u + C. \quad (10)$$

$$\int \operatorname{tg} u du = \int \operatorname{tg} u \cdot u'_x dx = -\ln|\cos u| + C. \quad (11)$$

$$\int \operatorname{ctg} u du = \int \operatorname{ctg} u \cdot u'_x dx = \ln|\sin u| + C. \quad (12)$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C. \quad (13)$$

$$\int \frac{du}{\sin^2 u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C. \quad (14)$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{u'_x dx}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right| + C. \quad (15)$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \int \frac{u'_x dx}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C. \quad (16)$$

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C. \quad (17)$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \int \frac{u'_x dx}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \quad (18)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{u}{a} + C. \quad (19)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + A}} = \int \frac{u'_x dx}{\sqrt{u^2 + A}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + A}\right| + C. \quad (20)$$



$$\int \sqrt{u^2 + A} du = \int \sqrt{u^2 + A} \cdot u'_x dx = \frac{u}{2} \sqrt{u^2 + A} + \frac{A}{2} \ln |u + \sqrt{u^2 + A}| + C. \quad (21)$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \int \sqrt{a^2 - u^2} \cdot u'_x dx = \frac{u}{2} \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C, \quad (a > 0). \quad (22)$$

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Знайти  $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$ .

**Розв'язання.** Помічаємо, що  $(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x})^3 + 1$ . Тоді

$$\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx = \int [(\sqrt{x})^3 + 1] dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + x + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + x + C.$$

**Приклад 2** Знайти  $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx &= \int \left( \frac{\sqrt{x}}{x^3} - \frac{x^3 e^x}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} \right) dx = \\ &= \int x^{-\frac{5}{2}} dx - \int e^x dx + \int \frac{dx}{x} = -\frac{2}{3} x^{-\frac{3}{2}} - e^x + \ln|x| + C = C - \frac{2}{3x\sqrt{x}} - e^x + \ln|x|. \end{aligned}$$

**Приклад 3** Знайти  $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$ .

**Розв'язання.** Оскільки  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$ , то

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1 + \cos^2 x}{2 \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} + 1 \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{x}{2} + C = \frac{1}{2} (\operatorname{tg} x + x) + C. \end{aligned}$$

**Приклад 4** Знайти  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$ .

**Розв'язання.** Виконуємо тотожні перетворення над підінтегральною функцією:

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

**Приклад 5** Знайти  $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7 - \cos^2 x}} dx$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7 - \cos^2 x}} dx = \int (7 - \cos^2 x)^{-\frac{1}{3}} \sin 2x dx.$$

Оскільки  $(7 - \cos^2 x)' = -2 \cos x (-\sin x) = \sin 2x$ , то в якості змінної інтегрування маємо вираз  $7 - \cos^2 x$ . Відносно цієї змінної одержимо інтеграл від степеневих функцій, тобто

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin 2x}{\sqrt[3]{7 - \cos^2 x}} dx &= \int (7 - \cos^2 x)^{-\frac{1}{3}} \sin 2x dx = \frac{(7 - \cos^2 x)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \\ &= \frac{(7 - \cos^2 x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{(7 - \cos^2 x)^2} + C. \end{aligned}$$

**Приклад 6** Знайти  $\int \frac{dx}{(5 + 7 \operatorname{tg} x) \cos^2 x}$ .

**Розв'язання.** Оскільки похідна виразу  $5 + 7 \operatorname{tg} x$  дорівнює  $\frac{7}{\cos^2 x}$ , а множник  $\frac{1}{\cos^2 x}$  відрізняється від цієї похідної лише сталим множником 7, то змінною інтегрування тут можна вважати вираз  $5 + 7 \operatorname{tg} x$ , і, таким чином, знайти інтеграл за формулою (6):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(5 + 7 \operatorname{tg} x) \cos^2 x} &= \frac{1}{7} \int \frac{1}{5 + 7 \operatorname{tg} x} \cdot \frac{7}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = 5 + 7 \operatorname{tg} x \\ u_x' = \frac{7}{\cos^2 x} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{7} \int \frac{1}{u} \cdot u_x' dx = \frac{1}{7} \ln |5 + 7 \operatorname{tg} x| + C. \end{aligned}$$

**Приклад 7** Знайти  $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx$ .

**Розв'язання.** Заданий інтеграл можна подати у вигляді:

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{\operatorname{arctg} 2x} \cdot \frac{2}{1 + 4x^2} dx,$$

але  $\frac{2}{1 + 4x^2} = (\operatorname{arctg} 2x)'$ , і тому, вважаючи змінною інтегрування функцію  $\operatorname{arctg} 2x$ , інтеграл знаходимо за формулою (8):

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{2} e^{\operatorname{arctg} 2x} + C.$$

**Приклад 8** Знайти  $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12} - 3}}$ .

**Розв'язання.** Покладемо  $x^6=t$ . Тоді  $6x^5dx=dt$  і

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6} \int \frac{6x^5 dx}{\sqrt{(x^6)^2-3}} = \frac{1}{6} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3}} = \frac{1}{6} \ln|t + \sqrt{t^2-3}| + C.$$

За допомогою вказаної підстановки даний інтеграл зведений до табличного (формула 20). Повертаючись до початкової змінної, остаточно будемо мати

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^{12}-3}} = \frac{1}{6} \ln|x^6 + \sqrt{x^{12}-3}| + C.$$

**Приклад 9** Знайти  $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$ .

**Розв'язання.** Покладемо  $x+1=t^2$ . Звідси  $x=t^2-1$ , а  $dx=2tdt$  і

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int \frac{t}{1+t} dt = 2 \int \frac{t+1-1}{1+t} dt = \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{1+t} = 2t - 2 \ln|t+1| + C = 2\sqrt{x+1} - 2 \ln|\sqrt{x+1}+1| + C. \end{aligned}$$

Розв'язати даний приклад можна інакше. Нехай  $1+\sqrt{x+1}=t$ . Звідси  $x=(t-1)^2-1$ , а  $dx=2(t-1)dt$  і

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} &= \int \frac{2(t-1)dt}{t} = 2 \int \frac{t-1}{t} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t} = \\ &= 2t - 2 \ln|t| + C = 2(1+\sqrt{x+1}) - 2 \ln|1+\sqrt{x+1}| + C. \end{aligned}$$

Одержані результати відрізняються сталим доданком 2. Однак, обидва вони правильні, в чому можна легко переконатися шляхом їх диференціювання.

**Приклад 10** Знайти  $\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x}$ .

**Розв'язання.** Розділивши чисельник і знаменник підінтегрального виразу на  $\cos^2 x$ , одержимо

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{3 + 4\tg^2 x} = \frac{1}{4} \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{3}{4} + \tg^2 x}.$$

Оскільки  $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\tg x)$ , то доцільно покласти  $\tg x=t$ . Тоді

$$\int \frac{dx}{3\cos^2 x + 4\sin^2 x} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\frac{3}{4} + t^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2\tg x}{\sqrt{3}} + C.$$

**Приклад 11** Знайти  $\int x^2 \ln x dx$ .

**Розв'язання.** Поклавши  $u(x)=\ln x$ ,  $dv(x)=x^2 dx$  і застосувавши формулу інтегрування частинами  $\int u dv = uv - \int v du$ , одержуємо

$$\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx; \quad v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + C = \frac{1}{9} x^3 (3 \ln x - 1) + C.$$

**Приклад 12** Знайти  $\int x^2 \sin 3x dx$ .

**Розв'язання.** Покладемо  $u=x^2, dv=\sin 3x dx$ . Тоді

$$du=2x dx, \quad v = \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x.$$

За формулою інтегрування ачтинами знаходимо

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x - \int \left( -\frac{1}{3} \cos 3x \right) \cdot 2x dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x dx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо  $u=x, dv=\cos 3x dx$ , тоді

$$du = dx, v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x$$

$$\text{і } \int x \cos 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x - \int \frac{1}{3} \sin 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx = \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x.$$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x \right) + C.$$

$$= \frac{1}{27} (-9x^2 \cos 3x + 6x \sin 3x + 2 \cos 3x) + C.$$

**Приклад 13** Знайти  $\int (x^2 - 3x + 4) e^{5x} dx$ .

**Розв'язання.** Застосувавши формулу інтегрування ачтинами, одержимо

$$\int (x^2 - 3x + 4) e^{5x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 3x + 4; \quad du = (2x - 3) dx \\ dv = e^{5x} dx; \quad v = \int e^{5x} dx = \frac{1}{5} e^{5x} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{5} (x^2 - 3x + 4) e^{5x} - \frac{1}{5} \int (2x - 3) e^{5x} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = 2x - 3; \quad du = 2 dx \\ dv = e^{5x} dx; \quad v = \frac{1}{5} e^{5x} \end{array} \right| = \frac{1}{5} (x^2 - 3x + 4) e^{5x} - \frac{1}{5} \left( \frac{2x - 3}{5} e^{5x} - \frac{2}{5} \int e^{5x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{5} (x^2 - 3x + 4) e^{5x} - \frac{1}{5} \left( \frac{2x - 3}{5} e^{5x} - \frac{2}{25} e^{5x} \right) + C =$$

$$= \frac{1}{125} e^{5x} (25x^2 - 75x + 100 - 10x + 15 + 2) + C = \frac{1}{125} (25x^2 - 85x + 117) e^{5x} + C.$$

**Приклад 14** Знайти  $\int x \arctg x dx$ .

**Розв'язання.** Із формули інтегрування частинами

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x dx &= \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x d(x^2) = \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{arctg} x - \int x^2 d \operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2} \left( x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( x^2 \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2} \left( x^2 \operatorname{arctg} x - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} (x^2 \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C.\end{aligned}$$

### Домашнє завдання

**Теорія.** Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування тригонометричних функцій. Інтегрування ірраціональних функцій. [20], с. 113–126.

### Вправи

Знайти інтеграли:

- |                                        |            |                                            |
|----------------------------------------|------------|--------------------------------------------|
| 1 $\int \frac{dx}{(2x-3)^5}.$          | Відповідь: | $C - \frac{1}{8(2x-3)^4}.$                 |
| 2 $\int \sqrt[5]{x^3+2} \cdot x^2 dx.$ | Відповідь: | $\frac{5}{18} \sqrt[5]{(x^3+2)^6} + C.$    |
| 3 $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}.$  | Відповідь: | $\frac{2}{5} \sqrt{4+x^5} + C.$            |
| 4 $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}.$   | Відповідь: | $\frac{1}{\cos x} + C.$                    |
| 5 $\int \cos^3 x \sin 2x dx.$          | Відповідь: | $C - \frac{2}{5} \cos^5 x.$                |
| 6 $\int \sin(2x-3) dx.$                | Відповідь: | $-\frac{1}{2} \cos(2x-3) + C.$             |
| 7 $\int \cos(1-2x) dx.$                | Відповідь: | $-\frac{1}{2} \sin(1-2x) + C.$             |
| 8 $\int e^x \sin e^x dx.$              | Відповідь: | $C - \cos e^x.$                            |
| 9 $\int \frac{dx}{2x-1}.$              | Відповідь: | $\frac{1}{2} \ln 2x-1  + C.$               |
| 10 $\int \operatorname{ctg}(2x+1) dx.$ | Відповідь: | $\frac{1}{2} \ln \sin(2x+1)  + C.$         |
| 11 $\int e^{-3x+1} dx.$                | Відповідь: | $-\frac{1}{3} e^{-3x+1} + C.$              |
| 12 $\int e^{-x^3} \cdot x^2 dx.$       | Відповідь: | $-\frac{1}{3} e^{-x^3} + C.$               |
| 13 $\int \frac{dx}{x \ln x}.$          | Відповідь: | $\ln \ln x  + C.$                          |
| 14 $\int \frac{dx}{1+9x^2}.$           | Відповідь: | $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C.$ |
| 15 $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$    | Відповідь: | $\frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C.$    |

- 16  $\int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4}$ .      Відповідь:  $\frac{1}{6} \operatorname{arctg} \frac{x^3}{2} + C$ .
- 17  $\int \frac{x dx}{x^4 + 1}$ .      Відповідь:  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$ .
- 18  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^8}}$ .      Відповідь:  $\frac{1}{4} \arcsin \frac{x^4}{2} + C$ .
- 19  $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}}$ .      Відповідь:  $\frac{\arcsin 2^x}{\ln 2} + C$ .
- 20  $\int \frac{dx}{2x^2 + 9}$ .      Відповідь:  $\frac{1}{3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{3} x + C$ .
- 21  $\int \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx$ .      Відповідь:  $e^x + e^{-x} + C$ .
- 22  $\int \frac{3x - 1}{x^2 + 9} dx$ .      Відповідь:  $\frac{3}{2} \ln(x^2 + 9) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C$ .
- 23  $\int \frac{x(1 - x^2) dx}{1 + x^4}$ .      Відповідь:  $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 - \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) + C$ .
- 24  $\int \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}} dx$ .      Відповідь:  $\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$ .
- 25  $\int \frac{3x^4 + 2x^2 - 3x + 7}{x^2} dx$ .      Відповідь:  $x^3 + 2x - 3 \ln|x| - \frac{7}{x} + C$ .
- 26  $\int \left( 2^{3x-1} + \frac{3}{\cos^2 7x} - 2 \operatorname{ctg}(x + 5) \right) dx$ .  
Відповідь:  $\frac{2^{3x-1}}{3 \ln 2} + \frac{3}{7} \operatorname{tg} 7x - 2 \ln|\sin(x + 5)| + C$ .
- 27  $\int \frac{2x^2 - 8}{16 - x^4} dx$ .      Відповідь:  $-\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$ .
- 28  $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}$ .      Відповідь:  $\sin x - \cos x + C$ .
- 29  $\int e^x (2^x + 3^x) dx$ .      Відповідь:  $e^x \left( \frac{2^x}{1 + \ln 2} + \frac{3^x}{1 + \ln 3} \right) + C$ .
- 30  $\int \frac{x^2 + 2}{x^2 (x^2 + 4)} dx$ .      Відповідь:  $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} + C$ .
- Знайти інтеграли, підібравши відповідну підстановку:
- 31  $\int (e^{2x} + 5)^3 e^{2x} dx$ .      Відповідь:  $\frac{1}{8} (e^{2x} + 5)^4 + C$ .
- 32  $\int \frac{dx}{x \sin^2 \ln x}$ .      Відповідь:  $-\operatorname{ctg} \ln x + C$ .

- 33  $\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}$ . Відповідь:  $\frac{1}{4 \cos^4 x} + C$ .
- 34  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{2 + \cos^2 x}}$ . Відповідь:  $-2\sqrt{2 + \cos^2 x} + C$ .
- 35  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$ . Відповідь:  $-\frac{2}{15}(32 + 8x + 3x^2)\sqrt{2-x} + C$ .
- 36  $\int \frac{\ln x - 3}{x\sqrt{\ln x}} dx$ . Відповідь:  $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln|x|)^3} - 6\sqrt{\ln|x|} + C$ .
- 37  $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}$ . Відповідь:  $\ln|\ln \ln x| + C$ .
- 38  $\int e^{e^x+x} dx$ . Відповідь:  $e^{e^x} + C$ .
- 39  $\int \frac{x^3 dx}{(6x^4 + 5)^5}$ . Відповідь:  $-\frac{1}{96(6x^4 + 5)^4} + C$ .
- 40  $\int \sqrt{2 \sin x - 1} \cos x dx$ . Відповідь:  $\frac{1}{3}\sqrt{(2 \sin x - 1)^3} + C$ .
- 41  $\int 3^{x^2} x dx$ . Відповідь:  $\frac{3^{x^2}}{2 \ln 3} + C$ .
- 42  $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ . Відповідь:  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$ .
- 43  $\int z^2 \sqrt{1 + 2z^3} dz$ . Відповідь:  $\frac{1}{9} \sqrt{(1 + 2z^3)^3} + C$ .
- 44  $\int 2e^{-\frac{1}{2}\varphi+1} d\varphi$ . Відповідь:  $-4e^{-\frac{1}{2}\varphi+1} + C$ .
- 45  $\int \cos\left(\frac{1}{2}t + 3\right) dt$ . Відповідь:  $2 \sin\left(\frac{1}{2}t + 3\right) + C$ .
- Знайти інтеграли, застосовуючи метод інтегрування частинами.
- 46  $\int x e^{-x} dx$ . Відповідь:  $C - (x+1)e^{-x}$ .
- 47  $\int x 3^x dx$ . Відповідь:  $\frac{3^x}{\ln^2 3} (x \ln 3 - 1) + C$ .
- 48  $\int x \cos^2 x dx$ . Відповідь:  $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + C$ .
- 49  $\int \ln(x^2 + 1) dx$ . Відповідь:  $x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2 \operatorname{arctg} x + C$ .
- 50  $\int \frac{\lg x}{x^3} dx$ . Відповідь:  $C - \frac{1}{2x^2} \lg(x\sqrt{e})$ .
- 51  $\int \ln^2 x dx$ . Відповідь:  $x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C$ .
- 52  $\int \arccos x dx$ . Відповідь:  $x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$ .

|                                                   |            |                                                                                   |
|---------------------------------------------------|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 53 $\int e^x \cos \frac{x}{3} dx.$                | Відповідь: | $0,3e^x \left( \sin \frac{x}{3} + 3 \cos \frac{x}{3} \right) + C.$                |
| 54 $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}.$               | Відповідь: | $C - \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$                    |
| 55 $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$       | Відповідь: | $x \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C.$ |
| 56 $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$ | Відповідь: | $2(\sqrt{x} - \sqrt{1-x} \arcsin \sqrt{x}) + C.$                                  |
| 57 $\int (2x+3) \sin 5x dx.$                      | Відповідь: | $-\frac{2x+3}{5} \cos 5x + \frac{2}{25} \sin 5x + C.$                             |

### Питання для самоперевірки

- 1 Яка дія називається інтегруванням?
- 2 Яка функція називається первісною для даної функції? Наведіть приклади.
- 3 Чим відрізняються між собою різні первісні функції для даної функції  $f(x)$ ?
- 4 Дайте означення невизначеного інтеграла.
- 5 Який геометричний образ відповідає невизначеному інтегралу  $\int f(x) dx$ ?
- 6 Сформулюйте основні властивості невизначеного інтеграла.
- 7 За якою умови справедлива рівність  $\int f(x) dx = F(x) + C$ ?
- 8 Як перевіряється результат інтегрування?
- 9 Пригадайте і запишіть усі табличні інтеграли.
- 10 Укажіть, при якому значенні  $n$  формула

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

немає сенсу ( $x > 0$ )?

- 11 Яка формула застосовується в тому випадку, коли  $n = -1$  в  $\int x^n dx$ ?
12. Назвіть основні методи інтегрування.
- 13 У чому полягає метод підстановки (заміни змінної) в невизначеному інтегралі?
- 14 Запишіть формулу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі. В яких випадках і для яких інтегралів вона застосовується?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 11.** Інтегрування раціональних дробів, тригонометричних і ірраціональних виразів.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Знайти  $\int \frac{dx}{3x+2}.$

**Розв'язання.** Маємо інтеграл від елементарного дробу I типу. Покладемо  $3x+2=t$ , тоді  $3dx=dt$  і тому



$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3} \int \frac{3dx}{3x+2} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{3} \ln|t| + C = \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C.$$

Розв'язання цього ж прикладу можна записати ще й таким чином:

$$\int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x+2)}{3x+2} = \frac{1}{3} \ln|3x+2| + C.$$

**Приклад 2** Знайти  $\int \frac{dx}{(1-2x)^7}$ .

**Розв'язання.** Маємо інтеграл від елементарного дробу II типу. Оскільки  $d(1-2x) = (1-2x)'dx = -2dx$  і  $\frac{1}{(1-2x)^7} = (1-2x)^{-7}$ , то

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1-2x)^7} &= -\frac{1}{2} \int (1-2x)^{-7} (-2)dx = -\frac{1}{2} \int (1-2x)^{-7} d(1-2x) = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2x)^{-6}}{-6} + C = \frac{1}{12(1-2x)^6} + C. \end{aligned}$$

**Приклад 3** Знайти  $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ .

**Розв'язання.** Маємо інтеграл від елементарного дробу III типу, де  $A=0$ ,  $B=1$ ,  $b^2-4ac = -64 < 0$ . Виділивши повний квадрат із квадратного тричлена  $4x^2+4x+5$ , одержимо табличний інтеграл (17). Дійсно

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4x^2+4x+5} &= \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \left| \begin{array}{l} u=2x+1 \\ du=2dx \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{(2x+1)^2+4} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2} + C = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{2} + C. \end{aligned}$$

**Приклад 4** Знайти  $\int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3} dx$ .

**Розв'язання.** Як і в попередньому прикладі маємо також інтеграл від елементарного дробу третього типу, де  $A=-8$ ,  $B=7$ ,  $D=b^2-4ac=-20 < 0$ . Спочатку виділимо похідну знаменника в чисельнику дробу. Для цього чисельник  $7-8x$  подамо у вигляді

$$7-8x = -2(4x-2)+3.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{7-8x}{2x^2-2x+3} dx &= \int \frac{-2(4x-2)+3}{2x^2-2x+3} dx = -2 \int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3} dx + 3 \int \frac{dx}{2x^2-2x+3} = \\ &= -2 \ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+\frac{3}{2}} = -2 \ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)} = \\ &= -2 \ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} = -2 \ln(2x^2-2x+3) + \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{5}} + C = \end{aligned}$$

$$= -2 \ln(2x^2 - 2x + 3) + \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

Тут  $\int \frac{4x-2}{2x^2-2x+3} dx$  знайдений за формулою (6) таблиці інтегралів, вважаючи  $u=2x^2-2x+3$  і враховуючи, що  $2x^2-2x+3 > 0$  для будь-якого  $x$ , а  $\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}}$  за формулою (17), вважаючи  $u = x - \frac{1}{2}$  і враховуючи, що  $a^2 = \frac{5}{4}$ .

**Приклад 5** Знайти  $\int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{x^2+x-6} dx &= \int \frac{x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} dx = \left| \begin{array}{l} x+\frac{1}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{t-\frac{1}{2}-1}{t^2-\frac{25}{4}} dt = \\ &= \int \frac{tdt}{t^2-\frac{25}{4}} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2-\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \int \frac{2tdt}{t^2-\frac{25}{4}} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{2}} \ln \left| \frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| t^2 - \frac{25}{4} \right| - \frac{3}{10} \ln \left| \frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \right| - \frac{3}{10} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}}{x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} \right| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2+x-6| - \frac{3}{10} \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + C = \frac{1}{2} \ln |(x-2)(x+3)| - \frac{3}{10} \ln |x-2| + \frac{3}{10} \ln |x+3| + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln |x-2| + \frac{1}{2} \ln |x+3| - \frac{3}{10} \ln |x-2| + \frac{3}{10} \ln |x+3| + C = \frac{1}{5} \ln |x-2| + \frac{4}{5} \ln |x+3| + C. \end{aligned}$$

**Приклад 6** Знайти  $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральний дріб неправильний, бо степінь многочлена чисельника більша, за степінь многочлена знаменника. Тому виділимо спочатку цілу частину, поділивши многочлен чисельника на многочлен знаменника

$$\begin{array}{r} - \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} \quad \left| \begin{array}{l} X^3-4x \\ x^2+x+4 \end{array} \right. \quad (\text{ціла частина}) \\ \underline{x^5+4x^3-8} \\ - \frac{x^4+4x^3-8}{x^4-4x^2} \\ \underline{4x^3+4x^2-8} \\ - \frac{4x^3-16x}{4x^2+16x-8} \quad (\text{остача}). \end{array}$$

Тепер подамо підінтегральний дріб у вигляді суми цілої частини і правильного дробу, тобто

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \int \left( x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx. \end{aligned}$$

В інтегралі, який залишився, підінтегральний дріб (правильний і нескоротний) розкладемо на елементарні дробу. Оскільки знаменник дробу  $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$  має три прості корені  $x=0$ ,  $x=2$  і  $x=-2$ , то його можна подати у вигляді суми трьох дробів I типу, тобто

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Звільнюючись від дробових членів, одержимо

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)$$

або

$$x^2 + 4x - 2 = (A+B+C)x^2 + (2B-2C)x - 4A.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$  в обох частинах одержаної тотожності, одержимо систему рівнянь для визначення коефіцієнтів  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A + B + C = 1, \\ x & 2B - 2C = 4, \\ x^0 & -4A = -2. \end{array}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{5}{4}$ ,  $C = -\frac{3}{4}$ .

Слід відзначити, що тут коефіцієнти  $A$ ,  $B$  і  $C$  простіше було б знайти способом підстановки до тотожності частинних значень  $x$ , в якості яких доцільно взяти корені знаменника, тобто:

$$x^2 + 4x - 2 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2),$$

$$\begin{array}{l|l} x=0 & -2 = -4A, \\ x=2 & 10 = 8B, \\ x=-2 & -6 = 8C, \end{array}$$

звідки  $A = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{5}{4}$ ,  $C = -\frac{3}{4}$ .

Таким чином,

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2},$$

а шуканий інтеграл

$$\begin{aligned}\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \frac{x^2 + 4x - 2}{x^3 - 4x} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 4 \int \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{x-2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x+2} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \int \frac{dx}{x} + 5 \int \frac{dx}{x-2} - 3 \int \frac{dx}{x+2} = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x-2| - 3 \ln|x+2| + C.\end{aligned}$$

**Приклад 7** Знайти  $\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx$ .

**Розв'язання.** Переконаємося, що підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Враховуючи, що

$$(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x) = x(x-1)(x^2 - 4x + 3) = x(x-1)(x-1)(x-3) = x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два  $x=0$  і  $x=3$  – прості, а  $x=1$  – двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-1)^2(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів  $A, B, C, D$ :

$$x^2 - 2x + 3 = A(x-3)(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-3) + Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{l|l} x=0 & 3 = -3A, \\ x=3 & 6 = 12B, \\ x=1 & 2 = -2C, \\ x^3 & 0 = A + B + D. \end{array}$$

Звідси  $A = -1, B = \frac{1}{2}, C = -1, D = \frac{1}{2}$ . Отже,

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x(x-3)(x-1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx &= \int \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-3} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} \right) dx = \\ &= -\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-3} - \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} = -\ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x-3| + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

**Приклад 8** Знайти  $\int \frac{3x^2 + 4x + 11}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} dx$ .

**Розв'язання.** Підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Його знаменник  $(x^2+3)(x^2+1)$  не має дійсних коренів, а оскільки його множники  $x^2+3$  і  $x^2+1$  другого степеня і не повторюються, то розкладання даного правильного дробу на найпростіші має вигляд:

$$\frac{3x^2 + 4x + 11}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 3} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}.$$

Звільняючись від дробових членів, одержимо

$$3x^2 + 4x + 11 = (Ax + B)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 + 3)$$

або

$$3x^2 + 4x + 11 = (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + (A + 3C)x + (B + 3D).$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$  у лівій і правій частинах рівності, будемо мати

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + C = 0, \\ x^2 & B + D = 3, \\ x & A + 3C = 4, \\ x^0 & B + 3D = 11. \end{array}$$

Звідси, розв'язуючи систему, знаходимо  $A = -2$ ,  $B = -1$ ,  $C = 2$ ,  $D = 4$ .

Отже,

$$\frac{3x^2 + 4x + 11}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} = \frac{-2x - 1}{x^2 + 3} + \frac{2x + 4}{x^2 + 1}$$

і шуканий інтеграл

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + 4x + 11}{(x^2 + 3)(x^2 + 1)} dx &= \int \left( \frac{-2x - 1}{x^2 + 3} + \frac{2x + 4}{x^2 + 1} \right) dx = \\ &= -\int \frac{2x dx}{x^2 + 3} - \int \frac{dx}{x^2 + 3} + \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} + 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ &= -\ln(x^2 + 3) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \ln(x^2 + 1) + 4 \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

**Приклад 9** Знайти  $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x}$ .

**Розв'язання.** Підінтегральна функція є раціональною функцією від  $\sin x$  і  $\cos x$ . Тому, зробивши підстановку  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{5 - 4 \sin x + 3 \cos x} &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{3-3t^2}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{2dt}{5 + 5t^2 - 8t + 3 - 3t^2} = \int \frac{2dt}{2t^2 - 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 - 4t + 4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{t-2} + C = \frac{1}{2 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

**Приклад 10** Знайти  $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} dx &= \int \frac{\cos^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} \cos x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sqrt[5]{\sin^4 x}} \cos x dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} \sin x = t^5 \\ \cos x dx = 5t^4 dt \end{array} \right| = \int \frac{1 - t^{10}}{t^4} 5t^4 dt = 5 \int (1 - t^{10}) dt = 5 \left( t - \frac{t^{11}}{11} \right) + C = \\ &= 5\sqrt[5]{\sin x} - \frac{5}{11} \sqrt[5]{\sin^{11} x} + C. \end{aligned}$$

**Приклад 11** Знайти  $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$ .

**Розв'язання.**

$$\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} = \int \frac{dx}{2 \sin^2 x \cos x}.$$

Якщо у виразі  $\frac{1}{2 \sin^2 x \cos x}$  замінити  $\cos x$  на  $-\cos x$ , то дріб змінить знак на протилежний, тому тут треба застосувати підстановку  $\sin x = t$ . Тоді  $x = \arcsin t$ ,  $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ,  $\cos x = \sqrt{1-t^2}$  і

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} &= \int \frac{dx}{2 \sin^2 x \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2 (1-t^2)} = \frac{1}{2} \int \frac{1-t^2+t^2}{t^2 (1-t^2)} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2t} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = -\frac{1}{2 \sin x} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 1}{\sin x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

**Приклад 12** Знайти  $\int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x}$ .

**Розв'язання.** Враховуючи, що  $4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x = 4(\cos^2 x + \sin^2 x) - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x = \cos^2 x + 9 \sin^2 x$ , одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x} &= \int \frac{dx}{\cos^2 x + 9 \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x (1 + 9 \operatorname{tg}^2 x)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{1 + 9t^2} = \int \frac{dt}{1 + (3t)^2} = \frac{1}{3} \int \frac{3dt}{1 + (3t)^2} = \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3t + C = \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(3 \operatorname{tg} x) + C. \end{aligned}$$

**Приклад 13** Знайти  $\int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx$ .

**Розв'язання.** Застосувавши формулу перетворення добутку тригонометричних функцій у суму, згідно з якою

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x),$$

будемо мати

$$\begin{aligned} \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx &= \frac{1}{2} \int \left( \cos \frac{3x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \cos \frac{x}{4} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{4} dx + \frac{1}{2} \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \left( \cos \frac{7x}{4} + \cos \frac{5x}{4} \right) dx + \frac{1}{4} \int \left( \cos \frac{3x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right) dx = \\ &= \frac{1}{7} \sin \frac{7x}{4} + \frac{1}{5} \sin \frac{5x}{4} + \frac{1}{3} \sin \frac{3x}{4} + \sin \frac{x}{4} + C. \end{aligned}$$

**Приклад 14** Знайти  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}}$ .

**Розв'язання.** Маємо інтеграл другого типу від ірраціональної функції. Тут  $n_1=3$ ,  $n_2=2$ , тому  $k=6$ . Використовуючи підстановку  $2x+1=t^6$ , звідки  $x = \frac{1}{2}(t^6 - 1) \cdot dx = 3t^5 dt$ , одержимо

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}} &= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3 \int \frac{t^2 - 1 + 1}{t-1} dt = \\ &= 3 \int \left( t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 3 \left( \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C. \end{aligned}$$

Оскільки  $t = \sqrt[6]{2x+1}$ , то повертаючись до змінної  $x$ , будемо мати

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}} = 3 \left( \frac{\sqrt[3]{2x+1}}{2} + \sqrt[6]{2x+1} + \ln|\sqrt[6]{2x+1} - 1| \right) + C.$$

**Приклад 15** Знайти  $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}}$ .

**Розв'язання.** Спочатку в чисельнику виділимо похідну підкореневого виразу, після чого розкладемо інтеграл на суму двох інтегралів. Перший із одержаних інтегралів є табличним інтегралом (4), а другий зведеться до табличного інтеграла (19) шляхом виділення повного квадрата з квадратного тричлена:

$$\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} = \int \frac{\frac{3}{8}(8x+4) - \frac{3}{2} - 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} dx = \frac{3}{8} \int \frac{8x+4}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} dx - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x + 5}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - \frac{7}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2 + 4}} = \frac{3}{4} \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - \frac{7}{4} \int \frac{2dx}{\sqrt{(2x+1)^2 + 4}} = \\
&= \frac{3}{4} \sqrt{4x^2 + 4x + 5} - \frac{7}{4} \ln |2x+1 + \sqrt{4x^2 + 4x + 5}| + C.
\end{aligned}$$

**Приклад 16** Знайти  $\int \frac{(5x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}}$ .

**Розв'язання.** Маємо

$$\begin{aligned}
\int \frac{(5x+3)dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}} &= \int \frac{5(x+1)-2}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}} dx = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+5}} - 2 \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-4x+5}} = \\
&= \left| \begin{array}{l} x+1 = \frac{1}{t} \\ x = \frac{1}{t} - 1 \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right| = 5 \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + 1}} - 2 \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 - 4\left(\frac{1}{t}-1\right) + 5}} = \\
&= 5 \ln |x-2 + \sqrt{x^2-4x+5}| + 2 \int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{1}{t^2} - \frac{2}{t} + 1 - \frac{4}{t} + 4 + 5}} = \\
&= 5 \ln |x-2 + \sqrt{x^2-4x+5}| + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{10t^2 - 6t + 1}} = \\
&= 5 \ln |x-2 + \sqrt{x^2-4x+5}| + \frac{2}{\sqrt{10}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{6}{10}t + \frac{1}{10}}} = \\
&= 5 \ln |x-2 + \sqrt{x^2-4x+5}| + \frac{2}{\sqrt{10}} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(t - \frac{3}{10}\right)^2 + \frac{1}{100}}} = \\
&= 5 \ln |x-2 + \sqrt{x^2-4x+5}| + \frac{2}{\sqrt{10}} \ln \left| t - \frac{3}{10} + \sqrt{t^2 - \frac{6}{10}t + \frac{1}{10}} \right| + C = \\
&= 5 \ln |x-2 + \sqrt{x^2-4x+5}| + \frac{2}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{1}{x+1} - \frac{3}{10} + \sqrt{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 - \frac{6}{10} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{10}} \right| + C = \\
&= 5 \ln |x-2 + \sqrt{x^2-4x+5}| + \frac{2}{\sqrt{10}} \ln \left| \frac{7-3x + \sqrt{10(x^2-4x+5)}}{10(x+1)} \right| + C.
\end{aligned}$$

**Приклад 17** Знайти  $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$ .

**Розв'язання.** Для знаходження заданого інтегралу робимо підстановку  $x=2 \operatorname{tg} t$ . Звідси



$$dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}, \sqrt{(4+x^2)^3} = \sqrt{(4+4tg^2t)^3} = \sqrt{4^3(1+tg^2t)^3} = 8\sqrt{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^3} = \frac{8}{\cos^3 t}.$$

Тоді шуканий інтеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \int \frac{\frac{2}{\cos^3 t}}{\frac{8}{\cos^3 t}} dt = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C.$$

Оскільки  $\sin t = t g t \cdot \cos t = \frac{t g t}{\sqrt{1+t g^2 t}} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}},$  то остаточно

одержимо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C.$$

**Приклад 18** Знайти  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}}.$

**Розв'язання.** Застосуємо підстановку  $x = \frac{3}{\cos t},$  тоді

$$dx = \frac{3 \sin t}{\cos^2 t} dt, \sqrt{x^2-9} = \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t}-9} = \sqrt{9\left(\frac{1}{\cos^2 t}-1\right)} = 3\sqrt{\frac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}} = 3 \frac{\sin t}{\cos t} = 3 t g t$$

і

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}} = \int \frac{\frac{3 \sin t}{\cos^2 t}}{\frac{9}{\cos^2 t} \cdot \frac{3 \sin t}{\cos t}} dt = \frac{1}{9} \int \cos t dt = \frac{1}{9} \sin t + C.$$

Оскільки  $\sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1-\frac{9}{x^2}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x},$  то шуканий інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}} = \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C.$$

Зауважимо, що заданий інтеграл можна знайти і за допомогою підстановки  $x = \frac{1}{t}.$

### Домашнє завдання

**Теорія** Визначений інтеграл. Формула Ньютона-Лейбниця. Методи підстановки та інтегрування у визначеному інтегралі. [20], с. 127–132.

### Вправи

Знайти інтеграли:

- 1  $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x} dx$ . Відповідь:  $\frac{x}{4} + \ln|x| - \frac{7}{16} \ln|2x - 1| - \frac{9}{16} \ln|2x + 1| + C$ .
- 2  $\int \frac{dx}{x^4 - x^2}$ . Відповідь:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$ .
- 3  $\int \frac{x^6 - 2x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 4}{x^5 - 5x^3 + 4x} dx$ .  
Відповідь:  $\frac{x^2}{2} + \ln \left| \frac{x(x-2)\sqrt{(x-1)(x+1)^3}}{x+2} \right| + C$ .
- 4  $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 9x + 7}{(x-2)^3(x-5)} dx$ . Відповідь:  $\frac{3}{2(x-2)^2} + \ln|x-5| + C$ .
- 5  $\int \frac{(x^4 + 1)dx}{x^3 - x^2 + x - 1}$ . Відповідь:  $\frac{(x+1)^2}{2} + \ln \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C$ .
- 6  $\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$ . Відповідь:  $\ln \frac{x^2 + 4}{\sqrt{x^2 + 2}} + \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{2} + C$ .
- 7  $\int \frac{dx}{x(1+x^2)(4+x^2)^2}$ . Відповідь:  $\frac{1}{16} \ln|x| - \frac{1}{18} \ln(x^2 + 1) + \frac{7}{288} \ln(x^2 + 4) - \frac{1}{24(x^2 + 4)} + C$ .
- 8  $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 5x + 7}{x^2 + 2} dx$ . Відповідь:  $\frac{x^2}{2} + 3x + \frac{3}{2} \ln(x^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ .
- 9  $\int \frac{dx}{x^3 - 8}$ . Відповідь:  $\frac{1}{12} \ln|x-2| - \frac{1}{24} \ln(x^2 + 2x + 4) - \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C$ .
- 10  $\int \frac{3x^3 + x^2 + 5x + 1}{x^3 + x} dx$ . Відповідь:  $3x + \ln|x| + 2 \operatorname{arctg} x + C$ .
- 11  $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2 + 3x + 4}$ . Відповідь:  $2 \ln(x^2 + 3x + 4) - \frac{18}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{7}} + C$ .
- 12  $\int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$ . Відповідь:  $2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - x + C$ .
- 13  $\int \sin 2x \sin 5x dx$ . Відповідь:  $\frac{1}{6} \sin 3x - \frac{1}{14} \sin 7x + C$ .
- 14  $\int \sin^4 x dx$ . Відповідь:  $\frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$ .
- 15  $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$ . Відповідь:  $x - \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + C$ .
- 16  $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}$ . Відповідь:  $\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln|\sin x + \cos x| + C$ .
- 17  $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ . Відповідь:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$ .

- 18  $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$ . Відповідь:  $\ln|\sin x| - \sin x + C$ .
- 19  $\int \sin^2 \frac{x}{4} \cos^2 \frac{x}{4} dx$ . Відповідь:  $\frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\sin x + C$ .
- 20  $\int \sqrt[3]{\cos^2 x} \sin^3 x dx$ . Відповідь:  $-\frac{3}{5}\cos^{\frac{5}{3}}x + \frac{3}{11}\cos^{\frac{11}{3}}x + C$ .
- 21  $\int \frac{dx}{(1 + \cos x) \sin x}$ . Відповідь:  $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \frac{1}{4}\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + C$ .
- 22  $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx$ . Відповідь:  $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + C$ .
- 23  $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$ . Відповідь:  $-\arctg(\cos 2x) + C$ .
- 24  $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$ . Відповідь:  $2\arctg\sqrt{x} + C$ .
- 25  $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x}-1)}$ . Відповідь:  $3\sqrt[3]{x} + 3\ln|\sqrt[3]{x}-1| + C$ .
- 26  $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$ . Відповідь:  $\frac{1}{3}\arcsin \frac{3x-2}{\sqrt{2}} + C$ .
- 27  $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}}$ . Відповідь:  $\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{3}}{2x+\sqrt{4x^2+4x+3}+\sqrt{3}}\right| + C$ .
- 28  $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}}$ . Відповідь:  $-2\arctg \frac{1+x+\sqrt{1+x-x^2}}{x} + C$ .
- 29  $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$ . Відповідь:  $-\frac{1}{15}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x+15x^2}}{2x-3}\right| + C$ .
- 30  $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3+1}}$ . Відповідь:  $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3}-\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right) + C$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Який дріб називають раціональним?
- 2 Який раціональний дріб називають правильним? Неправильним?
- 3 Який вигляд мають елементарні (найпростіші) дробу?
- 4 Як здійснюється розклад правильного раціонального дробу на елементарні?
- 5 Пригадайте правило інтегрування раціонального дробу.
- 6 Як виконується інтегрування найпростіших ірраціональних функцій?
- 7 Укажіть загальний метод знаходження інтеграла від функції, раціональної відносно тригонометричних функцій.

8 Опишіть методи знаходження інтегралів вигляду  $\int \sin^m x \cos^n x dx$ , де  $m$  і  $n$  — цілі числа.

9 Для знаходження яких інтегралів застосовують тригонометричні підстановки і які?

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 12. Визначений інтеграл.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Обчислити  $\int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+1}} dy$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y+1}} dy &= \int_4^9 \frac{(\sqrt{y}-1)(\sqrt{y}+1)}{\sqrt{y}+1} dy = \int_4^9 (\sqrt{y}-1) dy = \int_4^9 \sqrt{y} dy - \int_4^9 dy = \\ &= \left( \frac{2y^{\frac{3}{2}}}{3} - y \right) \Big|_4^9 = \frac{2}{3} \cdot 9^{\frac{3}{2}} - 9 - \frac{2}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} + 4 = 18 - 9 - \frac{16}{3} + 4 = \frac{23}{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 2** Обчислити  $\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}}$ .

**Розв'язання.** Після елементарних перетворень підінтегральної функції будемо мати

$$\begin{aligned} \int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9} - \sqrt{x}} &= \int_0^{16} \frac{(\sqrt{x+9} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+9} - \sqrt{x})(\sqrt{x+9} + \sqrt{x})} dx = \int_0^{16} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x}}{x+9-x} dx = \\ &= \frac{1}{9} \left( \int_0^{16} \sqrt{x+9} dx + \int_0^{16} \sqrt{x} dx \right) = \frac{1}{9} \left( \frac{2}{3} (x+9)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{16} = \\ &= \frac{2}{27} \left( (x+9)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{16} = \frac{2}{27} \left( 25^{\frac{3}{2}} + 16^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{27} (125 + 64 - 27) = 12. \end{aligned}$$

**Приклад 3** Обчислити  $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2} &= \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dx}{x^2 + \frac{3}{2}x - 1} = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{5}{4}} \ln \left| \frac{x + \frac{3}{4} - \frac{5}{4}}{x + \frac{3}{4} + \frac{5}{4}} \right| \Big|_2^3 = \\ &= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{2}}{x + 2} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{5} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{3}{8} \right) = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 4** Обчислити  $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{dx}{x+x^3} &= \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int_1^2 \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = \int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{x dx}{1+x^2} = \\ &= \ln x \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 - \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln 5 + \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

**Приклад 5** Обчислити  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ .

**Розв'язання.** Застосуємо підстановку  $t = \sqrt{e^x - 1}$ . Тоді

$$t^2 = e^x - 1, \quad 2t dt = e^x dx, \quad dx = \frac{2t dt}{e^x} = \frac{2t dt}{t^2 + 1}.$$

Якщо  $x=0$ , то  $t = \sqrt{e^0 - 1} = 0$ . Якщо  $x=\ln 2$ , то  $t = \sqrt{e^{\ln 2} - 1} = \sqrt{2-1} = 1$ . Отже,

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx &= 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = 2 \int_0^1 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 + 1} dt = 2 \int_0^1 \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = \\ &= 2(t - \arctg t) \Big|_0^1 = 2(1 - \arctg 1 + \arctg 0) = 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 - \pi}{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 6** Обчислити  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx &= \left| \begin{array}{l} x^2 - 1 = t^2 \\ 2x dx = 2t dt \\ x dx = t dt \\ 1 - 1 = t^2, t_n = 0 \\ 4 - 1 = t^2, t_e = \sqrt{3} \end{array} \right| = \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \cdot x dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{t^2 + 1} = \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{1}{t^2 + 1} \right) dt = (t - \arctg t) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \arctg \sqrt{3} + \arctg 0 = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

**Приклад 7** Обчислити  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} &= \left| \begin{array}{ll} t = \tg \frac{x}{2} & \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ x = 2 \arctg t & t_n = \tg 0 = 0 \\ dx = \frac{2 dt}{1 + t^2} & t_e = \tg \frac{\pi}{4} = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{2 dt}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} = \int_0^1 \frac{2 dt}{2 + 2t^2 + 1 - t^2} = \end{aligned}$$

$$2 \int_0^1 \frac{dt}{3+t^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

**Приклад 8** Обчислити  $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \\ 1+x^2 = 1+\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ \operatorname{tg} t = 0, t_n = \operatorname{arctg} 0 = 0 \\ \operatorname{tg} t = 1, t_e = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}^2 t \cdot \frac{dt}{\cos^2 t}}{\left( \frac{1}{\cos^2 t} \right)^3} = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4t) dt = \\ &= \frac{1}{8} \left( t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{8} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \sin \pi + \frac{1}{4} \sin 0 \right) = \frac{\pi}{32}. \end{aligned}$$

**Приклад 9** Обчислити  $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}} &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{t}; dx = -\frac{dt}{t^2} \\ 1 = \frac{1}{t}, t_n = 1 \\ 3 = \frac{1}{t}, t_e = \frac{1}{3} \end{array} \right| = \int_1^{\frac{1}{3}} \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{5}{t} + 1}} = \\ &= -\int_1^{\frac{1}{3}} \frac{dt}{\sqrt{t^2+5t+1}} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{dt}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}} = \ln \left| t + \frac{5}{2} + \sqrt{t^2+5t+1} \right| \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \\ &= \ln \left( \frac{7}{2} + \sqrt{7} \right) - \ln \left( \frac{17}{6} + \sqrt{\frac{25}{9}} \right) = \ln \frac{7+2\sqrt{7}}{9}. \end{aligned}$$

**Приклад 10** Обчислити  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x}$ .

**Розв'язання.** Покладемо  $u=x$ ,  $dv = \frac{dx}{\sin^2 x}$ . Тоді  $du=dx$ ,  $v = \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx}$ .

Оскільки  $u=x$ ,  $v=-\operatorname{ctgx}$ ,  $u'=1$  і  $v'=\frac{1}{\sin^2 x}$  неперервні на відрізку  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ ,

то враховуючи формулу  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$  будемо мати:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x dx}{\sin^2 x} &= -x \operatorname{ctgx} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctgx} dx = -\frac{\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} + \ln \sin x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \\ &= -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln \sin \frac{\pi}{3} - \ln \sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \\ &= -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} = \frac{(9-4\sqrt{3})\pi}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

**Приклад 11** Обчислити  $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$ .

**Розв'язання.** Враховуючи, що  $u=\ln(x+1)$ ,  $dv=dx$  за формулою інтегрування частинами у визначеному інтегралі, одержимо

$$\begin{aligned} \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+1); du = \frac{dx}{x+1} \\ dv = dx; v = x \end{array} \right| = x \ln(x+1) \Big|_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{x dx}{x+1} = \\ &= (e-1) \ln e - \int_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1} dx = e-1 - \int_0^{e-1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = e-1 - (x - \ln(x+1)) \Big|_0^{e-1} = \\ &= e-1 - (e-1 - \ln e + \ln 1) = e-1 - e + 1 + 1 = 1. \end{aligned}$$

**Приклад 12** Обчислити  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx$ .

**Розв'язання.** Застосовуючи двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx &= \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}; du = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos x dx; v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cdot \sin x dx = \\ &= e^{\pi} - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}; du = 2e^{2x} dx \\ dv = \sin x dx; v = -\cos x \end{array} \right| = \\ &= e^{\pi} - 2(-e^{2x} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx) = e^{\pi} - 2 - 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx. \end{aligned}$$

Розв'язуючи далі одержане рівняння відносно невідомого інтеграла, знаходимо

$$5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = e^{\pi} - 2.$$

Звідси остаточно одержимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos x dx = \frac{e^{\pi} - 2}{5}.$$

### Домашнє завдання

**Теорія** Геометричне застосування визначених інтегралів. Площа криволінійної трапеції. Об'єм тіла обертання. Довжина дуги кривої та площа поверхні обертання. [20], с. 133 –140.

### Вправи

Обчислити інтеграли:

$$1 \quad \int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}. \quad \text{Відповідь: } -5(\sqrt[5]{16} - 1).$$

$$2 \quad \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{1}{5}(e - 1)^5.$$

$$3 \quad \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + 1)^2}. \quad \text{Відповідь: } \frac{1}{4}.$$

$$4 \quad \int_1^e \frac{dx}{x \sqrt{1 - \ln^2 x}}. \quad \text{Відповідь: } \frac{\pi}{2}.$$

$$5 \quad \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}. \quad \text{Відповідь: } e - \sqrt{e}.$$

$$6 \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}. \quad \text{Відповідь: } \operatorname{arctg} \frac{1}{7}.$$

$$7 \quad \int_{-0,5}^1 \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}. \quad \text{Відповідь: } \frac{\pi}{6}.$$

$$8 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{2}{7}.$$

$$9 \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \cos x}. \quad \text{Відповідь: } 2.$$

$$10 \quad \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{1}{3}.$$

$$11 \quad \int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}. \quad \text{Відповідь: } \frac{\pi}{8}.$$



$$12 \int_1^2 \frac{e^x dx}{e^x + 1}. \quad \text{Відповідь: } \ln(e+1).$$

$$13 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{1}{2}(\ln 3 - 1).$$

$$14 \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}. \quad \text{Відповідь: } \frac{32}{3}.$$

Обчислити інтеграли, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$15 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{\pi}{2} - 1.$$

$$16 \int_1^e \ln^3 x dx. \quad \text{Відповідь: } 6-2e.$$

$$17 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{\pi - 2}{4}.$$

$$18 \int_1^2 \frac{\ln x}{x^5} dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{15 - 4 \ln 2}{256}.$$

$$19 \int_0^1 x \arctg x dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{\pi - 2}{4}.$$

$$20 \int_0^1 x^3 e^{2x} dx. \quad \text{Відповідь: } \frac{e^2 + 3}{8}.$$

### Питання для самоперевірки

- 1 Дайте означення визначеного інтеграла.
- 2 Сформулюйте теорему існування визначеного інтеграла.
- 3 Сформулюйте і доведіть властивості визначеного інтеграла.
- 4 Що називають середнім значенням функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ ?
- 5 Чому дорівнює похідна від визначеного інтеграла із змінною верхньою межею інтегрування?
- 6 Сформулювати і вивести формулу Ньютона –Лейбніца.
- 7 У чому суть методів заміни змінної (підстановки) й інтегрування частинами у визначеному інтегралі?

### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 13. Застосування визначеного інтеграла.

#### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Обчислити площу фігури, обмеженої лінією  $y=x(x-1)^2$  і віссю  $Ox$ .

**Розв'язання.** Функція  $y=x(x-1)^2$  визначена для всіх дійсних значень  $x$ . Точки перетину графіка функції з віссю  $Ox$  обчислимо з системи рівнянь

$$\begin{cases} y = x(x-1)^2, \\ y = 0, \end{cases}$$

звідки  $x_1=0, y_1=0$  і  $x_2=1, y_2=0$ .

Таким чином, графік функції  $y=x(x-1)^2$  перетинає вісь  $Ox$  в точках  $(0;0)$  і  $(1;0)$ . Не складно переконатися в тому, що функція  $y=x(x-1)^2$  має екстремум у точках  $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{27}\right)$  і  $(1;0)$ , а також точку перегину  $\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{27}\right)$ . Читачеві пропонуємо перевірити це самостійно.

Використовуючи ці дані, будуємо графік функції (рис. 13.1).

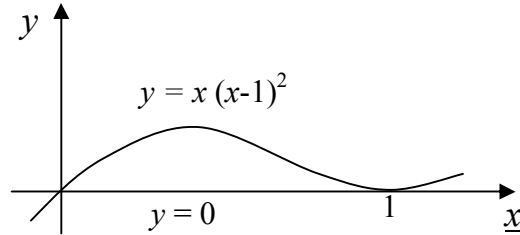


Рис. 13.1

Із рис. 13.1 видно, що фігура обмежена зверху лінією  $y=x(x-1)^2$ , знизу  $y=0$  і проєкціюється на вісь  $Ox$  у відрізок  $[0;1]$ . Отже,  $y_{\text{г}}=x(x-1)^2, y_{\text{н}}=0, a=0, b=1$ .

Таким чином, за формулою (41б) маємо

$$S = \int_0^1 x(x-1)^2 dx = \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x) dx = \left( \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

**Приклад 2** Обчислити площу фігури, обмеженої лінією  $y = \frac{1}{1+x^2}$  і

параболою  $y = \frac{x^2}{2}$ .

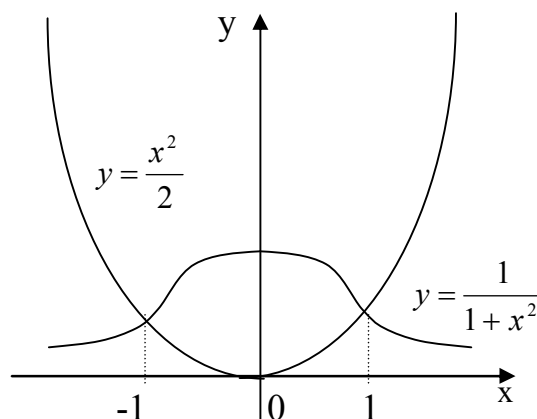


Рис. 13.2

**Розв'язання.** Крива  $y = \frac{x^2}{2}$  – парабола з вершиною в точці  $O(0;0)$  і

віссю симетрії  $Oy$ . Вітки параболи направлені вгору (рис.13.2). Крива  $y = \frac{1}{1+x^2}$

– локон Аньєзі. Із рівняння видно, що при будь-якому  $x$  функція набуває лише додатних значень, а тому її графік розташований вище осі  $Ox$ , а вісь  $Oy$  є її віссю симетрії, бо  $y(-x)=y(x)$ . Найбільше значення, яке дорівнює одиниці, функція набуває при  $x=0$ , а при  $x \rightarrow \pm\infty$   $y \rightarrow 0$ .

Схематично графік цієї функції зображений на рис. 13.2. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рис. 13.2. Площу заштрихованої фігури обчислимо за формулою:

$$S = \int_a^b (y_{\text{в}}(x) - y_{\text{н}}(x)) dx.$$

Для визначення меж інтегрування обчислимо абсциси точок перетину ліній, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \frac{1}{1+x^2}, \\ y = \frac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Звідси  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ . Отже,  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

Враховуючи також, що  $y_{\text{в}} = \frac{1}{1+x^2}$ , а  $y_{\text{н}} = \frac{x^2}{2}$  будемо мати

$$S = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx,$$

а з урахуванням симетрії фігури відносно осі  $Oy$  одержуємо

$$S = 2 \int_0^1 \left( \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left( \arctg x - \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^1 = 2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

**Приклад 3** Обчислити площу петлі лінії  $x=t^2-1$ ,  $y=t^3-t$ .

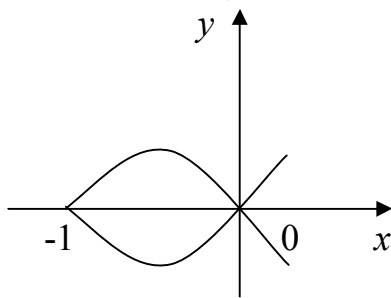


Рис.13.3

**Розв'язання.** Виключивши з параметричних рівнянь параметр  $t$ , одержимо  $y^2 = x^2(x+1)$ . Побудуємо графік цієї функції (рис.13.3). На відрізку  $[-1;0]$  параметр  $t$  змінюється від 1 до 0. Враховуючи симетрію фігури відносно осі  $Ox$  і використовуючи формулу (41г), будемо мати

$$S = 2 \int_1^0 (t^3 - t) 2t dt = -4 \int_0^1 (t^4 - t^2) dt = -4 \left( \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -4 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{15}.$$

**Приклад 4** Обчислити площу фігури, обмеженої лінією  $r = a \sin 2\varphi$  (чотирипелюсткова троянда).

**Розв'язання.** Побудуємо криву в полярній системі координат (рис. 13.4). Полярний радіус описує площу половини пелюстка, коли полярний кут  $\varphi$  змінюється від 0 до  $\frac{\pi}{4}$ . Площа всієї фігури

$$S = 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin^2 2\varphi d\varphi = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 4\varphi}{2} d\varphi = 2a^2 \left( \varphi - \frac{1}{4} \sin 4\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

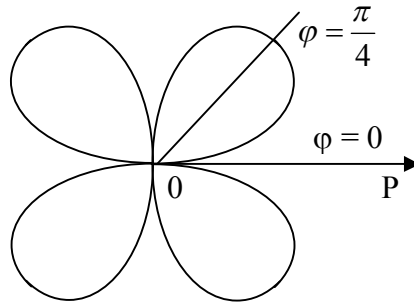


Рис.13.4

**Приклад 5** Криволінійна трапеція, обмежена лінією  $y = xe^x$  і прямими  $x=1$  і  $y=0$ , обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

**Розв'язання.** Об'єм одержаного тіла будемо обчислювати за формулою  $V_x = \pi \int_a^b (y_{\text{в}}^2(x) - y_{\text{н}}^2(x)) dx$ , враховуючи, що  $y_{\text{в}} = xe^x$ ,  $y_{\text{н}} = 0$ ,  $a=0$  і  $b=1$ :

$$V_x = \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx.$$

Використовуючи далі двічі формулу інтегрування частинами, будемо мати:

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 x^2 e^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} \int u dv = uv - \int v du \\ u = x^2; du = 2x dx \\ dv = e^{2x} dx; v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \\ &= \pi \left( \frac{x^2}{2} e^{2x} - \int x e^{2x} dx \right) \Big|_0^1 = \left| \begin{array}{l} u = x; du = dx \\ dv = e^{2x} dx; v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right| = \\ &= \pi \left( \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \int \frac{1}{2} e^{2x} dx \right) \Big|_0^1 = \pi \left( \frac{x^2}{2} e^{2x} - \frac{x}{2} e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \pi \left( \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Таким чином, шуканий об'єм дорівнює  $\frac{\pi}{4} (e^2 - 1)$

**Приклад 6** Одна арка циклоїди  $x=a(t-\sin t)$ ,  $y=a(1-\cos t)$  обертається навколо своєї основи. Обчислити об'єм тіла, обмеженого одержаною поверхнею.

**Розв'язання.** Побудуємо тіло обертання (рис.13.5).

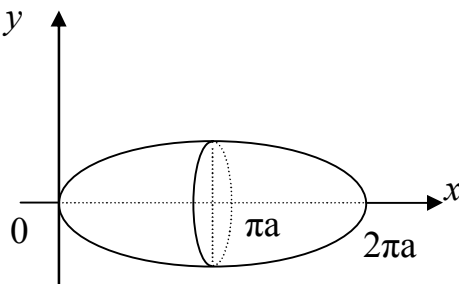


Рис. 13.5

Враховуючи, що  $y_{\text{в}}=a(1-\cos t)$ ,  $y_{\text{н}}=0$ ,  $dx = a(t - \sin t)'_t dt = a(1 - \cos t)dt$  і  $0 \leq t \leq 2\pi$ , маємо

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 \cdot a(1 - \cos t) dt = \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left[ 1 - 3\cos t + \frac{3}{2}(1 + \cos 2t) - (1 - \sin^2 t)\cos t \right] dt = \\ &= \pi a^3 \int_0^{2\pi} \left( \frac{5}{2} - 4\cos t + \frac{3}{2}\cos 2t + \sin^2 t \cos t \right) dt = \\ &= \pi a^3 \left( \frac{5}{2}t - 4\sin t + \frac{3}{4}\sin 2t + \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 5\pi^2 a^3. \end{aligned}$$

**Приклад 7** Обчислити довжину дуги лінії  $y=\ln x$  від  $x_1=\sqrt{3}$  до  $x_2=\sqrt{8}$ .

**Розв'язання.** Обчислимо похідну функції:  $y' = \frac{1}{x}$ . Тоді

$$1 + (y'(x))^2 = 1 + \frac{1}{x^2} = \frac{1 + x^2}{x^2}.$$

За формулою обчислення довжини дуги маємо:

$$\begin{aligned} L &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} \cdot x dx = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = z^2 \\ x^2 = z^2 - 1 \\ 2x dx = 2z dz \\ z_{\text{н}} = \sqrt{1+3} = 2 \\ z_{\text{в}} = \sqrt{1+8} = 3 \end{array} \right| = \\ &= \int_2^3 \frac{z}{z^2 - 1} \cdot z dz = \int_2^3 \frac{z^2}{z^2 - 1} dz = \int_2^3 \frac{z^2 - 1 + 1}{z^2 - 1} dz = \int_2^3 \left( 1 + \frac{1}{z^2 - 1} \right) dz = \end{aligned}$$

$$= \left( z + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \right) \Big|_2^3 = 3 + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} \left( \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

**Приклад 8** Обчислити довжину дуги евольвенти кола  $x=R(\cos t + t \sin t)$ ,  $y=R(\sin t - t \cos t)$  від  $t_1=0$  до  $t_2=\pi$ .

**Розв'язання.** Обчислюємо похідні

$$x_t' = R(-\sin t + \sin t + t \cos t) = Rt \cos t$$

і

$$y_t' = R(\cos t - \cos t + t \sin t) = Rt \sin t.$$

Тоді

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = R^2 t^2 \cos^2 t + R^2 t^2 \sin^2 t = R^2 t^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2 t^2.$$

Довжину дуги евольвенти кола обчислюємо за формулою обчислення довжини дуги лінії, заданої в параметричній формі, одержуємо:

$$L = \int_0^\pi \sqrt{R^2 t^2} dt = R \int_0^\pi t dt = R \frac{t^2}{2} \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2 R}{2}.$$

**Приклад 9** Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої  $r = 2a(1 + \cos \varphi)$ .

**Розв'язання.** Поверхня обертання показана на рис. 13.6.

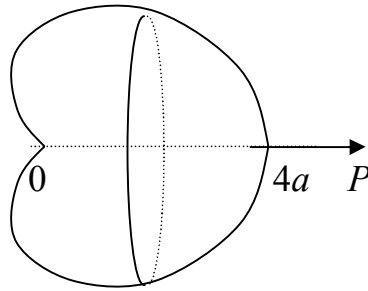


Рис.13.6

Враховуючи, що  $r_\varphi' = -2a \sin \varphi$ ,

$$\begin{aligned} r^2 + (r')^2 &= 4a^2 (1 + \cos \varphi)^2 + (-2a \sin \varphi)^2 = \\ &= 4a^2 (1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 4a^2 (2 + 2 \cos \varphi) = 8a^2 (1 + \cos \varphi) = 16a^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \text{ і} \\ 0 \leq \varphi \leq \pi, \text{ за формулою обчислення площі поверхні обертання маємо} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{n.o.} &= 2\pi \int_0^\pi 2a(1 + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot 4a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= 16\pi a^2 \int_0^\pi 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 64\pi a^2 \int_0^\pi \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\ &= -128\pi a^2 \cdot \frac{\cos^5 \frac{\varphi}{2}}{5} \Big|_0^\pi = -\frac{128}{5} \pi a^2 (0 - 1) = \frac{128}{5} \pi a^2. \end{aligned}$$

Тут враховано, що  $\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2}} = \cos \frac{\varphi}{2}$ , бо для  $0 \leq \varphi \leq \pi$   $\cos \frac{\varphi}{2}$  набуває невід'ємних значень.

Таким чином, шукана площа поверхні обертання дорівнює  $\frac{128}{5}\pi a^2$ .

### Домашнє завдання

**Теорія** Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні відносно змінних диференціальні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. [20], с. 141 –145.

### Вправи

1 Обчислити площу фігури, обмеженої параболою  $y=x^2$  і прямою  $y=\sqrt{x}$ .

Відповідь:  $\frac{1}{3}$ .

2 Обчислити площу криволінійної трапеції, обмеженої віссю абсцис і лінією  $y = x - x^2\sqrt{x}$ .

Вказівка. Побудуйте лінію  $y = x - x^2\sqrt{x}$ , надаючи аргументу  $x$  значень від 0 до 1.

Відповідь:  $\frac{3}{14}$ .

3 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y=e^{-x}$ ,  $y=e^x$  і прямою  $x=1$ .

Відповідь:  $e + \frac{1}{e} - 2$ .

4 Обчислити площу фігури, обмеженої астроїдою  $x=acos^3t$ ,  $y=asin^3t$ .

Вказівка. Фігура симетрична відносно осей координат. При зміні аргументу  $x$  на чверті площі від 0 до  $a$  параметр  $t$  змінюється від  $\frac{\pi}{2}$  до 0.

Відповідь:  $\frac{3}{8}\pi a^2$ .

5 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією  $r = a \cos 5\varphi$ .

Вказівка. Фігура являє собою п'ятипелюсткову троянду. На площі половини пелюстка кут  $\varphi$  змінюється від 0 до  $\frac{\pi}{10}$ .

Відповідь:  $\frac{a^2\pi}{4}$ .

6 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією  $r = tg\varphi$  ( $a > 0$ ) і прямою  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

$$\frac{\pi}{4}.$$

Вказівка. Досить побудувати частину лінії  $r = tg\varphi$ , змінюючи  $\varphi$  від 0 до

Відповідь:  $\frac{1}{8}a^2(4 - \pi).$

7 Обчислити площу фігури, обмеженої лініями  $y = e^{-2x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = -\frac{1}{2}$  і  $x = 1$ .

Відповідь:  $\frac{e^3 - 1}{2e^2}.$

8 Фігура, обмежена дугами парабол  $y^2 = x$  і  $x^2 = y$ , обертається навколо осі абсцис. Обчислити об'єм тіла обертання.

Відповідь:  $0,3\pi.$

9 Обчислити об'єм тіла, яке одержуємо від обертання навколо осі ординат криволінійної трапеції, обмеженої дугою синусоїди  $y = \sin x$ , яка відповідає півперіоду, і віссю абсцис.

Відповідь:  $2\pi^2.$

10 Обчислити об'єм тіла, яке утворюється в результаті обертання навколо осі ординат фігури, обмеженої лініями  $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases}$  і  $y = 4$ .

Відповідь:  $8\pi.$

11 Обчислити довжину дуги лінії  $y = \ln(1 - x^2)$  від  $x_1 = 0$  до  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

Відповідь:  $\ln 3 - 0,5.$

12 Обчислити довжину дуги лінії  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  від  $x_1 = a$  до  $x_2 = b$ .

Відповідь:  $\ln \frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}.$

13 Обчислити довжину дуги кривої  $y = 1 - \ln \sin x$  від  $x_1 = \frac{\pi}{3}$  до  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Відповідь:  $\frac{1}{2} \ln 3.$

14 Обчислити довжину дуги кривої  $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t \end{cases}$  від  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 1$ .

Відповідь:  $\sqrt{2}(e - 1).$

15 Обчислити довжину дуги гіперболічної спіралі  $r\varphi = 1$  від  $\varphi_1 = \frac{3}{4}$  до

$\varphi_2 = \frac{4}{3}.$



Відповідь:  $\frac{5}{12} + \ln \frac{3}{2}$ .

16 Обчислити довжину дуги кардіоїди  $r = 2(1 - \cos \varphi)$ , яка розташована всередині кола  $r=1$ .

Відповідь:  $16 - 8\sqrt{3}$ .

17 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням кубічної параболі  $3y-x^3=0$  навколо осі абсцис від  $x_1=0$  до  $x_2=a$ .

Відповідь:  $\frac{\pi}{9} \left( \sqrt{(1+a^4)^3} - 1 \right)$ .

18 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі  $Ox$  кривої  $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3}(t^2 - 3) \end{cases}$  від  $t_1=0$  до  $t_2 = \sqrt{3}$ .

Відповідь:  $3\pi$ .

19 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ .

Відповідь:  $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$ .

20 Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі  $Ox$  дуги кривої  $y = \frac{1}{3}x^3$  від  $x_1=-2$  до  $x_2=2$ .

Відповідь:  $\frac{2}{9}\pi(17\sqrt{17}-1)$ .

### Питання для самоперевірки

1 Як обчислюється площа фігури, обмеженої кривою, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?

2 Як обчислюється довжина кривої, яка задана у декартових координатах, параметрично або у полярних координатах?

3 Як обчислюється об'єм тіла обертання?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 14.** Диференціальні рівняння першого порядку.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Знайти загальний розв'язок рівняння  $yy' = \frac{1-2x}{y}$ .

**Розв'язання.** Розв'яжемо рівняння відносно  $y'$ :  $y' = \frac{1-2x}{y^2}$ .

Отримаємо рівняння типу  $y' = f_1(x)f_2(y)$ , оскільки  $\frac{1-2x}{y^2} = (1-2x)\frac{1}{y^2}$ .

Замінімо  $y'$  на  $\frac{dy}{dx}$ , тоді  $\frac{dy}{dx} = \frac{1-2x}{y^2}$ .

Помноживши обидві частини на  $y^2 dx$ , одержимо рівняння з відокремленими змінними  $y^2 dy = (1-2x)dx$ , інтегруючи яке, знаходимо

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C \quad (\text{загальний інтеграл})$$

або, розв'язавши відносно  $y$ ,

$$y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2} \quad (\text{загальний розв'язок}).$$

**Приклад 2** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' + \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ .

**Розв'язання.** Це рівняння з відокремленими змінними, оскільки  $\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$ . Відокремлюючи змінні  $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  й інтегруючи отриману рівність, знаходимо загальний інтеграл:

$$\arcsin y = -\arcsin x + C,$$

а розв'язавши відносно  $y$ :

$$y = \sin(C - \arcsin x) - \text{загальний розв'язок}.$$

**Приклад 3** Знайти загальний розв'язок рівняння  $\sqrt{1-y^2} dx + y\sqrt{1-x^2} = 0$ .

**Розв'язання.** Це рівняння вигляду  $M_1(x)N_2(y)dx + M_2(x)N_1(y)dy = 0$ . Розділивши обидві частини цього рівняння на  $\sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-x^2}$ , отримаємо  $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$ , а після інтегрування знаходимо його загальний інтеграл

$$\arcsin x - \sqrt{1-y^2} = C.$$

**Приклад 4** Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння  $y' \sin x = y \ln y$ , який задовольняє початковій умові  $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$ .

**Розв'язання.** Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. Для його розв'яжемо його відносно  $y' = \frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{\sin x}.$$

Відокремимо змінні

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}.$$

Після інтегрування маємо:

$$\ln|\ln y| = \ln\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \ln C,$$

а після потенціювання  $\ln y = C \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  або  $y = e^{C \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$  - загальний розв'язок.

Використовуючи початкову умову, знаходимо значення довільної сталої  $C$ . Підставляючи значення  $C = 1$  в загальний розв'язок рівняння, отримаємо

частинний розв'язок рівняння  $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ .

**Приклад 5** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ .

**Розв'язання.** Це рівняння типу  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ , тобто однорідне відносно змінних  $x$  і  $y$ . Зробимо заміну  $\frac{y}{x} = u(x)$ , звідки  $y = ux$ , а  $y' = u'x + u$ . Підставляючи ці вирази в дане рівняння, отримаємо

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \quad \text{або} \quad x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

а після відокремлювання змінних  $u du = \frac{dx}{x}$ . Інтегруючи цю рівність, знаходимо

$$\frac{u^2}{2} = \ln|x| + \frac{1}{2} \ln C \quad \text{або} \quad u^2 = \ln|Cx^2|.$$

Повертаючись до  $y$ , отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння  $\frac{y^2}{x^2} = \ln|Cx^2|$ , а розв'язавши відносно  $y$ , загальний розв'язок рівняння

$$y = \pm \sqrt{\ln|Cx^2|}.$$

**Приклад 6** Знайти загальний розв'язок рівняння  $xy' = y \ln \frac{y}{x}$ .

**Розв'язання.** Розв'язавши рівняння відносно  $y'$ , отримаємо  $u' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ , тобто рівняння типу  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ . Зробимо підстановку  $\frac{y}{x} = u(x)$ . Тоді  $y = ux$ , а  $y' = u'x + u$ . Виконуючи низку перетворень, будемо мати:

$$\begin{aligned} u'x + u &= u \ln u; \\ x \frac{du}{dx} &= u(\ln u - 1); \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}; \\ \int \frac{du}{u(\ln u - 1)} &= \int \frac{dx}{x} + \ln C; \quad \ln(\ln u - 1) = \ln|x| + \ln C; \\ \ln u - 1 &= Cx, \quad u = e^{Cx+1}; \quad \frac{y}{x} = e^{Cx+1}; \\ y &= x e^{Cx+1}. \end{aligned}$$

Це і є шуканий розв'язок.

**Приклад 7** Знайти загальний розв'язок рівняння  $x dy - y dx = y dy$ .

**Розв'язання.** Об'єднаємо доданки, які містять  $dy$  в одну групу, а ті, що містять  $dx$  – в іншу, одержуємо:  $(x-y)dy - ydx = 0$ . Наявність множника  $(x-y)$  перед  $dy$  дає можливість стверджувати, що відокремити змінні в даному рівнянні неможливо.

Розділивши обидві частини отриманого рівняння на  $x dy$ , будемо мати

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0,$$

звідки  $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}}$  і рівняння набуло вигляду  $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ . Далі треба діяти як у

попередніх прикладах. Але неважко помітити, що дане рівняння набуде простішого вигляду, якщо розв'язати його відносно  $\frac{dx}{dy}$ , а саме  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - 1$ . Тоді,

застосувавши підстановку  $\frac{x}{y} = u(y)$ , звідки  $x = uy$ , а  $\frac{dx}{dy} = u + y \frac{du}{dy}$ , будемо мати:

$$u + y \frac{du}{dy} = u - 1; \quad y \frac{du}{dy} = -1; \quad du = -\frac{dy}{y};$$

$$u = -\ln|u| - \ln C; \quad u = -\ln|Cy|; \quad \frac{x}{y} = -\ln|Cy|;$$

$$\frac{x}{y} + \ln|Cy| = 0 \quad (\text{загальний інтеграл}).$$

Зауважимо, що розв'язати отримане рівняння відносно  $y$  неможливо.

**Приклад 8** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ .

**Розв'язання.** Маємо рівняння вигляду  $y' + p(x)y = q(x)$ , де  $p(x) = 2x$ ,  $q(x) = xe^{-x^2}$ , тобто лінійне відносно  $y$  і  $y'$ .

Покладемо  $y = uv$ . Тоді  $y' = u'v + v'u$ . Підставляючи вирази  $y$  і  $y'$  в дане рівняння, одержимо

$$u'v + v'u + 2xuv = xe^{-x^2}$$

або

$$u'v + u(v' + 2xv) = xe^{-x^2}.$$

За  $v$  беремо будь-який частинний інтеграл рівняння  $v' + 2xv = 0$ . Тоді для знаходження  $u$  отримаємо рівняння  $u'v = xe^{-x^2}$ . Розв'язуючи перше рівняння, знаходимо  $v$ :

$$\frac{dv}{dx} = -2xv; \quad \frac{dv}{v} = -2xdx;$$

$$\ln|v| = -x^2; \quad v = e^{-x^2}.$$

Підставляючи  $v$  в друге рівняння і розв'язуючи його, знаходимо  $u$ :

$$u'e^{-x^2} = xe^{-x^2}; \quad u' = x;$$

$$u = \int x dx + C = \frac{x^2}{2} + C.$$

Отже, шукана функція

$$y = uv = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}.$$

**Приклад 9** Знайти загальний розв'язок рівняння  $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$ .

**Розв'язання.** Поділимо обидві частини рівняння на  $(1+x^2)$ :

$$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2.$$

Переконавшись, що рівняння лінійне неоднорідне, покладемо  $y = uv$ . Тоді воно набуває вигляду

$$u'v + v'u - \frac{2xuv}{1+x^2} = 1+x^2$$

або

$$u'v + u\left(v' - \frac{2x}{1+x^2}v\right) = 1+x^2.$$

Далі маємо:

$$1. \quad v' - \frac{2x}{1+x^2}v = 0;$$

$$2. \quad u'v = 1+x^2;$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2x}{1+x^2}v;$$

$$u'(1+x^2) = 1+x^2;$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{2xdx}{1+x^2};$$

$$u' = 1;$$

$$\ln|v| = \ln(1+x^2);$$

$$u = \int dx + C = x + C.$$

$$v = 1+x^2.$$

$y = uv = (x+C)(1+x^2)$  – загальний розв'язок заданого рівняння.

**Приклад 10** Знайти частинний розв'язок рівняння  $y' - y \operatorname{tg} x = \sec x$ , який задовольняє початковій умові  $y(0) = 0$ .

**Розв'язання.** Рівняння лінійне неоднорідне. Знайдемо спочатку його загальний розв'язок. Для цього покладемо  $y = uv$ ,  $y' = u'v + v'u$  і воно набуде вигляду

$$u'v + v'u - uv \operatorname{tg} x = \sec x$$

або

$$u'v + u(v' - v \operatorname{tg} x) = \sec x.$$

Тоді

$$1. \quad v' - v \operatorname{tg} x = 0;$$

$$2. \quad u'v = \sec x;$$

$$\frac{dv}{dx} = v \operatorname{tg} x;$$

$$u' \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x};$$

$$\frac{dv}{v} = \operatorname{tg} x dx;$$

$$u' = 1;$$

$$\ln|v| = -\ln|\cos x|;$$

$$u = x + C.$$

$$v = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.$$

$y = uv = (x+C) \frac{1}{\cos x}$  – загальний розв'язок заданого рівняння.

При  $x = 0$  і  $y = 0$  знаходимо значення довільної сталої  $C$

$$0 = (0 + C) \frac{1}{\cos 0} \Rightarrow C = 0.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок рівняння буде мати вигляд:  $y = \frac{x}{\cos x}$ .

### Домашнє завдання

**Теорія** Диференціальні рівняння другого порядку. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. [20], с.145–149.

### Вправи

Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь.

1  $xyy' = 1 - x^2$

Відповідь:  $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$ .

2  $y'tgx - y = a$ .

Відповідь:  $y = C \sin x - a$ .

3  $y' = 10^{x+y}$ .

Відповідь:  $10^x + 10^{-y} = C$ .

4  $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}; y(0) = 1$ .

Відповідь:  $y = \frac{1+x}{1-x}$ .

5  $y' = \frac{x+y}{x-y}$ .

Відповідь:  $\arctg \frac{y}{x} = \ln(C\sqrt{x^2 + y^2})$

Вказівка. Для спрощення результату скористайтесь формулою

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

6  $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Відповідь:  $x^2 = C^2 + 2Cy$ .

7  $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$ .

Відповідь:  $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$ .

8  $y' + y = \cos x$ .

Відповідь:  $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$ .

### Питання для самоперевірки

1 Що називається диференціальним рівнянням?

2 Що називається порядком диференціального рівняння?

3 Що називається загальним і частинним розв'язками диференціального рівняння?

4 Яка задача називається задачею Коші? За яких умов існує єдиний розв'язок задачі Коші?

5 Які диференціальні рівняння першого порядку називають рівняннями з відокремлюваними змінними, однорідними і лінійними?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 15.** Диференціальні рівняння другого порядку.

|                                             |                                                  |                                                |                                                                        |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| Рівняння                                    | $y'' + py' + qy = 0$ , де $p$ і $q$ - сталі      |                                                |                                                                        |
| Характеристичне рівняння                    | $k^2 + pk + q = 0$                               |                                                |                                                                        |
| Корені характеристичного рівняння           | $\kappa_1 \neq \kappa_2$                         | $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$                 | $\kappa_{1,2} = \alpha + \beta i, \beta \neq 0$                        |
| Фундаментальна система частинних розв'язків | $y_1 = e^{\kappa_1 x}$<br>$y_2 = e^{\kappa_2 x}$ | $y_1 = e^{\kappa x}$<br>$y_2 = x e^{\kappa x}$ | $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$<br>$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$ |
| Загальний розв'язок                         | $y = C_1 e^{\kappa_1 x} + C_2 e^{\kappa_2 x}$    | $y = (C_1 + C_2 x) e^{\kappa x}$               | $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$               |

**Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' + y' + 2y = 0$ .

**Розв'язання.** Маємо ЛОДР-2 зі сталими коефіцієнтами. Для його розв'язання складемо характеристичне рівняння. За теоремою Вієта

$$\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = -2, \\ k_1 + k_2 = -1, \end{cases} \quad \text{звідси} \quad \kappa_1 = -2, \quad \kappa_2 = 1.$$

Корені характеристичного рівняння дійсні і різні числа ( $\kappa_1 \neq \kappa_2$ ), тому загальний розв'язок рівняння набуде вигляду

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

**Приклад 2** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' - 4y' = 0$ .

**Розв'язання.** Складемо характеристичне рівняння  $\kappa^2 - 4\kappa = 0$ . Розв'язуючи його, знаходимо  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 = 4$ . Оскільки  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , то шуканий загальний розв'язок даного рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{4x} = C_1 + C_2 e^{4x}.$$

**Приклад 3** Знайти загальний розв'язок рівняння  $3y'' - 2y' - 8y = 0$ .

**Розв'язання.** Складемо характеристичне рівняння  $3\kappa^2 - 2\kappa - 8 = 0$ .

Розв'язуючи його, знаходимо:

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 100;$$

$$\kappa_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} = \frac{2 \pm 10}{6};$$

$$\kappa_1 = 2; \quad \kappa_2 = -\frac{4}{3}.$$

Загальний розв'язок рівняння:  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4}{3}x}$ .

**Приклад 4** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' + 6y' + 13y = 0$ .

**Розв'язання.** Складемо характеристичне рівняння  $\kappa^2 + 6\kappa + 13 = 0$ . Його корені знайдемо за формулою

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

згідно з якою

$$k_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-13} = -3 \pm \sqrt{-4} = -3 \pm \sqrt{4}i = -3 \pm 2i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ( $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ ).

Отже,  $\alpha = -3$ ;  $\beta = 2$ . Тоді загальний розв'язок даного рівняння набуде вигляду

$$y = e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

**Приклад 5** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' - 2y' + y = 0$ .

**Розв'язання.** Складемо характеристичне рівняння  $k^2 - 2k + 1 = 0$ . Оскільки  $k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2 = 0$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ . Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні, тому загальний розв'язок запишемо у вигляді:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x.$$

**Приклад 6** Знайти частинний розв'язок наступних рівнянь, який задовольняє даним початковим умовам

$$y'' - 4y' + 3y = 0; \dots y(0) = 6; y'(0) = 10.$$

**Розв'язання.** Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння  $k^2 - 4k + 3 = 0$ . Його корені  $k_1 = 1$  і  $k_2 = 3$  дійсні й різні, тому загальний розв'язок має вигляд  $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x}$ . Диференціюючи  $y$ , отримаємо  $y' = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x}$ . Використовуючи початкові умови, знаходимо значення  $C_1$  і  $C_2$  із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6 = C_1 + C_2, \\ 10 = C_1 + 3C_2. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, одержимо  $C_1 = 4$ ,  $C_2 = 2$ . Підставляючи ці значення в загальний розв'язок, знаходимо шуканий частинний розв'язок

$$y = 4e^x + 2e^{3x}.$$

**Приклад 7** Знайти частинний розв'язок наступних рівнянь, який задовольняє даним початковим умовам

$$y'' + 4y' + 29y = 0; y(0) = 0; y'(0) = 15.$$

**Розв'язання.** Складемо характеристичне рівняння  $k^2 + 4k + 29 = 0$ .

Знаходимо його корені

$$k_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-29} = -2 \pm \sqrt{-25} = -2 \pm 5i.$$

Оскільки корені комплексно-спряжені і  $\alpha = -2$ ;  $\beta = 5$  загальний розв'язок рівняння запишемо у вигляді

$$y = e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x).$$

Далі знаходимо

$$y' = -2e^{-2x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + e^{-2x}(-5C_1 \sin 5x + 5C_2 \cos 5x).$$

Враховуючи початкові умови: при  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y' = 15$ , а також те, що  $e^0 = 1$ ,  $\sin 0 = 0$ ,  $\cos 0 = 1$ , отримаємо систему рівнянь



$$\begin{cases} 0 = C_1, \\ 15 = -2C_1 + 5C_2, \end{cases}$$

звідки  $C_1 = 0$ ,  $C_2 = 3$ . Отже, шуканий частинний розв'язок вихідного рівняння набуде вигляду

$$y = 3e^{-2x} \sin 5x.$$

### Домашнє завдання

**Теорія** Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. [20], с. 149–151.

### Вправи

Знайти загальний або частинний розв'язок наступних диференціальних рівнянь.

- 1  $y'' - 9y = 0$ .                      Відповідь:  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ .
- 2  $y'' - 2y' - 8y = 0$ .                Відповідь:  $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{4x}$ .
3.  $y'' + y = 0$ ,                      Відповідь:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .
4.  $4y'' - 8y' + 5y = 0$ .            Відповідь:  $y = e^x (C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})$ .
5.  $4 \frac{d^2 x}{dt^2} - 20 \frac{dx}{dt} + 25x = 0$ .    Відповідь:  $x = (C_1 + C_2 t) e^{2,5t}$ .
6.  $4y'' + 4y' + y = 0$ ;  $y(0) = 2$ ;  $y'(0) = 0$ . Відповідь:  $y = (2 + x) e^{-\frac{x}{2}}$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Яке рівняння називають диференціальним рівнянням другого порядку?
- 2 Який вигляд має задача Коші для диференціального рівняння другого порядку?
- 3 Сформулюйте теорему існування та єдності розв'язку задачі Коші для диференціального рівняння другого порядку.
- 4 Яке рівняння називають лінійним диференціальним рівнянням другого порядку?
- 5 Який вигляд має загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння другого порядку.
- 6 Викласти метод розв'язання лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Яке рівняння називають характеристичним?
- 7 Який вигляд має загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, якщо корені його характеристичного рівняння: 1) дійсні й різні, 2) дійсні й рівні, 3) комплексно-спряжені.

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 16.** Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами.

**Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** Знайти загальний розв'язок рівняння  $2y'' + y' - y = 2e^x$ .

**Розв'язання.** Дане рівняння є ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною. Його загальний розв'язок шукаємо у вигляді  $y = \bar{y} + Y$ . Для знаходження  $\bar{y}$  ЛОДР-2, яке відповідає даному ЛНДР-2:  $2y'' + y' - y = 0$ .

Складемо характеристичне рівняння  $2k^2 + k - 1 = 0$ . Його корені  $k_1 = -1$  і  $k_2 = \frac{1}{2}$ . Отже,  $\bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$ .

Права частина  $f(x) = 2e^x$  даного рівняння є функція вигляду  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ , де  $n=0$ ,  $\alpha=1$ , тому  $Y = Ae^x$  бо  $\alpha \neq k_{1,2}$ . Диференціюючи  $Y$  двічі, отримаємо  $Y' = Ae^x$ ,  $Y'' = Ae^x$ . Підставимо  $Y, Y', Y''$  в дане рівняння:  $2Ae^x + Ae^x - Ae^x \equiv 2e^x$ , звідки знаходимо  $A=1$ . Отже,  $Y = e^x$ , а загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд:  $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$ .

**Приклад 2** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' + 7y' + 6y = \sin x$ .

**Розв'язання.** Переконаємося, що дане рівняння є ЛНДР-2 зі сталими коефіцієнтами і спеціальною правою частиною, тому його загальний розв'язок  $y = \bar{y} + Y$ . Розв'язуємо однорідне рівняння  $y'' - 7y' + 6y = 0$ , яке йому відповідає. Його характеристичне рівняння  $k^2 - 7k + 6 = 0$  має корені  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 6$ . Отже,  $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$ . Права частина даного рівняння  $f(x) = \sin x$  являє собою функцію вигляду  $f(x) = A \cos bx + B \sin bx$ , де  $A=0$ ,  $B=1$ ,  $b=1$ . Оскільки  $bi = 1 \neq k_{1,2}$ , то  $Y = M \cos x + N \sin x$ , де  $M$  і  $N$  - коефіцієнти, які треба визначити. Диференціюючи  $Y$  двічі, знаходимо:

$$Y' = -M \sin x + N \cos x, Y'' = -M \cos x - N \sin x.$$

Підставимо вирази  $Y, Y', Y''$  в дане рівняння:

$$-M \cos x - N \sin x - 7(-M \sin x + N \cos x) + 6(M \cos x + N \sin x) = \sin x.$$

У лівій частині отриманої тотожності зведемо подібні:

$$(5M - 7N) \cos x + (7M - 5N) \sin x \equiv 0 \cos x + \sin x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при  $\cos x$  і  $\sin x$  в обох частинах тотожності, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} 5M - 7N = 0, \\ 7M - 5N = 1. \end{cases}$$

Розв'язавши її, знаходимо  $M = \frac{7}{74}$ ,  $N = \frac{5}{74}$ . Отже,  $Y = \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x$ .

Таким чином, загальний розв'язок даного рівняння

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x.$$

**Приклад 3** Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3.$$

**Розв'язання.** Задане рівняння - це ЛНДР-2, отже його загальний розв'язок має вигляд  $y = \bar{y} + Y$ . Шукаємо загальний розв'язок  $\bar{y}$  однорідного рівняння  $y'' - 6y' + 9y = 0$ :

$$\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0; (\kappa - 3)^2 = 0; \kappa_1 = \kappa_2 = 3;$$

$$\bar{y} = (C_1 + C_2 x) e^{3x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Його права частина  $f(x) = 2x^2 - x + 3$  є функцією вигляду  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ , де  $n=2$ ,  $\alpha=0$ . Оскільки  $\alpha \neq \kappa_{1,2}$ , то  $Y = Ax^2 + Bx + C$ . Далі знаходимо  $Y' = 2Ax + B$ ,  $Y'' = 2A$  і підставляємо вирази  $Y, Y', Y''$  в дане рівняння:

$$2A - 6(2Ax + B) + 9(Ax^2 + Bx + C) \equiv 2x^2 - x + 3.$$

або

$$9Ax^2 + (-12A + 9B)x + (2A - 6B + 9C) = 2x^2 - x + 3.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях  $x$  многочленів лівої і правої частин тотожності, будемо мати:

$$\begin{cases} 9A = 2, \\ 9B - 12A = -1, \\ 9C - 6B + 2A = 3. \end{cases}$$

У подальшому коротко ці викладки будемо записувати так:

$$\begin{array}{l|l} 9 & Y = Ax^2 + Bx + C \\ -6 & Y' = 2Ax + B \\ 1 & Y'' = 2A \end{array} \quad \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 9A = 2 \\ 9B - 12A = -1 \\ 9C - 6B + 2A = 3 \end{array}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо  $A = \frac{2}{9}, B = \frac{5}{27}, C = \frac{11}{27}$ . Тому

$$Y = \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$$

**Приклад 4** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ ,

$$1) f(x) = 3e^x, \quad 2) f(x) = 2x^3 - 30.$$

**Розв'язання.** Шукаємо загальний розв'язок заданого рівняння у вигляді:  $y = \bar{y} + Y$ . Знаходимо загальний розв'язок однорідного рівняння  $y'' - 3y' + 2y = 0$ :  $\kappa^2 - 3\kappa + 2 = 0$ ;  $\kappa_1 = 1$ ;  $\kappa_2 = 2$ ;

$$\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}, \text{ бо } \kappa_1 \neq \kappa_2.$$

Далі маємо:

1)  $f(x) = 3e^x$ . Це функція вигляду  $f(x) = P_n(x)e^{ax}$ , де  $n=0$ ,  $\alpha=2$ . Оскільки,  $\alpha \neq \kappa_2$ , то

$$\begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} Y = Axe^{2x} \\ Y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} = (A + 2Ax)e^{2x} \\ Y'' = 2Ae^{2x} + 2(A + 2Ax)e^{2x} = (4A + 4Ax)e^{2x} \end{array} \right.$$

Для визначення коефіцієнта  $A$  маємо:

$$\begin{array}{l} xe^{2x} \\ e^{2x} \end{array} \left| \begin{array}{l} 2A - 6A + 4A = 0 \\ -3A + 4A = 3. \end{array} \right.$$

Звідси  $A = 3$ .

Отже,  $Y = 3xe^{2x}$  і  $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + 3xe^{2x}$ .

2)  $f(x) = 2x^3 - 30$ . Маємо функцію вигляду  $f(x) = P_n(x)e^{ax}$ , де  $n=3$ ,  $\alpha=0$ . Оскільки,  $\alpha \neq \kappa_{1,2}$ , то

$$\begin{array}{l} 2 \\ -3 \\ 1 \end{array} \left| \begin{array}{l} Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ Y'' = 6Ax + 2B \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x^3 \\ x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 2A = 2; A = 1; \\ 2B - 9A = 0; B = \frac{9}{2}; \\ 2C - 6B + 6A = 0; C = \frac{21}{2}; \\ 2D - 3C + 2B = -30; pD = -\frac{15}{4}. \end{array} \right.$$

Отже,  $Y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$ , а  $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{21}{2}x - \frac{15}{4}$  –

шуканий загальний розв'язок.

**Приклад 5** Знайти загальний розв'язок рівняння  $2y'' + 5y' = f(x)$ , якщо:

1)  $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$ , 2)  $f(x) = 29 \cos x$ .

**Розв'язання.** Маємо ЛНДР-2,  $y = \bar{y} + Y$ . Знаходимо загальний розв'язок

однорідного рівняння  $2y'' + 5y' = 0$ .  $2\kappa^2 + 5\kappa = 0$ ;  $\kappa(2\kappa + 5) = 0$ ;  $\kappa_1 = 0$ ;  $\kappa_2 = -\frac{5}{2}$ .

Оскільки  $\kappa_1 \neq \kappa_2$ , то  $\bar{y} = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x}$ .

1)  $f(x) = 5x^2 - 2x - 1$  – функція вигляду  $f(x) = P_n(x)e^{ax}$ , де  $n=2$ ,  $\alpha=0=\kappa_1$ , тому  $Y = x(Ax^2 + Bx + C)$  або

$$\begin{array}{l} 0 \\ 5 \\ 2 \end{array} \left| \begin{array}{l} Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx \\ Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ Y'' = 6Ax + 2B \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 15A = 5; A = \frac{1}{3}; \\ 10B + 12A = -2; B = -\frac{3}{5}; \\ 5C + 4B = -1; C = \frac{7}{25}. \end{array} \right.$$

Отже,  $Y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$  і остаточно  $y = C_1 + C_2e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$ .

2)  $f(x) = 29 \cos x$  – функція вигляду  $f(x) = A \cos x + B \sin x$ , де  $b = 1 \neq \kappa_{1,2}$ ,

тому

$$\begin{array}{l|l} 0 & Y = M \cos x + N \sin x \\ 5 & Y' = -M \sin x + N \cos x \\ 2 & Y'' = -M \cos x - N \sin x \\ \hline \sin x & -5M - 2N = 0; N = -\frac{5}{2}M \\ \cos x & 5N - 2M = 29; -\frac{25}{2}M - 2M = 29; M = -2; N = 5. \end{array}$$

Таким чином,  $Y = -2 \cos x + 5 \sin x$  і шуканий загальний розв'язок

$$y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} - 2 \cos x + 5 \sin x.$$

**Приклад 6** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' - 3y' + 2y = f(x)$ , якщо  $f(x) = (3 - 4x)e^x$ .

**Розв'язання.** Загальний розв'язок шукаємо у вигляді  $y = \bar{y} + Y$ . Загальний розв'язок однорідного рівняння  $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$  – знайдено раніше (див. приклад 4).  $f(x) = (3 - 4x)e^x$  – функція вигляду  $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ , де  $n=1$ ,  $\alpha=1=\kappa_1 \neq \kappa_2$ , тому  $Y = x(Ax + B)e^x$  або

$$\begin{array}{l|l} 2 & Y = (Ax^2 + Bx)e^x \\ -3 & Y' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x \\ 1 & Y'' = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x \\ \hline x^2 e^x & 2A - 3A + 2A = 0; \\ xe^x & 2B - 6A - 3B + 2A + 2A + B = -4; A = 2; \\ e^x & -3B + 2A + B + B = 3; B = 1. \end{array}$$

Таким чином,  $Y = (2x^2 + x)e^x$  і остаточно  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (2x^2 + x)e^x$ .

**Приклад 7** Знайти загальний розв'язок рівняння  $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$ .

**Розв'язання.** Розв'язуючи рівняння таким же методом, як і в попередніх прикладах, маємо:

$$y = \bar{y} + Y; \quad y'' - 4y' + 4y = 0; \quad \kappa^2 - 4\kappa + 4 = 0; \quad (\kappa - 2)^2 = 0; \quad \kappa_1 = \kappa_2 = 2; \quad \bar{y} = (C_1 + C_2 x)e^{2x}.$$

Права частина  $f(x) = 3e^{2x}$  – функція спеціального вигляду, де  $n=0$ ,  $\alpha=2=\kappa_1=\kappa_2$ , тому

$$\begin{array}{l|l} 4 & Y = Ax^2 e^{2x} \\ -4 & Y' = 2Axe^{2x} + 2Ax^2 e^{2x} \\ 1 & Y'' = 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Axe^{2x} + 4Ax^2 e^{2x} \\ \hline x^2 e^{2x} & 4A - 8A + 4A = 0 \\ xe^{2x} & -8A + 4A + 4A = 0 \\ e^{2x} & 2A = 3; A = \frac{3}{2}. \end{array}$$

Отже,  $Y = \frac{3}{2}x^2e^{2x}$  і остаточно  $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x}$  – шуканий загальний розв'язок.

**Приклад 8** Знайти частинний розв'язок рівняння  $y'' - y' = 2(1 - x)$ , який задовольняє даним початковим умовам  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ .

**Розв'язання.** Загальний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді  $y = \bar{y} + Y$ . Розв'язуємо однорідне рівняння  $y'' - y' = 0$ ;

$$\kappa^2 - \kappa = 0; \quad \kappa(\kappa - 1) = 0; \quad \kappa_1 = 0; \quad \kappa_2 = 1;$$

$$\bar{y} = C_1 + C_2e^x.$$

Оскільки  $f(x) = 2(1 - x)$ , то  $n = 1, \alpha = 0 = \kappa_1 \neq \kappa_2$ , тому

$$\begin{array}{l|l} 0 & Y = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx \\ -1 & Y' = 2Ax + B \\ 1 & Y'' = 2A \end{array} \quad \begin{array}{l} x \\ x^0 \end{array} \left| \begin{array}{l} -2A = -2; A = 1; \\ -B + 2A = 2; B = 0. \end{array} \right.$$

Таким чином,  $Y = x^2$  і, отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння набуває вигляду:  $Y = C_1 + C_2e^x + x^2$ .

Виходячи з початкових умов:  $y(0) = 1, y'(0) = 1$  і враховуючи, що  $y' = C_2e^x + 2x$ , маємо систему

$$\begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 1 = C_2, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знаходимо  $C_1 = 0$  і  $C_2 = 1$ . Підставляючи числові значення  $C_1$  і  $C_2$  в загальний розв'язок рівняння, одержимо шуканий частинний розв'язок  $y = e^x + x^2$ , який задовольняє даним початковим умовам.

**Приклад 9** Знайти частинний розв'язок даного диференціального рівняння  $y'' + y + \sin 2x = 0$ , який задовольняє початковим умовам  $y(\pi) = y'(\pi) = 1$ .

**Розв'язання.** Зведемо рівняння до загального вигляду  $y'' + y = -\sin 2x$ .

Далі, розв'язуючи його відповідним методом, будемо мати:

$$y = \bar{y} + Y;$$

$$y'' + y = 0; \quad \kappa^2 + 1 = 0; \quad \kappa_{1,2} = \pm i; \quad \alpha = 0; \beta = 1;$$

$$\bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Оскільки  $f(x) = -\sin 2x$ , то  $b = 2(\pm bi = \pm 2i \neq \kappa_{1,2})$  і тому

$$\begin{array}{l|l} 1 & Y = M \cos 2x + N \sin 2x \\ 0 & Y' = -2M \sin 2x + 2N \cos 2x \\ 1 & Y'' = -4M \cos 2x - 4N \sin 2x \end{array} \quad \begin{array}{l} \cos 2x \\ \sin 2x \end{array} \left| \begin{array}{l} M - 4M = 0; M = 0; \\ N - 3N = -1; N = \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Отже,  $Y = \frac{1}{3}\sin 2x$  і загальний розв'язок неоднорідного рівняння набуде

вигляду  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{3}\sin 2x$ .

Знаходимо  $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3} \cos 2x$ . Враховуючи початкові умови:

при  $x = \pi; y = y' = 1$ , отримаємо систему

$$\begin{cases} 1 = -C_1, \\ 1 = -C_2 + \frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв'язавши яку, знаходимо  $C_1 = -1, C_2 = -\frac{1}{3}$ . Підставляючи числові значення

$C_1$  і  $C_2$  в загальний розв'язок, одержимо шуканий частинний розв'язок

$$y = -\cos x - \frac{1}{3} \sin x + \frac{1}{3} \sin 2x.$$

### Домашнє завдання

**Теорія** Числові ряди. Означення. Збіжність ряду та його сума. Необхідна умова збіжності ряду. Властивості числових рядів. Ряди з додатними членами. Ознаки порівняння. Ознака Даламбера збіжності числових рядів із додатними членами. Радикальна ознака Коші збіжності числових рядів із додатними членами. Інтегральна ознака Коші збіжності числових рядів із додатними членами. [20], с. 152–159.

### Вправи

Знайти загальний або частинний розв'язок наступних диференціальних рівнянь.

1  $y'' + 2y' + 5y = -\frac{17}{2} \cos 2x.$

Відповідь:  $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{2} \cos 2x - 2 \sin 2x.$

2  $y'' - 2y' + 2y = 2x.$  Відповідь:  $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1.$

3  $y'' - 3y' + 2y = f(x),$  якщо

1)  $f(x) = 10e^{-x}.$

Відповідь:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{5}{3} e^{-x}.$

2)  $f(x) = 2 \sin x.$

Відповідь:  $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$

4  $y'' + y = \cos x.$  Відповідь:  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} x \sin x.$

5  $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6; y(0) = 1; y'(0) = 3,2.$

Відповідь:  $y = e^x (0,16 \cos x + 0,28 \sin x) + x^2 + 2,2x + 0,84.$

6  $y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3); y(0) = y'(0) = 2.$

Відповідь:  $y = e^x (e^x - x^2 - x + 1).$

7 Указати вигляд частинних розв'язків неоднорідних рівнянь:

а)  $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$ ;

б)  $y'' + 9y = \cos 2x$ ;

в)  $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ .

Відповідь:

а)  $x e^{2x} (Ax^2 + Bx + C)$ ;

б)  $A \cos 2x + B \sin 2x$ ;

в)  $x e^x (A \cos x + B \sin x)$ .

### Питання для самоперевірки

1 Сформулювати теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.

2 Який вигляд має частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі спеціальною правою частиною у випадках:

1)  $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$ ;

2)  $f(x) = P_n(x) e^{\alpha x}$ ;

3)  $f(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$ ?

### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 17. Числові ряди.

#### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Для ряду  $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$  знайти суму  $n$  перших членів ряду  $S_n$ , довести збіжність ряду, користуючись означенням збіжності.

**Розв'язання.** Зауважимо, що дріб

$$\frac{3^n + 2^n}{6^n} = \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Кожний член ряду подамо у вигляді цієї суми, і часткову суму ряду зможемо записати таким чином:  $S_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right)$ .

Проведемо групування доданків

$$S_n = \left[ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] + \left[ \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right].$$

Вирази в квадратних дужках є сумами  $n$  перших членів геометричної послідовності зі знаменником  $q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = \frac{1}{3}$ , тому  $S_n$  можна записати у вигляді

$$S_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n}.$$



Знайдемо границю  $S_n$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^n} \right) = \frac{3}{2}.$$

Отже, даний ряд збігається і його сума дорівнює  $S = \frac{3}{2}$ .

**Приклад 2** Дослідити збіжність ряду  $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$

**Розв'язання.** Маємо  $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ . Для порівняння обираємо гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , який розбігається. Ряд  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$  також розбігається, він

отриманий із гармонічного ряду відкиданням першого члена. Оскільки  $\ln 2 < 2$ ,  $\ln 3 < 3, \dots$ ,  $\ln n < n$ ,  $\ln(n+1) < n+1$ , то  $\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{3}$ ;  $\dots$ ;  $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ . Отже,

члени дослідженого ряду є більшими за члени розбіжного ряду. На основі другої ознаки порівняння рядів він розбігається.

**Приклад 3** Дослідити збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$ .

**Розв'язання.** Для порівняння обираємо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Цей ряд збіжний, оскільки  $p = 2 > 1$ .

За третьою ознакою порівняння рядів

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 4n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n - 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1 \neq 0.$$

Границя відношення загальних членів рядів існує, отже, заданий ряд так само, як і обраний, збігається.

**Приклад 4** Дослідити збіжність ряду  $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \dots + \frac{1+n}{1+n^2} + \dots$

**Розв'язання.** Маємо  $u_n = \frac{1+n}{1+n^2}$ . У якості ряду порівняння обираємо гармонічний ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ , який при  $p = 1$  розбігається. Застосовуючи третю

ознаку порівняння рядів, отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{1+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1 \neq 0.$$

Робимо висновок про те, що обидва ряди одночасно розбігаються.

**Приклад 5** Дослідити збіжність ряду  $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$

**Розв'язання.** Кожний член ряду можна подати у вигляді суми двох

доданків  $u_n = \frac{3^n}{6^n} + \frac{2^n}{6^n} = \left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ , тому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Обидва ряди є геометричними і збігаються, оскільки  $q_1 = \frac{1}{2} < 1$ ;  $q_2 = \frac{1}{3} < 1$ .

На основі другої властивості рядів даний ряд, який є сумою двох збіжних, збігається.

**Приклад 6** Дослідити збіжність ряду  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$

**Розв'язання.** При  $n \rightarrow \infty$   $u_n$  являє невизначеність вигляду  $0 \cdot (\infty - \infty)$ .  
Перетворимо  $u_n$ :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{n+1 - n+1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = \frac{2}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}. \end{aligned}$$

У якості еталонного ряду застосуємо ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ , який збігається при  $p = \frac{1}{2} > 1$ .

Застосовуючи третю ознаку порівняння рядів

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^{\frac{3}{2}}}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 1 \neq 0,$$

робимо висновок про те, що обидва ряди одночасно збігаються.

**Приклад 7** Довести збіжність ряду  $\frac{1}{5!} + \frac{1}{8!} + \dots + \frac{1}{(3n+2)!} + \dots$

**Розв'язання.** Це ряд, що має додатні члени. Загальний член ряду  $u_n = \frac{1}{(3n+2)!}$  містить факторіал, тому збіжність дослідимо за ознакою Даламбера.

Замінивши у  $u_n$  величину  $n$  на  $n+1$ , знайдемо

$$u_{n+1} = \frac{1}{[3(n+1)+2]!} = \frac{1}{(3n+5)!}.$$

Отже,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)!}{(3n+5)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n+2)(3n+3)(3n+4)(3n+5)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(3n+3)(3n+4)(3n+5)} = 0 < 1,$$

отже, ряд збігається.

**Приклад 8** Дослідити на збіжність ряд  $\frac{1}{5} + \frac{4}{25} + \dots + \frac{n^2}{5^n} + \dots$

**Розв'язання.** Це ряд, що має додатні члени. Застосуємо до нього ознаку Даламбера. Запишемо  $(n+1)$ -й член ряду  $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}$ . Знайдемо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 5^n}{5^{n+1} n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{5n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{10n} = \frac{2}{10} < 1,$$

таким чином, ряд збігається.

**Приклад 9** Дослідити на збіжність ряд  $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \dots + \frac{1}{\ln^n(n+1)} + \dots$

**Розв'язання.** Це ряд, що має додатні члени, його загальний член  $u^n = \left( \frac{1}{\ln(n+1)} \right)^n$ . Отже, доцільно застосувати радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \frac{1}{\ln(n+1)} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

таким чином, даний ряд збігається.

**Приклад 10** Дослідити на збіжність ряд  $\arctg 1 + \arctg^2 \frac{1}{2} + \dots + \arctg^n \frac{1}{n} + \dots$

**Розв'язання.** Це ряд, що має додатні члени, загальний член ряду  $u_n = \left( \arctg \frac{1}{n} \right)^n$ . Застосовуючи радикальну ознаку Коші, отримаємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left( \arctg \frac{1}{n} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

отже, ряд збігається.

**Приклад 11** Дослідити на збіжність ряд  $\frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} + \dots$

**Розв'язання.** Даний ряд має додатні спадні члени

$$\frac{1}{2 \ln 2} > \frac{1}{3 \ln 3} > \dots > \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} > \dots$$

Розглянемо функцію  $f(n) = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}$ , частинні значення якої порівнюють членам ряду при  $n = 1, 2, 3, \dots$

$$f(1) = \frac{1}{2 \ln 2}, f(2) = \frac{1}{3 \ln 3}, \dots, f(n) = \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)}, \dots$$

Невласний інтеграл

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} f(n) dn &= \int_1^{\infty} \frac{dn}{(n+1) \ln(n+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{d(\ln(n+1))}{\ln(n+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln |\ln(n+1)|_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (\ln |\ln(b+1)| - \ln |\ln 2|) = \infty, \end{aligned}$$

інтеграл розбігається. За інтегральною ознакою Коши ряд також розбігається.

### Домашнє завдання

**Теорія** Знакозмінні ряди. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду. Абсолютна і умовна збіжності. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус збіжності. Область збіжності степеневому ряду. Формула і ряд Тейлора й Маклорена. Розвинення основних елементарних функцій у ряд Маклорена. [20], с. 159 –166.

### Вправи

Знайти загальні члени наступних рядів

$$1 \quad \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots$$

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{n(n+3)}.$$

$$2 \quad \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \arctg \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \dots$$

$$\text{Відповідь: } \arctg \frac{1}{2n^2}.$$

Дослідити збіжність числових рядів

$$3 \quad [2] \quad \text{№ 2740} \quad \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається.

$$4 \quad [2] \quad \text{№ 2741} \quad \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n+1}{n(n+2)} + \dots$$

Відповідь: ряд розбігається.

$$5 \quad [2] \quad \text{№ 2742} \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} + \dots + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} + \dots$$

Відповідь: ряд розбігається.

$$6 \quad [2] \quad \text{№ 2744} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3n-1} + \dots$$

Відповідь: ряд розбігається.

$$7 \quad [2] \quad \text{№ 2751} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{1}{n^2+1}}.$$

Відповідь: ряд розбігається.

$$8 \quad [2] \quad \text{№ 2772} \quad 1 + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n}{2n-1} + \dots$$

Відповідь: ряд розбігається.

$$9 \quad [2] \quad \text{№ 2776} \quad \frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \dots + \frac{n}{1000n+1} + \dots$$

Відповідь: ряд розбігається.

$$10 [2] \text{ № 2784 } \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \dots \sin \frac{\pi}{2n} + \dots$$

Відповідь: ряд розбігається.

$$1 [2] \text{ № 2755 } \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається.

$$2 [2] \text{ № 2780 } 2 + \frac{4}{16} + \dots + \frac{2^n}{n^4} + \dots$$

Відповідь: ряд розбігається.

$$3 [2] \text{ № 2761 } \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається.

$$4 [2] \text{ № 2774 } 1 + \frac{4}{2!} + \dots + \frac{n^2}{n!} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається.

$$5 [2] \text{ № 2764 } \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$$

Відповідь: ряд збігається.

$$6 [2] \text{ № 2767 } \frac{1}{2 \ln^2 2} + \frac{1}{3 \ln^2 3} + \dots + \frac{1}{(n+1) \ln^2 (n+1)} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається.

### Питання для самоперевірки

1 Дайте означення числового ряду, його загального члена, частинної суми збіжного й розбіжного рядів.

2 Дослідження збіжності ряду, складеного з членів геометричної прогресії.

3 Сформулюйте й доведіть основні властивості числових рядів.

4 Сформулюйте й доведіть необхідну ознаку збіжності ряду й наслідок цієї ознаки.

5 Сформулюйте й доведіть ознаки порівняння рядів з додатними членами.

6 Сформулюйте й доведіть ознаку Даламбера і Коші (радикальну й інтегральну) збіжності рядів, наведіть приклади застосування цих ознак.

7 Дослідження збіжності узагальненого гармонічного ряду за допомогою інтегральної ознаки Коші.

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 18. Знакозмінні ряди. Функціональні ряди.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Дослідити знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжності.

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} + \dots$$

**Розв'язання.** Даний ряд є знакопечережним. Члени ряду спадають

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \dots > \frac{1}{\ln(n+1)} > \dots \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

Умови ознаки Лейбніца виконані, а це означає, що ряд збігається умовно. Перевіримо ряд на абсолютну збіжність, складаючи ряд із абсолютних величин даного ряду:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

Отриманий ряд за другою ознакою порівняння розбігається. Таким чином, даний ряд збігається умовно.

**Приклад 2** Дослідити знакозмінний ряд на абсолютну й умовну збіжності.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^2}.$$

**Розв'язання.** Даний ряд є знакопечережним. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

$$1) \quad 2 > 1 > \frac{8}{3} > \dots > \frac{2^n}{n^2} > \dots;$$

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n)'}{(n^2)'} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \ln 2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \ln^2 2}{2} = \infty.$$

Друга умова ознаки Лейбніца не виконується, тому ряд розбігається.

**Приклад 3** Знайти область збіжності ряду

$$\frac{x+1}{1 \cdot 2} + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n} + \dots$$

**Розв'язання.** Для даного функціонального ряду запишемо

$$u_n = \frac{(x+1)^n}{n \cdot 2^n}; u_{n+1} = \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Обчислимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x+1|^{n+1}}{|x|^n} \cdot \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} |x+1|.$$

На основі ознаки Даламбера можна стверджувати, що ряд збігається і причому абсолютно, якщо  $\frac{1}{2}|x+1| < 1$  або  $-1 < x < 1$ ; ряд розбігається, якщо

$\frac{1}{2}|x+1| > 1$ , тобто якщо  $-\infty < x < -3$  або  $1 < x < \infty$ . При  $x = 1$  отримаємо гармонічний ряд  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ , який розбігається, а при  $x = -3$  – ряд:  $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots$ , який відповідно до ознаки Лейбніца збігається умовно.

Отже, даний ряд збігається при  $-3 \leq x < 1$ .

**Приклад 4** Знайти область збіжності степеневому ряду

$$10x + 100x^2 + 1000x^3 + \dots + 10^n x^n + \dots$$

**Розв’язання.** Даний ряд є повним степеневим за степенями  $x$ . Знайдемо радіус збіжності за формулою (4.6) при  $a_n = 10^n$ ;

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^n}} = \frac{1}{10}.$$

Для всіх  $x \in \left] -\frac{1}{10}; \frac{1}{10} \right[$  ряд збігається. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках  $x = -\frac{1}{10}$  і  $x = \frac{1}{10}$ .

При  $x = -\frac{1}{10}$  отримаємо знакопозначений ряд  $-1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$ , який розбігається, оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 1$ .

При  $x = \frac{1}{10}$  отримаємо знакостатний ряд  $1 + 1 + 1 + \dots$ , який розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності числового ряду  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 1 \neq 0$ .

Отже, областю збіжності степеневому ряду є інтервал  $\left( -\frac{1}{10}; \frac{1}{10} \right)$ .

**Приклад 5** Знайти область збіжності степеневому ряду

$$x + \frac{x^2}{20} + \frac{x^3}{300} + \dots + \frac{x^n}{n \cdot 10^{n-1}} + \dots$$

**Розв’язання.** Даний ряд є повним степеневим за степенями  $x$ .

$$a_n = \frac{1}{n \cdot 10^{n-1}}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)10^n}.$$

Радіус збіжності

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)10^n}{n10^{n-1}} = 10 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 10.$$

Для всіх  $x \in ]-10; 10[$  ряд збігається.

При  $x = -10$  отримаємо знакопозначений ряд

$$-10 + \frac{10}{2} - \frac{10}{3} + \dots + (-1)^n \frac{10}{n} + \dots$$

Для нього виконуються умови ознаки Лейбніца. Ряд збігається.

При  $x = 10$  отримаємо знакододатний ряд

$$10 + \frac{10}{2} + \frac{10}{3} + \dots + \frac{10}{n} + \dots = 10 \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right).$$

Даний ряд розбігається, оскільки є гармонічним рядом, помноженим на 10. Отже, областю збіжності даного ряду є інтервал  $[-10; 10]$ .

**Приклад 6** Розвинути многочлен  $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$  за степенями двочлена  $(x + 1)$ .

**Розв'язання.** Обчислимо значення функції та її похідних при  $x = a = -1$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4, \quad f(-1) = -1 + 3 + 2 + 4 = 8,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2, \quad f'(-1) = 3 - 6 - 2 = -5,$$

$$f''(x) = 6x + 6, \quad f''(-1) = -6 + 6 = 0,$$

$$f'''(x) = 6, \quad f'''(-1) = 6.$$

Підставляючи дані значення в ряд Тейлора, отримаємо

$$x^3 + 3x^2 - 2x + 4 = 8 - 5(x + 1) + \frac{0 \cdot (x + 1)^2}{2!} + \frac{6(x + 1)^3}{3!} = 8 - 5(x + 1) + (x + 1)^3.$$

**Приклад 7** Розвинути функцію  $f(x) = \sqrt[3]{8 - x^3}$  в околі точки  $x = 0$ , скориставшись формулою розвинення в ряд Маклорена функції  $(1 + x)^m$ .

**Розв'язання.** Перетворимо дану функцію, замінивши  $x$  на  $\left(-\frac{x^3}{8}\right)$ :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[3]{8 - x^3} = \sqrt[3]{8 \left(1 - \frac{x^3}{8}\right)} = 2 \left(1 - \frac{x^3}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= 2 \left[ 1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^3}{8}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{2!} \left(-\frac{x^3}{8}\right)^2 + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{3} - n + 1\right) \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^3}{8}\right)^n + \dots \right] = \\ &= 2 \left[ 1 - \frac{x^3}{3 \cdot 8} - \dots - \frac{2 \cdot 5 \dots (3n - 4)}{3^n \cdot n!} \cdot \frac{x^{3n}}{8^n} - \dots \right] = \\ &= 2 - 2 \left[ \frac{1}{3} \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{2}{3^2 \cdot 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots + \frac{2 \cdot 5 \dots (3n - 4)}{3^n \cdot n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{3n} + \dots \right]. \end{aligned}$$

### Домашнє завдання

#### Вправи

Дослідити на збіжність ряди.

$$1 \quad [2] \quad \text{№ 2791} \quad 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається абсолютно



$$2 \text{ [2] } \text{ № 2794 } \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} - (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

$$3 \text{ [2] } \text{ № 2796 } -1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається умовно.

$$4 \text{ [2] } \text{ № 2797 } \frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \frac{27}{8} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

$$5 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n!}.$$

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

$$6 \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{n}{2^n} + \dots$$

Відповідь: ряд збігається абсолютно.

Знайти область збіжності степеневих рядів.

$$7 \text{ [2] } \text{ № 2802 }$$

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

Відповідь:  $-1 < x < 1$ .

$$8 \text{ [2] } \text{ № 2805 }$$

$$x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

Відповідь:  $-1 \leq x \leq 1$ .

$$9 \text{ [2] } \text{ № 2885 }$$

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots$$

Відповідь:  $-1 \leq x \leq 1$ .

$$10 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}.$$

Відповідь:  $2 < x \leq 8$ .

Розвинути функції в степеневі ряди.

11 [2] № 1498 Розвинути многочлен  $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$  за степенями  $(x-4)$ .

Відповідь:  $(x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56$ .

12 [2] № 2842 Розвинути функцію  $f(x) = \sqrt{x^3}$  в ряд Тейлора в околі точки  $x = 1$ .

Відповідь:  $1 + \frac{3}{2} \left[ (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2 \cdot 2!} - \frac{(x-1)^3}{2^2 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-5)(x-1)^n}{2^{n-1} \cdot n!} + \dots \right]$

13 [2] № 2844 Розвинути функцію  $f(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$  в ряд Тейлора в околі точки  $x = 2$ .

Відповідь:  $1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{(x-2)^2}{2!} + \dots + (-1)^{n+1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n-2} \cdot \frac{(x-2)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$

14 [2] № 2856 Розвинути функцію  $f(x) = e^{-x^2}$  в ряд Маклорена.

Відповідь:  $1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(n-1)!} + \dots$

15 [2] № 2859 Розвинути функцію  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$  в ряд Маклорена.

Відповідь:  $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^3 \cdot 3!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1} \cdot (2n-1)!} + \dots$

16 [2] № 2854 Розвинути функцію  $f(x) = x \ln(1+x)$  в ряд Маклорена.

Відповідь:  $x^2 - \frac{x^3}{2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n} + \dots$

### Питання для самоперевірки

- 1 Дайте означення знакозмінного ряду.
- 2 Сформулюйте й доведіть достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду.
- 3 Дайте означення знакопозадовжнього ряду.
- 4 Сформулюйте й доведіть ознаку Лейбніца збіжності знакопозадовжнього ряду та наведіть приклади застосування цієї ознаки.
- 5 Дайте означення абсолютно й умовно збіжних знакозмінних рядів.
- 6 Сформулюйте зауваження до ознаки Лейбніца про заміну суми ряду сумою  $n$  перших членів ряду.
- 7 Дайте означення степеневому ряду й інтервалу його збіжності.
- 8 Сформулюйте основні властивості збіжних степеневих рядів.
- 9 Вивести формулу для обчислення радіуса збіжності степеневому ряду.
- 10 Запишіть формулу Тейлора для довільної функції з залишком у формі Лагранжа і покажіть, за яких умов формула Тейлора переходить в ряд Тейлора, а також в ряд Маклорена.
- 11 Розвинути функції  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $e^x$ ,  $(1+x)^m$ ,  $\ln(1+x)$  в ряд Маклорена, знайдіть проміжок збіжності.

## **ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 19. Випадкові події. Основні поняття.**

**Елементи комбінаторики. Класифікація подій. Основні поняття та визначення. Класична та статистична ймовірність, її властивості. Відносна частота появи події. Геометрична ймовірність.**

### **Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** Скільки чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо:

- а) жодна з цифр не повторюється більше одного разу;
- б) цифри можуть повторюватися;
- в) цифри повинні бути непарними (цифри можуть повторюватися)?

#### **Розв'язання.**

а) Першою цифрою числа може бути одна з п'яти цифр – 1, 2, 3, 4, 5 (0 не може бути першою цифрою, оскільки в такому випадку число не є чотиризначним); якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана п'ятьма способами (так як тепер 0 включається), третя – чотирма способами, четверта – трьома способами. Згідно з правилом множення загальне число способів дорівнює  $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$ .

б) Першою цифрою числа може бути одна з п'яти цифр – 1, 2, 3, 4, 5 (п'ять можливостей), для кожної з наступних цифр маємо шість можливостей (0, 1, 2, 3, 4, 5). Отже, число шуканих чисел дорівнює  $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3 = 1080$ .

в) Першою цифрою може бути одна з цифр – 1, 2, 3, 4, 5, а останньою – одна з цифр 1, 3, 5 (числа повинні бути непарними). Отже, загальна кількість чисел дорівнює  $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 = 540$ .

**Приклад 2** Скільки тризначних і чотиризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, якщо кожна цифра при складанні числа використовується не більше одного разу?

**Розв'язання.** За правилом множення чотиризначне число можна скласти  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  способами, тризначне число –  $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$  способами. Тоді або тризначне, або чотиризначне число може бути складене за правилом додавання  $24 + 24 = 48$  способами. Таким чином, загальне число тризначних і чотиризначних чисел, які можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, використовуючи під час складання числа кожен цифру не більше одного разу, дорівнює 48.

**Приклад 3** Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

**Розв'язання.** Кожне тризначне число, складене з указаних цифр, можна розглядати як розміщення з повтореннями, складене з трьох цифр, узятих із даних семи. Тому шукана кількість тризначних чисел

$$\overline{A_7^3} = 7^3 = 343.$$

**Приклад 4** Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, якщо кожна цифра в зображенні числа зустрічається один раз?

**Розв'язання.** Чотиризначне число може бути подане як деяка перестановка з цифр 0, 1, 2, 3, в якій перша цифра відмінна від нуля. Оскільки

число перестановок з чотирьох цифр дорівнює  $P_4 = 4!$  і з них  $P_3 = 3!$  перестановок починаються з нуля, то шукана кількість чисел дорівнює

$$P_4 - P_3 = 4! - 3! = 4 \cdot 3! - 3! = (4 - 1) \cdot 3! = 3 \cdot 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = 18.$$

**Приклад 4** Студенти першого курсу вивчають 10 різних предметів. У понеділок три пари, причому всі різні. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?

**Розв'язання.** Шукана кількість способів дорівнює числу розміщень з 10 елементів по три, тобто

$$A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720,$$

оскільки мова йде про всілякі групи, кожна з яких складається з трьох елементів, взятих із 10, і які відрізняються одна від одної або складом елементів, або їх порядком.

**Приклад 5** У турнірі приймають участь 11 шахістів, причому кожні два шахісти зустрічаються один раз. Скільки партій було зіграно в турнірі?

**Розв'язання.** Кількість зіграних партій знаходимо за формулою числа сполучень з  $n$  різних елементів по  $k$ , бо тут мова йде про групи елементів із 11 по 2, які відрізняються одна від одної принаймні одним елементом. Порядок тут не враховується в силу того, що кожні два шахісти зустрічаються один раз. Отже, число зіграних партій

$$C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{1 \cdot 2} = 55.$$

**Приклад 6** Партія містить 30 деталей, вісім із яких є дефектними. Скількома способами можна відібрати з цієї партії шість деталей так, щоб чотири з них були якісними, а дві дефектними?

**Розв'язання.** Серед 30 деталей вісім є дефектними і  $30 - 8 = 22$  якісних. Чотири якісних деталі можна взяти з 22 якісних деталей  $C_{22}^4$  способами, а дві дефектні деталі з восьми дефектних деталей можна взяти  $C_8^2$  способами. Тому за правилом множення число способів, які дають можливість відібрати із цієї партії шість деталей так, щоб чотири з них були якісними і дві дефектними, складатиме

$$C_{22}^4 \cdot C_8^2 = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 204820.$$

**Приклад 7** У коробці міститься шість однакових занумерованих кубиків. Навмання по одному виймають усі кубики. Знайти ймовірність того, що номери вийнятих кубиків з'являються у зростаючому порядку.

**Розв'язання.** Подія  $A$  – номери вийнятих кубиків з'являються у зростаючому порядку. Число всіх наслідків знаходимо за формулою

$$n = P_6 = 6! = 720.$$

Очевидно, що сприятливим події  $A$  є один наслідок (номери вийнятих кубиків з'являються у зростаючому порядку: 1, 2, 3, 4, 5, 6). Тому шуканою ймовірністю є:

$$P(A) = \frac{1}{720}.$$

**Приклад 8** У конверті серед 100 фотографій знаходиться одна з тих, що шукають. Із конверта виймають 10 фотографій. Знайти ймовірність того, що серед них виявиться потрібна.

**Розв'язання.** Нехай подія  $A$  полягає в тому, що серед 10 навмання вийнятих фотографій виявиться потрібна, тобто та, яку відшуковують.

Число всіх наслідків можна обчислити за формулою

$$n = C_{100}^{10} = \frac{100!}{10!90!}.$$

Сприятливими наслідками будуть такі, за яких серед 10 вийнятих фотографій виявиться та одна, яку відшуковують і, отже,  $10 - 1 = 9$  непотрібних. Оскільки з усіх непотрібних  $100 - 1 = 99$  фотографій, об'єднуючи їх по дев'ять, можна скласти  $C_{99}^9$  груп, то, приєднуючи до кожної такої групи фотографію, що шукають, виявиться, що число наслідків, сприятливих події  $A$  буде наступним:

$$m = C_{99}^9 = \frac{99!}{9!90!}.$$

Отже, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{C_{99}^9}{C_{100}^{10}} = \frac{99!}{9!90!} \cdot \frac{100!}{10!90!} = \frac{99! \cdot 10!}{9! \cdot 100!} = \frac{99! \cdot 9! \cdot 10}{9! \cdot 99! \cdot 100} = \frac{10}{100} = 0,1.$$

**Приклад 9** Набираючи номер телефону, абонент забув останні три цифри і, пам'ятаючи лише, що ці цифри різні, набрав їх навмання. Зайти ймовірність того, що набрані потрібні цифри.

**Розв'язання.** Нехай подія  $A$  – набрані потрібні цифри. Враховуючи, що три потрібні цифри повинні бути набрані з 10 різних цифр (абонент пам'ятав, що цифри різні), число всіх наслідків знаходимо за формулою Число розміщень із  $n$  різних елементів по  $k$  без повторень, бо тут важливо, які це будуть цифри і який їх порядок. Таким чином,

$$n = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$$

Сприятливим події  $A$  є лише один наслідок (правильний номер телефону). Отже,

$$P(A) = \frac{1}{720}.$$

**Приклад 10** У партії з 15 деталей є вісім стандартних. Знайти ймовірність того, що серед шести, взятих навмання деталей, буде чотири стандартних.

**Розв'язання.** Очевидно, що число всіх елементарних наслідків  $n = C_{15}^6$ . Підрахуємо число елементарних наслідків, які сприяють події  $A$  – серед шести взятих деталей буде чотири стандартних і  $6 - 4 = 2$  нестандартних. Число способів, якими можна обрати чотири стандартних деталі з восьми, дорівнює  $C_8^4$ , а число способів, якими можна приєднати до них дві нестандартні деталі, дорівнює  $C_7^2$  (нестандартних деталей у партії  $15 - 8 = 7$ ). Кожна комбінація стандартних деталей може поєднуватися з кожною комбінацією нестандартних деталей, тому  $m = C_8^4 \cdot C_7^2$ . Таким чином,

$$P(A) = \frac{C_8^4 \cdot C_7^2}{C_{15}^6} = \frac{8! \cdot 7!}{4!4!2!5!} \cdot \frac{15!}{6!9!} = \frac{42}{143}.$$

**Приклад 11** Десять різних книг поставлені на виставку на одній полиці. Знайти ймовірність того, що три конкретні книги будуть поставлені поряд (подія  $A$ ).

**Розв'язання.** Уявимо собі, що три конкретні книги зв'язані разом. Тоді число можливих способів розташування зв'язки на полиці дорівнює числу перестановок із восьми елементів (зв'язка плюс решта сім книг), тобто  $P_8 = 8!$ . У середині зв'язки три книги можна переставити  $P_3 = 3!$  раз. При цьому кожна комбінація у середині зв'язки може поєднуватися з кожною із  $P_8$  комбінацій. Тому число сприятливих подій  $A$  наслідків дорівнює  $P_8 \cdot P_3$ , тобто  $m = P_8 \cdot P_3$ . Число  $n$  усіх можливих наслідків, очевидно, дорівнює  $P_{10} = 10!$ .

Таким чином, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{P_8 \cdot P_3}{P_{10}} = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{3!}{9 \cdot 10} = \frac{6}{9 \cdot 10} = \frac{1}{15}.$$

**Приклад 12** Першість з футболу виборюють 18 команд, серед яких п'ять є лідируючими. Шляхом жеребкування команди розподілені на дві групи по дев'ять команд у кожній. Яка ймовірність потрапляння всіх лідируючих команд до однієї групи (подія  $A$ )? Яка ймовірність попадання двох лідируючих команд в одну групу і трьох – до другої (подія  $B$ )?

**Розв'язання.** Очевидно, що

$$n = C_{18}^9.$$

Події  $A$  сприяє стільки наслідків, скількома способами п'яти лідируючих команд можуть утворити дев'ятки з чотирма командами з числа решти 13 команд. Тому обидві групи можуть бути утворені  $C_{13}^4$  способами.

Отже,

$$m_A = 2C_{13}^4$$

та

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{2C_{13}^4}{C_{18}^9} = \frac{1}{34}.$$

Розмірковуючи аналогічно, знаходимо, що число  $m_B$  наслідків, сприятливих події  $B$ , дорівнює

$$m_B = C_5^2 \cdot C_{13}^7 + C_5^3 \cdot C_{13}^6.$$

Отже,

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{C_5^2 \cdot C_{13}^7 + C_5^3 \cdot C_{13}^6}{C_{18}^9} = \frac{12}{17}.$$

**Приклад 13** На двох станках виготовляються однотипні деталі. Ймовірність браку для першого станка складає 3%, а для другого – 2%. Виготовлені деталі надходять на склад, причому деталей з першого станка надходить удвічі більше ніж з другого. Обчислити ймовірність того, що взята із складу на виставку деталь буде бракованою (подія  $A$ ).

**Розв’язання.** Припустимо, що на склад надійшло  $k$  штук деталей, виготовлених на другому станку, і, отже,  $2k$  штук деталей, виготовлених на першому станку. Таким чином, на склад надходить всього  $n = 3k$  штук деталей. Знаючи, що ймовірність браку для першого і другого станків складає відповідно  $0,03$  і  $0,02$ , знаходимо кількість бракованих деталей  $m_1 = 2k \cdot 0,03 = 0,06k$ , виготовлених на першому станку, і  $m_2 = k \cdot 0,02 = 0,02k$  кількість бракованих деталей, виготовлених на другому станку, отже, на склад надходить  $m = m_1 + m_2 = 0,06k + 0,02k = 0,08k$  штук бракованих деталей, тобто число наслідків, сприятливих події  $A$ . Таким чином, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{0,08k}{3k} \approx 0,027.$$

**Приклад 14** Робітник обслуговує два агрегати. Багатоденні спостереження показали, що кожний з них потребує десятихвилинної уваги робітника протягом години. Знайти ймовірність того, що протягом години один із агрегатів потребує уваги робітника в той час, коли він обслуговує другого (припускається, що зупинка кожного з агрегатів протягом години може відбутися в будь-який момент і моменти зупинки їх є незалежними).

**Розв’язання.** Нехай  $X$  – момент початку обслуговування першого агрегату,  $Y$  – другого. Один із агрегатів потребує уваги робітника в той час, коли він обслуговує другий, якщо  $|X - Y| \leq 10$ .

Розглянемо  $X$  і  $Y$  як координати в прямокутній системі координат. У якості одиниці масштабу оберемо хвилину.

Усілякі наслідки зобразяться точками квадрата із сторонами 60, а сприятливі наслідки розташуються у заштрихованій області (рис.19.1). Шукана ймовірність дорівнює відношенню площ заштрихованої частини (її простіше знайти як різницю між площею квадрата і площею двох прямокутних рівнобедрених трикутників, катети яких дорівнюють по 50 ум.од.) до площі всього квадрата, тобто

$$P = \frac{60^2 - 50 \cdot 50}{60^2} = \frac{11}{36}.$$

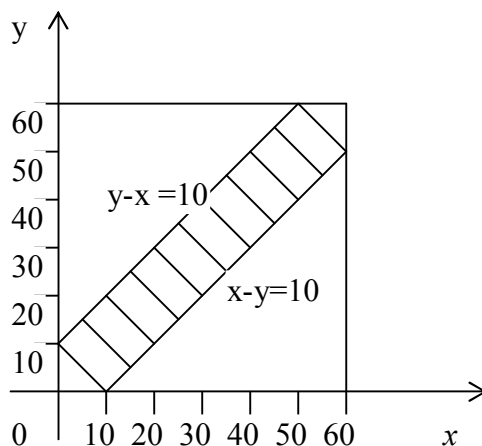


Рисунок 19.1

## Домашнє завдання

**Теорія** Теореми додавання ймовірностей. Теореми множення ймовірностей. Формули повної ймовірності та Байєса. [20], с. 174 –181.

## Вправи

Розв'язати задачі.

1 Скількома способами п'ять чоловік можуть розміститися у черзі до каси?

Відповідь: 120.

2 На вершину гори ведуть сім доріг. Скількома способами турист може піднятися на гору та спуститися з неї? Дайте відповідь на те саме питання, якщо піднімання та спускання здійснюються різними шляхами.

Відповідь: 49; 42.

3 Скількома способами з 30 студентів можна обрати делегацію, яка складається з трьох студентів?

Відповідь: 4060.

4 Студенту необхідно здати п'ять екзаменів протягом 12 днів. Скількома способами можна скласти розклад екзаменів?

Відповідь: 95040.

5 Скільки різних чотиризначних чисел можна скласти з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, якщо кожна цифра в зображенні числа зустрічається не більше одного разу?

Відповідь: 4536.

6 Енциклопедія складається з восьми томів. Скількома способами її можна поставити на полиці навмання, тобто так, щоб томи не були розташовані один за одним в порядку їх номерів?

Відповідь: 40319.

7 Скільки різних варіантів хокейної команди можна скласти з восьми нападаючих, п'яти захисників і 2 воротарів, якщо до складу команди повинно ввійти три нападаючих, два захисника і один воротар?

Відповідь: 1120.

8 У просторі задано сім точок, ніякі чотири з них не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести через сім заданих точок?

Відповідь: 35.

9 У касі театру залишилось два квитки у партер, три квитки в бельєтаж і один квиток на балкон. Скількома способами касир може видати по одному квитку шести різним особам?

Відповідь: 60.

10 Скільки словників потрібно мати, щоб можна було безпосередньо виконати переклад з будь-якої з чотирьох мов: української, англійської, німецької, французької на будь-яку іншу з цих чотирьох мов?

Відповідь: 12.

11 Профком повинен виділити путівки, які має в наявності, на турбази, в будинки відпочинку і спортивні табори по одній путівці чотирьом особам.



Скількома способами це можна зробити?

Відповідь: 81.

12 Пасажи́рський пої́зд складається з трьох вантажних вагонів і восьми купейних. Скількома способами можна сформувати состав, якщо вантажні вагони повинні знаходитися в його початку?

Відповідь: 241920.

13 У кіоску продається морозиво шести сортів. Скількома способами можна купити 10 морозив?

Відповідь: 3003.

14 Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 складаються усілякі числа, кожне з яких містить три або чотири цифри. Скільки таких чисел можна скласти, якщо цифри в числах не повторюються?

Відповідь: 180.

15 Група студентів із 30 чоловік вирішила обмінятися своїми фотографіями. Скільки всього фотографій потрібно для цього?

Відповідь: 870.

16 Скількома способами можна скласти наряд з трьох солдат і одного офіцера, якщо є 80 солдат і 3 офіцери?

Відповідь: 246480.

17 Скільки є перестановок із цифр 1, 2, 3, 4, 5 таких, які не починаються цифрою 5; числом 12?

Відповідь: 96; 114.

18 Скількома різними способами збори, які складаються з 30 осіб, можуть обрати із свого оточення голову, його замісника та секретаря?

Відповідь: 24360.

19 Командир відділення повинен відправити наряд на роботу в складі чотирьох чоловік. Скільки нарядів можна скласти з 10 чоловік?

Відповідь: 210.

20 Скільки різних трьохколових прапорів можна виготовити, поєднуючи синій, червоний і білий кольори?

Відповідь: 6.

21 У ящику знаходиться три білих і дев'ять чорних кульок. Із нього навмання виймають одну кульку. Яка ймовірність того, що вийнята кулька виявиться чорною?

Відповідь:  $\frac{3}{4}$ .

22 У ящику знаходиться чотири білих і сім чорних кульок. Із нього одночасно виймають дві кульки. Яка ймовірність того, що обидві кульки будуть білими?

Відповідь:  $\frac{6}{55}$ .

23 У партії із восьми деталей є шість стандартних. Знайти ймовірність того, що серед п'яти, взятих навмання деталей, три будуть стандартними.

Відповідь:  $\frac{5}{14}$ .

24 Ольга і Микола домовилися зустріти Новий рік у компанії з десяти чоловік, причому обоє хотіли сидіти за святковим столом поруч. Знайти ймовірність виконання їх бажання, якщо серед друзів прийнято розподіляти місця за жеребкуванням.

Відповідь:  $\frac{2}{9}$ .

25 Тридцять дві букви українського алфавіту написані на картках розрізної азбуки. Шість карток беруть навмання і кладуть одну за одною в порядку появи. Знайти ймовірність того, що отримають слово «градус».

Відповідь:  $\frac{1}{906192}$ .

26 На полиці 25 підручників, із яких п'ять – з теорії ймовірностей. Студент навмання бере два підручника. Знайти ймовірність того, що вони з теорії ймовірностей.

Відповідь:  $\frac{1}{30}$ .

27 Із п'яти букв розрізної азбуки складено слово «книга». Дитина, яка не вміє читати, розсипала ці букви і потім зібрала в довільному порядку. Знайти ймовірність того, що в неї знову вийшло слово «книга».

Відповідь:  $\frac{1}{120}$ .

28 Із восьми букв розрізної азбуки складено слово «інститут». Потім картки з буквами перемішують і знову збирають у довільному порядку. Яка ймовірність того, що знову отримають слово «інститут»?

Відповідь:  $\frac{1}{6720}$ .

29 Тризначне число утворено з навмання вибраних трьох цифр, які не повторюються, із числа цифр 1,2,3,4,5. Яка ймовірність того, що це число парне?

Відповідь: 0,4.

30 Задумано двозначне число, цифри якого різні. Знайти ймовірність того, що задуманим числом являтиметься:

а) випадково назване двозначне число;

б) випадково назване двозначне число, цифри якого різні.

Відповідь: а)  $\frac{1}{90}$ ; б)  $\frac{1}{81}$ .

31 Монета кинута двічі. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз з'явиться “герб”.

Відповідь:  $\frac{3}{4}$ .

32 У пачці є 20 лотерейних квитків, які мають номери 101, 102, ..., 120 і розташовані довільно. Навмання виймають дві картки. Знайти ймовірність того, що будуть вийняті квитки з номерами 101 і 120.

Відповідь:  $\frac{1}{190}$ .

33 На складі є 15 телевізорів, причому 10 із них виготовлені Львівським заводом. Знайти ймовірність того, що серед п'яти взятих телевізорів три телевізори будуть такими, що виготовлені Львівським заводом.

Відповідь:  $\frac{400}{1001}$ .

34 Пристрій складається з п'яти елементів, два з яких зношені. В разі включення пристрою включаються випадково два елемента. Знайти ймовірність того, що включеними будуть являться незношені елементи.

Відповідь: 0,3.

35 Збори, на яких були присутні 25 чоловік, в тому числі п'ять жінок, обирають делегацію з трьох осіб. Вважаючи, що кожний із присутніх з однаковою ймовірністю може бути обраний, знайти ймовірність того, що до складу делегації увійдуть дві жінки й один чоловік.

Відповідь: 0,087.

36 Із партії деталей, в якій 31 деталь не має дефектів, а шість мають дефекти, беруть навмання три деталі. Чому дорівнює ймовірність того, що всі три деталі виявляються такими, що не мають дефектів?

Відповідь: 0,579.

37 Під час стрільби з гвинтівки відносна частота влучення в ціль виявилася рівною 0,85. Знайти число влучень, якщо всього було виконано 120 пострілів.

Відповідь: 102 попадання.

38 Барабан револьвера має сім гнізд: в п'ять із них закладені патрони, а два залишені порожніми. Барабан приводиться в обертання, в результаті чого проти ствола випадково виявляється одне з гнізд. Після цього натискається спусковий курок; якщо комірка є порожньою, постріл не відбувається. Знайти ймовірність того, що, повторюючи такий експеримент двічі підряд, обидва рази постріл не відбудеться.

Відповідь:  $\frac{4}{49}$ .

39 За умовою попередньої задачі знайти ймовірність того, що обидва рази постріл відбудеться.

Відповідь:  $\frac{20}{49}$ .

40 До студентської групи входить 10 дружинників. Три з них перебувають у віці від 18 до 20 років, п'ять – від 20 до 22, два – від 22 до 24 років. Шляхом жеребкування з дружинників повинна бути обрана одна особа на чергування. Чому дорівнює ймовірність того, що обраним виявиться дружинник у віці від 18 до 22 років?

Відповідь: 0,8.

41 У середині еліпса з півосями  $a = 50$  см і  $b = 20$  см проведені чотири кола, які не перетинаються ні з еліпсом, ні між собою. Радіус кожного з цих кіл дорівнює 2,1 см. Обчислити ймовірність того, що випадкова точка, положення якої рівно можливе всередині еліпса, виявиться усередині одного з кругів.

Відповідь: 0,01764.

42 Взвод рівномірно обстрілює площу шириною 90 м і глибиною 100 м, на якій знаходиться гарматна обслуга противника. Знайти ймовірність прямого попадання однією міною, якщо гарматна обслуга розташована на площі 20 кв.м.

Відповідь:  $\frac{1}{450}$ .

43 На склад надходить 3000 деталей з першого автомата і 2000 - з другого. Перший автомат надає 0,2% браку, а другий – 0,3%. Знайти ймовірність потрапляння на склад бракованої деталі.

Відповідь: 0,0024.

44 У середину круга радіуса  $R$  навмання кинута точка. Знайти ймовірність того, що точка виявиться у середині вписаного в круг правильного трикутника. Припускається, що ймовірність потрапляння точки в частину круга пропорційна площі цієї частини і не залежить від її розташування відносно круга.

Відповідь:  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ .

45 Два студенти умовилися зустрітися в певному місці між 12 і 13 годинами дня. Той хто прийде першим чекає другого протягом  $\frac{1}{4}$  години, після чого йде. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться, якщо кожний студент навмання обирає момент свого приходу (у проміжку від 12 до 13 години).

Вказівка. Ввести на розгляд прямокутну систему координат  $xOy$  і прийняти для простоти, що зустріч повинна відбутися між 0 і 1 годинами. Можливі значення координат:  $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1$ ; сприятливі зустрічі значення координат:  $|y - x| \leq \frac{1}{4}$ .

Відповідь:  $\frac{7}{16}$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Що називають сполуками?
- 2 Які види сполук розрізняють?
- 3 Які сполуки називають розміщеннями, перестановками, комбінаціями?
- 4 Наведіть формули для обчислення числа розміщень, перестановок та комбінацій з повторенням і без повторення елементів.
- 5 Що вивчає теорія ймовірностей?
- 6 Перерахуйте основні поняття теорії ймовірностей.
- 7 Що розуміють під випробуванням?
- 8 Що називають подією? Ймовірністю?
- 9 Яку подію називають випадковою, вірогідною, неможливою? Наведіть приклади.
- 10 Які події називають несумісними? Сумісними? Наведіть приклади.
- 11 Які події називають рівно можливими? Наведіть приклади.
- 12 Що являє собою повна група подій? Наведіть приклади.

13 Дайте означення класичної, статистичної та геометричної ймовірностей.

14 Сформулюйте властивості ймовірності та наведіть формулу для її обчислення.

## **ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 20.** Алгебра подій. Основні теореми.

**Теореми додавання ймовірностей. Теореми множення ймовірностей.**

**Формули повної ймовірності та Байєса.**

### **Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** Три станки працюють незалежно один від одного. Ймовірність безперебійної роботи першого станка протягом деякого часу  $T$  дорівнює  $p_1 = 0,9$ , другого —  $p_2 = 0,8$ , третього —  $p_3 = 0,7$ . Яка ймовірність того, що протягом указанного проміжку часу

- а) усі три станки працюють безперебійно (подія  $A$ );
- б) лише два станки працюють безперебійно (подія  $B$ );
- в) лише один станок працює безперебійно (подія  $C$ );
- г) хоча б один з станків працює безперебійно (подія  $D$ );
- д) жоден станок не працює (подія  $E$ )?

**Розв'язання.** Введемо наступні події:

$A_1$  — працює перший станок,

$A_2$  — працює другий станок;

$A_3$  — працює третій станок.

Тоді протилежні їм події:

$\overline{A_1}$  — не працює перший станок;

$\overline{A_2}$  — не працює другий станок;

$\overline{A_3}$  — не працює третій станок.

За умовою задачі  $P(A_1) = p_1 = 0,9$ ;  $P(A_2) = p_2 = 0,8$ ;  $P(A_3) = p_3 = 0,7$ , отже,  $P(\overline{A_1}) = q_1 = 1 - 0,9 = 0,1$ ;  $P(\overline{A_2}) = q_2 = 1 - 0,8 = 0,2$ ;  $P(\overline{A_3}) = q_3 = 1 - 0,7 = 0,3$ .

а) очевидно, що подія  $A = A_1 A_2 A_3$ . Оскільки за умовою задачі події  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  незалежні (станки працюють незалежно один від одного), то за формулою ймовірності сумісної появи декількох подій, незалежних у сукупності, маємо:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = p_1 p_2 p_3.$$

Виконуючи обчислення далі, знаходимо:

$$P(A) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

б) Подія  $B$  полягає у тому, що працюють лише два станки з трьох. Це можливо в разі появи однієї з наступних подій: або  $A_1 A_2 \overline{A_3}$ , або  $A_1 \overline{A_2} A_3$ , або  $\overline{A_1} A_2 A_3$ . Отже,

$$B = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$$

Оскільки події  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $\overline{A_1}$ ,  $\overline{A_2}$ , і  $\overline{A_3}$  незалежні в сукупності, а події

$A_1 A_2 \overline{A_3}$ ,  $A_1 \overline{A_2} A_3$  і  $\overline{A_1} A_2 A_3$  несумісні, то знаходимо:

$$P(B) = P(A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3) = P(A_1 A_2 \overline{A_3}) + P(A_1 \overline{A_2} A_3) + P(\overline{A_1} A_2 A_3) = \\ = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3}) + P(A_1)P(\overline{A_2})P(A_3) + P(\overline{A_1})P(A_2)P(A_3) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3.$$

Підставляючи в отриману формулу відповідні значення ймовірностей, остаточно будемо мати:

$$P(B) = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,216 + 0,126 + 0,056 = 0,398.$$

в) Аналогічні міркування приводять до того, що

$$P(C) = P(A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1} \overline{A_2} A_3) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3.$$

Після підстановки до цієї формули відповідних значень ймовірностей, знаходимо:

$$P(C) = 0,9 \cdot 0,2 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,8 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,7 = 0,054 + 0,024 + 0,014 = 0,092.$$

г) Імовірність події  $D$  знаходимо за формулою ймовірності появи хоча б однієї з подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , незалежних у сукупності, одержуємо:

$$P(D) = 1 - q_1 q_2 q_3.$$

Після обчислень, отримаємо:

$$P(D) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 1 - 0,006 = 0,994.$$

Цю саму ймовірність можна знайти інакше. Очевидно, що  $D = A + B + C$ . Тоді

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,504 + 0,398 + 0,092 = 0,994.$$

Відзначимо, що цей спосіб розв'язання задачі є нераціональним. Дійсно, якби ймовірності  $P(A)$ ,  $P(B)$  і  $P(C)$  не були знайдені раніше, то обчислення  $P(D)$  значно б ускладнилося.

д) Подія  $E$  полягає із суміщення незалежних подій  $\overline{A_1}$ ,  $\overline{A_2}$  і  $\overline{A_3}$ . Тому

$$P(E) = P(\overline{A_1} \overline{A_2} \overline{A_3}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \cdot P(\overline{A_3}) = q_1 q_2 q_3.$$

Підставляючи числові дані, отримаємо:

$$P(E) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,006.$$

З іншого боку, враховуючи, що події  $D$  і  $E$  являються незалежними і, отже,  $P(E) + P(D) = 1$ , а  $P(D)$  уже відома і дорівнює 0,994, знаходимо:

$$P(E) = 1 - 0,994 = 0,006.$$

Як бачимо, отримали такий самий результат. Зауважимо, що тут було б помилковим вважати, що протилежними являються події  $A$  і  $E$ . Дійсно,

$$P(A) + P(E) = 0,504 + 0,006 = 0,510 \neq 1.$$

**Приклад 2** У ящику знаходиться 7 деталей першого сорту, 5 – другого і 3 – третього сорту. Із ящика послідовно виймають три деталі, причому взяті деталі у ящик не повертають. Знайти ймовірність того, що перша взята деталь буде першого сорту (подія  $A_1$ ), друга деталь – другого сорту (подія  $A_2$ ) і третя деталь – третього сорту (подія  $A_3$ ).

**Розв'язання.** Позначимо через  $A$  подію, яка полягає у тому, що деталі взяті з ящика в такій послідовності: деталь першого сорту, деталь другого сорту, деталь третього сорту.

Очевидно, що  $A = A_1 A_2 A_3$ . Події  $A_1, A_2, A_3$  являються залежними, в силу того, що взяті деталі в ящик не повертають. Отже, за формулою (3.8) маємо:

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3).$$

Знайдемо ймовірності, які входять до правої частини цієї рівності. Ймовірність того, що першою взята деталь першого сорту,  $P(A_1) = \frac{7}{15}$ , або всього деталей  $n = 7+5+3 = 15$ , а сприятливих появи події  $A_1$  – сім ( $m = 7$ ). Ймовірність того, що другою взяти деталь другого сорту, за умови, що першою взята деталь першого сорту,  $P_{A_1}(A_2) = \frac{5}{14}$ , бо залишилось у ящику 14 деталей і із них 5 – другого сорту. Ймовірність того, що третьою взято деталь третього сорту після того, як були взяті деталь першого і деталь другого сорту,  $P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{3}{13}$  (після того, як було взято одну деталь першого сорту і одну деталь другого сорту, в ящику залишилось 13 деталей, із них 3 – третього сорту).

Таким чином, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{7}{15} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{3}{13} = \frac{1}{26}.$$

**Приклад 3** У першій коробці міститься 20 радіоламп, із них 18 стандартних; у другій – 10 радіоламп, із них 9 стандартних. Із другої коробки навмання взята одна радіолампа і перекладена в першу. Знайти ймовірність того, що радіолампа, взята навмання з першої коробки, буде стандартною (подія  $A$ ).

**Розв’язання.** Із другої коробки могла бути взята і перекладена в першу або стандартна радіолампа (подія  $A_1$ ), або нестандартна (подія  $A_2$ ). Ймовірність цих подій -  $P(A_1) = \frac{9}{10}$  і  $P(A_2) = \frac{1}{10}$ . Подія  $A$  може настати лише сумісно або з подією  $A_1$ , або з подією  $A_2$ , які утворюють повну групу, бо  $P(A_1) + P(A_2) = 0,9 + 0,1 = 1$ . Тому за теоремою додавання

$$P(A) = P(AA_1 + AA_2) = P(AA_1) + P(AA_2).$$

Ураховуючи далі, що події  $AA_1$  і  $AA_2$  залежні, за теоремою множення будемо мати:

$$P(AA_1) = P(A_1) P_{A_1}(A); P(AA_2) = P(A_2) P_{A_2}(A).$$

Отже,

$$P(A) = P(A_1) P_{A_1}(A) + P(A_2) P_{A_2}(A).$$

Умовна ймовірність того, що з першої коробки взята стандартна радіолампа за умови, що з другої коробки в першу перекладена стандартна радіолампа,  $P_{A_1}(A) = \frac{19}{21}$ , бо в першій коробці тепер знаходиться 21 радіолампа. Серед цієї кількості радіоламп 19 є стандартними.

Умовна ймовірність того, що з першої коробки взята стандартна радіолампа, за умови, що з другої коробки в першу перекладена нестандартна,

$P_{A_2}(A) = \frac{18}{21}$ , бо в першій коробці тепер знаходиться 21 радіолампа, а стандартних, як і раніше, 18.

Таким чином, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{9}{10} \cdot \frac{19}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{18}{21} = 0,9.$$

**Приклад 4** Ймовірність влучення в рухому ціль у результаті одного пострілу є сталою і дорівнює 17%. Визначити витрату снарядів, необхідних для виконання вогневого завдання і з ймовірністю 92%, якщо для її виконання досить хоча б одного влучення.

**Розв'язання.** Враховуючи, що,  $P(A) = 92\% = 0,92$ ,  $p = 17\% = 0,17$ ,

$q = 1 - p = 1 - 0,17 = 0,83$ , знаходимо:

$$n = \frac{\ln(1 - 0,92)}{\ln 0,83} = \frac{\ln 0,08}{\ln 0,83} \approx 13.$$

**Приклад 5** Два автомата виробляють однакові деталі, які поступають на загальний конвеєр. Продуктивність першого автомата вдвічі більша продуктивності другого. Перший автомат виробляє в середньому 60% деталей відмінної якості, а другий – 84%. Навмання взята з конвеєра деталь виявилася відмінної якості. Знайти ймовірність того, що ця деталь вироблена першим автоматом.

**Розв'язання.** Позначимо через  $A$  подію – деталь відмінної якості. Можна зробити два припущення (гіпотези):  $B_1$  – деталь вироблена першим автоматом, причому (оскільки перший автомат виробляє вдвічі більше деталей, ніж другий)  $P(B_1) = \frac{2}{3}$ ;  $B_2$  – деталь вироблена другим автоматом, причому

$$P(B_2) = \frac{1}{3}.$$

Умовна ймовірність того, що деталь буде відмінної якості, якщо вона вироблена першим автоматом,  $P_{B_1}(A) = 0,6$ .

Умовна ймовірність того, що деталь буде відмінної якості, якщо вона вироблена другим автоматом,  $P_{B_2}(A) = 0,84$ .

Ймовірність того, що навмання взята деталь виявиться відмінної якості, за формулою повної ймовірності дорівнює

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{2}{3} \cdot 0,6 + \frac{1}{3} \cdot 0,84 = 0,68.$$

Шукана ймовірність того, що взята навмання відмінна деталь вироблена першим автоматом, за формулою Байєса дорівнює

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0,6}{0,68} = \frac{10}{17}.$$



## Домашнє завдання

**Теорія** Повторні випробування. Формула Бернуллі. Граничні теореми. Локальна та інтегральна теореми Лапласа. [20], с. 182 –187.

## Вправи

Розв'язати задачі.

1 Для сигналізації про аварію встановлені два незалежно працюючих сигналізатора. Ймовірність того, що в разі аварії сигналізатор спрацює, дорівнює 0,95 для першого сигналізатора і 0,9 для другого. Знайти ймовірність того, що в разі аварії спрацює лише один сигналізатор.

Відповідь: 0,14.

2 Студент відшукує потрібну йому формулу в трьох довідниках. Ймовірність того, що формула міститься у першому, другому, третьому довідниках, відповідно дорівнює 0,6, 0,7 і 0,8. Знайти ймовірність того, що формула міститься:

- а) лише в одному довіднику;
- б) лише в двох довідниках;
- в) у всіх трьох довідниках.

Відповідь: а) 0,188;

б) 0,452;

в) 0,336.

3 У читальному залі є 6 підручників з теорії ймовірності, із яких 3 в політурі. Бібліотекар навчання узяв 2 підручника. Знайти ймовірність того, що обидва підручника будуть в політурці.

Відповідь: 0,2.

4 У коробці знаходиться 10 однакових кубиків з номерами від 1 до 10. Навмання виймають по одному 3 кубика. Знайти ймовірність того, що послідовно з'являться кубики з номерами 1, 2, 3, якщо кубики виймаються:

- а) без повторення;
- б) з повторенням (вийнятий кубик повертають знову в коробку).

Відповідь: а)  $\frac{1}{720}$ ; б) 0,001.

5 Три дослідники, незалежно один від одного виконують вимірювання деякої фізичної величини. Ймовірність того, що перший дослідник при цьому допустить помилку, дорівнює 0,1, для другого і третього дослідників ця ймовірність відповідно дорівнює 0,15 і 0,2. Знайти ймовірність того, що в разі одноразового вимірювання хоча б один із дослідників допустить помилку.

Відповідь: 0,388.

6 Ймовірність успішного виконання вправи для кожного з двох спортсменів дорівнює 0,5. Спортсмени виконують вправу по черзі, причому кожний робить по дві спроби. Той, хто першим виконає вправу, отримує приз. Знайти ймовірність отримання призу спортсменами.

Відповідь: 0,9375.

7 Мішень складається із п'яти зон: 5, 4, 3, 2, 1, якщо рахувати від центру.

Ймовірність попадання у ці зони відповідно дорівнює: 0,12; 0,16; 0,20; 0,10; 0,25. Яка ймовірність того, що куля не буде випущена із зони 3?

Відповідь: 0,48.

8 Консультаційний пункт університету отримує пакети з контрольними роботами з міст  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Ймовірність отримання пакета із міста  $A$  дорівнює 0,7, із міста  $B$  – 0,2, Знайти ймовірність того, що наступний пакет буде отримано з міста  $C$ .

Відповідь: 0,1.

9 Число вантажних автомашин, які проїжджають по шосе, на якому стоїть бензоколонка, відноситься до числа легкових машин, що проїжджають по тому ж шосе, як 3:2. Ймовірність того, що буде заправлятися вантажна машина, дорівнює 0,1; для легкової машини ця ймовірність дорівнює 0,2. До бензоколонки підїхала для заправки машина. Знайти ймовірність того, що це вантажна машина.

Відповідь:  $\frac{3}{7}$ .

10 Серед 50 електролампочок три є нестандартними. Знайти ймовірність того, що дві навмання взяті електролампочки будуть нестандартними (задачу розв'язати двома способами).

Відповідь:  $\frac{3}{1225}$ .

11 На підприємстві брак складає у середньому 2 % від загального випуску виробів. Серед придатних виробів до першого гатунку відноситься 95 %. Яка ймовірність того, що навмання взятий виріб буде першого сорту, якщо виріб взято:

а) із числа тих, які пройшли перевірку?

б) із загальної кількості виготовленої продукції ?

Відповідь: а) 0,95;

б) 0,931.

12 У мішку змішані нитки, серед яких 30 % білих, а решта - червоні. Обчислити ймовірність того, що взяті навмання дві нитки будуть одного кольору.

Відповідь: 0,58.

13 Із цифр 1, 2, 3, 4, 5 обирається навмання одна, а з тих, які залишилися – друга. Знайти ймовірність того, що буде обрана непарна цифра:

а) першого разу;

б) другого разу;

в) обидва рази.

Відповідь: а) 0,6;

б) 0,6;

в) 0,3.

14 Екзаменаційний білет містить три питання. Ймовірність того, що студент відповість на перше питання, дорівнює 0,9, на друге – 0,9, на третє – 0,8. Знайти ймовірність того, що студент складе іспит, якщо для цього необхідно відповісти:

- а) на всі питання;  
б) хоча б на два питання.  
Відповідь: а) 0,648;  
б) 0,954.

15 У касі кінотеатру залишилось 8 розрізнених квитків на місця 20-го ряду і 4 розрізнених квитки на місця 10-го ряду. Яка ймовірність того, що перші чотири особи, які стоять у черзі і кожний із яких придбає лише один квиток, отримують квитки, які залишилися на місця 10-го ряду?

Відповідь:  $1/495$ .

16 Електричне коло складається з двох послідовно з'єднаних елементів, які можуть вийти з ладу незалежно один від одного з ймовірностями  $p_1 = 0,1$  і  $p_2 = 0,2$  відповідно. Обчислити ймовірність розриву живлення кола.

Відповідь: 0,28.

17 Ймовірність биття скляної тари при навантаженні на автомашини дорівнює 0,06, а під час транспортування на автомашинах - 0,05. Яка ймовірність биття скляної тари?

Відповідь: 0,107.

18 Для перевірки зібраної схеми послано три одиничних імпульси. Ймовірність проходження кожного з них не залежить від того, пройшли інші імпульси чи ні, і відповідно дорівнює  $p_1 = 0,8$ ,  $p_2 = 0,4$ ,  $p_3 = 0,7$ . Знайти ймовірність того, що пройдуть не менше двох з посланих імпульсів.

Відповідь: 0,712.

19 Для складання колоквиуму студент повинен відповісти на два з трьох питань, запропонованих викладачем. Студент не знає відповідей на вісім питань із тих сорока, які можуть бути запропоновані. Яка ймовірність того, що студент складе колоквиум? (Розв'язати задачу двома способами).

Відповідь: 0,90.

20 Студент знає відповідь на 20 із 25 питань програми. Знати ймовірність того, що студент знає відповідь на три запропоновані йому екзаменатором питання (розв'язати задачу двома способами).

Відповідь:  $\frac{57}{115}$ .

21 Через канал зв'язку з однаковими ймовірностями передаються 10 сигналів. У зв'язку з перешкодами чотири з переданих сигнали під час приймання спотворюються. Знайти ймовірність того, що з трьох прийнятих сигналів хоча б один буде прийнято неспотвореним.

Відповідь: 0,936.

22 Дане підприємство у середньому дає 21 % продукції вищого гатунку і 70 % продукції першого гатунку. Знайти ймовірність того, що випадково взятий виріб виявиться виробом першого або вищого гатунку.

Відповідь: 0,91.

23 Для виробничої практики на 30 студентів надано 15 місяців у Харкові, 8 - у Києві, і 7 - у Запоріжжі. Яка ймовірність того, що два певних студента потраплять на практику в одне місто?

Відповідь: 0,331.

24 Дванадцять робітників отримали путівку в чотири будинки відпочинку: 3 - в перший, 3 - в другий, 2 - в третій і 4 - в четвертий. Чому дорівнює ймовірність того, що три певних робітники поїдуть в один будинок відпочинку?

Відповідь: 0,0273.

25 Абонент забув останню цифру номера телефону і тому набирає її навмання. Обчислити ймовірність того, що йому доведеться дзвонити не більше ніж у три місця. Як зміниться ймовірність, якщо відомо, що остання цифра непарна?

Відповідь: 0,3; 0,6.

26 Поїздка пасажира з деякої трамвайної зупинки до місця роботи обслуговується трамваями маршрутів 3 і 11. Через дану зупинку проходять трамваї п'яти маршрутів. Відомо, що з 40 трамваїв, які курсують через дану зупинку, є 8 трамваїв маршруту 3 і 10 трамваїв маршруту 11. Знайти ймовірність того, що перший пройдений трамвай буде відповідати потрібному маршруту. При цьому мається на увазі, що з трамвайного парку ще не виходив жодний трамвай і що поява на даній зупинці трамваїв обох маршрутів одночасно неможлива.

Відповідь:  $\frac{9}{20}$ .

27 До механізму входять дві деталі однакового типу. Механізм не працює, якщо обидві поставлені деталі мають зменшений розмір. Складальник має всього 10 деталей, із яких 3 – менші за стандартні. Знайти ймовірність нормальної роботи механізму, якщо й перша й друга деталі беруться складальником без перевірки.

Відповідь:  $\frac{14}{15}$ .

28 До студентської групи входить 10 дружинників, серед яких 3 дівчини і 7 юнаків. Шляхом жеребкування потрібно обрати для чергування трьох дружинників. Знайти ймовірність того, що обраними будуть 3 юнаки.

Відповідь:  $\frac{7}{2}$ .

29 Підприємство виготовляє 95 % стандартних виробів, причому 86 % із них - першого гатунку. Знайти ймовірність того, що взятий навмання виріб, виготовлений на цьому підприємстві, буде виробом першого гатунку.

Відповідь: 0,817.

30 Імовірність того, що в результаті одного пострілу стрілець влучить у десятку, дорівнює 0,6. Скільки пострілів повинен зробити стрілець, щоб із ймовірністю не меншою, ніж 0,8 він влучив у десятку хоча б один раз?

Відповідь:  $n \geq 2$ .

31 Імовірність того, що подія  $A$  настане хоча б один раз у трьох незалежних у сукупності випробуваннях, дорівнює 0,936. Знайти ймовірність появи події в одному випробуванні, якщо ймовірність появи події у кожному випробуванні є однаковою.

Відповідь: 0,6.

32 В обчислювальній лабораторії є шість клавішний автоматів і чотири напівавтомата. Ймовірність того, що під час виконання деякого розрахунку автомат не вийде з ладу, дорівнює 0,95; для напівавтомата ця ймовірність дорівнює 0,8. Студент виконує розрахунок навмання вибраною машиною. Знайти ймовірність того, що до закінчення розрахунку машина не вийде з ладу.

Відповідь: 0,89.

33 У ящику міститься 12 деталей, виготовлених на заводі №1, 20 деталей – на заводі №2, 18 деталей – на заводі №3. Ймовірність того, що деталь, виготовлена на заводі №1, відмінної якості, дорівнює 0,9; для деталей, виготовлених на заводі №2 і №3, ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,6 і 0,9. Знайти ймовірність того, що навмання витягнута деталь виявиться відмінної якості.

Відповідь: 0,78.

34 Ймовірність того, що під час роботи цифрової електронної машини відбудеться збій в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті й в інших пристроях, відносяться як 3:2:5. Ймовірності виявлення збою в арифметичному пристрої, в оперативній пам'яті й в інших пристроях відповідно дорівнюють 0,8; 0,9; 0,9. Знайти ймовірність того, що збій, який виник в машині, буде виявлений.

Відповідь: 0,87.

35 У спеціалізовану лікарню надходять в середньому 50% хворих з захворюванням  $K$ , 30% – із захворюванням  $L$ , 20% – із захворюванням  $M$ . Ймовірність повного вилікування хвороби  $K$  дорівнює 0,7; для хвороб  $L$  і  $M$  ці ймовірності відповідно дорівнюють 0,8 і 0,9. Хворий, що надійшов до лікарні, був виписаний здоровим. Знайти ймовірність того, що цей хворий страждав захворюванням  $K$ .

Відповідь:  $\frac{5}{11}$ .

36 Виріб перевіряється на стандартність одним з двох товарознавців. Ймовірність того, що виріб потрапить до першого товарознавця, дорівнює 0,55, а до другого – 0,45. Ймовірність того, що стандартний виріб буде визнаний стандартним першим товарознавцем, дорівнює 0,9, а другим – 0,98. Знайти ймовірність того, що це виріб перевірів другий товарознавець.

Відповідь: 0,47.

### Питання для самоперевірки

- 1 Які теореми вважають основними теоремами теорії ймовірностей?
- 2 Що розуміють під сумою подій  $A$  і  $B$  ?
- 3 Сформулюйте теорему додавання для несумісних подій. Наведіть формулу для обчислення .
- 1 Сформулюйте теорему додавання для сумісних подій. Наведіть формулу для обчислення .
- 2 Чому дорівнює сума ймовірностей подій, які утворюють повну групу ?
- 3 Чому дорівнює сума ймовірностей протилежних подій ?
- 4 Що розуміють під добутком подій  $A$  і  $B$  ?
- 5 Що називають умовною ймовірністю?

6 Сформулюйте теорему множення для незалежних подій. Наведіть формулу для обчислення .

7 Сформулюйте теорему множення для залежних подій. Наведіть формулу для обчислення.

8 Чому дорівнює ймовірність появи хоча б однієї із  $n$  незалежних подій?

9 Чому дорівнює ймовірність появи хоча б однієї із  $n$  незалежних подій  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , якщо ці події мають однакову ймовірність. Наведіть формулу для обчислення.

10 Запишіть формулу повної ймовірності.

11 Сформулюйте теорему Байєса.

## **ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 21.** Повторні випробування.

**Повторні випробування. Формула Бернуллі. Граничні теореми.**

**Локальна та інтегральна теореми Лапласа.**

### **Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** Два рівносильних шахіста грають у шахи. Що ймовірніше виграти - три партії із шести чи дві партії із чотирьох? Нічий до уваги не приймаються.

**Розв'язання.** Так як у грі беруть участь рівносильні шахісти і нічий до уваги не приймаються, то в усіх партіях ймовірність виграшу є сталою і дорівнює 0,5, отже ймовірність програшу також є сталою і дорівнює 0,5, тобто  $p = q = 0,5$ . Тоді за формулою Бернуллі ймовірність того, що три партії із шести будуть виграні, є такою:  $P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (0,5)^3 \cdot (0,5)^3 = \frac{5}{16}$ , а ймовірність того, що будуть виграні дві партії із чотирьох -

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot (0,5)^2 \cdot (0,5)^2 = \frac{6}{16}.$$

Оскільки  $P_4(2) > P_6(3)$ , то ймовірніше виграти дві партії з 4, ніж 3 з 6.

**Приклад 2** Ймовірність того, що насіння даного сорту рослин зійде, дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що з 5 посіяних насінин:

а) зійде не менше 4;

б) зійде менше 4?

**Розв'язання.** а) маємо  $n = 5$ ,  $p = 0,8$  і  $q = 1 - 0,8 = 0,2$ ;  $k \geq 4$ , тобто  $k$  набуває значення або 4, або 5. Тому шукана ймовірність матиме вигляд:

$$P_5(k \geq 4) = P_5(4) + P_5(5) = C_5^4 p^4 q + C_5^5 p^5 q^0 = 5p^4 q + p^5 = p^4(5q + p).$$

Після обчислення остаточно отримаємо:

$$P_5(k \geq 4) = (0,8)^4 \cdot (5 \cdot 0,2 + 0,8) = 0,73728.$$

б) маємо  $n = 5$ ,  $p = 0,8$  і  $q = 0,2$ ;  $k < 4$ , тобто  $k$  набуває значення або 0, або 1, або 2, або 3.

Тому шукана ймовірність матиме вигляд:

$$P_5(k < 4) = P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) + P_5(3).$$

Застосовуючи далі формулу Бернуллі для обчислення ймовірностей, які належать до правої частини рівності, отримаємо остаточно результат. Не важко, однак, переконатися, що безпосереднє застосування формули Бернуллі

приведе до надто громіздких обчислень (перевірте самостійно). Шукану ймовірність можна знайти простішим способом, враховуючи той факт, що події "зійде не менше 4 насінин із 5" і "зійде менше 4 насінин із 5" являються протилежними і тому

$$P_5(k \geq 4) + P_5(k < 4) = 1.$$

Звідси

$$P_5(k < 4) = 1 - P_5(k \geq 4).$$

Оскільки  $P_5(k \geq 4) = 0,73728$  (знайдено раніше), то остаточно маємо

$$P_5(k < 4) = 1 - 0,73728 = 0,26272.$$

Зауважимо, що такий спосіб обчислення доцільно застосовувати і в ряді інших завдань.

**Приклад 3** За даними ВТК на сотню металевих брусків, заготовлених для обробки, припадає 30 з зазубринами. Яка ймовірність того, що з семи брусків, випадково взятих, не матимуть дефектів не більше 2?

**Розв'язання.** Нехай подія  $A$  - відсутність на бруску зазубрин. Тоді  $P(A) = p = 0,7$  і  $P(\bar{A}) = q = 0,3$ . Число випробувань  $n = 7$ ,  $k \leq 2$ , тобто  $k$  набуває значення або 0, або 1, або 2.

Шукана ймовірність за теоремою додавання

$$P_7(k \leq 2) = P_7(0) + P_7(1) + P_7(2).$$

Застосовуючи далі формулу Бернуллі для обчислення ймовірностей у правій частині рівності, остаточно будемо мати:

$$\begin{aligned} P_7(k \leq 2) &= C_7^0 p^0 q^7 + C_7^1 p^1 q^6 + C_7^2 p^2 q^5 = \\ &= (0,3)^7 + 7 \cdot 0,7 \cdot (0,3)^6 + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot (0,7)^2 \cdot (0,3)^5 = \\ &= (0,3)^5 (0,09 + 1,47 + 10,29) = 0,0287555 \approx 0,029. \end{aligned}$$

**Приклад 4** Відомо, що в прийнятій партії із 1000 деталей 4 є дефектними. Знайти ймовірність того, що серед 50 навмання взятих деталей немає дефектних.

**Розв'язання.** За умовою  $n = 50$ , ймовірність появи дефектної деталі  $p = 0,004$ , ймовірність появи якісної деталі  $q = 0,996$ . Відсутність серед 50 деталей дефектних означає що всі взяті деталі є якісними. Тому при  $k = 0$  за формулою Бернуллі отримаємо:

$$P_{50}(0) = C_{50}^0 p^0 q^{50} = (0,996)^{50}$$

Логарифмуючи рівність, знаходимо:

$$\ln P_{50}(0) = 50 \ln 0,996 = 50 \cdot (-0,00401) = -0,2004,$$

звідки

$$P_{50}(0) = e^{-0,2004} = 0,8184.$$

Обчислюючи  $\lambda = np = 50 \cdot 0,004 = 0,2$  і застосовуючи формулу Пуассона, маємо  $P_{50}(0) \approx \frac{\lambda^0 \cdot e^{-0,2}}{0!} = 0,8187$ , що дає відхилення від результату, отриманого за формулою Бернуллі, менш за 0,3 %.

Зауважимо, що застосування наближеної формули Лапласа потребує

більше громіздких обчислень і дає ймовірність

$$P_{50}(0) = \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 0,004 \cdot 0,996}} \cdot \varphi(0,45) \approx 0,8077$$

з відхиленням 1,07 % від точного значення.

**Приклад 5** Знайти середнє число  $\lambda$  бракованих виробів у партії виробів, якщо ймовірність того, що у цій партії міститься хоча б один бракований виріб, дорівнює 0,95. Припускається що число бракованих виробів у розглядуваній партії розподілено за законом Пуассона.

**Розв'язання.** Позначимо через  $A$  подію, яка полягає у тому, що у розглядуваній партії міститься хоча б один бракований виріб, а через  $\bar{A}$  - подію, яка полягає у тому, що у розглядуваній партії бракованих виробів немає. Через те що події  $A$  і  $\bar{A}$  протилежні, то  $P(A) + P(\bar{A}) = 1$ .

Із цієї рівності з урахуванням того, що число за законом Пуассона, знаходимо

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_n(0) = 1 - e^{-\lambda}.$$

За умовою задачі ця сама ймовірність дорівнює 0,95, тому

$$1 - e^{-\lambda} = 0,95.$$

Звідси  $e^{-\lambda} = 1 - 0,95 = 0,05$ .

Розв'язуючи це рівняння отримаємо

$$-\lambda = \ln 0,05 \quad \text{або} \quad \lambda = 3.$$

Таким чином, у розглядуваній партії середнє число бракованих виробів дорівнює трьом.

**Приклад 6** За установленого технологічного процесу фабрика випускає у середньому 70 % продукції першого гатунку. Чому дорівнює ймовірність того, що у партії з 2100 виробів першосортних міститься між 1450 і 1500?

**Розв'язання.** Відомо число незалежних випробувань -  $n=2100$ .

Ймовірність настання події у кожному окремому випробуванні -  $p = 0,7$ . Треба знайти ймовірність того, що число появи події міститься між  $k_1=1450$  і  $k_2=1500$ . Шукану ймовірність знаходимо за формулою (6.4):

$$P_n(k_1; k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{де} \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Знаходимо значення  $x_1$  і  $x_2$ :

$$x_1 = \frac{1450 - 2100 \cdot 0,7}{\sqrt{2100 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = -\frac{20}{21} \approx -0,95; \quad x_2 = \frac{1500 - 2100 \cdot 0,7}{\sqrt{2100 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} = \frac{30}{21} \approx 1,43;$$

Враховуючи, що функція Лапласа непарна, тобто  $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ , отримаємо  $P_{2100}(1450; 1500) \approx \Phi(1,43) - \Phi(-0,95) = \Phi(1,43) + \Phi(0,95) = 0,4236 + 0,3289 = 0,7525$ .

Значення функції Лапласа  $\Phi(1,43)$  і  $\Phi(0,95)$  знайдені за додатком Б.

**Приклад 7** З конвеєра сходять у середньому 85 % виробів першого сорту. Скільки виробів необхідно взяти, щоб з ймовірністю 0,997 відхилення частоти виробу першого сорту у них від 0,85 за абсолютною величиною не перевищувало 0,01?

**Розв'язання.** За умовою  $p = 0,85$ ,  $q = 1 - 0,85 = 0,15$ ,  $\varepsilon = 0,01$ ,



$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,85\right| \leq 0,01\right) = 0,997.$$

Згідно з формулою  $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$  маємо:

$$2\Phi\left(0,01 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,85 \cdot 0,15}}\right) = 0,997 \text{ або } \Phi(0,028\sqrt{n}) = 0,4985$$

За додатком Б знаходимо  $\Phi(2,96) = 0,4985$ .

Отже,  $0,028\sqrt{n} = 2,96$ .

Звідси  $n = 11176$ .

Таким чином, шукане число виробів  $n = 11176$ .

**Приклад 8** Відділ технічного контролю (ВТК) перевіряє на стандартність 900 деталей. Ймовірність того, що деталь стандартна, дорівнює 0,9. Знайти з ймовірністю 0,9544 межі, у яких буде міститися число  $m$  стандартних деталей серед перевірених.

**Розв'язання.** За умовою  $n = 900$ ,  $p = 0,9$ ,  $q = 0,1$ ,

$$P\left(\left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \leq \varepsilon\right) = 0,9544.$$

Згідно з формулою  $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$  маємо:

$$2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{900}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 0,9544 \text{ або } \Phi(100\varepsilon) = 0,4772.$$

За додатком Б знаходимо  $\Phi(2) = 0,4772$ . Отже,  $100\varepsilon = 2$ . Звідси  $\varepsilon = 0,02$ .

Таким чином, з ймовірністю 0,9544 відхилення відносної частоти числа стандартних деталей від ймовірності 0,9 задовольняє нерівності  $\left|\frac{m}{900} - 0,9\right| \leq 0,02$ .

Розв'язуючи цю нерівність отримаємо

$$-0,02 \leq \frac{m}{900} - 0,9 \leq 0,02 \text{ або } 0,88 \leq \frac{m}{900} \leq 0,92 \text{ звідки } 792 \leq m \leq 828,$$

Отже, шукане число  $m$  стандартних деталей серед 900 перевірених з ймовірністю 0,9544 міститься в таких межах:  $792 \leq m \leq 828$ .

### Домашнє завдання

**Теорія** Дискретні випадкові величини та закони їх розподілу. Біноміальний закон та закон Пуассона. [20], с. 188–194.

### Вправи

Розв'язати задачі.

1 Ймовірність того, що насіння для даної рослини проросте, дорівнює 90 %. Знайти ймовірність того, що з чотирьох посіяних насінин три зійдуть (проростуть).

Відповідь: 0,2916.

2 Ймовірність виграти по одному білету лотереї дорівнює  $\frac{1}{7}$ . Яка ймовірність того, що за наявності 6 білетів виграти можна буде двох із них?

Відповідь: 0,1652.

3 На автобазі знаходиться 12 автомашин. Ймовірність виходу на лінію кожної з них дорівнює 0,8. Знайти ймовірність нормальної роботи автобазу в найближчі 5 діб, якщо для цього необхідно мати на лінії не менше 8 автомашин.

Відповідь: 0,9017.

4 У партії з 2000 гайок знаходиться 30 з браком у нарізці. Для контролю беруть навмання 100 гайок. Знайти ймовірність того, що серед них немає бракованих.

Відповідь: 0,223.

5 Штамповка металевих клем для з'єднувальних пластин дає 20 % браку. Обчислити ймовірність наявності від 100 до 125 клем, не відповідних стандарту, в партії з 600 клем.

Відповідь: 0,67.

6 Перевіркою якості виготовлених на заводі годинників установлено, що в середньому 98 % їх відповідає пред'явленим вимогам, а 2 % потребують додаткового регулювання. Приймальник перевіряє якість 300 виготовлених годинників. Якщо при цьому серед них виявиться 11 і більше годинників, які потребують додаткового регулювання, уся партія повертається заводу для доробки.

Обчислити ймовірність того, що партія буде прийнята.

Відповідь: 0,9438.

7 Під час штамповки 70 % деталей отримають перший гатунок, 20 % - другим і 10 % - третім. Визначити, скільки треба взяти відштампованих деталей, щоб з ймовірністю, рівною 0,9973, можна було б стверджувати, що доля деталей першого гатунку серед них буде відрізнятися від ймовірності виготовлення деталі першого гатунку за абсолютною величиною не більш ніж на 0,05?

Відповідь: 756.

8 Майстерня гарантійного ремонту телевізорів обслуговує 2000 абонентів. Ймовірність того, що куплений телевізор потребує гарантійного ремонту, дорівнює 0,3. Припускаючи, що подія, ймовірність якої 0,9973, вірогідна, знайти межі числа телевізорів, які потребують гарантійного ремонту.

Відповідь:  $538 \leq m \leq 662$ .

9 Ймовірність появи події у кожному з 21 незалежних випробовувань дорівнює 0,7. Знайти ймовірність того, що подія настане в більшості випробовувань.

Відповідь: 0,95945.

10 Відділ технічного контролю перевіряє 475 виробів на брак. Ймовірність того, що виріб бракований, дорівнює 0,05. Знайти з ймовірністю 0,9426 межі, в яких буде міститися число  $m$  бракованих виробів серед перевірених.

Відповідь:  $14 \leq m \leq 32$ .

11 Автоматична штамповка клем для запобіжників дає 10 % відхилень від прийнятого стандарту. Скільки стандартних клем слід очікувати з ймовірністю 0,0587 серед 400 клем?

Відповідь:  $360 \pm 3$ .

12 Посаджено 400 дерев. Ймовірність того, що окреме дерево приживеться, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що число дерев, які приживуться, буде більшим за 250.

Відповідь: 1.

13 Із партії, в якій доля деталей першого гатунку дорівнює 0,8, відібрано 60 одиниць (з поверненням). Обчислити ймовірність того, що серед відібраних деталей 48 виявиться першого гатунку.

Відповідь: 0,1287.

14 Студент - заочник відіслав на рецензію контрольну роботу, яка складається з 5 задач. Ймовірність того, що кожна задача розв'язана правильно, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що 4 задачі розв'язані студентом правильно.

Відповідь: 0,4096.

15 Ймовірність своєчасного прибуття кожного поїзда далекого слідування дорівнює 0,95. Знайти ймовірність того, що з 5 потягів, які послідовно прибувають, 4 прибудуть без запізнення.

Відповідь: 0,2036.

16 У ящику знаходяться 30 кульок: 20 білих і 10 чорних. Виймають підряд чотири кульки, причому кожен вийняту кульку повертають у ящик перед наступним вийманням і кульки в ящику змішуються. Знайти ймовірність того, що серед чотирьох вийнятих кульок дві будуть білими.

Відповідь:  $\frac{8}{27}$ .

17 Ймовірність отримання перельоту під час пострілу дорівнює  $\frac{1}{3}$ , а недольоту -  $\frac{2}{3}$ . Знайти ймовірність отримання накривної групи під час 4 пострілів, якщо накривна група має наступні співвідношення недольотів і перельотів: - - + +; - - - +; + + + -.

Відповідь:  $\frac{64}{81}$ .

18 Ймовірність хоча б одного влучення у результаті двох пострілів дорівнює 0,96. Знайти ймовірність 3 влучень у результаті 4 пострілів.

Відповідь: 0,4096.

19 Магазин отримав 1000 пляшок мінеральної води. Ймовірність того, що під час перевезення пляшка виявиться розбитою, дорівнює 0,003. Знайти ймовірність того, що магазин отримає розбитих пляшок: а) рівно 2; б) менше 2; в) більше 2; г) хоча б 1.

Вказівка. Прийняти, що  $e^{-1} = 0,04979$ .

Відповідь: а) 0,224; б) 0,1992; в) 0,5768; г) 0,96.

20 Знайти наближену ймовірність того, що число випадань 3 при 4200 кинутих гральних кубиків буде знаходитися між 650 і 700.  
Відповідь: 0,481.

### Питання для самоперевірки

- 1 Які події називають незалежними?
- 2 Що включає поняття "повторні випробування" ?
- 3 Як знайти ймовірність того, що в результаті  $n$  незалежних випробувань подія настане рівно  $k$  раз?
- 4 Формула Бернуллі та її застосування.
- 5 Сформулюйте локальну теорему Лапласа. У яких випадках вона застосовується?
- 6 Як знайти значення  $\varphi(x)$ , коли  $x > 5$ ?
- 7 Наведіть формулу Пуассона для знаходження  $P_n(k)$ . В яких випадках вона застосовується?
- 8 Сформулюйте інтегральну теорему Лапласа.
- 9 Який вигляд має функція Лапласа  $\varphi(x)$ ?
- 10 Властивості функції Лапласа  $\varphi(x)$ . Як знайти значення  $\varphi(x)$ , коли  $x > 5$ ?
- 11 Наведіть формулу для обчислення  $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$ .

### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 22. Випадкові величини. Закони розподілу.

#### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента в одному випробуванні дорівнює 0,1. Скласти закон розподілу числа елементів, що відмовили в одному випробуванні.

**Розв'язання.** Дискретна випадкова величина  $X$  (число елементів, що відмовили в одному випробуванні) набуває наступних можливих значень:  $x_1 = 0$  (жоден із елементів пристрою не відмовив),  $x_2 = 1$  (відмовив один елемент),  $x_3 = 2$  (відмовили два елемента) і  $x_4 = 3$  (відмовили три елементи).

Відмови елементів незалежні одна від одної, ймовірності відмови кожного елемента рівні між собою, тому має місце формула Бернуллі. Враховуючи, що за умовою  $n = 3$ ,  $p = 0,1$ ,  $q = 1 - 0,1 = 0,9$ , отримаємо:

$$P(X = 0) = P_3(0) = C_3^0 p^0 q^3 = (0,9)^3 = 0,729;$$

$$P(X = 1) = P_3(1) = C_3^1 p^1 q^2 = 3 \cdot 0,1 \cdot (0,9)^2 = 0,243;$$

$$P(X = 2) = P_3(2) = C_3^2 p^2 q^1 = 3 \cdot (0,1)^2 \cdot 0,9 = 0,027;$$

$$P(X = 3) = P_3(3) = C_3^3 p^3 q^0 = (0,1)^3 = 0,001.$$

**Контроль:**  $\sum_{i=1}^4 p_i = 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1.$

Шуканий біноміальний закон розподілу  $X$  має вигляд:

|     |       |       |       |       |
|-----|-------|-------|-------|-------|
| $X$ | 0     | 1     | 2     | 3     |
| $P$ | 0,729 | 0,243 | 0,027 | 0,001 |

**Приклад 2** Випадкова величина  $X$  на всій осі  $0x$  задана інтегральною функцією

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x.$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробування величина  $X$  набуває значення, яке належить до інтервалу  $(0; 1)$ .

**Розв'язання.** Для знаходження шуканої ймовірності скористаємося властивістю інтегральної функції:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

Поклавши  $a = 0$ ,  $b = 1$ , отримаємо:

$$P(0 < X < 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot 0 = \frac{1}{4}.$$

**Приклад 3** Випадкова величина  $X$  задана інтегральною функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань величина  $X$  рівно тричі набуде значення, яке належить до інтервалу  $(0,25; 0,75)$ .

**Розв'язання.** Спочатку знайдемо ймовірність того, що випадкова величина  $X$  в результаті одного випробування набуде значення, яке належить до інтервалу  $(0,25; 0,75)$ .

За формулою  $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$  знаходимо:

$$p = P(0,25 < X < 0,75) = F(0,75) - F(0,25) = (0,75)^2 - (0,25)^2 = 0,5.$$

Беручи до уваги, що в результаті чотирьох незалежних випробувань (кількість випробувань  $n = 4$  мале) випадкова величина  $X$  рівно тричі повинна набутися значення, яке належить до інтервалу  $(0,25; 0,75)$ , за формулою Бернуллі знаходимо шукану ймовірність:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot (0,5)^3 (1 - 0,5) = 4 \cdot (0,5)^4 = 4 \cdot 0,0625 = 0,25.$$

**Приклад 4** Випадкова величина  $X$  задана на всій осі  $0x$  інтегральною функцією

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

Знайти можливе значення  $x_1$ , яке задовольняє умові: з ймовірністю  $\frac{1}{4}$  випадкова величина  $X$  у результаті випробування набуде значення, більшого за  $x_1$ .

**Розв'язання.** Події  $X \leq x_1$  і  $X > x_1$  – протилежні, тому  $P(X \leq x_1) + P(X > x_1) = 1$ .

$$\text{За умовою } P(X > x_1) = \frac{1}{4}, \text{ отже, } P(X \leq x_1) = 1 - P(X > x_1) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Оскільки } P(X = x_1) = 0, \text{ то } P(X \leq x_1) = P(X = x_1) + P(X < x_1) = P(X < x_1) = \frac{3}{4}.$$

За означенням інтегральної функції  $P(X < x_1) = F(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x_1}{2}$ .

Отже,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x_1}{2} = \frac{3}{4}$ , або  $\arctg \frac{x_1}{2} = \frac{\pi}{4}$ . Звідси  $\frac{x_1}{2} = 1$  або  $x_1 = 2$ .

Таким чином, шукане значення  $x_1 = 2$ .

**Приклад 5** Дана інтегральна функція неперервної випадкової величини  $X$ :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \sin 2x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Знайти диференційну функцію  $f(x)$ .

**Розв'язання.** За означенням, диференціальна функція дорівнює першій похідній від інтегральної функції, тобто

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 2 \cos 2x & \text{при } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

### Домашнє завдання

**Теорія** Числові характеристики випадкових величин [20], с. 194 –199.

### Вправи

Розв'язати задачі.

1 Серед 10 годинників, які надходять для ремонту, шість потребують чистки механізму. Годинники не розсортовані за видом ремонту. Майстер, який бажає бажачий знайти годинники, що потребують чистки механізму, розглядає їх по черзі і, знайшовши такі годинники, припиняє подальший перегляд. Скласти закон розподілу випадкової величини - кількості переглянутих.

2 Скласти закон розподілу числа очок, вибитих стрільцем у результаті чотирьох пострілів, якщо ймовірність влучення при кожному пострілі дорівнює 0,3, причому за кожне попадання стрілець отримує по п'ять очок, а за кожний промах у нього знімають два очка.

Відповідь:

|     |        |        |        |        |        |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|
| $X$ | -8     | -1     | 6      | 13     | 206    |
| $P$ | 0,2401 | 0,4116 | 0,2646 | 0,0756 | 0,0081 |

3 Із ящика, в якому знаходиться 4 білих і 20 чорних кульок, послідовно виймають кульки до тих пір, доки не з'явиться чорна кулька.  $X$  - число вийнятих кульок є дискретна випадкова величина. Скласти закон розподілу  $X$ .

4 Імовірність того, що в бібліотеці, необхідна для студента книга є вільною, дорівнює 0,3. Скласти закон розподілу числа бібліотек, які відвідає

студент, якщо в місті є чотири бібліотеки.

Відповідь:

|     |     |      |       |       |
|-----|-----|------|-------|-------|
| $X$ | 1   | 2    | 3     | 4     |
| $P$ | 0,3 | 0,21 | 0,147 | 0,343 |

5 У шестиламповому радіоприймачі, де всі лампи різні, перегоріла одна лампа. Для усунення несправності навімання вибрану лампу замінюють явно придатною із запасного комплекту, після чого одразу перевіряють роботу радіоприймача. Скласти закон розподілу числа заміни ламп.

Відповідь:

|     |               |               |               |               |               |               |
|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $X$ | 1             | 2             | 3             | 4             | 5             | 6             |
| $P$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

6 Випадкова величина  $X$  задана інтегральною функцією

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq -2, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{2}, & \text{при } -2 < x \leq 2, \\ 1, & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Знайти ймовірність того, що в результаті випробовування величина  $X$  набуде значення, яке належить інтервалу  $(-1; 1)$ .

Відповідь:  $\frac{1}{3}$ .

7 Випадкова величина  $X$  задана на всій осі  $Ox$  інтегральною функцією

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{2}.$$

Знайти можливе значення  $x_1$ , яке задовольняє умові: з ймовірністю  $\frac{1}{6}$  випадкова величина  $X$  у результаті випробовування набуде значення, більшого за  $x_1$ .

Відповідь:  $x_1 = 2\sqrt{3}$ .

8 Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

|     |     |     |      |     |      |
|-----|-----|-----|------|-----|------|
| $X$ | 10  | 20  | 30   | 40  | 50   |
| $P$ | 0,2 | 0,3 | 0,35 | 0,1 | 0,05 |

Знайти інтегральну функцію і побудувати її графік.

Відповідь:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 10, \\ 0,2, & \text{при } 10 < x \leq 20, \\ 0,5, & \text{при } 20 < x \leq 30, \\ 0,85, & \text{при } 30 < x \leq 40, \\ 0,95, & \text{при } 40 < x \leq 50, \\ 1, & \text{при } x > 50. \end{cases}$$

9 Випадкова величина  $X$  задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 2, \\ (x-2)^2, & \text{при } 2 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Обчислити ймовірність потрапляння випадкової величини  $X$  в інтервали  $(1; 2,5)$  і  $(2,5; 3,5)$ .

Відповідь:  $P(1 < X < 2,5) = 0,25$ ;  $P(2,5 < X < 3,5) = 0,75$ .

10 Диференціальна функція неперервної випадкової величини  $X$  в інтервалі  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  дорівнює  $f(x) = \frac{2}{\pi} \cos^2 x$ ; за межами цього інтервалу  $f(x) = 0$ . Знайти ймовірність того, що в трьох незалежних випробуваннях  $X$  набуде рівно два значення, які належать інтервалу  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

Відповідь:  $3 \cdot \left(\frac{\pi+2}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{3\pi-2}{4\pi}$ .

11 Диференціальна функція неперервної випадкової величини  $X$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3 \sin 3x, & \text{при } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Знайти інтегральну функцію  $F(x)$ .

Відповідь:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & \text{при } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{при } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

12 Випадкова величина  $X$  підпорядкована закону розподілу з щільністю ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ a(3x - x^2), & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Знайти:

а) коефіцієнт  $a$ ;

б) функцію розподілу  $F(x)$ ;

в) ймовірність потрапляння  $X$  до інтервалу  $(1; 2)$  (двома способами).

Побудувати графіки функцій  $f(x)$  і  $F(x)$ .

Відповідь: а)  $\frac{2}{9}$ ; б)  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}x^3, & \text{при } 0 \leq x \leq 3, \\ 1, & \text{при } x > 3. \end{cases}$ ; в)  $\frac{13}{27}$ .



13 Диференціальна функція неперервної випадкової величини  $X$  в інтервалі  $(0; \frac{\pi}{2})$  дорівнює  $f(x) = C \cdot \sin 2x$ , за межами цього інтервалу  $f(x) = 0$ . Знайти сталий параметр  $C$ .

Відповідь: 1.

### Питання для самоперевірки

- 1 Яка величина називається випадковою?
- 2 Як прийнято позначати випадкові величини та їх значення?
- 3 Що являє собою закон розподілу випадкової величини?
- 4 Як можна задати закон розподілу випадкової величини?
- 5 Яка випадкова величина називається дискретною?
- 6 Як прийнято задавати закон розподілу дискретної випадкової величини?

Чому?

7 У чому полягає біноміальний закон та закон Пуассона дискретної випадкової величини?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 23.** Числові характеристики випадкових величин.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини  $X$ , заданої законом розподілу:

|     |     |      |      |      |     |
|-----|-----|------|------|------|-----|
| $X$ | 4   | 6    | 8    | 10   | 12  |
| $P$ | 0,3 | 0,15 | 0,18 | 0,17 | 0,2 |

**Розв'язання.** За формулою обчислення математичного сподівання дискретної випадкової величини маємо:

$$M(X) = 4 \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,15 + 8 \cdot 0,18 + 10 \cdot 0,17 + 12 \cdot 0,2 = \\ = 1,2 + 0,9 + 1,44 + 1,7 + 2,4 = 7,64.$$

Отже, математичне сподівання дискретної випадкової величини  $X$  дорівнює 7,64.

**Приклад 2** Знайти математичне сподівання випадкової величини  $Z = 3X + 4Y$ , якщо відомо, що  $M(X) = 2$ ,  $M(Y) = 6$ .

**Розв'язання.** Скориставшись відповідними властивостями математичного сподівання, одержуємо:

$$M(Z) = M(3X + 4Y) = M(3X) + M(4Y) = 3M(X) + 4M(Y) = \\ = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 6 + 24 = 30.$$

**Приклад 3** Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини  $X$ :  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$ , а також відоме математичне сподівання цієї величини і її квадрата:  $M(X) = 2,3$ ,  $M(X^2) = 5,9$ . Знайти ймовірності, які відповідають можливим значенням  $X$ .

**Розв'язання.** Враховуючи, що

$$\sum_{i=1}^3 p_i = 1, \quad M(X) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i, \quad M(X^2) = \sum_{i=1}^3 x_i^2 p_i, \quad \text{а також беручи до уваги,}$$

що  $M(X) = 2,3$ ,  $M(X^2) = 5,9$ , отримаємо наступну систему трьох лінійних рівнянь відносно невідомих ймовірностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1; \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 2,3; \\ p_1 + 4p_2 + 9p_3 = 5,9. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо шуані ймовірності:  $p_1 = 0,2$ ,  $p_2 = 0,3$ ,  $p_3 = 0,5$ .

**Приклад 4** Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Імовірність того, що виріб є стандартним, дорівнює 0,9. У кожній партії міститься 5 виробів. Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини  $X$  - число партій, у кожній із яких виявиться рівно 4 стандартних вироби, якщо перевірці підлягає 50 партій.

**Розв'язання.** За формулою Бернуллі знаходимо ймовірність того, що в партії з 5 виробів стандартних виробів міститься рівно 4 вироби є стандартними:

$$P_5(4) = C_5^4 p^4 q = 5 \cdot (0,9)^4 \cdot 0,1 = 0,32805.$$

За умовою задачі перевірці підлягає 50 партій. Тому  $M(X) = 50 \cdot 0,32805 \approx 16$ .

Таким чином, у 16 партіях із 50, підлеглих перевірці, виявиться рівно чотири стандартних вироби.

**Приклад 5** Випадкові величини  $X$  і  $Y$  є незалежними. Знайти дисперсію випадкової величини  $Z = 2X + 3Y$ , якщо відомо, що  $D(X) = 4$ ,  $D(Y) = 5$ .

**Розв'язання.** Скориставшись відповідними властивостями дисперсії, отримаємо:

$$\begin{aligned} D(Z) &= D(2X + 3Y) = D(2X) + D(3Y) = 4D(X) + 9D(Y) = \\ &= 4 \cdot 4 + 9 \cdot 5 = 16 + 45 = 61. \end{aligned}$$

**Приклад 6** Проводяться незалежні випробування з однаковою ймовірністю появи події  $A$  у кожному випробуванні. Знайти ймовірність появи події  $A$  в одному випробуванні, якщо дисперсія числа настання події у трьох незалежних випробуваннях дорівнює 0,63.

**Розв'язання.** Використовуючи формулу  $D(X) = npq$  і беручи до уваги, що  $n = 3$ ,  $D(X) = 0,63$ ,  $p + q = 1$ , отримаємо:

$$3p(1 - p) = 0,63$$

або

$$p^2 - p + 0,21 = 0.$$

Після розв'язання цього рівняння ймовірність появи події  $A$  в кожному випробуванні дорівнює або 0,3, або 0,7.

**Приклад 7** Дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ a(4x - x^3) & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

При якому значенні  $a$  функція  $f(x)$  може бути прийнята за щільність ймовірності випадкової величини  $X$ ? Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення відповідної випадкової величини  $X$ . Обчислити  $P(1 < X < 3)$ .

**Розв'язання.** Функція  $f(x)$  може бути прийнята за щільність імовірності, якщо

$$f(x) \geq 0 \quad \text{і} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Беручи до уваги, що при  $x < 0$  і  $x > 2$  функція  $f(x) = 0$  згідно з рівністю  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$  отримаємо:

$$\int_0^2 a(4x - x^3) dx = 1.$$

Обчислюючи інтеграл, будемо мати

$$a\left(2x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 1 \quad \text{або} \quad a(8 - 4) = 1, \quad \text{звідки} \quad a = \frac{1}{4}.$$

Оскільки при  $a = \frac{1}{4}$  задана функція  $f(x) \geq 0$  (пропонуємо переконатися у цьому самостійно) і невластний інтеграл від цієї функції дорівнює одиниці, то

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{1}{4}(4x - x^3) & \text{при } 0 < x \leq 2, \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$$

і є щільністю ймовірності неперервної випадкової величини  $X$ .

Тепер знаходимо математичне сподівання  $X$ :

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_a^b xf(x)dx = \int_0^2 \frac{1}{4}x(4x - x^3)dx = \frac{1}{4} \int_0^2 (4x^2 - x^4)dx = \frac{1}{4} \left( \frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = 8 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

Далі знаходимо дисперсію випадкової величини  $X$ .

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_a^b x^2 f(x) dx - M^2(X) = \int_0^2 \frac{1}{4} x^2 (4x - x^3) dx - \left( \frac{16}{15} \right)^2 = \frac{1}{4} \int_0^2 (4x^3 - x^5) dx - \frac{256}{225} = \\ &= \frac{1}{4} \left( x^4 - \frac{x^6}{6} \right) \Big|_0^2 - \frac{256}{225} = \frac{1}{4} \left( 16 - \frac{32}{3} \right) - \frac{256}{225} = \frac{4}{3} - \frac{256}{225} = \frac{300 - 256}{225} = \frac{44}{225}. \end{aligned}$$

Обчислюємо середнє квадратичне відхилення  $X$ :

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{44}{225}} = \frac{2}{15} \sqrt{11} \approx 0,44.$$

За формулою  $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  обчислюємо шукану

ймовірність того, що випадкова величина  $X$  набуде значення, яке належить інтервалу  $(1; 3)$ :

$$P(1 < X < 3) = \int_1^2 \frac{1}{4}(4x - x^3) dx + \int_2^3 0 dx = \frac{1}{4} \left( 2x^2 - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{4} \left( 8 - 4 - 2 + \frac{1}{4} \right) = \frac{9}{16}.$$

## Домашнє завдання

**Теорія** Рівномірний розподіл, нормальний розподіл, їх числові характеристики. Закон великих чисел. Теорема Бернуллі та Чебишева. [20], с. 199 –202.

## Вправи

1 Імовірність того, що вибір, виготовлений на автоматичному верстаті, виявиться першого або другого гатунку, дорівнює 0,8. Для контролю якості регулювання верстата робітник періодично перевіряє один за іншим вироблені вироби, але не більше п'яти штук кожного разу. Якщо виявиться, що гатунок виробу є нижчим за другий, верстат зупиняється для регулювання. Вважаючи, що ймовірність виготовлення виробів першого та другого гатунку залишається сталою, скласти теоретичний розподіл кількості перевірок виробів, виготовлених робітником під час однієї серії випробувань. Знайти математичне сподівання цієї випадкової величини.

Відповідь: 3,3616.

2 При установленому технологічному процесі  $\frac{2}{3}$  всієї виробленої продукції верстат - автомат випускає першим гатунком і  $\frac{1}{3}$  - другим. Скласти закон розподілу числа виробів першого гатунку серед 5 штук, відібраних випадково. Користуючись цим законом, знайти математичне сподівання і дисперсію цієї випадкової величини. На цьому прикладі перевірити справедливості теорем про математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, яка підлягає біноміальному закону розподілу.

Відповідь:  $M(X) \approx 3,33$ ;  $D(X) \approx 1,11$ .

3 Споживання електроенергії підприємствами № 1 і № 2 протягом доби характеризується наступними даними:

а) підприємство № 1

|                                                    |     |     |     |     |
|----------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| Кількість споживаної електроенергії, квт –ч<br>(X) | 840 | 860 | 880 | 900 |
| Ймовірність (p)                                    | 0,1 | 0,3 | 0,5 | 0,1 |

б) підприємство № 2

|                                                |     |     |      |
|------------------------------------------------|-----|-----|------|
| Кількість споживаної електроенергії, квт -ч(Y) | 950 | 980 | 1000 |
| Ймовірність (q)                                | 0,3 | 0,5 | 0,2  |

Потрібно: скласти закон розподілу кількості електроенергії, споживаної протягом доби обома підприємствами разом; використовуючи отриманий закон, знайти математичне сподівання і дисперсію розглянутої випадкової величини і на цьому прикладі перевірити справедливості теорем про математичне сподівання та дисперсію суми незалежних випадкових величин.

Відповідь:  $M(X) = 872$ ,  $M(Y) = 975$ ,  $D(X) = 256$ ,  $D(Y) = 325$ .

4 Імовірність попадання у результаті одного пострілу дорівнює 0,8 і від пострілу до пострілу не змінюється. Знайти математичне сподівання числа

витрачених снарядів, якщо є 4 снаряди і стрільба виконується до перших двох влучень.

Відповідь: 2,464.

5 Із ящика, в якому знаходиться 6 білих і 4 чорних кульки, виймається кулька п'ять разів підряд, причому кожного разу вийнята кулька повертається назад і кульки перемішуються. Випадкова величина  $X$  - число вийнятих білих кульок. Скласти закон розподілу випадкової величини  $X$  і знайти її математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення.

Відповідь:  $M(X) = 3$ ,  $D(X) = 1,2$ ,  $\sigma(X) = 1,095$ .

6 Визначити середнє число поражених цілей, якщо на стрільбу відпущено 200 снарядів. Імовірність влучення в будь яку ціль дорівнює 0,1 і для влучення в кожную ціль досить двох влучень.

Відповідь: 10.

7 Дано перелік можливих значень дискретної випадкової величини  $X$ :  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 0$ ;  $x_3 = 1$ , а також відоме математичне сподівання цієї величини і її квадрата:  $M(X) = 0,1$ ;  $M(X^2) = 0,9$ .

Знайти ймовірність  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ , які відповідають можливим значенням  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$ .

Відповідь:  $p_1 = 0,4$ ;  $p_2 = 0,1$ ;  $p_3 = 0,5$ .

8 У партії з 10 деталей міститься 3 нестандартних. Навмання взято 2 деталі (без повернення). Знайти математичне сподівання дискретної випадкової величини  $X$  – числа нестандартних деталей серед двох узятих.

Відповідь: 0,6.

9 Знайти дисперсію дискретної випадкової величини  $X$  - числа елементів деякого пристрою, які відказали, під час десяти незалежних випробувань, якщо ймовірність відмови елемента в кожному випробуванні дорівнює 0,9.

Відповідь: 0,9.

10 Дискретна випадкова величина  $X$  має лише три можливих значення:  $x_1 = 1$ ;  $x_2$  і  $x_3$ , при чому  $x_1 < x_2 < x_3$ . Ймовірність того, що  $X$  набуває значення  $x_1$  і  $x_2$ , відповідно дорівнює 0,3 і 0,2. Знайти закон розподілу величини  $X$ , якщо відомі її математичні сподівання  $M(X) = 2,2$  і дисперсія  $D(X) = 0,76$ .

Відповідь:

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | 1   | 2   | 3   |
| $P$ | 0,3 | 0,2 | 0,5 |

11 Дискретні незалежні випадкові величини задані законами розподілу:

|     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|
| $X$ | -1  | 0   | 1   |
| $P$ | 0,3 | 0,4 | 0,3 |

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| $Y$ | -2  | 1   | 2   | 3   |
| $q$ | 0,3 | 0,3 | 0,3 | 0,1 |

Показати, що  $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ .

12 Імовірність відмови деталі за час дослідження на надійність дорівнює 0,2. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа деталей, які відмовили, якщо дослідженню будуть підлягати 10 деталей.

Відповідь:  $M(X) = 2$ ;  $D(X) = 1,6$ .

13 Знайти математичне сподівання числа лотерейних білетів, на які випадуть виграші, якщо придбано 20 білетів, причому ймовірність виграшу по

одному білету дорівнює 0.3.

Відповідь: 6 білетів.

14 На заводі працюють чотири автоматичні лінії. Ймовірність того, що протягом робочої зміни перша лінія не потребує регулювання, дорівнює 0,9, друга – 0,8, третя – 0,75, четверта – 0,27. Знайти математичне сподівання числа ліній, які протягом робочої зміни не потребують регулювання.

Відповідь: 3,15.

15 Підлягають випробуванню 1200 проб руди. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа проб з промисловим вмістом металу, якщо ймовірність промислового вмісту металу дорівнює 0,09.

Відповідь:  $M(X) = 108$ ,  $D(X) = 98,28$ .

16 Визначити сталу ймовірність влучених у ціль при кожному пострілі і число проведених пострілів, якщо середнє число влучень дорівнює 72, а середнє квадратичне відхилення випадкової величини, яка характеризує число улучень, дорівнює 6.

Відповідь:  $p = 0,5$ ,  $n = 144$ .

17 По трьох дослідних ділянках отримані наступні дані про врожайність з 1 га:

| Ділянка             | I  | II | III |
|---------------------|----|----|-----|
| Центнерів з 1 га    | 18 | 20 | 22  |
| Розмір ділянки в га | 10 | 20 | 20  |

Визначити середнє значення випадкової величини врожайності з 1 га за всіма трьома ділянками і її середнє квадратичне відхилення.

Відповідь:  $M(X) = 20,4$  ц.,  $\sigma(X) \approx 1,5$  ц.

18 На шляху руху автомобіля 4 світлофори, кожний із яких або дозволяє, або забороняє подальший рух автомобіля з імовірністю 0,5. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа пройдених автомобілем світлофорів до першої зупинки.

Відповідь: 0,938; 1,43.

19 Випадкова величина  $X$  задана диференціальною функцією  $f(x) = \frac{1}{2}x$  в інтервалі  $(0;2)$ ; за межами цього інтервалу  $f(x) = 0$ . Знайти математичне сподівання величини  $X$ .

Відповідь:  $\frac{4}{3}$ .

20 Випадкова величина  $X$  задана диференціальною функцією (розподіл Лапласа)  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ . Знайти математичне сподівання величини  $X$ .

Відповідь: 0.

21 Випадкова величина  $X$  задана диференціальною функцією  $f(x) = C(x^2 + 2x)$  в інтервалі  $(0;1)$ ; за межами цього інтервалу  $f(x) = 0$ . Знайти:

а) параметр  $C$ ;

б) математичне сподівання величини  $X$ .

Відповідь: а)  $\frac{3}{4}$ ; б)  $\frac{11}{16}$ .

22 Випадкова величина  $X$  в інтервалі  $(-3;3)$  задана диференціальною функцією  $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{9-x^2}}$ ; за межами цього інтервалу  $f(x) = 0$ .

а) знайти дисперсію  $X$ ;

б) що в результаті випробовування виявиться імовірнішим:  $X < 1$  чи  $X > 1$ ?

Відповідь: а)  $D(X) = 4,5$ ; б) імовірніше, що в результаті випробовування  $X < 1$ .

23 Випадкова величина  $X$  в інтервалі  $(0;5)$  задана диференціальною функцією  $f(x) = \frac{2}{25}x$ ; за межами цього інтервалу  $f(x) = 0$ . Знайти дисперсію  $X$ .

Відповідь:  $\frac{25}{18}$ .

24 Щільність розподілу неперервної випадкової величини

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{2} \sin x, & \text{при } 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$ .

Відповідь:  $M(X) = \frac{\pi}{2}$ ;  $D(X) = \frac{\pi^2}{4} - 2$ ;  $\sigma(X) \approx 0,69$ .

25 Випадкова величина  $X$  задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{36}, & \text{при } 0 < x \leq 6, \\ 1, & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Знайти:

1) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$ ;

2) імовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке належить інтервалу  $(0,5; 7)$  (двома способами). Побудувати графіки функцій  $f(x)$  і  $F(x)$ .

Відповідь: 1)  $M(X) = 4$ ;  $D(X) = 2$ ;  $\sigma(X) = \sqrt{2}$ ; 2)  $P(0,5 < X < 7) = 1$ .

### Питання для самоперевірки

1 Назвіть числові характеристики дискретної випадкової величини.

2 Що називають математичним сподіванням дискретної випадкової величини? Яким чином воно її характеризує?

3 Перерахуйте властивості математичного сподівання.

4 Що називають дисперсією дискретної випадкової величини? Яким чином вона її характеризує?

5 Якою формулою для обчислення дисперсії користуються на практиці?

6 Перерахуйте властивості дисперсії випадкової величини.

7 Що називають середнім квадратичним відхиленням дискретної випадкової величини? Для чого його вводять?

8 Яку випадкову величину називають неперервною?

9 Що називають інтегральною функцією? Сформулюйте її властивості.

10 Дайте означення диференціальної функції (щільності розподілу).

11 Сформулюйте властивості диференціальної функції.

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 24.** Нормальний, рівномірний та показниковий закони розподілу. Закон великих чисел.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Ціна поділки шкали вимірювального приладу дорівнює 0,2. Показ приладу заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде зроблена похибка:

а) менша за 0,04;

б) більша за 0,05.

**Розв'язання.**

а) Похибку заокруглення відліку можна розглядати як випадкову величину  $X$ , яка розподілена рівномірно в інтервалі між двома сусідніми цілими поділками. У даній задачі довжина інтервалу, в якому містяться можливі значення  $X$ , дорівнює 0,2, тому  $f(x) = \frac{1}{0,2} = 5$ .

Легко зрозуміти, що похибка відліку буде менша за 0,04, якщо вона буде міститися в інтервалах  $(0; 0,04)$  або  $(0,16; 0,20)$ , тобто коли  $0 < X < 0,04$  або  $0,16 < X < 0,20$ . Оскільки події  $0 < X < 0,04$  і  $0,16 < X < 0,20$  несумісні, то за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій  $P(X < 0,04) = P(0 < X < 0,04) + P(0,16 < X < 0,20)$ .

Застосовуючи далі формулу  $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ , отримаємо

$$P(X < 0,04) = \int_0^{0,04} 5dx + \int_{0,16}^{0,20} 5dx = 5x \Big|_0^{0,04} + 5x \Big|_{0,16}^{0,20} = 0,2 + 1 - 0,8 = 0,4.$$

Таким чином, ймовірність того, що при відліку буде зроблена похибка, менша за 0,04, дорівнює 0,4.

б) При відліку буде припущена похибка, більша за 0,05, якщо  $0,05 < X < 0,15$ , тому

$$P(X > 0,05) = P(0,05 < X < 0,15) = \int_{0,05}^{0,15} 5dx = 5x \Big|_{0,05}^{0,15} = 0,75 - 0,25 = 0,5.$$

**Приклад 2** Автобуси деякого маршруту рухаються строго за розкладом. Інтервал руху – 5 хв. Знайти ймовірність того, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде чекати чергового автобуса менше 3 хв.

**Розв'язання.** Час очікування чергового автобуса можна розглядати як випадкову величину  $X$ , розподілену рівномірно. У даній задачі довжина інтервалу руху, в якому містяться можливі значення  $X$ , дорівнює 5 хв, тому



$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{5}.$$

Очевидно, що пасажир, який підійшов до зупинки, буде чекати чергового автобуса менше 3 хв, якщо  $2 < X < 5$ .

За формулою  $P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$  знаходимо

$$P(X < 5) = P(2 < X < 5) = \int_2^5 \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5} x \Big|_2^5 = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює 0,6.

**Приклад 3** Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі  $X$ , розподілена нормально з математичним сподіванням (проектна довжина), рівним 50 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша за 32 мм і не більша за 68 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі:

- а) більша за 55 мм;
- б) менша за 40 мм.

**Розв'язання.**

а) Оскільки фактична довжина виготовлених деталей не менша за 32 мм і не більша за 68 мм, то подія  $32 \leq x \leq 68$  є вірогідною. Тому  $P(32 \leq X \leq 68) = P(32 < X < 68) = 1$ .

З іншого боку, за формулою  $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)$  маємо:

$$P(32 < X < 68) = \Phi\left(\frac{68 - 50}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{32 - 50}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-18}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right).$$

$$\text{Отже, } 2\Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 1, \text{ або } \Phi\left(\frac{18}{\sigma}\right) = 0,5.$$

За таблицею значень функції Лапласа (додаток Б), знаходимо  $\frac{18}{\sigma} = 5$ , звідки  $\sigma = \frac{18}{5} = 3,6$ .

Шукана ймовірність, тобто ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі більша за 55 мм, і, очевидно, менша за 68 мм, буде такою:

$$P(55 < X < 68) = \Phi\left(\frac{68 - 50}{3,6}\right) - \Phi\left(\frac{55 - 50}{3,6}\right) = \Phi(5) - \Phi(1,39) = 0,5 - 0,4177 = 0,0823.$$

б) Ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі менша за 40 мм, і, очевидно, більша за 32 мм, дорівнює:

$$\begin{aligned} P(32 < X < 40) &= \Phi\left(\frac{40 - 50}{3,6}\right) - \Phi\left(\frac{32 - 50}{3,6}\right) = \Phi(-2,78) - \Phi(-5) = \Phi(5) - \Phi(2,78) = \\ &= 0,5 - 0,4973 = 0,0027. \end{aligned}$$

**Приклад 4** У освітлювальну мережу паралельно включено 20 ламп. Ймовірність того, що за час  $T$  лампа буде включена, дорівнює 0,8. Скориставшись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом включених ламп і середнім числом

(математичним сподіванням) включених ламп за час  $T$  виявиться: а) меншою за три; б) не меншою за три.

**Розв'язання.**

а) Позначимо через  $X$  дискретну випадкову величину - число включених ламп за  $T$  час.

Тоді

$$M(X) = np = 20 \cdot 0,8 = 16,$$

$$D(X) = npq = 20 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 3,2.$$

Скористаємося нерівністю Чебишева:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Підставляючи до цієї нерівності  $M(X) = 16$ ,  $D(X) = 3,2$ ,  $\varepsilon = 3$ , отримаємо

$$P(|X - 16| < 3) \geq 1 - \frac{3,2}{9} = 0,64.$$

б) Події  $|X - 16| < 3$  і  $|X - 16| \geq 3$  є протилежними, тому сума їх імовірностей дорівнює одиниці.

Отже,  $P(|X - 16| \geq 3) \geq 1 - 0,64 = 0,36$ .

**Приклад 5** Дано:  $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,9$  і  $D(X) = 0,009$ .

Використовуючи нерівність Чебишева, знайти  $\varepsilon$ .

**Розв'язання.** Згідно з нерівністю Чебишева маємо:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

і з урахуванням, що  $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,9$ , а  $D(X) = 0,009$ , одержуємо

$$1 - \frac{0,009}{\varepsilon^2} = 0,9 \quad \text{або} \quad \varepsilon^2 = \frac{0,009}{1 - 0,9} = 0,09.$$

Звідки  $\varepsilon = \sqrt{0,09} = 0,3$ .

**Приклад 6** Дисперсія кожної із попарно незалежних 16000 випадкових величин не перевищує 10. Потрібно: а) оцінити ймовірність того, що відхилення середньої арифметичної  $\bar{X}$  цих величин від математичного сподівання їх середньої  $M(\bar{X})$  не перевищує 0,25; б) визначити, скільки таких випадкових величин потрібно взяти, щоб із ймовірністю, не меншою за 0,99, можна було стверджувати, що абсолютна величина різниці між  $\bar{X}$  і  $M(\bar{X})$  не перевищує 0,25.

**Розв'язання.**

а) Для оцінки ймовірності скористаємося нерівністю:

$$P(|\bar{X} - M(\bar{X})| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

За умовою:  $n = 16000$ ,  $D(X) \leq C = 10$ ,  $\varepsilon = 0,25$ ,

Отже,

$$P(|\bar{X} - M(\bar{X})| \leq 0,25) \geq 1 - \frac{10}{16000 \cdot (0,25)^2} = 0,99.$$

б) Використовуючи нерівність  $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$  і беручи до уваги, що

$$P\left(\left|\bar{X} - M(\bar{X})\right| \leq 0,25\right) = 0,99, \quad C = 10, \quad \varepsilon = 0,25,$$

отримаємо

$$1 - \frac{10}{n \cdot (0,25)^2} \geq 0,99, \text{ звідки } n \geq \frac{10}{(1 - 0,99) \cdot (0,25)^2} = 16000.$$

**Приклад 7** Під час штамповки пластинок із пластмаси за даними ВТК брак складає 3 %. Знайти ймовірність того, що під час перегляду партії у 1000 пластинок виявиться відхилення від встановленого відсотка браку менше ніж 1 %.

**Розв'язання.** У даному випадку потрібно визначити

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$$

при  $p = 3 \% = 0,03$ ,  $\varepsilon = 1 \% = 0,01$ ,  $n = 1000$ .

Використовуючи нерівність  $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ , одержимо

$$P \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,03 \cdot 0,97}{1000 \cdot (0,01)^2} = 1 - \frac{0,0291}{0,1} = 0,709.$$

Таким чином,  $P \geq 0,709$ .

**Приклад 8** Імовірність того, що випущений екземпляр годинника має точність ходу в межах стандарту, дорівнює 0,97. Оцінити ймовірність того, що серед 1000 годинників доля годинників з точністю ходу в межах норми відхилиться (за абсолютною величиною) від ймовірності 0,97 не більше ніж на 0,2.

**Розв'язання.** За умовою даної задачі:  $\varepsilon = 0,02$ ,  $p = 0,97$ ,  $q = 0,03$ ,  $n = 1000$ . Отже, згідно з нерівністю  $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$ , ймовірність шуканої події:

$$P\left(\left|\frac{m}{1000} - 0,97\right| \leq 0,02\right) \geq 1 - \frac{0,97 \cdot 0,03}{1000 \cdot (0,02)^2} = 1 - \frac{0,0291}{0,4} = 0,92725.$$

**Приклад 9** Скільки потрібно перевірити деталей, щоб з імовірністю, не меншою за 0,98, можна було б очікувати, що абсолютна величина відхилення частоти придатних деталей від ймовірності деталі бути придатною, рівною 0,95, не перевищить 0,01.

**Розв'язання.** Відповідно до нерівності:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Якщо при відомих значеннях  $p$ ,  $q$  і  $\varepsilon$ , число  $n$  буде обрано таким, що

різниця  $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$  буде меншою за дану в умові ймовірність  $p$ , то одержимо нерівність  $1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} \geq P$ , із якої й визначимо значення  $n$ .

За умовою даної задачі:  $p = 0,95$ ,  $q = 0,05$ ,  $\varepsilon = 0,01$  і  $p = 0,98$ , тому:  
 $1 - \frac{0,95 \cdot 0,05}{n \cdot (0,01)^2} \geq 0,98$  або  $0,02 \geq \frac{0,0475}{0,0001n}$ , звідки  $n \geq \frac{0,0475}{0,02 \cdot 0,0001} = 23750$ .

Таким чином, потрібно перевірити не менше 23750 деталей.

**Приклад 10** Число телевізорів підвищеної якості складає у середньому 75 % від загального їх випуску.

Оцінити з допомогою нерівності Чебишева ймовірність того, що серед 3000 телевізорів число телевізорів підвищеної якості виявиться від 2190 до 2310 включно.

**Розв'язання.** Число телевізорів підвищеної якості серед 3000 є випадковою величиною  $X$ , що розподілена за біноміальним законом. Тому її математичне сподівання:

$$M(X) = np = 3000 \cdot 0,75 = 2250,$$

а дисперсія -

$$D(X) = npq = 3000 \cdot 0,75 \cdot 0,25 = 562,5.$$

Оскільки 2190 і 2310 - межі припустимих значень випадкової величини - симетричні відносно математичного сподівання, рівного 2250 (одна менша, а друга більша на 60), нерівність  $2190 \leq X \leq 2310$  рівносильна нерівності  $|X - 2250| \leq 60$ . Тому, згідно з нерівністю Чебишева, при  $\varepsilon = 60$  отримаємо:

$$P(2190 \leq X \leq 2310) = P(|X - 2250| \leq 60) \geq 1 - \frac{262,5}{3600} = 1 - 0,15625 = 0,84375.$$

Отже, ймовірність шуканої події не менша за 0,84375.

**Приклад 11** Ймовірність появи події  $A$  в кожному з 1000 випробувань дорівнює 0,3. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що відхилення числа настання цієї події від математичного сподівання буде більше 30.

**Розв'язання.** Число появи події  $A$  в  $n = 1000$  випробувань є випадковою величиною  $X$ , яка розподілена за біноміальним законом. Тому

$$M(X) = np = 1000 \cdot 0,3 = 300, \quad D(X) = npq = 1000 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 210.$$

Використовуючи нерівність Чебишева і приймаючи до уваги, що

$$M(X) = 300, \quad D(X) = 210 \quad \text{і} \quad \varepsilon = 30,$$

знаходимо:

$$P(|X - 300| > 30) \leq \frac{210}{30^2} \approx 0,233.$$

Таким чином, ймовірність шуканої події не більша за 0,233.

### Домашнє завдання

**Теорія** Генеральна та вибіркова сукупності. Статистичний розподіл вибірки. Емпірична функція розподілу та її властивості. Полігон та гістограма. Генеральна і вибіркова середні. Дисперсія. [20], с. 203 –216.

## Вправи

Розв'язати задачі.

1 Неперервна випадкова величина  $X$  задана диференціальною функцією

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 0, \\ 3e^{-3x}, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Знайти  $M(X)$  і ймовірність того, що випадкова величина  $X$  набуде значення, яке належить інтервалу  $(1; 2)$ .

Відповідь:  $M(X) = \frac{1}{3}$ ;  $P(1 < X < 2) \approx 0,0473$ .

2 Ціна поділки шкали амперметра дорівнює  $0,1\text{А}$ . Показання заокруглюють до найближчої цілої поділки. Знайти ймовірність того, що при відліку буде допущена похибка, яка перевищує  $0,02\text{А}$ .

Відповідь:  $0,6$ .

3 Хвилинна стрілка електронного годинника переміщається стрибками в кінці кожної хвилини. Знайти ймовірність того, що в даний момент годинник покаже час, який відрізняється від істинного, не більше ніж на  $20\text{с}$ .

Відповідь:  $\frac{2}{3}$ .

4 Знайти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини  $X$ , розподіленої рівномірно в інтервалі  $(2; 8)$ .

Відповідь:  $M(X) = 5$ ;  $D(X) = 3$ ;  $\sigma(X) = \sqrt{3}$ .

5 Усі значення рівномірно розподіленої випадкової величини  $X$  належать відрізка  $[2; 8]$ . Знайти ймовірність потрапляння  $X$  до інтервалу  $(3; 5)$ .

Відповідь:  $\frac{1}{3}$ .

6 Нормально розподілена випадкова величина  $X$  задана диференціальною функцією  $f(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{50}}$ . Знайти математичне сподівання і дисперсію  $X$ .

Відповідь:  $M(X) = 1$ ;  $D(X) = 25$ .

7 Математичне сподівання і дисперсія нормально розподіленої випадкової величини  $X$  відповідно дорівнюють  $2$  і  $25$ . Знайти ймовірність того, що в результаті випробовування  $X$  набуде значення, яке належить інтервалу  $(1; 4)$ .

Відповідь:  $0,2347$ .

8 Зважується деяка речовина без систематичних похибок. Випадкові похибки зважування підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням  $\sigma = 20\tau$ . Знайти ймовірність того, що зважування буде здійснюватись з похибкою, яка не перевищує за абсолютною величиною  $10\tau$ .

Відповідь:  $0,383$ .

9 Деталь, виготовлена автоматом, вважається придатною, якщо відхилення її контрольованого розміру від проектного не перевищує  $10\text{ мм}$ . Випадкові відхилення контрольованого розміру від проектного підпорядковуються нормальному закону з середнім квадратичним відхиленням

$\sigma = 5\text{ мм}$  і математичним сподіванням  $a = 0$ . Який відсоток придатних деталей виготовляє автомат?

Відповідь: приблизно 95%.

10 Випадкова величина  $X$  розподілена нормально з математичним сподіванням  $a = 25$ . Ймовірність попадання  $X$  в інтервал (10;15) дорівнює 0,2. Чому дорівнює ймовірність потрапляння  $X$  до інтервалу (35; 40)?

Відповідь: 0,2.

11 Верстат-автомат виготовляє валики, причому контролюється їх діаметр  $X$ . Вважаючи, що  $X$  – нормально розподілена випадкова величина з математичним сподіванням  $a = 10\text{ мм}$  і середнім квадратичним відхиленням  $\sigma = 0,1\text{ мм}$ , знайти інтервал, у якому з імовірністю 0,9973 будуть міститися діаметри виготовлених валиків.

Відповідь: (9,7; 10,3).

12 Вважається, що відхилення довжини виготовлених деталей від стандарту виявляється випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Якщо стандартна довжина дорівнює 40 см і середнє квадратичне відхилення – 0,4 см, то яку точність довжини деталі можна гарантувати з імовірністю 0,8?

Відповідь:  $\delta \approx 0,52$ .

13 Довжина виготовленої автоматом деталі являє собою випадкову величину, розподілену за нормальним законом з параметрами  $a = 15$  і  $\sigma = 0,2$ . Знайти ймовірність браку, якщо припустимі розміри деталі повинні складати  $15 \pm 0,3$ .

Відповідь: 0,1336.

14 Графік щільності ймовірності випадкової величини  $X$  зображений на рис.24.1. Скласти аналітичний вираз щільності ймовірності і знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини  $X$ .

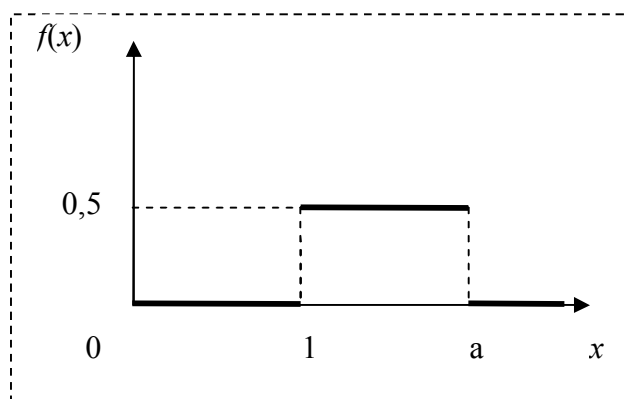


Рис. 24.1

Відповідь:  $M(X) = 2$ ;  $D(X) = \frac{1}{3}$ .

15 Автомат штампує деталі. Контролюється довжина деталі  $X$ , яка розподілена нормально з математичним сподіванням, рівним 30 мм. Фактична довжина виготовлених деталей не менша за 24 мм і не більша за 36 мм. Знайти ймовірність того, що довжина навмання взятої деталі більша за 32 мм.

Відповідь: 0,0475.

16 Електростанція обслуговує мережу з 18000 ламп, ймовірність включення кожної з яких у зимового вечора дорівнює 0,9. Яка ймовірність того, що число ламп, включених до мережі зимовим вечором відрізняється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше ніж на 200?

Відповідь:  $P \geq 0,9595$ .

17 Дискретна випадкова величина  $X$  задана законом розподілу:

|     |     |     |     |      |      |
|-----|-----|-----|-----|------|------|
| $X$ | -1  | 0   | 2   | 4    | 6    |
| $P$ | 0,2 | 0,4 | 0,3 | 0,05 | 0,05 |

Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що  $|X - M(X)| < 5$ .

Відповідь:  $P \geq 0,872$ .

18 Середнє значення довжини деталі – 50 см, а дисперсія – 0,1. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що випадково взята деталь виявиться по довжині не меншою за 49,5 см і не більшою за 50,5 см.

Відповідь:  $P \geq 0,6$ .

19 Ймовірність випуску нестандартної радіолампи дорівнює 25%. Оцінити знизу ймовірність того, що в партії з 1000 радіоламп число нестандартних відрізняється від 250 менше ніж на 40.

Відповідь:  $P \geq 0,8667$ .

20 Прорість сім'я деякої культури дорівнює 0,75. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що з посіяних 1000 насінин число тих, які проростуть виявиться від 700 до 800 включно.

Відповідь:  $P \geq 0,925$ .

21 Математичне сподівання швидкості вітру на даній висоті дорівнює 25 км/год, а середнє квадратичне відхилення – 4,5 км/год. Які швидкості вітру на цій висоті можна очікувати з ймовірністю, не меншою за 0,9?

Відповідь:  $10,8 \leq X \leq 39,2$ .

22 Добова витрата води в населеному пункті є випадковою величиною, середнє квадратичне відхилення якої дорівнює 10000 л. Оцінити ймовірність того, що витрати води в цьому пункті протягом доби відхиляться від математичного сподівання за абсолютною величиною більше ніж на 25000 л.

Відповідь:  $P \leq 0,16$ .

23 Для визначення середньої тривалості горіння електролампи в партії з 200 однакових ящиків вибрано довільно по одній лампі з кожного ящика. Оцінити знизу ймовірність того, що середня тривалість горіння взятих 200 електроламп відрізняється від середньої тривалості горіння в усій партії за абсолютною величиною менше ніж на 5 годин, якщо відомо, що середнє квадратичне відхилення тривалості горіння ламп у кожному ящику менше за 7 годин.

Відповідь:  $P \geq 0,9902$ .

24 Для визначення середньої урожайності радгоспного поля в 5000 га припускається узяти на вибір по 1м<sup>2</sup> з кожного гектара площі і точно

підрахувати врожайність з цих квадратних метрів. Оцінити ймовірність того, що середня вибірка врожайність буде відрізнятися від істинної середньої врожайності на всьому масиві не більше ніж на 0,2 ц, якщо припустити, що середнє квадратичне відхилення врожайності на кожному гектарі не перевищує 5 ц.

Відповідь:  $P \geq 0,875$ .

### Питання для самоперевірки

1 Що називають рівномірним законом розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини?

2 Що називають нормальним законом розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини?

3 Що можна оцінити за допомогою нерівності Чебишева? Яким чином?

4 Сформулюйте теорему Чебишева та теорему Бернуллі.

5 Як оцінюються  $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right)$  та  $P(|\bar{X} - M(\bar{X})| < \varepsilon)$ ?

### ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 25. Основні поняття математичної статистики.

**Генеральна та вибірка сукупності. Статистичний розподіл вибірки.**

**Емпірична функція розподілу та її властивості. Полігон та гістограма.**

**Генеральна і вибірка середні. Дисперсія.**

#### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Вибірка задана у вигляді розподілу частот:

|       |   |   |    |
|-------|---|---|----|
| $x_i$ | 5 | 8 | 10 |
| $n_i$ | 1 | 3 | 6  |

Знайти розподіл відносних частот.

**Розв'язання.** Знайдемо об'єм вибірки  $n = \sum_{i=1}^k n_i = 1 + 3 + 6 = 10$ .

Обчислюємо відносні частот за формулою:  $w_i = \frac{n_i}{n}$ . Одержуємо

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{1}{10} = 0,1, \quad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{3}{10} = 0,3, \quad w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Записуємо розподіл відносних частот:

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 5   | 8   | 10  |
| $w_i$ | 0,1 | 0,3 | 0,6 |

**Приклад 2** Для контролю роботи пристрою зроблена вибірка із партії виробів заводу будівельних конструкцій. Одержані наступні результати зважування виробів із точністю до одної десятої кілограма: 99,6; 100,3; 101,5; 98,1; 99,4; 100,7; 101,2; 100,8; 100,5; 99,2; 98,0; 100,4; 103,0; 99,8; 101,2; 101,3; 100,2; 102,3; 100,6; 99,7. Потрібно побудувати інтервальний варіаційний ряд, розбиваючи діапазон одержаних значень на 5 інтервалів.

**Розв'язання.** Аналіз одержаних результатів показує, що всі значення знаходяться в проміжку (98,0;103], розподіл за частинними інтервалами має



вигляд:

98-99 спостерігалось 2 рази,  
99-100 спостерігалось 5 разів,  
100-101 спостерігалось 7 разів,  
101-102 спостерігалось 4 рази,  
102-103 спостерігалось 2 рази.

Таким чином інтервальний варіаційний ряд (статистичний розподіл вибірки) має вигляд:

| $x_i - x_{i+1}$ | 98-99 | 99-100 | 100-101 | 101-102 | 102-103 |
|-----------------|-------|--------|---------|---------|---------|
| $n_i$           | 2     | 5      | 7       | 4       | 2       |
| $w_i$           | 0,1   | 0,25   | 0,35    | 0,2     | 0,1     |

**Приклад 3** Заданий ряд розподілу випадкової величини  $X$  (таблиця 25.1).

Таблиця 25.1

| Частковий інтервал $X$ | 0 – 8 | 8 – 16 | 16 – 24 | 24 – 32 | 32 – 40 | 40 – 48 |
|------------------------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|
| $n_i$                  | 10    | 12     | 18      | 20      | 24      | 16      |

Необхідно:

- 1 знайти відносні частоти розподілу випадкової величини  $X$ ;
- 2 побудувати полігон і гістограму частот і відносних частот;
- 3 знайти вибірккову середню випадкової величини  $X$ ;
- 4 знайти вибірккову дисперсію випадкової величини  $X$ ;
- 5 знайти емпіричну функцію розподілення;

**Розв'язання.**

1 Знайдемо розподілення відносних частот.

Обчислимо об'єм вибірки:  $n = 10+12+18+20+24+16 = 100$ .

Знайдемо відносні частоти за формулою

$$w_i = \frac{n_i}{n}.$$

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{10}{100} = 0,1; \quad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{12}{100} = 0,12; \quad w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{18}{100} = 0,18;$$

$$w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{20}{100} = 0,2; \quad w_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{24}{100} = 0,24; \quad w_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{16}{100} = 0,16.$$

Статистичне розподілення частот і відносних частот представимо у вигляді таблиці 25.2.

Таблиця 25.2

| Часткові інтервали $X$ | 0 – 8 | 8 – 16 | 16 – 24 | 24 – 32 | 32 – 40 | 40 – 48 |
|------------------------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|
| $n_i$                  | 10    | 12     | 18      | 20      | 24      | 16      |
| $w_i$                  | 0,1   | 0,12   | 0,18    | 0,2     | 0,24    | 0,16    |

2 Зобразимо статистичне розподілення частот графічно у вигляді полігона (рисунки 25.1, 25.2) й гістограми (рисунки 25.3, 25.4).

Відкладаємо на осі абсцис варіанти  $x_i$ , а на осі ординат — відповідні

частоти  $n_i$ , з'єднуючи точки  $(x_i; n_i)$  відрізками прямих, отримаємо полігон частот (рисунок 25.1).

Аналогічні дії виконуємо для відносних частот: на осі абсцис – варіанти  $x_i$ , на осі ординат – відносні частоти  $w_i$ ; з'єднуючи точки  $(x_i; w_i)$ , отримаємо полігон відносних частот (рисунок 4.2).

Для побудови гістограм частот і відносних частот складемо таблицю 25.3.

Таблиця 25.3

|                        |        |       |        |       |      |      |
|------------------------|--------|-------|--------|-------|------|------|
| Часткові інтервали $X$ | 4      | 12    | 20     | 28    | 36   | 44   |
| $n_i / h$              | 1,25   | 1,5   | 2,25   | 2,5   | 3,0  | 2,0  |
| $w_i / h$              | 0,0125 | 0,015 | 0,0225 | 0,025 | 0,03 | 0,02 |

Розподілення складено для середини часткових інтервалів.

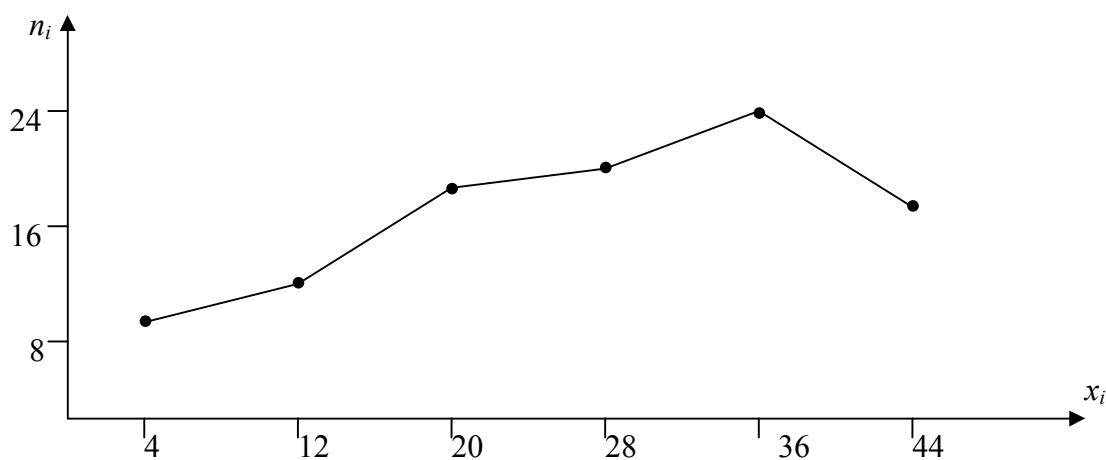


Рис. 25.1

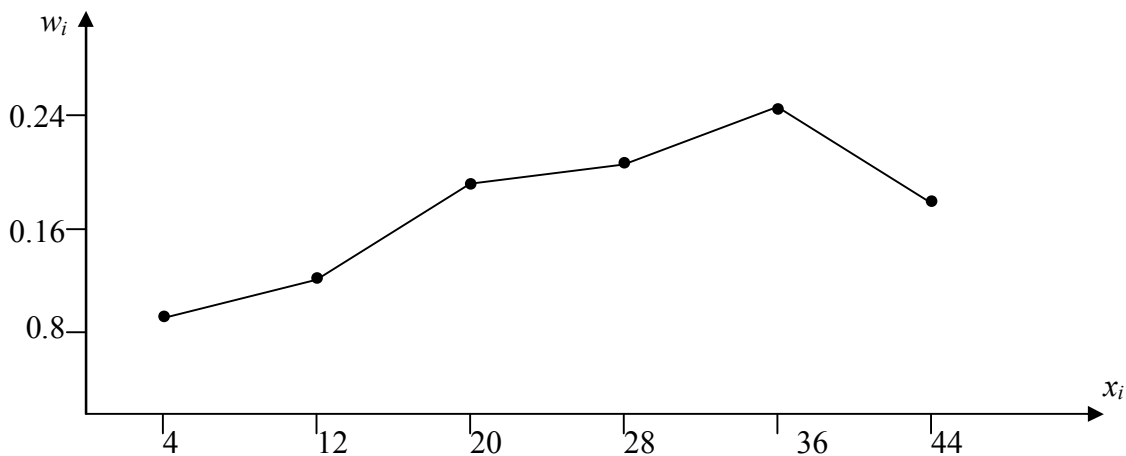


Рис. 25.2

Будуємо на осі абсцис часткові інтервали довжиною  $h = 8$ . Проводимо над цими інтервалами відрізки, паралельні осі абсцис і розташовані від неї на відстанях, рівних відповідним густинам частоти  $\frac{n_i}{h}$ . Отримаємо гістограму частот (рисунок 25.3).

Аналогічно для гістограми відносних частот: на осі абсцис – часткові

інтервали, над цими інтервалами проводимо відрізки паралельні осі  $OX$  і розташовані від неї на відстанях, рівних відповідним густинам відносної частоти  $\frac{w_i}{h}$ . Гістограма відносних частот зображена на рисунку 25.4.

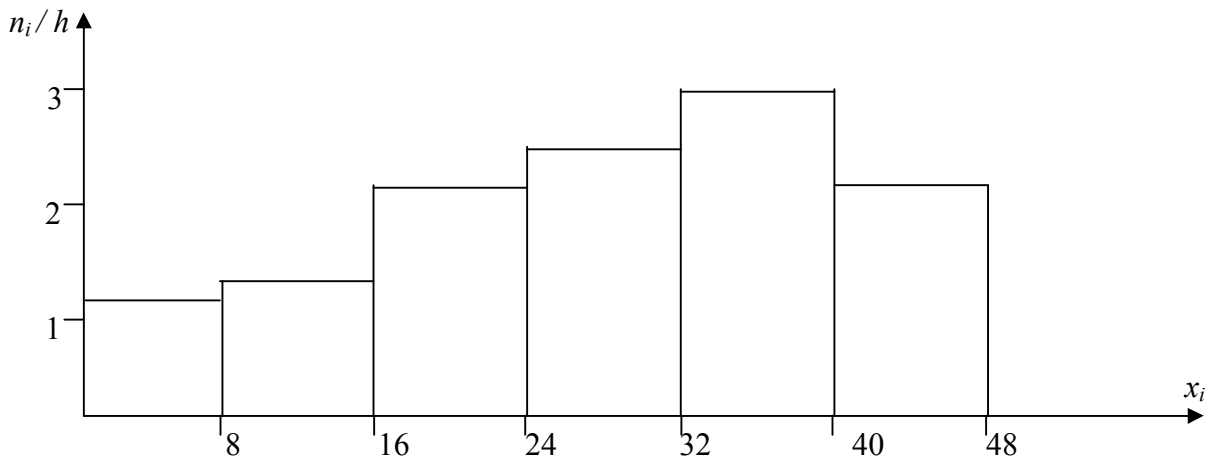


Рис. 25.3

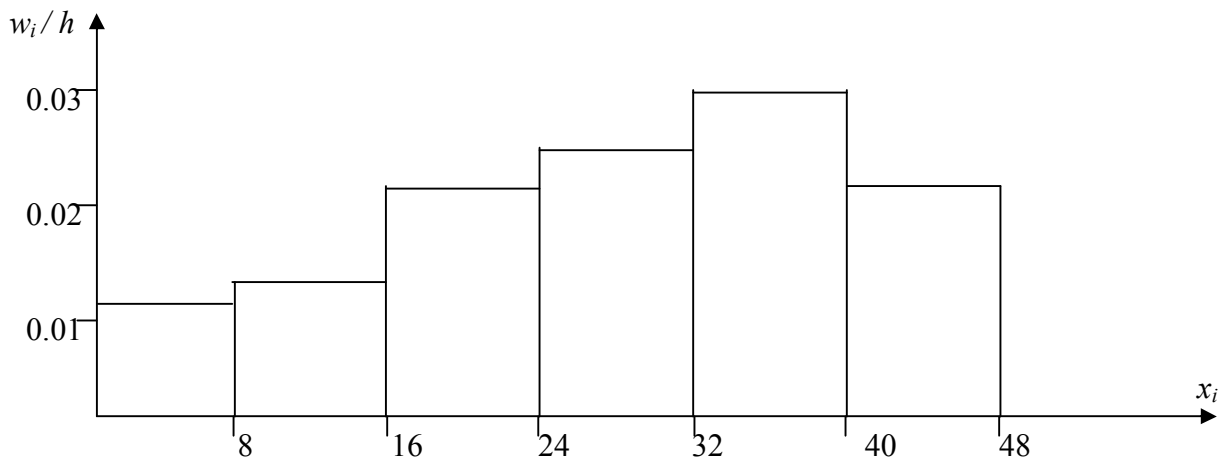


Рис. 25.4

3 Обчислення вибіркової середньої.

Вибіркову середню обчислимо за формулою

$$\bar{x}_g = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i \cdot n_i}{n} = \frac{4 \cdot 10 + 12 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 28 \cdot 20 + 36 \cdot 24 + 44 \cdot 16}{100} = \frac{2672}{100} = 26,72.$$

4 Обчислення вибіркової дисперсії.

Вибіркова дисперсія обчислюється за формулою

$$D_g = \frac{\sum_{i=1}^6 n_i (\bar{x}_g - x_i)^2}{n} = \frac{10(-22,72)^2 + 12(-14,72)^2 + 18(-6,72)^2 + 20(1,28)^2 + 24(9,28)^2 + 16(17,28)^2}{100} = \frac{5161,98 + 2600,14 + 812,85 + 32,77 + 2066,84 + 4777,57}{100} = \frac{15452,16}{100} = 154,52.$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює

$$\sigma_b = \sqrt{D_g} = \sqrt{154,52} = 12,43.$$

5 Знаходження емпіричної функції розподілення.

Запишемо ряд розподілення відносних частот (таблиця 25.4).

Таблиця 25.4

|              |     |      |      |     |      |      |
|--------------|-----|------|------|-----|------|------|
| Варіанти $X$ | 4   | 12   | 20   | 28  | 36   | 44   |
| $w_i$        | 0,1 | 0,12 | 0,18 | 0,2 | 0,24 | 0,16 |

Згідно з означенням емпіричної функції, яка визначає для кожного значення  $x$  відносну частоту події  $X < x$ :

$$F^*(x) = W(X < x).$$

Об'єм вибірки  $n=100$ .

а) Найменша варіанта  $x = 4$ , при  $x \leq 4$   $F^*(x) = 0$ ;

б) при  $4 < x \leq 12$  проміжок  $X < x$  містить одне значення  $x_1=4$  з  $W=0,1$ ,  $F^*(x) = 0,1$ ;

в) при  $12 < x \leq 20$ ,  $x_1=4$ ,  $x_2=12$  з  $W=0,1 + 0,12 = 0,22$ ,  $F^*(x) = 0,22$ ;

г) при  $20 < x \leq 28$ ,  $x_1=4$ ,  $x_2=12$ ,  $x_3 = 20$  з  $W=0,1 + 0,12 + 0,18 = 0,4$ ,  $F^*(x) = 0,4$ ;

д) при  $28 < x \leq 36$ ,  $x_1=4$ ,  $x_2=12$ ,  $x_3=20$ ,  $x_4=28$  з  $W = 0,1 + 0,12 + 0,18 + 0,2 = 0,6$ ,  $F^*(x) = 0,6$ ;

е) при  $36 < x \leq 44$ ,  $x_1=4$ ,  $x_2=12$ ,  $x_3=20$ ,  $x_4=28$ ,  $x_5=36$  з  $W=0,1+0,12+0,18+0,2+0,24 = 0,84$ ,  $F^*(x) = 0,84$ ;

є) при  $x > 44$ ,  $F^*(x) = 1$ .

Запишемо шукану емпіричну функцію

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 4, \\ 0,1, & 4 < x \leq 12, \\ 0,22, & 12 < x \leq 20, \\ 0,4, & 20 < x \leq 28, \\ 0,6, & 28 < x \leq 36, \\ 0,84, & 36 < x \leq 44, \\ 1, & x > 44. \end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілення (рисунок 25.5).

**Приклад 4** Результати вимірювання деякого параметру 20 виробів представлені варіаційним рядом:

|       |     |      |   |      |     |
|-------|-----|------|---|------|-----|
| $x_i$ | 4,9 | 4,95 | 5 | 5,05 | 5,1 |
| $n_i$ | 3   | 6    | 4 | 5    | 2   |

Знайти медіану та моду цього ряду.

**Розв'язання.**

Оскільки даний варіаційний ряд є дискретним та містить 20 варіант (число парне):

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{20},$$

то медіану знаходимо за формулою:

$$m_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{5 + 5}{2} = 5,$$

а мода цього ряду, як варіанта, що має найбільшу частоту,  $M_o = 4,95$ .

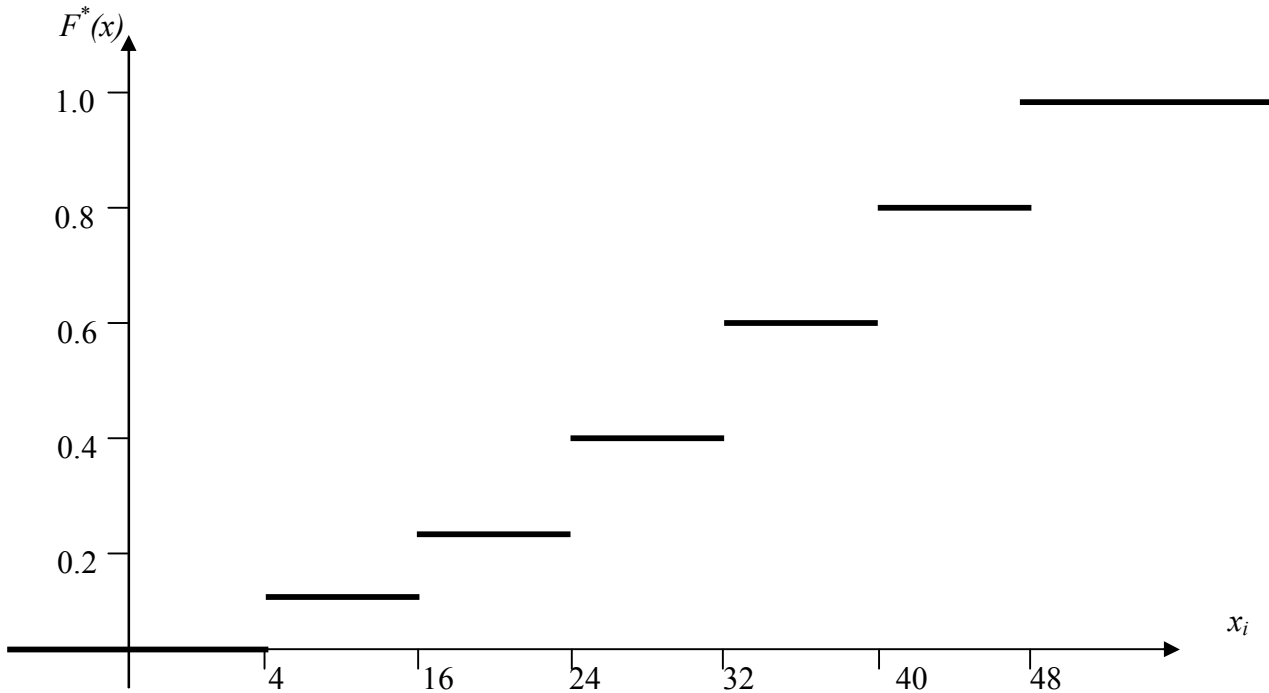


Рис. 25.5

**Приклад 5** Знайти медіану та моду інтервального варіаційного ряду:

| $x_i - x_{i+1}$ | 3-5 | 5-7 | 7-9 | 9-11 | 11-13 |
|-----------------|-----|-----|-----|------|-------|
| $n_i$           | 10  | 10  | 20  | 40   | 20    |

**Розв'язання.** Знаходимо об'єм вибірки:

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 10 + 10 + 20 + 40 + 20 = 100.$$

Оскільки  $n = 100$ , то варіанта з номером  $\frac{n}{2} = 50$  знаходиться в четвертому інтервалі, тобто  $r = 4$  – це медіанний інтервал, початок якого  $a_r = a_4 = 9$ , тому

$$\sum_{i=1}^{r-1} n_i = \sum_{i=1}^3 n_i = 10 + 10 + 20 = 40;$$

і при  $n_r = n_4 = 40$  та  $h = 2$  знаходимо медіану за формулою:

$$m_e = a_r + \frac{h}{n_r} \left( \frac{n}{2} - \sum_{i=1}^{r-1} n_i \right) = 9 + \frac{2}{40} (50 - 40) = 9,5.$$

Для обчислення моди розглянемо модальний інтервал, тобто інтервал із найбільшою частотою. В нашому випадку – це четвертий інтервал  $s = 4$ , його початок  $a_s = a_4 = 9$ , тому  $n_s = n_4 = 40, n_{s-1} = n_3 = 20, n_{s+1} = n_5 = 20$  та  $h = 2$ .

Знаходимо моду за формулою:

$$M_o = a_s + h \cdot \frac{n_s - n_{s-1}}{2n_s - n_{s-1} - n_{s+1}} = 9 + 2 \cdot \frac{40 - 20}{80 - 20 - 20} = 9 + 2 \cdot 0,5 = 10.$$

### Домашнє завдання

**Теорія** Статистичні оцінки параметрів розподілу, їх властивості. Інтервальні оцінки. Надійна ймовірність та надійний інтервал. Надійні інтервали для оцінювання математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення при нормальному розподілі. [20], с. 216 –227.

### Вправи

1 У процесі вивчення випадкової величини  $X$  у результаті 40 незалежних спостережень дістали вибірку: 10, 13, 10, 9, 9, 12, 12, 6, 7, 9, 8, 9, 11, 9, 14, 13, 9, 8, 8, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 8, 7, 9, 10, 14, 13, 8, 8, 9, 10, 11, 11, 12, 12.

Побудувати дискретний статистичний розподіл для цієї вибірки, а також полігон частот і графік  $F^*(x)$ .

2 П'ятдесят абітурієнтів на вступних екзаменах із інформатики набрали таку кількість балів: 12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12, 20, 17, 15, 13, 17, 16, 20, 14, 14, 13, 17, 16, 15, 19, 16, 15, 18, 17, 15, 14, 16, 15, 15, 18, 15, 15, 19, 14, 16, 18, 18, 15, 15, 17, 15, 16, 16, 14, 14, 17.

Потрібно побудувати дискретний статистичний розподіл, полігон частот, графік  $F^*(x)$ .

3 У відділі технічного контролю були виміряні діаметри 200 валиків із партії, виготовленої одним верстатом-автоматом. Відхилення виміряних діаметрів від номіналу наведено як інтервальний статистичний розподіл, де  $X=x_i$  вимірюється в мікронах:

|              |           |           |          |        |       |        |         |         |         |         |
|--------------|-----------|-----------|----------|--------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|
| $h=5,$<br>мк | -20...-15 | -15...-10 | -10...-5 | -5...0 | 0...5 | 5...10 | 10...15 | 15...20 | 20...25 | 25...30 |
| $n_i$        | 7         | 11        | 15       | 24     | 49    | 41     | 26      | 17      | 7       | 3       |

Потрібно побудувати гістограму частот і графік  $F^*(x)$ . Обчислити  $\bar{x}_g$ ,  $M_o$ ,  $m_e$ .

Відповідь:  $\bar{x}_g=4,3$  мк;  $M_o=3,79$  мк;  $m_e=-1,46$  мк.

4 Із партії однотипних сталевих болтів, виготовлених заводом, була здійснена вибірка обсягом 200 штук і результати вимірювання їх діаметрів наведено у вигляді інтервального статистичного розподілу:

|                                  |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |               |
|----------------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x, \text{мм}$<br>$h=2\text{мм}$ | 14,40 – 14,42 | 14,42 – 14,44 | 14,44 – 14,46 | 14,46 – 14,48 | 14,48 – 14,50 | 14,50 – 14,52 | 14,52 – 14,54 | 14,54 – 14,56 | 14,56 – 14,58 | 14,58 – 14,60 | 14,60 – 14,62 | 14,62 – 14,64 |
| $n_i$                            | 2             | 2             | 8             | 9             | 9             | 14            | 41            | 76            | 21            | 11            | 4             | 3             |

Потрібно побудувати гістограму частот і графік  $F^*(x)$ . Обчислити  $\bar{x}_g$ ,  $M_o$ ,  $m_e$ .

Відповідь:  $\bar{x}_e = 14,34$  мм;  $M_o = 15,34$  мм;  $m_e = 15,39$  мм.

5 Побудувати гістограму частот та відносних частот за даним розподілом вибірки об'ємом  $n = 20$ :

| $x_i - x_{i+1}$ | 10-15 | 15-20 | 20-25 | 25-30 | 30-35 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $n_i$           | 2     | 4     | 8     | 4     | 2     |

6 Для заданого варіаційного ряду

|       |    |    |   |    |    |
|-------|----|----|---|----|----|
| $x_i$ | 2  | 3  | 5 | 6  | 8  |
| $n_i$ | 10 | 15 | 5 | 10 | 10 |

знайти медіану та моду.

Відповідь:  $M_o = 3$ ;  $m_e = 4$ .

7 За даним розподілом варіант знайти медіану та моду.

| $x_i - x_{i+1}$ | 1-6 | 6-11 | 11-16 | 16-21 | 21-26 |
|-----------------|-----|------|-------|-------|-------|
| $n_i$           | 25  | 10   | 15    | 10    | 10    |

Відповідь:  $M_o = 13,5$ ;  $m_e = 14\frac{1}{3}$ .

8 Знайти емпіричну функцію за даним розподілом вибірки:

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 5 | 7 | 8 |
| $n_i$ | 1 | 3 | 2 | 4 |

Відповідь:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } x \leq 2, \\ 0,1 & \text{якщо } 2 < x \leq 5, \\ 0,4 & \text{якщо } 5 < x \leq 7, \\ 0,6 & \text{якщо } 7 < x \leq 8, \\ 1 & \text{якщо } x > 8. \end{cases}$$

9 Знайти вибірку середню за даним розподілом вибірки об'єму  $n = 20$ :

|       |      |      |      |      |      |
|-------|------|------|------|------|------|
| $x_i$ | 2560 | 2600 | 2620 | 2650 | 2700 |
| $n_i$ | 2    | 3    | 10   | 4    | 1    |

Відповідь:  $\bar{x}_e = 2621$ .

10 За даним розподілом вибірки знайти вибірку середню та вибірку дисперсію.

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 147 | 149 | 151 | 154 |
| $n_i$ | 10  | 20  | 50  | 20  |

Відповідь:  $\bar{x}_e = 150,8$ ;  $D_e = 4,16$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Дати визначення генеральної та вибіркової сукупності.
- 2 Яка вибірка є представницькою (репрезентативною)?
- 3 Способи відбору вибірки, дати означення кожного з них.
- 4 Дати визначення дискретної та неперервної ознаки  $X$ .

- 5 Що називається варіантою, варіаційним рядом?
- 6 Що таке частота, відносна частота варіант?
- 7 Дати визначення дискретного статистичного розподілу вибірки.
- 8 Аналогом чого є статистичний розподіл вибірки?
- 9 Як будується статистичний розподіл вибірки для неперервної ознаки  $X$ ?
- 10 Дати означення емпіричної функції розподілу  $F^*(x)$ .
- 11 Сформулюйте властивості  $F^*(x)$ .
- 12 Що таке полігон частот та відносних частот і для чого він використовується?
- 13 Як будується полігон частот та відносних частот для інтервального варіаційного ряду?
- 14 Дати означення гістограми частот та відносних частот.
- 15 Дати означення кумулятивної кривої (помуляти) для дискретного і інтервального розподілу ознаки  $X$ .
- 16 Записати формули для обчислення  $\bar{x}_e$ ,  $D_e$ ,  $\sigma_e$  для дискретного статистичного розподілу вибірки.
- 17 Записати формули для обчислення  $\bar{x}_e$ ,  $D_e$ ,  $\sigma_e$  для інтервального статистичного розподілу вибірки.
- 18 Як визначається  $m_e$  і  $Mo$  для інтервального статистичного розподілу?
- 19 Що називається розмахом, коефіцієнтом варіації?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 26.** Статистичні оцінки. Точкові та інтегральні оцінки.

**Статистичні оцінки параметрів розподілу, їх властивості.**

**Інтервальні оцінки. Надійна ймовірність та надійний інтервал.**

**Надійні інтервали для оцінювання математичного сподівання та середнього квадратичного відхилення при нормальному розподілі.**

#### **Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** За вибіркою об'єму  $n=51$  знайдена зміщена оцінка  $D_e = 5$  генеральної дисперсії. Знайти незміщену оцінку дисперсії та виправлене середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності.

**Розв'язання.** Невідома незміщена оцінка дорівнює виправленій дисперсії:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_e = \frac{51}{50} \cdot 5 = 5,1,$$

а виправлене середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{5,1} = 2,26.$$

**Приклад 2** Знайти виправлену вибіркoву дисперсію за даним розподілом вибірки:

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 102 | 104 | 108 |
| $n_i$ | 2   | 3   | 5   |



**Розв'язання.** Оскільки варіанти достатньо великі, то перейдемо до умовних варіант  $u_i = x_i - 104$  (віднімаємо від варіант число  $C=104$ , яке близьке до вибіркової середньої). Одержуємо розподіл умовних варіант:

|       |    |   |   |
|-------|----|---|---|
| $u_i$ | -2 | 0 | 4 |
| $n_i$ | 2  | 3 | 5 |

Знайдемо виправлену дисперсію умовних варіант:

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^k n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^k n_i u_i \right)^2 \right) = \frac{1}{9} \left( 2 \cdot (-2)^2 + 3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 4^2 - \frac{1}{10} (2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 5 \cdot 4)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{9} (88 - \frac{1}{10} \cdot 256) = 6,93.$$

Дисперсія вихідних варіант дорівнює дисперсії умовних варіант:  $S_x^2 = S_u^2$ .

**Приклад 3** Знайти виправлену вибірку дисперсію за даним розподілом вибірки:

|       |      |      |      |
|-------|------|------|------|
| $x_i$ | 0,01 | 0,05 | 0,09 |
| $n_i$ | 2    | 3    | 5    |

**Розв'язання.** Для того, щоб уникнути дій з десятковими дробами, перейдемо до умовних варіант  $u_i = 100x_i$ . Одержуємо розподіл умовних варіант:

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| $u_i$ | 1 | 5 | 9 |
| $n_i$ | 2 | 3 | 5 |

Знайдемо виправлену вибірку дисперсію умовних варіант:

$$S_u^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^k n_i u_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^k n_i u_i \right)^2 \right) = \frac{1}{9} \left( 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 9^2 - \frac{1}{10} (2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 9)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{9} (482 - \frac{1}{10} \cdot 3844) = 10,84.$$

Обчислюємо виправлену дисперсію вихідних варіант:

$$S_x^2 = \frac{S_u^2}{100^2} = \frac{10,84}{10000} = 0,0011.$$

**Приклад 4** За підсумками п'яти вимірювань довжини стержня пристроєм (без систематичних помилок) одержано наступні результати (мм): 92, 94, 103, 105, 106. Знайти : а) вибірку середню довжини стержня, б) вибірку та виправлену дисперсії помилок пристрою.

**Розв'язання.** Знайдемо вибірку середню:

$$\bar{x}_g = C + \bar{u}_g = 92 + \frac{0 + 2 + 11 + 13 + 14}{5} = 92 + 8 = 100.$$

Обчислюємо вибірку дисперсію:

$$D_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_g)^2 = \frac{1}{5} ((92 - 100)^2 + (94 - 100)^2 + (103 - 100)^2 + (105 - 100)^2 +$$

$$+ (106 - 100)^2) = 34.$$

Знайдемо виправлену дисперсію  $S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\varepsilon} = \frac{5}{4} \cdot 34 = 42,5$ .

**Приклад 5** Розподіл границі міцності зразків зварного шву представлений інтервальним варіаційним рядом:

|                 |       |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $x_i - x_{i+1}$ | 28-30 | 30-32 | 32-34 | 34-36 | 36-38 | 38-40 | 40-42 | 42-44 |
| $n_i$           | 8     | 15    | 15    | 12    | 15    | 20    | 10    | 5     |

Знайти вибірку середню границі міцності зразків та виправлену вибірку дисперсію помилок пристрою.

**Розв'язання.** Від інтервального розподілу переходимо до дискретного, в якості варіант обираємо середні значення інтервалів, а частоти зберігаємо. Тоді розподіл вибірки має вигляд:

|       |    |    |    |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $x_i$ | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 |
| $n_i$ | 8  | 15 | 15 | 12 | 15 | 20 | 10 | 5  |

Знайдемо вибірку середню границі міцності:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{\varepsilon} &= C + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i u_i = 35 + \frac{1}{100} (8 \cdot (-6) + 15 \cdot (-4) + 15 \cdot (-2) + 12 \cdot 0 + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 4 + \\ &+ 10 \cdot 6 + 5 \cdot 8) = 35 + 0,72 = 35,72. \end{aligned}$$

Обчислюємо вибірку дисперсію:

$$\begin{aligned} D_{\varepsilon} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_{\varepsilon})^2 = \frac{1}{100} (8 \cdot (29 - 35,72)^2 + 15 \cdot (31 - 35,72)^2 + 15 \cdot (33 - 35,72)^2 + \\ &+ 12 \cdot (35 - 35,72)^2 + 15 \cdot (37 - 35,72)^2 + 20 \cdot (39 - 35,72)^2 + 10 \cdot (41 - 35,72)^2 + \\ &+ 5 \cdot (43 - 35,72)^2) = 15,96. \end{aligned}$$

Знаходимо виправлену вибірку дисперсію:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\varepsilon} = \frac{100}{99} \cdot 15,96 = 16,12.$$

**Приклад 6** Знайти надійний інтервал для оцінки з надійністю 0,95 невідомого математичного сподівання  $a$  нормально розподіленої ознаки  $X$  генеральної сукупності, якщо задано генеральне середнє квадратичне відхилення  $\sigma=5$ , вибірка середня  $\bar{x}_{\varepsilon}=14$  та об'єм вибірки  $n=25$ .

**Розв'язання.** Для знаходження надійного інтервала використовуємо формулу:

$$\bar{x}_{\varepsilon} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_{\varepsilon} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

При  $\gamma=0,95$  із рівняння  $2\Phi(t)=0,95$  знаходимо  $\Phi(t)=0,475$ . Із додатка Б одержуємо  $t=1,96$ . Визначаємо границі надійного інтервала:

$$\bar{x}_{\varepsilon} - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14 - 1,96 \frac{5}{\sqrt{25}} = 14 - 1,96 = 12,04;$$

$$\bar{x}_{\varepsilon} + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 14 + 1,96 \frac{5}{\sqrt{25}} = 14 + 1,96 = 15,96.$$

Остаточно знаходимо надійний інтервал:  $12,04 < a < 15,96$ .

**Приклад 7** Знайти максимальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,975 точність оцінки математичного сподівання  $a$  генеральної сукупності за вибірковою середньою  $\delta=0,3$ , якщо відомо середнє квадратичне відхилення  $\sigma=1,2$  нормально розподіленої генеральної сукупності.

**Розв'язання.** Використовуємо формулу, що визначає точність оцінки математичного сподівання генеральної сукупності за вибірковою середньою

$$\delta = t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ звідки одержуємо: } n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2}.$$

За умовою задачі  $\gamma=0,975$ , тоді  $2\Phi(t)=0,975$  або  $\Phi(t)=0,4875$ . Із додатка Б одержуємо  $t=2,24$ .

$$\text{Невідомий мінімальний об'єм вибірки: } n = \frac{t^2 \sigma^2}{\delta^2} = \frac{2,24^2 \cdot 1,2^2}{0,3^2} = 81.$$

**Приклад 8** За вибіркою об'ємом  $n=17$  знайдено  $\bar{x}_g = 20,2$  та  $0,47$ . Обчислити з надійністю  $\gamma=0,95$  надійний інтервал для математичного сподівання  $a$ .

**Розв'язання.** Використовуючи додаток Г та враховуючи, що  $\gamma=0,95$  і  $n=17$ , знаходимо  $t=2,12$ .

Визначаємо границі надійного інтервала:

$$\bar{x}_g - t_\gamma \sqrt{\frac{D_g}{n-1}} = 20,2 - 2,12 \sqrt{\frac{0,47}{17-1}} = 19,84;$$

$$\bar{x}_g + t_\gamma \sqrt{\frac{D_g}{n-1}} = 20,2 + 2,12 \sqrt{\frac{0,47}{17-1}} = 20,56.$$

Отже, з надійністю  $\gamma=0,95$  математичне сподівання  $a$  влучається в інтервал:  $19,84 < a < 20,56$ .

**Приклад 9** За даними вибірки:

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1 | 3 | 5 | 6 |
| $n_i$ | 4 | 8 | 8 | 5 |

із нормально розподіленої генеральної сукупності оцінити з надійністю  $\gamma=0,98$  невідоме математичне сподівання  $a$  за допомогою надійного інтервала.

**Розв'язання.** Обчислюємо:

вибіркoву середню

$$\bar{x}_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{1}{25} (4 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 8 \cdot 5 + 5 \cdot 6) = 3,92;$$

вибіркoву дисперсію

$$D_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_g)^2 = \frac{1}{25} (4 \cdot (1 - 3,92)^2 + 8 \cdot (3 - 3,92)^2 + 8 \cdot (5 - 3,92)^2 + 5 \cdot (6 - 3,92)^2) = 2,87;$$

виправлене середнє квадратичне відхилення

$$S = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_6} = \sqrt{\frac{25}{24} \cdot 2,87} = 1,73.$$

Використовуючи додаток Г та враховуючи, що  $\gamma=0,98$  і  $n=25$ , знаходимо  $t=2,61$ .

Визначаємо границі надійного інтервала:

$$\overline{x_6} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 3,92 - 2,61 \cdot \frac{1,73}{\sqrt{25}} = 3,02;$$

$$\overline{x_6} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 3,92 + 2,61 \cdot \frac{1,73}{\sqrt{25}} = 4,82.$$

Таким чином, невідомий надійний інтервал для математичного сподівання:  $3,02 < a < 4,82$ .

**Приклад 10** За даними вибірки об'ємом  $n=50$  із генеральної сукупності нормально розподіленої ознаки знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення  $S=14$ . Знайти надійний інтервал, що покриває генеральне середнє квадратичне відхилення  $\sigma$  з надійністю  $\gamma=0,999$ .

**Розв'язання.** Знаходимо за таблицею

$$q = q(\gamma, n) = q(0,999; 50) = 0,43.$$

Оскільки  $q < 1$ , то надійний інтервал визначаємо за формулою:

$$S(1 - q) < \sigma < S(1 + q),$$

$$14(1 - 0,43) < \sigma < 14(1 + 0,43),$$

$$7,98 < \sigma < 20,02.$$

**Приклад 11** За даними вибірки об'ємом  $n=16$  знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення  $S=1$  нормально розподіленої ознаки. Знайти надійний інтервал, що покриває з надійністю  $\gamma=0,95$  генеральне середнє квадратичне відхилення.

**Розв'язання.** Знаходимо за таблицею

$$q = q(\gamma, n) = q(0,95; 16) = 0,44.$$

Попередньо визначаємо надійний інтервал за формулою:

$$S(1 - q) < \sigma < S(1 + q),$$

$$1(1 - 0,44) < \sigma < 1(1 + 0,44),$$

$$0,56 < \sigma < 1,44.$$

Оскільки  $n=16 < 30$ , то для уточнення надійного інтервала необхідно скористатися формулою:

$$\frac{nD_6}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{nD_6}{\chi_1^2}$$

або

$$\frac{(n-1)S^2}{\chi_2^2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_1^2}.$$

Із таблиці розподілу «хі-квадрат» при  $k = n - 1 = 16 - 1 = 15$ ,  
 $\alpha = \frac{1 - \gamma}{2} = \frac{1 - 0,95}{2} = 0,025$  і  $1 - \alpha = 0,975$  знаходимо  $\chi_1^2 = \chi^2(1 - \alpha, k) = 6,26$  і

$$\chi_2^2 = \chi^2(\alpha, k) = 27,5.$$

У результаті одержуємо надійний інтервал:

$$\frac{15 \cdot 1}{27,5} < \sigma^2 < \frac{15 \cdot 1}{6,26}$$

або

$$0,545 < \sigma^2 < 2,396;$$

$$0,74 < \sigma < 1,55.$$

### Домашнє завдання

**Теорія** Елементи теорії кореляції. Поняття регресії. Коефіцієнт кореляції. Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії. [20], с. 228–236.

### Вправи

1 За вибіркою об'єму  $n = 41$  знайдена зміщена оцінка  $D_g = 3$  генеральної дисперсії. Знайти незміщену оцінку дисперсії генеральної сукупності.

Відповідь:  $S^2 = 3,075$ .

2 За підсумком чотирьох вимірювань деякої фізичної величини одним пристроєм (без систематичних помилок) одержано наступні результати: 8,9,11,12. Знайти:

а) вибірковою середньою результатів вимірювань,

б) вибірковою та виправлену дисперсії помилок пристрою.

Відповідь:

а)  $\bar{x}_g = 10$ ,

б)  $D_g = 2,5; S^2 = \frac{10}{3}$ .

3 Знайти виправлену вибірку дисперсії за даним розподілом вибірки об'єму  $n = 20$ :

|       |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| $x_i$ | 0,1 | 0,5 | 0,7 | 0,9 |
| $n_i$ | 6   | 12  | 1   | 1   |

Відповідь:  $S^2 = 0,0525$ .

4 Знайти надійний інтервал для оцінки з надійністю 0,99 невідомого математичного сподівання  $a$  нормально розподіленої ознаки  $X$  генеральної сукупності, якщо задано генеральне середнє квадратичне відхилення  $\sigma = 4$ , вибіркова середня  $\bar{x}_g = 10,2$  та об'єм вибірки  $n = 16$ .

Відповідь:  $7,63 < a < 12,77$ .

5 Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю 0,925 точність оцінки математичного сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності за вибірковою середньою дорівнює 0,2, якщо відомо середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності  $\sigma = 1,5$ .

Відповідь:  $n = 179$ .

6 Із генеральної сукупності зроблена вибірка об'єму  $n = 10$ :

|       |    |   |   |   |   |   |
|-------|----|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | -2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $n_i$ | 2  | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 |

Оцінити з надійністю 0,95 математичне сподівання  $a$  нормально розподіленої ознаки генеральної сукупності за вибірковою середньою за допомогою надійного інтервала.

Відповідь:  $0,3 < a < 3,7$ .

7 За даними 16 незалежних рівно точкових вимірювань деякої фізичної величини знайдено середнє арифметичне результатів вимірювань  $\bar{x}_e = 42,8$  та виправлене середнє квадратичне відхилення  $S = 8$ . Оцінити справжнє значення величини з надійністю 0,999.

Відповідь:  $34,66 < a < 50,94$ .

8 Зроблено 12 вимірювань одним пристроєм (без систематичних помилок) деякої фізичної величини. Виправлене середнє квадратичне відхилення випадкових помилок  $S = 0,6$ . Знайти точність прибору (середнє квадратичне відхилення випадкових помилок вимірювання) з надійністю 0,99.

|       |   |   |   |   |
|-------|---|---|---|---|
| $x_i$ | 2 | 5 | 7 | 8 |
| $n_i$ | 1 | 3 | 2 | 4 |

Відповідь:  $0,06 < \sigma < 1,14$ .

9 Вимірювання твердості (в умовних одиницях) 16 зразків легованої сталі дало наступні результати: 13,1; 12,8; 11,9; 12,4; 13,5; 13,7; 12,0; 13,8; 10,6; 12,4; 13,5; 11,7; 13,9; 11,5; 12,5; 11,9. У припущенні, що вибірка вимірювань одержана із нормально розподіленої сукупності, знайти надійний інтервал для дисперсії при надійній імовірності 0,95.

Відповідь:  $0,71 < \sigma < 1,48$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Що називається точковою статистичною оцінкою?
- 2 Що таке незміщена точкова статистична оцінка?
- 3 Що таке зміщена точкова статистична оцінка?
- 4 Що називають ефективною точковою статистичною оцінкою?
- 5 Що називають ґрунтовною точковою статистичною оцінкою?
- 6 У чому сутність методу аналогій?
- 7 У чому сутність методу найменших квадратів?
- 8 У чому сутність методу максимальної правдоподібності?
- 9 Що є точковою незміщеною статистичною оцінкою для  $\bar{X}_r$ ?
- 10 Що означає точкова незміщена статистична оцінка для  $D_r$ ?
- 11 Що називається виправленою дисперсією, виправленим середнім квадратичним відхиленням?
- 12 Як обчислюється  $M(\bar{x}_B)$ ,  $M(D_B)$ ,  $M(S_B^2)$ ?
- 13 Визначення інтервальної статистичної оцінки для параметрів генеральної сукупності.
- 14 Що називають точністю і надійністю оцінки?

15 Що називають надійним інтервалом?

16 Як побудувати надійний інтервал із заданою надійністю  $\gamma$  при відомому значенні  $\sigma_{\Gamma}$ ?

17 Як побудувати довірчий надійний інтервал для  $\bar{X}_{\Gamma}$  із заданою надійністю  $\gamma$  при невідомому значенні  $\sigma_{\Gamma}$ ?

### **ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 27.** Статистична залежність. Парна регресія.

**Елементи теорії кореляції. Поняття регресії. Коефіцієнт кореляції. Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії.**

#### **Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** В результаті дослідження групи однотипних підприємств одержано дані про залежність собівартості продукції  $Y$  від об'єму основних фондів  $X$ :

|     |     |      |      |      |      |
|-----|-----|------|------|------|------|
| $X$ | 8,1 | 12,3 | 17,6 | 21,5 | 27,4 |
| $Y$ | 3,4 | 2,6  | 1,8  | 1,5  | 1,2  |

Знайти емпіричне лінійне рівняння регресії  $Y$  на  $X$ .

**Розв'язання.** Обчислюємо емпіричні оцінки відповідних параметрів рівняння регресії за наведеними не згрупованими даними:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{5} (8,1 + 12,3 + 17,6 + 21,5 + 27,4) = 17,38;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{5} (3,4 + 2,6 + 1,8 + 1,5 + 1,2) = 2,10;$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \frac{1}{5} (8,1^2 + 12,3^2 + 17,6^2 + 21,5^2 + 27,4^2) = 347,90;$$

$$\overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \frac{1}{5} (3,4^2 + 2,6^2 + 1,8^2 + 1,5^2 + 1,2^2) = 5,05;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \sqrt{347,90 - 17,38^2} = 6,77;$$

$$\sigma_y = \sqrt{\overline{y^2} - (\bar{y})^2} = \sqrt{5,05 - 2,1^2} = 0,80;$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i = \frac{1}{5} (8,1 \cdot 3,4 + 12,3 \cdot 2,6 + 17,6 \cdot 1,8 + 21,5 \cdot 1,5 + 27,4 \cdot 1,2) = 31,27.$$

Знайдемо емпіричний коефіцієнт кореляції:

$$r_e = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{31,27 - 17,38 \cdot 2,1}{6,77 \cdot 0,8} = -0,96.$$

Запишемо емпіричне рівняння лінійної регресії:

$$y - 2,1 = -0,96 \cdot \frac{0,8}{6,77} (x - 17,38)$$

або

$$y = -0,11x + 4,07.$$

**Приклад 2** Знайти вибірковий коефіцієнт кореляції та записати рівняння регресії, використовуючи розподіл:

| $X$   | 30 | 40 | 50 | $n_y$    |
|-------|----|----|----|----------|
| 15    | 1  | 5  | 4  | 10       |
| 20    |    | 7  | 3  | 10       |
| 25    | 3  | 8  | 1  | 12       |
| $n_x$ | 4  | 20 | 8  | $n = 32$ |

**Розв'язання.** Обчислення істотно спростяться, якщо здійснити перехід до умовних варіант:

$$u = \frac{x - C_1}{h_1}; v = \frac{y - C_2}{h_2}.$$

У якості  $C_1$  і  $C_2$  зручно обрати:  $C_1 = 40, C_2 = 20$ , крок  $h_1$  дорівнює різниці між двома сусідніми варіантами  $x$ , тобто  $h_1 = 10$ , крок  $h_2$  дорівнює різниці між двома сусідніми варіантами  $y$ , тобто  $h_2 = 5$ .

Розподіл умовних варіант  $u$  і  $v$  представляємо в розширеній кореляційній таблиці, де виконуємо обчислення деяких характеристик даного розподілу:

| $u$                             | -1 | 0  | 1  | $n_v$                              | $n_v \cdot v$          | $n_v \cdot v^2$           | $\sum_u n_{uv} \cdot u \cdot v$    |
|---------------------------------|----|----|----|------------------------------------|------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| -1                              | 1  | 5  | 4  | 10                                 | -10                    | 10                        | -3                                 |
| 0                               |    | 7  | 3  | 10                                 | 0                      | 0                         | 0                                  |
| 1                               | 3  | 8  | 1  | 12                                 | 12                     | 12                        | -2                                 |
| $n_u$                           | 4  | 20 | 8  | $n = 32$                           | $\sum n_v \cdot v = 2$ | $\sum n_v \cdot v^2 = 22$ | $\sum n_{uv} \cdot u \cdot v = -5$ |
| $n_u \cdot u$                   | -4 | 0  | 8  | $\sum n_u \cdot u = 4$             |                        |                           |                                    |
| $n_u \cdot u^2$                 | 4  | 0  | 8  | $\sum n_u \cdot u^2 = 12$          |                        |                           |                                    |
| $\sum_v n_{uv} \cdot u \cdot v$ | -2 | 0  | -3 | $\sum n_{uv} \cdot u \cdot v = -5$ |                        |                           |                                    |

Із даних таблиці одержуємо:

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum n_u \cdot u = \frac{4}{32} = 0,125; \bar{v} = \frac{1}{n} \sum n_v \cdot v = \frac{2}{32} = 0,0625;$$

$$n \cdot \bar{u} \cdot \bar{v} = 32 \cdot 0,125 \cdot 0,0625 = 0,25;$$

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{n} \sum n_u \cdot u^2 - (\bar{u})^2 = \frac{12}{32} - (0,125)^2 = 0,3594;$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{n} \sum n_v \cdot v^2 - (\bar{v})^2 = \frac{22}{32} - (0,0625)^2 = 0,6836;$$

$$\sigma_u = 0,5995; \sigma_v = 0,8268.$$

Обчислюємо вибірковий коефіцієнт кореляції:

$$r_g = \frac{\sum n_{uv} \cdot u \cdot v - n \cdot \bar{u} \cdot \bar{v}}{n \sigma_u \sigma_v} = \frac{-5 - 0,25}{15,8613} = -0,331.$$

Знаходимо характеристики вихідних варіант:

$$\bar{x} = \bar{u} \cdot h_1 + C_1 = 0,125 \cdot 10 + 40 = 41,25;$$



$$\begin{aligned}\bar{y} &= \bar{v} \cdot h_2 + C_2 = 0,0625 \cdot 5 + 20 = 20,312; \\ \sigma_x &= \sigma_u \cdot h_1 = 0,5995 \cdot 10 = 5,995; \quad \sigma_y = \sigma_v \cdot h_2 = 0,8268 \cdot 5 = 4,134; \\ r_g \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} &= -0,331 \cdot \frac{4,134}{5,995} = -0,28; \quad r_g \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = -0,331 \cdot \frac{5,995}{4,134} = -0,480.\end{aligned}$$

Лінійні рівняння регресії записуються в вигляді:

$$\overline{y_x} - 20,312 = -0,228(x - 41,25) \quad (\text{регресія } Y \text{ на } X)$$

$$\overline{x_y} - 41,25 = -0,480(y - 20,312) \quad (\text{регресія } X \text{ на } Y)$$

### Домашнє завдання

**Теорія** Поняття про множинну лінійну та нелінійну регресію. Перевірка статистичних гіпотез.. [20], с. 237 –249.

### Вправи

1 Границя міцності сталі при вигоні  $Y$  (Н/мм<sup>2</sup>) оцінюється на основі іншої її характеристики – границі пружності  $X$  (Н/мм<sup>2</sup>). За даними для 12 марок сталі обчислити коефіцієнт кореляції між цими характеристиками та знайти рівняння лінійної регресії  $Y$  на  $X$  та  $X$  на  $Y$ :

|     |    |    |    |    |     |     |    |    |     |    |     |    |
|-----|----|----|----|----|-----|-----|----|----|-----|----|-----|----|
| $X$ | 51 | 67 | 84 | 81 | 101 | 109 | 71 | 97 | 109 | 51 | 105 | 89 |
| $Y$ | 25 | 30 | 43 | 44 | 57  | 58  | 43 | 46 | 62  | 45 | 55  | 45 |

Відповідь:  $r_g = 0,837$ ;  $y = 0,44x + 8,96$  і  $x = 1,6y + 10,96$ .

2 За даним розподілом

|       |     |     |   |     |          |
|-------|-----|-----|---|-----|----------|
| $X$   | 0,2 | 0,5 | 1 | 1,2 | $n_y$    |
| $Y$   |     |     |   |     |          |
| 1     | 4   | 6   | 1 |     | 11       |
| 3     | 1   | 2   | 4 | 1   | 8        |
| 4     |     | 1   | 3 | 4   | 8        |
| $n_x$ | 5   | 9   | 8 | 5   | $n = 27$ |

знайти коефіцієнт кореляції та записати рівняння регресії.

Відповідь:  $r_g = 0,699$ ;  $\overline{y_x} - 2,48 = 2,47(x - 0,72)$ ;  $\overline{x_y} - 0,72 = 20(y - 2,48)$ .

### Питання для самоперевірки

- 1 Яка залежність називається статистичною?
- 2 Що називається умовною середньою?
- 3 Яка залежність називається кореляційною?
- 4 Рівняння регресії, функція регресії, лінія регресії.
- 5 Сформулюйте дві задачі теорії кореляції.
- 6 Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за не згрупованими даними.
- 7 Вибірковий коефіцієнт кореляції, його властивості.

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 28.** Поняття про множинну лінійну та нелінійну регресію. Перевірка статистичних гіпотез.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** На основі довготривалих спостережень за вагою  $X$  пакетів горішків, які заповнюються автоматично, з'ясовано, що стандартне відхилення ваги пакетів  $\sigma = 10$  г. Зважено 25 пакетів, при цьому їх середня вага склала  $\bar{x} = 244$  г. Перевірити гіпотезу  $M(X) = 250$  г при рівні значущості  $\alpha = 0,05$ , якщо відомо, що  $X$  розподілена за нормальним законом.

**Розв'язання.**

$$H_0 : \mu = 250$$

$$H_1 : \mu \neq 250$$

За формулою (8.40)

$$U_{\text{спос.}} = \frac{244 - 250}{10 / \sqrt{25}} = -3.$$

У данному випадку будемо двобічну критичну область. За таблицею функції Лапласа знайдемо критичну точку  $U_{\alpha/2} = U_{0,025} = 1,96$ . Оскільки  $U_{\text{спос.}} = -3 < -1,96 = U_{\text{кр.}}$ , то  $H_0$  відхиляється на користь  $H_1$ . Це свідчить про те, що станок потребує під наладки.

**Приклад 2** Аналізується дохід  $X$  фірм галузі, який має нормальний закон розподілу. Припускають, що середній дохід у даній галузі складає не менше 1 млн. \$. За вибіркою з 49 фірм одержали такі дані:  $\bar{x} = 0,9$  млн. \$ і  $S = 1,15$  млн. \$. Чи не протиречать ці результати висунутій гіпотезі при рівні значущості  $\alpha = 0,01$ ?

**Розв'язання.**

$$H_0 : \mu = 1;$$

$$H_1 : \mu < 1.$$

Для перевірки гіпотези знаходимо  $T_{\text{спос.}} = \frac{0,9 - 1}{1,15 / \sqrt{49}} = -4,67$ .

Критичну точку лівобічної критичної області визначаємо за таблицею критичних точок розподілу Стюдента  $t_{\text{кр.}} = -t_{0,01;48} = -2,404$ . Оскільки

$$T_{\text{спос.}} = -4,67 < -2,404 = t_{\text{кр.}},$$

то  $H_0$  повинна бути відхилена на користь  $H_1$ . Це вказує на те, що середній дохід в галузі менше, ніж 1 млн.\$.

**Приклад 3** Точність роботи верстата – автомата, який наповнює пакети порошком, визначається співпадінням ваги пакетів. Дисперсія ваги не повинна перебільшувати  $25(\text{г})^2$ . За вибіркою з 20 пакетів знайдена виправлена дисперсія

$$S^2 = \frac{1}{20-1} \sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 = 30 (\text{г})^2.$$

Необхідно з'ясувати, чи потребує верстат підналагодження.

**Розв'язання.** Сформулюємо нульову і альтернативну гіпотези:

$$H_0 : \sigma^2 = 25;$$

$$H_1 : \sigma^2 > 25.$$

Знайдемо спостережуване значення критерію  $\chi^2$  за формулою (3.6):

$$\chi_{\text{спос.}}^2 = \frac{19 \cdot 30}{25} = 22,8, \quad \chi_{kp}^2 = \chi_{0,05;19}^2 = 30,14.$$

Оскільки  $\chi_{\text{спос.}}^2 = 22,8 < 30,14 = \chi_{kp}^2$ , то немає підстав для відхилення  $H_0$ . Це означає, що верстат не потребує підналагодження.

**Приклад 4** В університеті проведено аналіз успішності серед студентів і студенток за останні 25 років. Випадкові величини  $X$  і  $Y$  – відповідно їх сумарний бал за час навчання. Одержано такі результати:  $\bar{x} = 400$ ,  $S_x^2 = 300$ ,  $\bar{y} = 420$ ,  $S_y^2 = 150$ .

Чи можна стверджувати, що дівчата в середньому вчаться краще хлопців? Прийняти  $\alpha = 0,05$ .

**Розв'язання.** Для відповіді на питання фактично необхідно перевірити таку гіпотезу:

$$H_0 : M(X) = M(Y),$$

$$H_1 : M(X) < M(Y).$$

За формулою (3.8) знаходимо  $T_{\text{спос.}}$  з урахування того, що  $n = k = 25$ :

$$T_{\text{спос.}} = \frac{400 - 420}{\sqrt{24 \cdot 300 + 24 \cdot 150}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 25(25 + 25 - 2)}{25 + 25}} = -4,71;$$

$$t_{kp} = -t_{0,05;25+25-2} = -1,68.$$

Оскільки  $T_{\text{спос.}} = -4,71 < -1,68 = t_{kp}$ , то  $H_0$  повинна бути відхилена на користь  $H_1$ . Це дає підставу стверджувати, що у даному університеті дівчата в середньому вчаться краще хлопців.

**Приклад 5** За умовами прикладу 4 визначити, чи є підстави припускати, що дисперсії  $X$  і  $Y$  істотно розрізняються – тобто розсіювання оцінок у хлопців більше, ніж у дівчат.

**Розв'язання.** За умови задачі висувається наступна гіпотеза:

$$H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2,$$

$$H_1^{(1)} : \sigma_x^2 > \sigma_y^2.$$

Для перевірки гіпотези за формулою (3.9) знаходимо  $F_{\text{спос.}} = 300/150 = 2$ . Критична точка розподілу Фішера  $F_{kp} = F_{0,05;24;24} = 1,98$ .

Оскільки  $F_{\text{спос.}} = 2 > 1,98 = F_{kp}$ , то  $H_0$  повинна бути відхилена на користь  $H_1$ , тобто є підстави припустити, що розсіювання оцінок у хлопців даного університету істотно більше розсіювання оцінок у дівчат.

**Приклад 6** Вивчається наявність лінійної залежності між рівнем інфляції  $X$  і безробіттям  $Y$  у деякій країні за 11 років. За статистичними даними розраховано вибірковий коефіцієнт кореляції  $r_{xy} = -0,34$ . Чи існує значуща

лінійна залежність між вказаними показниками у даній країні? Прийняти  $\alpha = 0,02$ .

**Розв'язання.** Проаналізуємо таку гіпотезу:

$$H_0 : \rho_{xy} = 0,$$

$$H_1^{(1)} : \rho_{xy} \neq 0.$$

За формулою (3.10) знаходимо

$$T_{\text{спос}} = \frac{-0,34 \cdot \sqrt{11-2}}{\sqrt{1-(-0,34)^2}} = -3,254.$$

За допомогою таблиці критичних точок розподілу Стюдента знаходимо  $t_{\alpha/2, n-2} = t_{0,01;9} = 2,821$ . Оскільки  $|T_{\text{спос}}| = 3,254 > 2,821 = t_{kp}$ , то коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$  статистично значущий. Отже  $\rho_{xy}$  істотно відрізняється від нуля, а між рівнями інфляції  $X$  і безробіттям  $Y$  існує обернена лінійна залежність.

### Домашнє завдання

**Теорія.** Загальна задача математичного програмування. Постановка задачі лінійного програмування (ЛП).. [20], с. 250 –256.

### Вправи

1 Верстат – автомат наповнює пакет чіпсами по 250 гр. Вважають, що верстат потребує підналагодження, якщо стандартне відхилення від номінальної ваги більш ніж 5 г. Контрольні зважування 10-ти пакетів дали такі результати: 245, 248, 250, 252, 256, 243, 251, 244, 253. Чи потребує верстат підналагодження?

2 Витрати бензину на автомобілі деякої фірми мають нормальний закон розподілу з  $a_x = 7,5$  л і  $\sigma_x = 0,5$  л. Фірма виробила нову модифікацію автомобіля і стверджує, що у нього середні витрати  $a_x$  бензину знижено до 7 л при тому ж значенні  $\sigma$ . Вибірка з 15-ти автомобілів кожної моделі дала наступні середні витрати:  $\bar{x} = 7,45$ ;  $\bar{y} = 7,15$ .

3 Два університети  $A$  і  $B$  готують спеціалістів аналогічних спеціальностей. Міністерство освіти вирішило перевірити якість підготовки в обох університетах. Було проведено тестовий екзаме́н для студентів п'ятого курсу. Відібрані випадково студенти показали такі суми балів:

$A$ : 41,50,35,45,53,30,57,20,50,44,36,48,55,28,40,50.

$B$ : 40,57,52,38,25,47,52,48,55,48,53,39,46,51,45,55,43,51.

Чи можна стверджувати при рівні значущості  $\alpha = 0,05$ , що один з університетів забезпечує краще підготовку?

4 На основі спостережень за роботою 25-ти кандидатів на посаду секретаря-референта з'ясовано, що в середньому вони витрачали 7 хвилин на

набір однієї сторінки складного тексту на комп'ютері при вибіркового стандартному відхиленні  $S = 2$  хвилин.

Проте, припускали, що час  $X$  набору однієї сторінки повинен був складати 5,5 хвилин. Чи не суперечать одержані дані цій гіпотезі, якщо час  $X$  набору тексту має нормальний закон розподілу? Прийняти рівень значущості  $\alpha = 0,01$ .

5 Аналіз залежності між двома показниками  $X$  і  $Y$  за 25 спостереженнями дав такі результати:  $\bar{x}=100$ ;  $\bar{y}=75$ ;  $\sum_{i=1}^{25} (y_i - \bar{y})^2 = 625$ ,  $\sum_{i=1}^{25} x_i y_i = 187000$ ;  $\sum_{i=1}^{25} (y_i - \bar{y})^2 = 484$ . Оцінити наявність лінійної залежності між  $X$  і  $Y$ . Чи буде коефіцієнт кореляції  $\rho_{xy}$  статистично значущим?

6 Припускають, що місячна зарплатня співробітників фірми складає 1000\$ при стандартному відхиленні  $\sigma=100$ \$. Вибірка з 36 осіб дала такі результати:  $\bar{x} = 900$ \$,  $S = 150$ \$. Чи можна за результатами спостережень стверджувати, що середня зарплатня співробітників фірми менше рекламованої, а розсіюванні зарплатні – більше?

### Питання для самоперевірки

- 1 Дайте означення статистичної гіпотези.
- 2 Чим відрізняється параметрична гіпотеза від непараметричної?
- 3 Дайте визначення нульової та альтернативної гіпотез.
- 4 Що називається статистичним критерієм?
- 5 Що таке помилка першого і другого роду? Як можна зменшити ймовірності цих помилок?
- 6 Що таке рівень значущості  $\alpha$ ?
- 7 Що таке потужність критерію?
- 8 Приведіть загальну схему перевірки гіпотез.

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 29.** Загальна задача математичного програмування. Постановка задачі лінійного програмування (ЛП).

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Для виготовлення двох видів продукції  $P_1$  та  $P_2$  використовують чотири види ресурсів  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . Запаси ресурсів, число одиниць ресурсів, необхідні для виготовлення одиниці продукції, наведено в таблиці 29.1.

Таблиця 29.1

| Вид ресурсу | Запас ресурсу | Число одиниць ресурсів, що необхідні для виготовлення одиниці продукції |       |
|-------------|---------------|-------------------------------------------------------------------------|-------|
|             |               | $P_1$                                                                   | $P_2$ |
| $S_1$       | 14            | 1                                                                       | 3     |
| $S_2$       | 4             | 2                                                                       | –     |
| $S_3$       | 15            | –                                                                       | 5     |
| $S_4$       | 18            | 2                                                                       | 1     |

Прибуток, що можна отримати при реалізації продукції  $P_1$  та  $P_2$  – 10 та 13 грн відповідно.

Необхідно скласти такий план виробництва продукції, при якому прибуток від її реалізації буде максимальним.

**Розв'язання.** Складемо економіко–математичну модель задачі.

Позначимо через  $x_1$  та  $x_2$  – число одиниць продукції  $P_1$  та  $P_2$  відповідно, що заплановані для виробництва. Для їх виготовлення буде потрібно  $(1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2)$  одиниць ресурсу  $S_1$ ,  $(2 \cdot x_1)$  одиниць ресурсу  $S_2$ ,  $(5 \cdot x_2)$  одиниць ресурсу  $S_3$  та  $(2 \cdot x_1 + x_2)$  одиниць ресурсу  $S_4$ . Оскільки кількість використаних ресурсів не може перевищити їх запасів, відповідно 14, 4, 15, 18 одиниць, тоді отримаємо таку систему нерівностей:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \leq 14, \\ 2 \cdot x_1 \leq 4, \\ 5 \cdot x_2 \leq 15, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 \leq 18. \end{cases} \quad (29.1)$$

За змістом задачі змінні

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \quad (29.2)$$

Сумарний прибуток  $F$  складає  $10 \cdot x_1$  грн від реалізації продукції  $P_1$  та  $13 \cdot x_2$  грн – від реалізації продукції  $P_2$ , тобто

$$F = 10 \cdot x_1 + 13 \cdot x_2. \quad (29.3)$$

Таким чином, економіко-математична модель задачі така: знайти такий план випуску продукції  $X = (x_1, x_2)$ , що задовольняє системі (29.1), умові (29.2) та при якому функція (29.3) приймає максимальне значення.

**Приклад 2** Є два види корму I та II, що містить поживні речовини

(вітаміни)  $S_1, S_2, S_3$ . Вміст числа одиниць поживних речовин в 1 кг кожного виду корму та необхідний мінімум поживних речовин наведені у таблиці 29.2.

Таблиця 29.2

| Поживні речовини | Необхідний мінімум поживних речовин | Число одиниць поживних речовин в 1 кг корму |    |
|------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------|----|
|                  |                                     | I                                           | II |
| $S_1$            | 9                                   | 3                                           | 1  |
| $S_2$            | 8                                   | 1                                           | 2  |
| $S_3$            | 12                                  | 1                                           | 6  |

Вартість 1 кг корму I та II відповідно 8 та 10 гривень. Необхідно скласти денний раціон, що має мінімальну вартість, в якому вміст кожного виду поживних речовин не менше встановленої границі.

**Розв'язання.** Складемо економіко-математичну модель задачі. Позначимо  $x_1$  та  $x_2$  – кількість I та II виду корму, що входить в денний раціон. Тоді цей раціон включає

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &- \text{вітаміну } S_1, \\ x_1 + 2x_2 &- \text{вітаміну } S_2, \\ x_1 + 6x_2 &- \text{вітаміну } S_3. \end{aligned}$$

Таким чином вміст поживних речовин повинен бути не менше ніж 9, 18 та 12. Отже

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + 6x_2 \geq 12 \end{cases} \quad (29.4)$$

Крім того  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . Загальна вартість раціону

$$F = 8x_1 + 10x_2 \quad (29.5).$$

Економіко-математична модель має такий вигляд: скласти денний раціон  $X = (x_1, x_2)$ , що задовольняє системі (29.4), умові (29.5), при якому функція  $F$  набуде мінімального значення.

**Приклад 3** На двох автоматичних лініях виготовляють апарати трьох типів. Інші умови задачі наведені у таблиці 29.3.

Таблиця 29.3

| Тип апарата | Потужність роботи лінії, шт. в добу |   | Витрати на роботу лінії, грн за добу |     | План, Шт. |
|-------------|-------------------------------------|---|--------------------------------------|-----|-----------|
|             | 1                                   | 2 | 1                                    | 2   |           |
| $S_1$       | 4                                   | 3 | 400                                  | 300 | 50        |
| $S_2$       | 6                                   | 5 | 100                                  | 200 | 40        |
| $S_3$       | 8                                   | 2 | 300                                  | 400 | 50        |

Скласти такий план завантаження ліній, щоб затрати були мінімальними, а завдання виконано не більш ніж за 10 діб.

**Розв'язання.** Позначимо  $x_{ij}$  – час, протягом якого лінія  $i$  виготовляє продукцію  $S_j$ . Таким чином оскільки час роботи лінії  $\leq 10$ , отримаємо таку

систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 10, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 10. \end{cases} \quad (29.6)$$

Для виконання плану випуску потрібно

$$\begin{cases} 2x_{11} + 3x_{21} = 50, \\ 6x_{12} + 5x_{22} = 40, \\ 8x_{13} + 2x_{32} = 50. \end{cases} \quad (29.7)$$

Крім того

$$x_{ij} \geq 0 \quad (29.8).$$

Витрати на виробництво продукції можна виразити за допомогою функції

$$F = 400x_{11} + 100x_{12} + 300x_{13} + 300x_{21} + 200x_{22} + 400x_{23}.$$

Економіко-математична модель буде мати вигляд: знайти такий розв'язок  $X = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ , що задовольняє системам (29.6) та (29.7) та умові (29.8), при якому функція  $F$  набуде мінімального значення.

**Приклад 4** Для виготовлення брусків довжиною 1,2м, 3м, та 5м в співвідношенні 2:1:3 на розпил надійшло 195 колод довжиною 6м. Визначити план розпилу, що забезпечує максимальну кількість комплектів. Скласти економіко-математичну модель (табл.29.4).

**Розв'язання.** Визначимо усі можливі способи розпилу колод

Таблиця 29.4

| Спосіб розпилу | Кількість отриманих брусків довжиною, м. |   |   |
|----------------|------------------------------------------|---|---|
|                | 1,2                                      | 3 | 5 |
| 1              | 5                                        | - | - |
| 2              | 2                                        | 1 | - |
| 3              | -                                        | 2 | - |
| 4              | -                                        | - | 1 |

Позначимо  $x_i$  – кількість колод, що розпилені  $i$ -им способом,  $x$  – число комплектів брусків.

Отримаємо систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 195, \\ 5x_1 + 2x_2 = 2x, \\ x_2 + 2x_3 = x, \\ x_4 = 3x. \end{cases} \quad (29.9)$$

Крім того

$$x_i \geq 0. \quad (29.10).$$

Кількість комплектів брусків можна виразити за допомогою функції

$$F = x.$$

Економіко-математична модель буде мати вигляд: знайти такий розв'язок  $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ , що задовольняє системі (29.9), умові (29.10), при якому функція  $F$  прийме максимальне значення.



### Домашнє завдання

**Теорія.** Основні властивості розв'язків задачі ЛП. Геометричний розв'язок задачі ЛП.. [20], с. 256 –260.

### Вправи

1 Для виготовлення продукції двох видів  $A$  та  $B$  підприємство використовує три види сировини. Інші умови задачі наведені у таблиці 29.5.

Таблиця 29.5

| Вид сировини                                | Норми витрат сировини на один виріб, кг |    | Загальна кількість сировини, кг |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------|----|---------------------------------|
|                                             | A                                       | B  |                                 |
| I                                           | 12                                      | 4  | 300                             |
| II                                          | 4                                       | 4  | 120                             |
| III                                         | 3                                       | 12 | 252                             |
| Прибуток від реалізації одного виробу, грн. | 30                                      | 40 |                                 |

Скласти такий план випуску продукції, при якому прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальним при умові, що виробів  $B$  потрібно виготовити не менше, ніж виробів  $A$ .

2 Раціон харчування на фермі складається з двох видів кормів I та II. Один кілограм корма I коштує 80 грн і містить: 1 од. жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів. Один кілограм корму II коштує 10 грн і містить 3 од. жирів, 1 од. білків, 8 од. вуглеводів., 4 од. нітратів.

Скласти найбільш дешевий раціон харчування, що забезпечить жирів не менше ніж 6 од., білків на менше ніж 9 од., вуглеводів не менше ніж 8 од., нітратів не більше ніж 16 од.

3 Необхідно розпилити 20 колод довжиною по 5 м кожна на бруски по 2 м та 3 м; при цьому повинні отримати однакову кількість брусків кожного розміру.

Скласти такий план розпилу, при якому буде отримана максимальна кількість комплектів і всі колоди будуть розпилені (в один комплект входить по одному бруску кожного розміру).

### Питання для самоперевірки

- 1 Що таке математична модель задачі, з яких понять вона складається?
- 2 Які основні задачі оптимізації Ви знаєте?
- 3 Сформулювати математичну модель загальної задачі математичного програмування
- 4 Що називається допустимим, опорним та оптимальним розв'язком задачі ЛП?
- 5 Як формулюється загальна задача ЛП?
- 6 Як формулюється симетрична задача ЛП?
- 7 Як формулюється канонічна задача ЛП?
- 8 Як загальна задача ЛП зводиться до канонічної?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 30.** Основні властивості розв'язків задачі ЛП.  
Геометричний розв'язок задачі ЛП.

**Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** Розв'язати задачу лінійного програмування

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2 \geq 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 6 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2 \geq 0, \\ x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

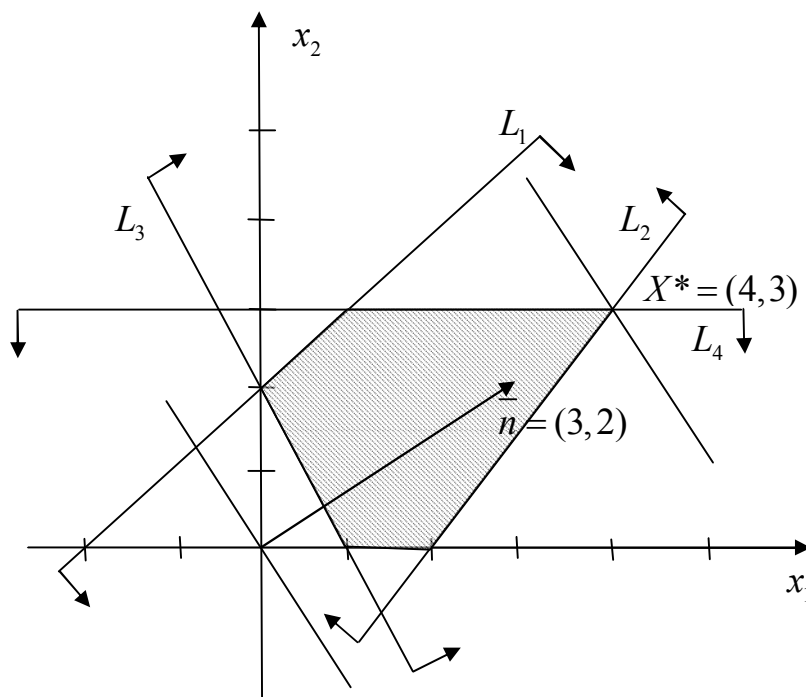


Рис.30.1

**Розв'язання.** Побудуємо область допустимих розв'язків задачі (рис.30.1). В прямокутній декартовій системі координат будуємо пряму  $x_1 - x_2 + 2 = 0$  ( $L_1$ ), що відповідає першому обмеженню. Знаходимо, яка з двох півплощин, на які ця пряма ділить всю координатну площину, є областю розв'язків першої нерівності. Для цього достатньо координати будь-якої точки, що не лежить на прямій підставити в нерівність. Оскільки пряма  $L_1$  не проходить через початок координат, підставимо координати точки  $O(0,0)$  в перше обмеження  $1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 2 \geq 0$ . Отримуємо строгу нерівність  $2 > 0$ . Тобто точка  $O$  лежить в півплощині розв'язків. Таким чином, стрілки на кінцях прямої  $L_1$  повинні бути напрямлені в півплощину, що містить точку  $O$ . За аналогією будуємо прямі  $3x_1 - 2x_2 - 6 = 0$  ( $L_2$ ),  $2x_1 + x_2 - 2 = 0$  ( $L_3$ ),  $x_2 = 3$  ( $L_4$ ) області розв'язків другого, третього та четвертого обмежень. Знаходимо спільну частину півплощин

розв'язків, враховуючи при цьому умову невід'ємності: отриману область допустимих розв'язків відмітимо на рисунку штриховою.

Будуємо нормаль ліній рівня  $\vec{n} = (3, 2)$  та одну з цих ліній, наприклад  $3x_1 + 2x_2 = 0$ .

Оскільки розв'язується задача пошуку максимуму цільової функції, лінію рівня переміщуємо в напрямку нормалі до опорної прямої. Ця пряма проходить через точку  $X^*$  перетину прямих, що обмежують область допустимих розв'язків і відповідають другій та четвертій нерівностям. Визначимо координати точки  $X^* = L_2 \cap L_4$ .

Розв'яжемо систему  $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 6 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases}$  отримаємо  $X^* = (4, 3)$ . Обчислимо

$$F(X^*) = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 18.$$

**Відповідь:**  $\max Z(X) = 18$  при  $X^* = (4, 3)$ .

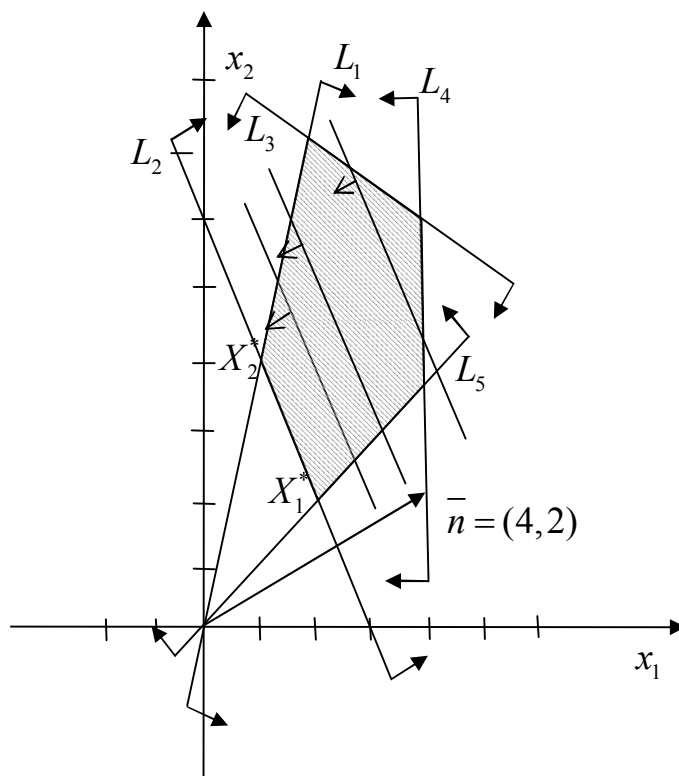


Рис.30.2

**Приклад 2** Розв'язати задачу лінійного програмування

$$F(x) = 4x_1 + 2x_2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 16, \\ x_1 \leq 4, \\ x_1 - x_2 \leq 0. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Побудуємо область допустимих розв'язків, нормаль ліній

рівня  $\vec{n}=(4,2)$  та одну з ліній рівня, що має спільні точки з цією областю (рис.30.2).

Переміщуємо лінію рівня в напрямку, протилежному напрямку нормалі  $\vec{n}$ , оскільки розв'язується задача пошуку мінімуму функції. Нормаль лінії рівня  $\vec{n}=(4,2)$  та нормаль  $\vec{n}_2=(2,1)$  граничної прямої  $L_2$ , в напрямку якої переміщуються лінії рівня паралельні, оскільки їх координати пропорційні. Тобто опорна пряма співпадає з граничною прямою  $L_2$  області припустимих розв'язків та проходить через дві кутові точки цієї області  $X_1^*$  та  $X_2^*$ . Задача має нескінчену кількість оптимальних розв'язків, що є точками відрізка  $[X_1^*, X_2^*]$ .

Ці точки  $X_1^* = L_2 \cap L_5$ ,  $X_2^* = L_1 \cap L_2$  знаходимо з відповідних систем рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 - x_2 = 0, \end{cases} \text{ отже } X_1^* = (2, 2). \text{ Та } \begin{cases} 4x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 6, \end{cases} \text{ тоді } X_2^* = (1, 4).$$

$$\text{Обчислимо } F(X_1^*) = F(X_2^*) = 4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 12.$$

**Відповідь:**  $\min F(X) = 12$  при  $X^* = (1-t)X_1^* + tX_2^*, 0 \leq t \leq 1$ .

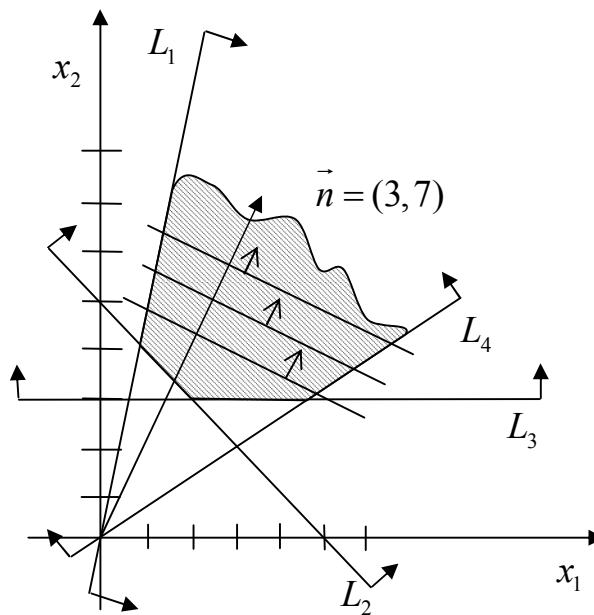


Рис.30.3

**Приклад 3** Розв'язати задачу лінійного програмування

$$F(x) = 3x_1 + 7x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_2 \geq 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \leq 0. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Побудуємо область допустимих розв'язків, нормаль  $\vec{n}=(3,7)$  та одну з ліній рівня (рис.30.3).

У даній задачі потрібно знайти максимум цільової функції, тому лінію

рівня переміщуємо в напрямку нормалі. У зв'язку з тим, що в цьому напрямку область допустимих значень не є обмеженою, лінія рівня прямує на нескінченність. Задача не має розв'язків у наслідок необмеженості функції.

**Відповідь:**  $F(X) \rightarrow +\infty$

**Приклад 4** Розв'язати задачу лінійного програмування

$$F(X) = 4x_1 + 5x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \geq 3. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Будуємо прямі лінії, що відповідають нерівностям системи обмежень та знаходимо півплощини, що є областями розв'язків цих нерівностей (рис.30.4).

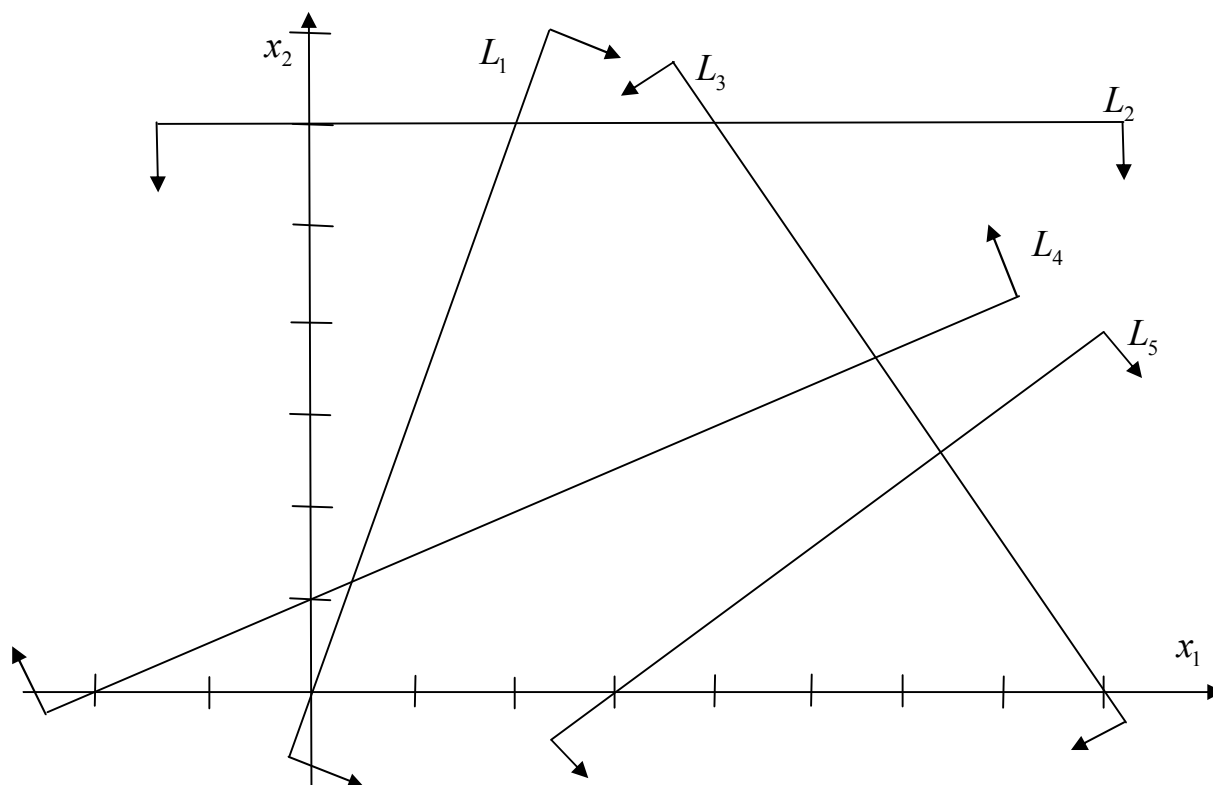


Рис.30.4

Область допустимих розв'язків задачі є порожньою множиною. Задача не має розв'язків у зв'язку з несумісністю системи обмежень.

**Відповідь:** система обмежень несумісна.

#### Домашнє завдання

**Теорія.** Симплекс-метод розв'язання задачі ЛП. [20], с. 261 –271.

## Вправи

1  $F(x) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12, \\ 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2  $F(x) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_2 \leq 6 \\ -3x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_2 \geq 0, \\ x_1 - x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \leq 12. \end{cases}$$

3  $F(x) = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 5, \\ 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ 8x_1 - 3x_2 \geq 0, \\ 5x_1 - 6x_2 \leq 0. \end{cases}$$

4  $F(x) = 3x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq -4, \\ x_1 + x_2 \leq 0, \\ x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2. \end{cases}$$

5  $F(x) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \min,$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 6, \\ -2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 3x_2 \geq -3, \\ x_1 - 2x_2 \leq 2. \end{cases}$$

6  $F(x) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ -2x_1 + 5x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 2. \end{cases}$$

7  $F(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 \geq 18, \\ 4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

8  $F(x) = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 \leq 4, \\ -x_1 + x_2 \leq 5, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

## Питання для самоперевірки

- 1 Сформулюйте загальну задачу лінійного програмування.
- 2 Яка задача лінійного програмування називається стандартною?
- 3 Яка задача лінійного програмування називається канонічною?
- 4 Назвіть основні етапи алгоритму графічного методу розв'язку задач лінійного програмування з двома змінними.
- 5 Що називається областю допустимих розв'язків?
- 6 Що називається лінією рівня?
- 7 Яка пряма є опорною?

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 31. Симплекс-метод розв'язання задачі ЛП.

### Розв'язання прикладів

**Приклад 1** Розв'яжемо задачу  $F = x_4 - x_5 \rightarrow \min$  при умовах

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5, \\ x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1,5}). \end{cases} \quad (31.1)$$

**Розв'язання.** Невідомі  $x_1, x_2, x_3$  утворюють допустимий базис, функція  $F$  виражена через вільні невідомі  $x_4, x_5$ .

Серед коефіцієнтів при вільних невідомих у виразі для  $F$  є від'ємне число – це коефіцієнт при  $x_5$ . Коефіцієнти при  $x_5$  у другому та третьому рівняннях (31.1) є від'ємні. Отже маємо випадок III, необхідно зробити крок. Складаємо відношення вільного члена до коефіцієнта при  $x_5$  (для другого та третього рівнянь). Одержимо  $\frac{2}{1}$  та  $\frac{3}{1}$ , із яких меншим є  $\frac{2}{1}$ , що відповідає рівнянню для базової змінної  $x_2$ .

Проводимо зміну базису  $x_2 \rightarrow x_5$ . Новий базис складають  $x_1, x_5, x_3$ . Щоб зробити відповідну перебудову системи (31.1), потрібно виразити ці невідомі через  $x_4, x_2$ .

Із рівняння для  $x_2$  знаходимо  $x_5$ :

$$x_5 = 2 + 2x_4 - x_2,$$

і підставляємо в вирази для  $x_1, x_3, F$ :

$$x_1 = 1 - x_4 + 2(2 + 2x_4 - x_2),$$

$$x_3 = 3 - 3x_4 - (2 + 2x_4 - x_2),$$

$$F = x_4 - (2 + 2x_4 - x_2).$$

Отже, задача приведена до виду

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3x_4 - 2x_2, \\ x_5 = 2 + 2x_4 - x_2 \\ x_3 = 1 - 5x_4 + x_2, \\ F = -2 - x_4 + x_2. \end{cases} \quad (31.2)$$

Для одержаної задачі знову маємо випадок III, оскільки коефіцієнт при  $x_4$  у виразі  $F$  від'ємний і серед коефіцієнтів при  $x_4$  у рівняннях (31.2) є від'ємний – у рівнянні для  $x_3$ . Проводимо зміну базису  $x_3 \rightarrow x_4$ .

Із третього рівняння виражаємо  $x_4$  і підставляємо в інші рівняння та функцію  $F$ . Одержимо

$$F = -\frac{11}{5} + \frac{1}{5}x_3 + \frac{4}{5}x_2.$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{28}{5} - \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_2, \\ x_5 = \frac{12}{5} - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_2, \\ x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_2. \end{cases} \quad (31.3)$$

Для одержаної задачі маємо випадок I, оскільки обидва коефіцієнти при вільних невідомих у виразі для  $F$  невід'ємні. Це означає, що останній базисний розв'язок

$$x_1 = \frac{28}{5}, x_5 = \frac{12}{5}, x_4 = \frac{1}{5}, x_2 = x_3 = 0,$$

є оптимальним, а мінімум функції  $F$  дорівнює  $-\frac{11}{5}$ .

**Відповідь:** оптимальний розв'язок  $\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$  і  $\min F = -\frac{11}{5}$ .

**Приклад 2** Розв'яжемо задачу  $F = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$  при умовах

$$\begin{cases} x_3 = 1 + x_1 - x_2, \\ x_4 = 2 - x_1 + 2x_2, \\ x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, 4}). \end{cases} \quad (31.4)$$

**Розв'язання.** Маємо випадок III. Коефіцієнтів при  $x_1$  у виразі для  $F$  є від'ємним і коефіцієнт при  $x_1$  у другому рівнянні (31.4) також. Проводимо зміну базису  $x_4 \rightarrow x_1$ :

$$\begin{cases} x_3 = 3 - x_4 + x_2, \\ x_1 = 2 - x_4 + 2x_2, \\ F = -2 + x_4 - 3x_2. \end{cases}$$

Тепер маємо випадок II, тому що у виразі для  $F$  коефіцієнт при невідомому  $x_2$  від'ємний, а в кожному з рівнянь – коефіцієнт невід'ємний.

**Відповідь:**  $\min F = -\infty$  і задача не має розв'язку.

**Приклад 3** Розв'яжемо приклад 1 за допомогою симплекс-таблиць. Початкова таблиця має вигляд:

|   |                  |              |       |       |       |       |          |
|---|------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|----------|
|   |                  |              |       |       |       |       | ↓        |
|   | Базисні невідомі | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$    |
|   | $x_1$            | 1            | 1     | 0     | 0     | 1     | -2       |
| → | $x_2$            | 2            | 0     | 1     | 0     | -2    | <u>1</u> |
|   | $x_3$            | 3            | 0     | 0     | 1     | 3     | 1        |
|   | $F$              | 0            | 0     | 0     | 0     | -1    | 1        |

Заповнення наступної таблиці починається із другого рядка, змінюємо базис за схемою  $x_2 \rightarrow x_5$ . Таблиця відповідає (31.2) має вигляд



↓

|   |                  |              |       |       |       |       |       |
|---|------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|   | Базисні невідомі | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
|   | $x_1$            | 5            | 1     | 2     | 0     | -3    | 0     |
|   | $x_5$            | 2            | 0     | 1     | 0     | -2    | 1     |
| → | $x_3$            | 1            | 0     | -1    | 1     | 5     | 0     |
|   | $F$              | -2           | 0     | -1    | 0     | 1     | 0     |

Наступна таблиця відповідає (31.3)

|  |                  |                 |       |                |                |       |       |
|--|------------------|-----------------|-------|----------------|----------------|-------|-------|
|  | Базисні невідомі | Вільні члени    | $x_1$ | $x_2$          | $x_3$          | $x_4$ | $x_5$ |
|  | $x_1$            | $\frac{28}{5}$  | 1     | $\frac{7}{5}$  | $\frac{3}{5}$  | 0     | 0     |
|  | $x_5$            | $\frac{12}{5}$  | 0     | $\frac{3}{5}$  | $\frac{2}{5}$  | 0     | 1     |
|  | $x_3$            | $\frac{1}{5}$   | 0     | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$  | 1     | 0     |
|  | $F$              | $-\frac{11}{5}$ | 0     | $-\frac{4}{5}$ | $-\frac{1}{5}$ | 0     | 0     |

В останній таблиці останній рядок (не враховуючи вільного члена) не має додатних чисел. Отже досягнутий оптимальний розв'язок

$$x_1 = \frac{28}{5}, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = \frac{1}{5}, x_5 = \frac{12}{5},$$

а мінімум функції  $F$  дорівнює  $-11/5$ .

**Відповідь:** оптимальний розв'язок  $\left(\frac{28}{5}, 0, 0, \frac{1}{5}, \frac{12}{5}\right)$  і  $\min F = -\frac{11}{5}$ .

**Приклад 4** Розв'яжемо задачу лінійного програмування

$$F = -2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_3 \leq 5, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 3, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

**Розв'язання.** Спочатку приведемо задачу до канонічного виду, ввівши дві балансові змінні. Одержимо задачу:

$$F = -2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 = 3, \end{cases}$$

(31.5)

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

В задачі відсутній початковий базис. У другому рівнянні є змінна  $x_4$ , яку можна ввести в базис, для першого та третього рівнянь вводимо штучні змінні.

Одержуємо  $M$ -задачу

$$F = -2x_1 + x_2 - x_3 + Mx_6 + Mx_7 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 3, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 7}.$$

Заповнюємо першу симплекс-таблицю

|     |                  | 0            | -2     | 1       | -1    | 0     | 0     | $M$   | $M$   |
|-----|------------------|--------------|--------|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     | Базисні невідомі | Вільні члени | $x_1$  | $x_2$   | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
| $M$ | $x_6$            | 4            | 2      | 1       | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| 0   | $x_4$            | 5            | 1      | 0       | -2    | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $M$ | $x_7$            | 3            | 2      | 2       | 0     | 0     | -1    | 0     | 1     |
|     | $F$              | $7M$         | $2+4M$ | $-1+3M$ | $1+M$ | 0     | $-M$  | 0     | 0     |

При знаходженні останнього рядка таблиці використовуємо формули

$$\delta_{0,T} = (\vec{c}_B \cdot \vec{h}_T) + c_0,$$

$$\delta_{i,T} = (\vec{c}_B \cdot \vec{h}_{i,T}) - c_i, \quad i = \overline{1, 7}.$$

При великому  $M$  найбільше додатне значення в останньому рядку (крім вільного члена)  $2+4M$ . Розв'язувальний елемент знаходиться в стовпчику  $x_1$  рядку  $x_7$ . Робимо крок, в результаті якого штучна змінна  $x_7$  виводиться із базису, в базис вводиться змінна  $x_1$ . Одержуємо таблицю

|     |                  | 0            | -2    | 1      | -1    | 0     | 0      | $M$   | $M$     |
|-----|------------------|--------------|-------|--------|-------|-------|--------|-------|---------|
|     | Базисні невідомі | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$  | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$  | $x_6$ | $x_7$   |
| $M$ | $x_6$            | 1            | 0     | -1     | 1     | 0     | 1      | 1     | -1      |
| 0   | $x_4$            | $7/2$        | 0     | -1     | -2    | 1     | $1/2$  | 0     | $-1/2$  |
| -2  | $x_1$            | $3/2$        | 1     | 1      | 0     | 0     | $-1/2$ | 0     | $1/2$   |
|     | $F$              | $-3+M$       | 0     | $-3-M$ | $1+M$ | 0     | $1+M$  | 0     | $-1-2M$ |

У цій таблиці вибираємо стовпчик з  $x_3$  (можна також  $x_5$ ), оскільки в останньому рядку додатне число  $1+M$ . Розв'язувальний елемент знаходиться в стовпчику  $x_3$  рядку  $x_6$ . Проводимо крок  $x_6 \rightarrow x_3$ . Одержуємо таблицю

|    |                  | 0            | -2    | 1     | -1    | 0     | 0      | $M$    | $M$    |
|----|------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
|    | Базисні невідомі | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$  | $x_6$  | $x_7$  |
| -1 | $x_3$            | 1            | 0     | -1    | 1     | 0     | 1      | 1      | -1     |
| 0  | $x_4$            | $11/2$       | 0     | -3    | 0     | 1     | $5/2$  | 2      | $-5/2$ |
| -2 | $x_1$            | $3/2$        | 1     | 1     | 0     | 0     | $-1/2$ | 0      | $1/2$  |
|    | $F$              | -4           | 0     | -2    | 0     | 0     | 0      | $-1-M$ | $-M$   |

У рядку цільової функції немає додатних чисел, що свідчить про

досягнення оптимального розв'язку  $M$ -задачі. При цьому штучні змінні в базис не входять. Останню таблицю без стовпчиків  $x_6, x_7$  можна розглядати як симплекс-таблицю задачі (1.3.22), при цьому в ній міститься оптимальний розв'язок задачі

$$\min F = 4, \quad X^* = \left( \frac{3}{2}; 0; 1; \frac{11}{2}; 0 \right).$$

Оскільки нас цікавлять тільки значення  $x_1, x_2, x_3$ , то відповідь запишемо у вигляді:

$$\min F = 4, \quad X^* = \left( \frac{3}{2}; 0; 1 \right).$$

**Приклад 5** Розв'яжемо задачу лінійного програмування

$$f = -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 4}.$$

**Розв'язання.** Для зручності будемо розв'язувати задачу на знаходження мінімуму, розглядаючи замість функції  $f$  функцію  $F = -f$ :

$$F = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \min.$$

Приведемо без пояснень послідовність симплекс-таблиць відповідної  $M$ -задачі

|     |                  | 0            | 1      | -1      | -1     | 1       | $M$   | $M$   |
|-----|------------------|--------------|--------|---------|--------|---------|-------|-------|
|     | Базисні невідомі | Вільні члени | $x_1$  | $x_2$   | $x_3$  | $x_4$   | $y_1$ | $y_2$ |
| $M$ | $y_1$            | 5            | -1     | -6      | 1      | -1      | 1     | 0     |
| $M$ | $y_2$            | 1            | 3      | -2      | 1      | -1      | 0     | 1     |
|     | $F$              | $6M$         | $2M-1$ | $-8M+1$ | $2M+1$ | $-2M-1$ | 0     | 0     |

|     |       |        |         |         |   |    |   |         |
|-----|-------|--------|---------|---------|---|----|---|---------|
| $M$ | $y_1$ | 4      | -4      | -4      | 0 | 0  | 1 | -1      |
| -1  | $x_3$ | 1      | 3       | -2      | 1 | -1 | 0 | 1       |
|     | $F$   | $4M-1$ | $-4M-4$ | $-4M+3$ | 0 | 0  | 0 | $-2M-1$ |

При великому додатному в останньому рядку (крім вільного члена) немає додатних чисел. Отже досягнуто оптимальний розв'язок  $M$ -задачі:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, y_1 = 4, y_2 = 0.$$

Оскільки  $y_1 = 4 \neq 0$ , то початкова задача не має розв'язку (штучна змінна залишилась в базисі).

### Домашнє завдання

**Теорія.** Двоїста задача ЛП, економічна інтерпретація. [20], с. 272 –287.

## Вправи

Розв'язати наведені задачі лінійного програмування симплекс-методом

|   |                                                                                                                                                             |   |                                                                                                                                                              |
|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | $\max (5x_1 + x_2 + x_3);$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \geq -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$    | 2 | $\min (x_1 - 3x_2 + x_3);$<br>$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -2, \\ 2x_2 + 4x_3 \leq 7, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$         |
| 3 | $\max (-x_1 - x_2 + 3x_3);$<br>$\begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 \geq -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 8, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 4 | $\min (-x_1 - 2x_2 + 2x_3);$<br>$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$             |
| 5 | $\max (x_1 + 3x_2 + 9x_3);$<br>$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 10, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 \geq -2, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$   | 6 | $\min (x_1 + 3x_2 - 3x_3);$<br>$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq 2, \\ -x_1 - 2x_3 \geq -6, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$        |
| 7 | $\max (x_1 - x_2 + 3x_3);$<br>$\begin{cases} x_1 + 3x_3 \leq 10, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$             | 8 | $\min (3x_1 - 2x_2 - x_3);$<br>$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq -6, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |

## Питання для самоперевірки

- 1 Як загальна задача ЛП зводиться до канонічної?
- 2 Який розв'язок задачі лінійного програмування називається допустимим?
- 3 Що таке балансові змінні, штучні?
- 4 Які змінні називають базовими, вільними?
- 5 У чому полягає симплекс-метод розв'язання задачі ЛП?
- 6 Як знаходиться початковий опорний план задачі ЛП?
- 7 Для розв'язування яких математичних задач застосовується симплексний метод?
- 8 Суть алгоритму симплексного методу.
- 9 Сформулюйте умови оптимальності розв'язку задачі симплексним методом.
- 10 Як вибрати розв'язувальний елемент?
- 11 Як формулюється критерій оптимальності опорного розв'язку задачі ЛП?
- 12 У чому полягає М-метод?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 32.** Двоїста задача ЛП, економічна інтерпретація.

**Розв'язання прикладів**

**Приклад 1** Магазин оптової торгівлі реалізує три типи продукції  $P_1, P_2, P_3$ . Для цього використовують два обмежених ресурсу – корисна площа приміщень, яка з урахуванням обіговості складає  $450 \text{ м}^2$  і робочу годину робітників магазину – 600 люд.-год. Необхідно скласти план товарообороту, при якому прибуток приймає максимальне значення. Витрати ресурсів на реалізацію і одержаний при цьому прибуток зображені в таблиці 32.1.

Таблиця 32.1

| Ресурси       | Витрати ресурсів на реалізацію |       |       | Об'єм ресурсів |
|---------------|--------------------------------|-------|-------|----------------|
|               | $P_1$                          | $P_2$ | $P_3$ |                |
| Корисна площа | 1,5                            | 2     | 3     | 450            |
| Робоча година | 3                              | 2     | 1,5   | 600            |
| Прибуток      | 50                             | 65    | 70    |                |

Скласти математичну модель вихідної задачі і двоїстої до неї.

**Розв'язання.** Позначимо через

$x_1$  – кількість одиниць реалізованої продукції типу  $P_1$ ;

$x_2$  – кількість одиниць реалізованої продукції типу  $P_2$ ;

$x_3$  – кількість одиниць реалізованої продукції типу  $P_3$ .

Тоді задачу ЛП запишемо у вигляді: знайти максимум

$$Z(X) = 50x_1 + 65x_2 + 70x_3$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1,5x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 450, \\ 3x_1 + 2x_2 + 1,5x_3 \leq 600, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

Побудуємо двоїсту задачу до прямої. Позначимо:

$y_1$  – оцінка вартості одного  $\text{м}^2$  корисної площі;

$y_2$  – оцінка вартості робочої години одного робітника.

Тоді на основі правил складання двоїстої задачі маємо наступну двоїсту до сформульованої вище задачу: знайти мінімум

$$f(Y) = 450y_1 + 600y_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 1,5y_1 + 3y_2 \geq 50, \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 65, \\ 3y_1 + 1,5y_2 \geq 70, \end{cases}$$

$$y_j \geq 0 \quad y_2 \geq 0.$$

**Приклад 2** Скласти задачу, двоїсту до наступної: знайти максимум

$$Z(X) = -x_1 + 2x_2$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

**Розв'язання.** Оскільки вихідна задача розглядається на максимум, то всі обмеження задачі повинні бути зі знаком  $\leq$ . Приведемо першу та четверту нерівності системи обмежень до цього знака. Одержимо

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leq -1, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 24, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ -x_1 - x_2 \leq -5. \end{cases}$$

На основі властивостей взаємно двоїстих задач сформулюємо двоїсту задачу до вихідної: знайти мінімум

$$f(Y) = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} -2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \geq -1, \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \geq 2, \\ y_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

**Приклад 3** До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язати одну з них симплекс-методом та визначити оптимальний план іншої задачі.

$$\begin{aligned} Z &= -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Розв'язання.** Перш ніж записати двоїсту задачу, необхідно пряму задачу звести до відповідного вигляду. Оскільки цільова функція  $Z$  максимізується і в системі обмежень є нерівності, то вони повинні мати знак « $\leq$ ». Тому перше обмеження моделі помножимо на  $(-1)$ . При цьому знак нерівності зміниться на протилежний. Отримаємо

$$\begin{aligned} Z &= -5x_1 + 2x_2 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -x_1 - x_2 \leq -1, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Тепер за відповідними правилами складемо двоїсту задачу

$$\begin{aligned} F &= -y_1 + 5y_2 \rightarrow \min; \\ \begin{cases} -y_1 + 2y_2 \geq -5, \\ -y_1 + 3y_2 \geq 2, \\ y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оскільки записані задачі симетричні, будь-яку з них можна розв'язати симплекс-методом. Наприклад, визначимо спочатку оптимальний план прямої задачі. Для цього застосуємо алгоритм симплекс-методу.

$$\begin{aligned} \max & (-5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4); \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \\ & x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

У першому обмеженні використаємо штучну змінну. Розширена задача лінійного програмування буде така:

$$\begin{aligned} \max & (-5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5); \\ & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5, \end{cases} \\ & x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

У цій задачі  $x_4$  та  $x_5$  – базисні змінні, а  $x_1, x_2, x_3$  – вільні. Нехай  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ , тоді  $x_4 = 5; x_5 = 1$ . Перший опорний план задачі

$$x_0 = (0; 0; 0; 5; 1), \quad Z_0 = -M.$$

Подальше розв'язування прямої задачі подано у вигляді симплекс-таблиці

|    |                  |      | 0     | -5          | 2           | 0     | 0     | -M  |  |
|----|------------------|------|-------|-------------|-------------|-------|-------|-----|--|
|    | Базис            | План | $x_1$ | $x_2$       | $x_3$       | $x_4$ | $x_5$ |     |  |
| -M | $\leftarrow x_5$ | 1    | 1     | $\boxed{1}$ | -1          | 0     | 1     | 1   |  |
| 0  | $x_4$            | 5    | 2     | 3           | 0           | 1     | 0     | 5/3 |  |
|    |                  | -M   | 5-M   | -2-M        | M           | 0     | 0     |     |  |
| 2  | $x_2$            | 1    | 1     | 1           | -1          | 0     | 1     | —   |  |
| 0  | $\leftarrow x_4$ | 2    | -1    | 0           | $\boxed{3}$ | 1     | -3    | 2/3 |  |
|    |                  | 2    | 7     | 0           | -2          | 0     | 2+M   |     |  |
| 2  | $x_2$            | 5/3  | 2/3   | 1           | 0           | 1/3   | 0     |     |  |
| 0  | $x_3$            | 2/3  | -1/3  | 0           | 1           | 1/3   | -1    |     |  |
|    |                  | 10/3 | 19/3  | 0           | 0           | 2/3   | M     |     |  |

З останньої симплекс-таблиці бачимо, що оптимальний план прямої задачі

$$X^* = (0; 5/3; 2/3; 0), \quad Z_{\max} = 10/3.$$

Згідно зі співвідношенням двоїстості за першою теоремою можна записати, що оптимальний план двоїстої задачі існує і

$$\begin{aligned} \min F = \max Z & = 10/3, \\ Y^* & = \vec{c}_{\text{баз}} D^{-1}, \end{aligned}$$

де  $\vec{c}_{\text{баз}} = (2; 0)$  міститься у приписаному зліва стовпчику останньої симплекс-таблиці; матриця  $D^{-1}$  також міститься в останній симплекс-таблиці у стовпчиках змінних « $x_5$ » та « $x_4$ », які утворювали початковий базис. Отже,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad Y^* = (2; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 1/3 \end{pmatrix} = (0; 2/3),$$

$$\min F = -1 \cdot 0 + 5 \cdot 2/3 = 10/3.$$

Застосовуючи до розв'язування прямої задачі симплекс-метод, знайшли її оптимальний план, а потім визначили оптимальний розв'язок двоїстої задачі за допомогою співвідношень першої теореми двоїстості.

**Приклад 4** До наведеної далі задачі лінійного програмування записати двоїсту задачу. Розв'язавши двоїсту задачу графічно, визначити оптимальний план прямої задачі.

$$\begin{aligned} Z &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 \rightarrow \min; \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}. \end{cases} \end{aligned}$$

**Розв'язання.** За відповідними правилами побудуємо двоїсту задачу:

$$\begin{aligned} F &= y_1 + 4y_2 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 1, \\ y_1 + 2y_2 \leq 2, \\ -y_1 + y_2 \leq 2, \\ y_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Зауважимо, що задачі несиметричні, і тому змінна  $y_1$ , що відповідає рівнянню в системі обмежень прямої задачі, може мати будь-який знак, а змінна  $y_2$  – лише невід'ємна.

Двоїста задача має дві змінні, а отже, її можна розв'язати графічно (рис. 1.7).

Найбільшого значення цільова функція двоїстої задачі  $F$  досягає в точці  $B$  многокутника  $ABCD$ . Її координати

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 2; \\ -y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2/3; \\ y_2 = 4/3. \end{cases}$$

тобто  $Y^* = (-2/3; 4/3)$ ;  $\max F = 1 \cdot (-2/3) + 4 \cdot 4/3 = 14/3$ .

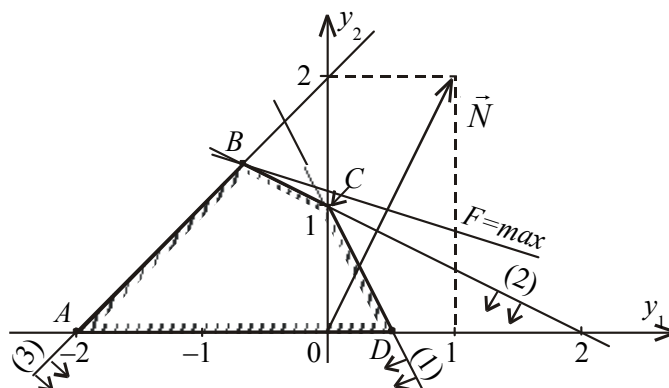


Рис. 32.1

Оптимальний план прямої задачі визначимо за допомогою співвідношень другої теореми двоїстості. Підставимо  $Y^*$  у систему обмежень двоїстої задачі і з'ясуємо, як виконуються обмеження цієї задачі:



$$\begin{cases} 2 \cdot (-2/3) + 4/3 = 0; \\ -2/3 + 2 \cdot 4/3 = 2; \\ -1 \cdot (-2/3) + 4/3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1; \\ 2 = 2; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Оскільки перше обмеження для оптимального плану двоїстої задачі виконується як строга нерівність, доходимо висновку, що перша змінна прямої задачі дорівнюватиме нулю  $x_1 = 0$  (перша частина другої теореми двоїстості).

Тепер проаналізуємо оптимальний план двоїстої задачі. Оскільки друга компонента плану  $y_2 = 4/3$  додатна, доходимо висновку, що друге обмеження прямої задачі для  $X^*$  виконуватиметься як строге рівняння (друга частина другої теореми двоїстості).

Об'єднуючи здобуту інформацію, можна записати систему обмежень прямої задачі як систему двох рівнянь, в якій  $x_1 = 0$ , та визначити решту змінних:

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 1; \\ 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5/3; \\ x_3 = 2/3, \end{cases}$$

тобто  $X^* = (0; 5/3; 2/3)$ ,  $\min Z = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5/3 + 2 \cdot 2/3 = 14/3$ .

Умова  $\min Z = \max F = 14/3$  виконується, і тому  $X^* = (0; 5/3; 2/3)$ ;  $Y^* = (-2/3; 4/3)$  є оптимальними планами відповідно прямої та двоїстої задач.

**Приклад 5** Визначити, чи оптимальні такі плани сформульованої задачі лінійного програмування:

$$\begin{aligned} Z &= 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min; \\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 2, \end{cases} \\ x_j &\geq 0, \quad j = \overline{1, 3}; \end{aligned}$$

а)  $x = (8/7; 3/7; 0)$ ; б)  $x = (0; 1/5; 8/5)$ ; в)  $x = (1/3; 0; 1/3)$ .

**Розв'язання.** Принцип розв'язування задач такого типу ґрунтується на використанні другої теореми двоїстості. Необхідно побудувати двоїсту задачу та припускаючи, що відповідний план  $X$  є оптимальним, визначити оптимальний розв'язок двоїстої задачі. Якщо при цьому екстремальні значення цільових функцій збігатимуться, то припущення правильне. Протилежного висновку можна дійти в таких випадках.

1 Якщо запропонований план  $X$  недопустимий, тобто не задовольняє систему обмежень прямої задачі.

2 Якщо визначений план двоїстої задачі недопустимий, тобто не задовольняє всі обмеження двоїстої задачі.

3 Якщо визначений план двоїстої задачі допустимий, але для нього екстремальне значення цільової функції  $F$  не дорівнює значенню функції  $Z$ , тобто не виконується умова першої теореми двоїстості.

Запишемо двоїсту задачу до прямої задачі лінійного програмування

$$F = y_1 + 2y_2 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \leq 12, \\ -3y_1 + 2y_2 \leq -4, \\ y_1 + y_2 \leq 2, \end{cases}$$

$$y_1 \in ]-\infty; \infty[, \quad y_2 \geq 0.$$

Перевіримо запропоновані плани на оптимальність.

1  $X = (8/7; 3/7; 0)$ . Підставимо його в систему обмежень прямої задачі:

$$\begin{cases} 2 \cdot 8/7 - 3 \cdot 3/7 + 0 = 1; \\ 8/7 + 2 \cdot 3/7 + 0 = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 1; \\ 2 = 2. \end{cases}$$

Обидва обмеження виконуються і тому  $X = (8/7; 3/7; 0)$  є допустимим планом прямої задачі. Припустимо тепер, що зазначений план є оптимальним планом прямої задачі. Тоді для нього  $Z = 12 \cdot 8/7 + 4 \cdot 3/7 + 2 \cdot 0 = 12$ .

Скористаємося другою теоремою двоїстості та визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки  $x_1 = 8/7 > 0$ ;  $x_2 = 3/7 > 0$ , то згідно з другою частиною другої теореми двоїстості можна записати перше та друге обмеження як рівняння і визначити  $y_1$  і  $y_2$ :

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = 12; \\ -3y_1 + 2y_2 = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4; \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Підставимо ці значення в третє обмеження системи двоїстої задачі

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 &\leq 2; \\ 4 + 4 &= 8 > 2. \end{aligned}$$

Для визначених значень  $y_1 = 4$ ;  $y_2 = 4$  це обмеження не виконується, і тому відповідний план  $Y = (4; 4)$  є недопустимим планом двоїстої задачі. Унаслідок цього наше припущення, що  $X = (8/7; 3/7; 0)$  є оптимальним планом вихідної задачі, виявилось помилковим.

2  $X = (0; 1/5; 8/5)$ . Підставимо цей план у систему обмежень прямої задачі

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 - 3 \cdot 1/5 + 8/5 = 1; \\ 0 + 2 \cdot 1/5 + 8/5 = 2. \end{cases}$$

План допустимий і для нього  $Z = 12 \cdot 0 - 4 \cdot 1/5 + 2 \cdot 8/5 = 12/5$ .

Визначимо відповідний план двоїстої задачі. Оскільки компоненти  $x_3$  та  $x_2$  додатні, то друге та третє обмеження двоїстої задачі можна записати як рівняння

$$\begin{cases} -3y_1 + 2y_2 = -4; \\ y_1 + y_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8/5; \\ y_2 = 2/5. \end{cases}$$

Перевіримо, що виконується перше обмеження двоїстої задачі для визначених значень  $y_1$  та  $y_2$ :  $2 \cdot 8/5 + 2/5 = 18/5 < 12$ . Отже, перше обмеження виконується, і тому  $Y = (8/5; 2/5)$  є допустимим планом двоїстої задачі. Для нього  $F = 8/5 + 2 \cdot 2/5 = 12/5 = Z$ . З огляду на викладене можна зробити висновок, що  $Y^* = (8/5; 2/5)$  є оптимальним планом двоїстої задачі, а  $X^* = (0; 1/5; 8/5)$  – оптимальним планом прямої задачі.

Наше припущення відносно запропонованого плану виявилось

правильним.

3  $X = (1/3; 0; 1/3)$ . Для цього плану обмеження прямої задачі виконуються так:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1/3 - 3 \cdot 0 + 1/3 = 1; \\ 1/3 + 2 \cdot 0 + 1/3 = 2/3 \neq 2. \end{cases}$$

Оскільки  $X = (1/3; 0; 1/3)$  є недопустимим планом, то він не може бути також оптимальним планом прямої задачі.

Отже, перевірка запропонованих планів на оптимальність дала такі результати: а) ні; б) так,  $Y^* = (0; 1/5; 8/5)$ ,  $\min Z = 12/5$ ; в) ні.

**Приклад 6** Деяке підприємство виробляє чотири види продукції А,В,С,Д, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2 і 3. Норми витрат ресурсів на одиницю кожної продукції (в умовних одиницях) наведено в таблиці 32.2.

Таблиця 32.2

| Ресурс | Норма витрат на одиницю продукції,<br>ум.од., за видами продукції |   |   |   | Запас ресурсу |
|--------|-------------------------------------------------------------------|---|---|---|---------------|
|        | А                                                                 | В | С | Д |               |
| 1      | 2                                                                 | 5 | 2 | 4 | 250           |
| 2      | 1                                                                 | 6 | 2 | 4 | 280           |
| 3      | 3                                                                 | 2 | 1 | 1 | 80            |

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: для продукції А– 2 ум.од., для В і Д – 4 ум.од., для С – 3 од. Визначити оптимальний план виробництва продукції кожного виду в умовах обмеженості ресурсів, який дає підприємству найбільший дохід. Наведемо симплекс – таблицю (табл.32.3), що відповідає оптимальному плану поставленої задачі.

Таблиця 32.3

|              |       | 2            | 4     | 3     | 4     | 0     | 0     | 0     |       |
|--------------|-------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Змінні члени |       | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
| 4            | $x_4$ | 45           | -2    | 1/2   | 0     | 1     | 1/2   | 0     | -1    |
| 0            | $x_6$ | 30           | -1    | 1     | 0     | 0     | -1    | 1     | 0     |
| 3            | $x_3$ | 35           | 5     | 3/2   | 1     | 0     | -1/2  | 0     | 2     |
| $F$          |       | 285          | 5     | 5/2   | 0     | 0     | 1/2   | 0     | 2     |

Виконаємо зазначені далі дії.

1 Сформулювати математичну модель даної задачі лінійного програмування та двоїстої до неї.

2 Записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач і зробити їх економічний аналіз.

3 Визначити статус ресурсів прямої задачі та інтервали стійкості двоїстих оцінок відносно зміни запасів дефіцитних ресурсів.

4 Визначити план виробництва продукції та зміну загального доходу підприємства, якщо запас першого ресурсу збільшити на 10 од., другого – зменшити на 10 од., а третього – збільшити на 20 ум. од.

### Розв'язання

1 Математичні моделі прямої та двоїстої задачі мають такий вигляд:

$$Z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 4x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 250, \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 280, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 80, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1,4};$$

де  $x_j$  – обсяг виробництва продукції  $j$ -го виду ( $j = \overline{1,4}$ );

$$F = 250y_1 + 280y_2 + 80y_3 \rightarrow \min;$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3, \\ 4y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,3},$$

де  $y_i$  – оцінка одиниці  $i$ -го виду ресурсу ( $i = \overline{1,3}$ ).

2 З наведеної симплекс таблиці маємо

$$X^* = (0; 0; 35; 45; 0; 30; 0), \quad \max Z = 285;$$

$$Y^* = (4; 0; 3) \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = (1/2; 0; 2);$$

$$\min F = 250/2 + 160 = 285 = \max Z.$$

Оптимальний план прямої задачі передбачає виробництво лише двох видів продукції С і Д у кількості відповідно 35 та 45 од. Випуск продукції А та В не передбачається ( $x_1 = x_2 = 0$ ). Додаткові змінні  $x_5, x_6, x_7$  характеризують залишок (невикористану частину) ресурсів відповідно 1, 2 та 3. Оскільки  $x_6 = 30$ , другий ресурс використовується у процесі виробництва продукції не повністю, а перший та третій ресурси – повністю ( $x_5 = x_7 = 0$ ). За такого оптимального плану виробництва продукції та використання ресурсів підприємство отримує найбільший дохід у розмірі 285 ум. од.

План двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, що використовуються у виробництві. Так,  $y_1 = 1/2$  та  $y_3 = 2$  відмінні від нуля, а ресурси 1 та 2 використовуються повністю. Двоїста оцінка  $y_2 = 0$  і відповідний вид ресурсу не повністю використовується при оптимальному плані виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі. Така оптимальна система оцінок дає найменшу загальну вартість усіх ресурсів, що використовуються на підприємстві:  $\min F = 285$  ум. од.

3 Статус ресурсів прямої задачі можна визначити трьома способами. Перший – підстановкою  $X^*$  у систему обмежень прямої задачі. Якщо обмеження виконується як рівняння, то відповідний ресурс дефіцитний, у противному разі – недефіцитний.

$$\begin{cases} 2 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 & (\text{ресурс дефіцитний}) \\ 1 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 35 + 4 \cdot 45 = 250 < 280 & (\text{ресурс недефіцитний}) \\ 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 35 + 1 \cdot 45 = 80 & (\text{ресурс дефіцитний}) \end{cases}$$

Другий спосіб – за допомогою додаткових змінних прямої задачі. Якщо додаткова змінна в оптимальному плані дорівнює нулю, то відповідний ресурс дефіцитний, а якщо відмінна від нуля – ресурс недефіцитний.

Третій спосіб – за допомогою двоїстих оцінок. Якщо  $y_i \neq 0$ , то зміна (збільшення або зменшення) обсягів  $i$ -го ресурсу приводить до відповідної зміни доходу підприємства і тому такий ресурс є дефіцитним. Якщо  $y_i = 0$ , то  $i$ -й ресурс недефіцитний. Так,

$$y_1 = 1/2 \text{ (ресурс 1 дефіцитний);}$$

$$y_2 = 0 \text{ (ресурс 2 недефіцитний);}$$

$$y_3 = 2 \text{ (ресурс 3 дефіцитний).}$$

Отже, якщо запас першого дефіцитного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю ( $b_1 = 250 + 1 = 251$ ), то цільова функція  $\max Z$  збільшиться за інших однакових умов на  $y_1 = 1/2$  ум. од. і становитиме  $\max Z = 285,5$  ум. од. Але за рахунок яких змін в оптимальному плані виробництва продукції збільшиться дохід підприємства? Інформацію про це дають елементи стовпчика « $x_5$ » останньої симплекс-таблиці, який відповідає двоїстій оцінці  $y_1 = 1/2$ . У новому оптимальному плані значення базисної змінної  $x_4^*$  збільшиться на  $1/2$ , змінної  $x_6^*$  – зменшиться на одиницю, а  $x_3^*$  – на  $1/2$ . При цьому структура плану не зміниться, а нові оптимальні значення змінних будуть такими:

$$X^* = (0; 0; 34,5; 45,5; 0; 29; 0).$$

Отже, збільшення запасу першого дефіцитного ресурсу за інших однакових умов приводить до зростання випуску продукції Д та падіння виробництва продукції С, а обсяг використання ресурсу 2 збільшується. За такого плану виробництва максимальний дохід підприємства буде  $\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 34,5 + 4 \cdot 45,5 = 285,5$ , тобто зросте на  $y_1 = 1/2$ .

Проаналізуємо, як зміниться оптимальний план виробництва продукції, якщо запас дефіцитного ресурсу 2 за інших однакових умов збільшити на одну умовну одиницю ( $b_3 = 80 + 1 = 81$ ). Аналогічно попереднім міркуванням, скориставшись елементами стовпчика « $x_7$ » останньої симплекс-таблиці, що відповідає двоїстій оцінці  $y_3 = 2$ , можна записати новий оптимальний план:

$$X^* = (0; 0; 37; 44; 0; 30; 0),$$

$$\max Z = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 37 + 4 \cdot 44 = 287.$$

Отже, дохід підприємства збільшиться на дві умовні одиниці за рахунок збільшення виробництва продукції С на дві одиниці та зменшення випуску продукції Д на одну одиницю. При цьому обсяг використання ресурсу 2 не змінюється.

Але після проведеного аналізу постає логічне запитання: а чи зберігатимуться встановлені пропорції, якщо запас дефіцитного ресурсу змінити не на одиницю, а наприклад, на 10 ум. од.? Щоб однозначно відповісти на поставлене запитання, необхідно розрахувати інтервали можливої зміни

обсягів дефіцитних ресурсів, у межах яких двоїсті оцінки  $y_i$  залишаються на рівні оптимальних значень.

Підставимо  $Y^*$  у систему обмежень двоїстої задачі. Якщо вартість ресурсів на одиницю продукції (ліва частина), то виробництво такої продукції для підприємства не доцільне. Якщо ж співвідношення виконується як рівняння, то продукція рентабельна.

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 7 > 2 & \text{(продукція А нерентабельна)} \\ 5 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 13/2 > 4 & \text{(продукція В нерентабельна)} \\ 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 3 = 3 & \text{(продукція С рентабельна)} \\ 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4 = 4 & \text{(продукція Д рентабельна)} \end{cases}$$

Аналогічні результати можна дістати, проаналізувавши двоїсті оцінки додаткових змінних, значення яких показують, на скільки вартість ресурсів перевищує ціну одиниці відповідної продукції. Тому, якщо додаткова зміна двоїстої задачі дорівнює нулю, то продукція рентабельна. І, навпаки, якщо  $y_i \neq 0$ , то відповідна продукція нерентабельна.

Додаткові зміни двоїстої задачі розміщуються в оціночному рядку останньої симплекс – таблиці у стовпчиках « $x_1$ » - « $x_4$ ». Їх оптимальні значення  $y_4 = 5$ ;  $y_5 = 5/2$ ;  $y_6 = 0$ ;  $y_7 = 0$ . Тому продукція А і В нерентабельна, а продукція С і Д – рентабельна.

Приріст (зміну) запасу ресурсу 1 позначимо  $\Delta b_1$ . Тоді, якщо  $\Delta b_1' = b_1 + \Delta b_1$ , то новий оптимальний план

$$X^* = (0; 0; 35 - 1/2 \Delta b_1; 45 + 1/2 \Delta b_1; 0; 30 - \Delta b_1; 0).$$

Єдина вимога, яку можна поставити до можливих нових оптимальних значень, – це умова невід'ємності, тобто

$$\begin{cases} 35 - 1/2 \Delta b_1 \geq 0; \\ 45 + 1/2 \Delta b_1 \geq 0; \\ 30 - \Delta b_1 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_1 \leq 70 \\ \Delta b_1 \geq -90 \\ \Delta b_1 \leq 30 \end{cases}$$

$$-90 \leq \Delta b_1 \leq 30$$

Це означає, що коли запас ресурсу 1 збільшиться на 30 ум. од. або зменшиться на 90 ум. од., то оптимальною двоїстою оцінкою ресурсу 1 залишиться  $y_1 = 1/2$ . Отже, запас ресурсу 1 може змінюватись у межах

$$\begin{aligned} 250 - 90 &\leq b_1 + \Delta b_1 \leq 250 + 30, \\ 160 &\leq b_1 \leq 280. \end{aligned}$$

Згідно з цим максимально можливий дохід підприємства перебуватиме в межах

$$\begin{aligned} 285 - 90 \cdot \frac{1}{2} &\leq Z_{\max} \leq 285 + 30 \cdot \frac{1}{2}, \\ 240 &\leq Z_{\max} \leq 300, \end{aligned}$$

а оптимальний план виробництва продукції

$$(0; 0; 80; 0; 0; 120; 0) \leq X^* \leq (0; 0; 20; 60; 0; 0; 0).$$

Аналогічно розраховується інтервал стійкості двоїстої оцінки  $y_3 = 2$  дефіцитного ресурсу 3:

$$\begin{cases} 35 + 2b_3 \geq 0 \\ 45 - \Delta b_3 \geq 0 \\ 30 + 0\Delta b_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta b_3 \geq -17,5 \\ \Delta b_3 \leq 45 \end{cases}$$

$$-17,5 \leq \Delta b_3 \leq 45,$$

$$62,5 \leq b_3 \leq 125$$

Отже, якщо запас ресурсу 3 збільшиться на 45 ум. од. або зменшиться на 17,5 ум. од., то двоїста оцінка  $y_3 = 2$  цього ресурсу залишиться оптимальною. Згідно із цим можливий дохід підприємства та оптимальний план виробництва продукції перебуватимуть у межах

$$250 \leq \max Z \leq 375,$$

$$(0; 0; 0; 62,5; 5; 0; 30; 0) \leq X^* \leq (0; 0; 125; 0; 0; 30; 0).$$

Зауважимо, що визначені інтервали стосуються лише випадків, коли змінюється тільки один ресурс, а запаси всіх інших фіксовані, тобто за інших однакових умов. У разі одночасної зміни обсягів усіх або кількох ресурсів підхід до визначення нового оптимального плану дещо інший.

4 За умовою задачі обсяги всіх трьох ресурсів змінюються відповідно  $\Delta b_1 = +10, \Delta b_2 = -10, \Delta b_3 = +20$ . Для визначення компонентів нового оптимального плану скористаємось одним із головних співвідношень обчислювальної процедури симплекс-методу:

$$X^* = D^{-1} \cdot \vec{B}.$$

З останньої симплекс-таблиці можна записати обернену матрицю:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Змінені запаси ресурсів утворюють вектор

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 + 10 \\ 280 - 10 \\ 80 + 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{bmatrix}.$$

Тоді новий оптимальний план виробництва продукції за відповідної одночасної зміни запасів усіх трьох ресурсів:

$$X^* = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 260 \\ 270 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 70 \end{bmatrix},$$

тобто  $X^* = (0; 0; 70; 30; 0; 10; 0)$ .

Усі  $x_j \geq 0$ , і тому оптимальним планом двоїстої задачі залишається  $Y^* = (1/2; 0; 2)$ . Загальний максимальний дохід підприємства зміниться на  $\Delta Z_{\max} = \Delta b_1 y_1 + \Delta b_2 y_2 + \Delta b_3 y_3 = 10 \cdot 1/2 - 10 \cdot 0 + 20 \cdot 2 = +45$  ум. од. і становитиме  $\max Z = 285 + 45 = 330$  ум. од.

### Домашнє завдання

**Теорія.** Постановка задачі цілочислового лінійного програмування. Метод Гоморі. [20], с. 287–291.

## Вправи

У наведених задачах до поставленої задачі лінійного програмування записати двоїсту і розв'язати її графічно. Визначити оптимальний план прямої задачі, застосовуючи другу теорему двоїстості.

- |                                                                                                                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>1 <math>Z = 2x_1 + 4x_2 + 24x_3 + 6x_4 \rightarrow \min;</math></p> $\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \leq -2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq -2, \end{cases}$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$ | <p>2 <math>Z = 8x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max;</math></p> $\begin{cases} 4x_1 + x_3 + x_4 = 16, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 4, \end{cases}$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 4}.$ |
| <p>3 <math>Z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min;</math></p> $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -3, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \end{cases}$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$                      | <p>4 <math>Z = 9x_1 + 8x_2 + 10x_3 \rightarrow \max;</math></p> $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 4, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 6, \end{cases}$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$      |

У наведених далі задачах записати двоїсту задачу до поставленої задачі лінійного програмування. Розв'язати одну із задач симплекс-методом і визначити оптимальний план іншої задачі.

- |                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>5 <math>Z = -30x_1 + 10x_2 \rightarrow \max;</math></p> $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \geq -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 3, \end{cases}$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$                     | <p>6 <math>Z = 4x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow \min;</math></p> $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 5, \end{cases}$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$      |
| <p>7 <math>Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;</math></p> $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 50, \\ 3x_1 + x_3 \geq 15, \\ x_1 + 4x_2 \leq 40, \end{cases}$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$ | <p>8 <math>Z = -3x_1 - 4x_2 - 5x_3 \rightarrow \min;</math></p> $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq -4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 6, \end{cases}$ $x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$ |

У наведених задачах визначити, чи є для сформульованої задачі лінійного програмування оптимальними запропоновані плани.

- 9  $Z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \rightarrow \max;$
- $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases}$$
- $$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$
- а)  $x = (0; 4; 2)$ ; б)  $x = (14/5; 18/5; 0)$ ; в)  $x = (5/3; 7/3; 1/3)$ .
- 10  $Z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \rightarrow \max;$
- $$\begin{cases} x_1 + x_3 \leq 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ -x_1 + x_3 \geq -2, \end{cases}$$
- $$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$



а)  $x = (2; 3; 0)$ ; б)  $x = (3; 0; 1)$ ; в)  $x = (0; 1; 2)$ .

11  $Z = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min$ ;

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

а)  $x = (10; 10/3)$ ; б)  $x = (20; 10)$ ; в)  $x = (10/3; 10/3)$ .

У наведених далі задачах виконати такі дії:

1) записати математичні моделі прямої та двоїстої задач;

2) записати оптимальні плани прямої та двоїстої задач, подати їх економічний аналіз;

3) визначити статус ресурсів, що використовуються для виробництва продукції, та рентабельність кожного виду продукції;

4) обчислити інтервали стійкості двоїстих оцінок стосовно зміни запасів дефіцитних ресурсів;

5) розрахувати інтервали можливих змін ціни одиниці рентабельної продукції.

12. Підприємство виготовляє три види продукції А, В і С, використовуючи для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю продукції та запаси ресурсів наведено в таблиці 32.4.

Таблиця 32.4

| Ресурс | Норма витрат на одиницю продукції за видами |    |    | Запас ресурсу |
|--------|---------------------------------------------|----|----|---------------|
|        | А                                           | В  | С  |               |
| 1      | 18                                          | 15 | 12 | 360           |
| 2      | 6                                           | 4  | 8  | 192           |
| 3      | 5                                           | 3  | 3  | 180           |

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: А–9 ум.од., В–10 ум.од. і С–16 ум.од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід. Остання симплекс-таблиця (табл.32.5) даної задачі має такий вигляд:

Таблиця 32.5

|    |  | 9            | 10           | 16    | 0     | 0     | 0     |       |       |
|----|--|--------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    |  | Змінні члени | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 10 |  | $x_2$        | 8            | 1     | 1     | 0     | 1/9   | -1/6  | 0     |
| 16 |  | $x_3$        | 20           | 1/4   | 0     | 1     | -1/18 | 5/24  | 0     |
| 0  |  | $x_6$        | 96           | 5/4   | 0     | 0     | -1/16 | -1/8  | 1     |
|    |  | $F$          | 400          | 5     | 0     | 0     | 2/9   | 5/3   | 0     |

13. Підприємство виготовляє продукцію А, В і С, для чого використовує для цього три види ресурсів 1,2,3. Норми витрат усіх ресурсів на одиницю кожної продукції та обсяги ресурсів на підприємстві наведено в таблиці 32.6.

Таблиця 32.6

| Ресурс | Норма витрат на одиницю продукції за видами |   |   | Запас ресурсу |
|--------|---------------------------------------------|---|---|---------------|
|        | А                                           | В | С |               |
| 1      | 4                                           | 2 | 1 | 180           |
| 2      | 3                                           | 1 | 3 | 210           |
| 3      | 1                                           | 2 | 5 | 244           |

Відома ціна одиниці продукції кожного виду: А–10 ум.од., В–14 ум.од. і С–12 ум.од. Визначити план виробництва продукції, що забезпечує підприємству найбільший дохід. Остання симплекс-таблиця (табл.32.7), що містить оптимальний план задачі, має такий вигляд:

Таблиця 32.7

|    |              |              |       |       |       |       |       |       |
|----|--------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    |              |              | 10    | 14    | 12    | 0     | 0     | 0     |
|    | Змінні члени | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 14 | $x_2$        | 82           | 19/8  | 1     | 0     | 5/8   | 0     | -1/8  |
| 0  | $x_5$        | 80           | 23/8  | 0     | 0     | 1/8   | 1     | -5/8  |
| 12 | $x_3$        | 16           | -3/4  | 0     | 1     | -1/4  | 0     | 1/4   |
|    | $F$          | 1340         | 57/4  | 0     | 0     | 23/4  | 0     | 5/4   |

### Питання для самоперевірки

- 1 У чому сутність двоїстості у лінійному програмуванні?
- 2 Які взаємосп्राжені задачі називаються симетричними, а які — несиметричними? Чим вони відрізняються?
- 3 Скільки змінних та обмежень має двоїста задача відповідно до прямої?
- 4 Сформулюйте першу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.
- 5 Сформулюйте другу теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.
- 6 Сформулюйте третю теорему двоїстості та дайте її економічне тлумачення.
- 7 Сформулюйте правила побудови двоїстих задач.
- 8 Як за розв'язком прямої задачі знайти розв'язок двоїстої?
- 9 Запишіть всі можливі види прямих і двоїстих задач.
- 10 Як визначити, що ресурс є дефіцитним (недефіцитним)?
- 11 Як визначити, що продукція є рентабельна (нерентабельна)?
- 12 Як визначити план виробництва продукції та зміну доходу підприємства, якщо збільшити (зменшити) обсяг ресурсів?
- 13 Як визначити рентабельність кожного виду продукції, що виготовиться на підприємстві?
- 14 Як розрахувати інтервали можливої зміни ціни на одиницю кожного виду продукції?
- 15 Як виробник має змінити план виробництва продукції, щоб уникнути втрат, пов'язаних із надвиробництвом відповідного виду продукції?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 33.** Постановка задачі цілочислового лінійного програмування. Метод Гоморі.

**Розв'язання прикладів**

**Приклад** Сільськогосподарське підприємство задумало створити сушильний цех на виробничій площі 190 м<sup>2</sup>, маючи для цього 100 тис.грн і можливість придбати устаткування двох типів А і В. Техніко-економічну інформацію про два види устаткування подано в таблиці 33.1.

Таблиця 33.1

| Техніко-економічний показник              | Устаткування |     | Ресурс |
|-------------------------------------------|--------------|-----|--------|
|                                           | А            | В   |        |
| Вартість, тис. грн.                       | 25           | 10  | 100    |
| Необхідна виробнича площа, м <sup>2</sup> | 40           | 20  | 190    |
| Потужність, тис. грн/рік                  | 350          | 150 | —      |

**Розв'язання** Нехай  $x_1$  і  $x_2$  – кількість комплектів устаткування відповідно типу А і В.

Запишемо економіко-математичну модель.

$$Z=350x_1+150x_2 \rightarrow \max,$$

$$25x_1+10x_2 \leq 100,$$

$$40x_1+20x_2 \leq 190,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

$x_1$  і  $x_2$  – цілі.

Розв'язуємо задачу, нехтуючи умовою цілочисельності. Остання симплексна таблиця 33.2 набере вигляду

Таблиця 33.2

|     |              |              | 350   | 150   | 0     | 0      |
|-----|--------------|--------------|-------|-------|-------|--------|
|     | Змінні члени | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$  |
| 350 | $x_1$        | 1            | 1     | 0     | 1/5   | -1/10  |
| 150 | $x_2$        | 7 1/2        | 0     | 1     | -2/5  | -1/4   |
|     | $F$          | 1475         | 0     | 0     | 10    | -2 1/2 |

Значення другої змінної є дробовим числом, що не задовольняє початкові умови задачі. Побудуємо для другого рядка наведеної симплексної таблиці додаткове обмеження виду

$$\sum_{j=1}^n \{a_{ij}\}x_j \geq \{b_i\}:$$

$$\{1\}x_1 + \{0\}x_2 + \left\{-\frac{2}{5}\right\}x_3 + \left\{-\frac{1}{4}\right\}x_4 \geq \left\{7\frac{1}{2}\right\},$$

Оскільки  $\left\{-\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$ ,  $\left\{-\frac{1}{4}\right\} = \frac{3}{4}$ ,  $\left\{7\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ , то додаткове обмеження набирає вигляду

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}.$$

Зведемо його до канонічної форми та введемо штучну змінну:

$$\frac{3}{5}x_3 + \frac{3}{4}x_4 - x_5 + x_6 = \frac{1}{2}.$$

Приєднавши здобуте обмеження до останньої симплексної таблиці 33.3 з умовно-оптимальним планом, дістанемо:

Таблиця 33.3

|     |              |              | 350   | 150   | 0     | 0     | 0     | -M    |
|-----|--------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|     | Змінні члени | Вільні члени | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| 350 | $x_1$        | 1            | 1     | 1/2   | 1/5   | -1/10 | 0     | 0     |
| 150 | $x_2$        | 7 1/2        | 0     | 1     | -2/5  | -1/4  | 0     | 0     |
| -M  | $x_6$        | 1/2          | 0     | 3/2   | 3/5   | 3/4   | -1    | 1     |
|     | F            | 1475         | 0     | 5/2   | 10    | 2 1/2 | 0     | 0     |
|     |              | -1/2M        | 0     |       | -3/5M | -3/4M | M     | 0     |

Розв'язуючи наведену задачу, остаточно знаходимо цілочисловий оптимальний план:  $X^*(x_1=2; x_2=5)$ ,  $Z_{\max}=1450$ .

### Домашнє завдання

**Теорія.** Транспортна задача. Початковий опорний план. [20], с. 291 –298.

### Вправи

Методом Гоморі розв'язати задачу цілочислового програмування.

$$1 \quad Z = x_1 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 12; \\ 3x_1 + 8x_2 + x_4 = 24; \\ x_j \geq 0, x_j - \text{цілі.} \end{cases}$$

$$2 \quad Z = x_1 + x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9; \\ x_j \geq 0, x_j - \text{цілі.} \end{cases}$$

$$3 \quad Z = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 36; \\ x_2 \leq 13; \\ x_j \geq 0, x_j - \text{цілі.} \end{cases}$$

$$4 \quad Z = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 8; \\ x_1 + 4x_2 \leq 10; \\ x_j \geq 0, x_j - \text{цілі.} \end{cases}$$

### Питання для самоперевірки

- 1 Яка задача ЛП називається повністю цілочисловою задачею лінійного програмування і яка частково цілочисловою?
- 2 Як формується правильне відсічення Гоморі?
- 3 З яких етапів складається алгоритм Гоморі?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 34.** Транспортна задача. Початковий опорний план.

**Розв'язання прикладів**

**Приклад** Привести ТЗ (табл.34.1) до задачі із закритою моделлю.

Таблиця 34.1

| $B_j$<br>$A_i$   | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | запаси<br>$a_i$ |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|
| $A_1$            | 7     | 1     | 3     | 14    | 2     | 50              |
| $A_2$            | 4     | 5     | 1     | 6     | 13    | 30              |
| $A_3$            | 8     | 10    | 2     | 4     | 1     | 20              |
| $A_4$            | 3     | 9     | 4     | 12    | 5     | 70              |
| потреби<br>$b_j$ | 10    | 40    | 20    | 30    | 50    | 170<br>150      |

**Розв'язання.**

Як бачимо з таблиці,  $\sum_{i=1}^m a_i = 170$ , а  $\sum_{j=1}^n b_j = 150$ , тобто виконується нерівність  $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ . Отже, маємо задачу з відкритою моделлю. Введемо допоміжного споживача  $B_6$  з попитом  $\sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j = 170 - 150 = 20$  ум.од. продукту з вартістю перевезень  $c_{i,n+1} = c_{i,6} = 0$  ( $i = \overline{1,4}$ ). Побудуємо нову розподільну табл. 34.2

Таблиця 34.2

| $B_j$<br>$A_i$   | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $B_6$ | запаси<br>$a_i$ |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|
| $A_1$            | 7     | 1     | 3     | 14    | 2     | 0     | 50              |
| $A_2$            | 4     | 5     | 1     | 6     | 13    | 0     | 30              |
| $A_3$            | 8     | 10    | 2     | 4     | 1     | 0     | 20              |
| $A_4$            | 3     | 9     | 4     | 12    | 5     | 0     | 70              |
| потреби<br>$b_j$ | 10    | 40    | 20    | 30    | 50    | 20    | 170<br>170      |

Таким чином, одержали задачу з закритою моделлю.

**Приклад.** Побудувати початковий опорний розв'язок для наступної ТЗ методом північно-західного кута (дані задачі зображені в розподільній таблиці 34.3).

Таблиця 34.3

| $B_j$<br>$A_i$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $a_i$ |
|----------------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$          | 3     | 5     | 6     | 800   |
| $A_2$          | 7     | 2     | 4     | 700   |
| $A_3$          | 4     | 3     | 5     | 1000  |
| $A_4$          | 6     | 4     | 7     | 500   |
| $b_j$          | 1000  | 1100  | 900   |       |

**Розв'язання.**

Порівняємо  $a_1 = 800$  і  $b_1 = 1000$ . Одержимо  $x_{11} = 800$ . Відкреслюємо постачальника  $A_1$ . Споживачу  $B_1$  потрібно ще 200 одиниць вантажу, який може доставити постачальник  $A_2$ . Заповнюємо клітину (2;1) вантажем у розмірі  $x_{21} = 200$ . Споживач  $B_1$  одержав 1000 одиниць вантажу і далі участі в розрахунках не бере.

Другий крок. Переходимо до клітини (2;2) – до другого споживача, якому потрібно 1100 одиниць вантажу. У другого постачальника осталося  $700 - 200 = 500$  одиниць вантажу, які перейдуть до споживача  $B_2$ , тобто  $x_{22} = 500$ . Постачальник  $A_2$  вичерпав себе. Переходимо до клітини (3;2). Споживачу  $B_2$  потрібно вантажу у розмірі  $1100 - 500 = 600$  одиниць, які може задовольнити постачальник  $A_3$ , тобто  $x_{32} = 600$  і споживач  $B_2$  одержав необхідні 1100 одиниць вантажу і далі участі в розрахунках не бере. Переходимо до споживача  $B_3$  (клітина (3;3)), якому постачальник  $A_3$  може дати  $1000 - 600 = 400$  одиниць вантажу, тобто  $x_{33} = 400$  і постачальник  $A_3$  свої запаси вичерпав. Переходимо до постачальника  $A_4$ . Заповнюємо клітину (4;3) вантажем у розмірі в 500 одиниць.

Таким чином, розподільна таблиця буде мати вигляд (табл.34.4)

Таблиця 34.4

| $B_j$<br>$A_i$ | $B_1$    | $B_2$    | $B_3$    | $a_i$ |
|----------------|----------|----------|----------|-------|
| $A_1$          | 3<br>800 | 5        | 6        | 800   |
| $A_2$          | 7<br>200 | 2<br>500 | 4        | 700   |
| $A_3$          | 4        | 3<br>600 | 5<br>400 | 1000  |
| $A_4$          | 6        | 4        | 7<br>500 | 500   |
| $b_j$          | 1000     | 1100     | 900      |       |

а початковий опорний розв'язок має вигляд

$$X_{\text{поч.оп.}} = \begin{pmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 200 & 500 & 0 \\ 0 & 600 & 400 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix},$$

при якому

$$Z(X_{\text{поч.оп.}}) = 800 \cdot 3 + 200 \cdot 7 + 500 \cdot 2 + 600 \cdot 3 + 400 \cdot 5 + 500 \cdot 7 = 12100 \text{ (ум.одиниць)}.$$

**Приклад** Для попереднього приклада (табл.34.3) знайти початковий опорний план методом мінімального елемента матриці тарифів.

**Розв'язання.**

1 Знаходимо клітину розподільної таблиці ТЗ з мінімальним значенням тарифу. В нашому випадку це клітина (2;2), для якої  $c_{22} = 2$ . В цю клітину записуємо вантаж у розмірі  $\min(a_2; b_2)$ , тобто  $\min(700; 1100) = 700$ ,  $x_{22} = 700$ . Постачальник  $A_2$  вичерпав себе, другий ряд далі в розрахунках участі не приймає. Споживачу  $B_2$  потрібно ще  $1100 - 700 = 400$  одиниць вантажу.

2 Переходимо до вибору наступного мінімального елемента матриці тарифів після викреслення в ній другого рядку. Це буде або клітина (1;1), де  $c_{11} = 3$ , або клітина (3;2), де  $c_{33} = 3$ . Можна взяти будь-яку з цих клітин, наприклад, (1;1). В цю клітину записуємо вантаж у розмірі  $\min(800; 1100) = 800$ ,  $x_{11} = 800$  одиниць і перший рядок викреслюємо з розподільної таблиці. Споживачу  $B_1$  потрібно  $1000 - 800 = 200$  одиниць продукту.

3 В залишеній матриці тарифів мінімальний елемент знаходиться в клітині (3;2), де  $c_{32} = 3$ . Споживачу  $B_2$  потрібно 400 одиниць вантажу, які може доставити постачальник  $A_3$ , тобто  $x_{32} = 400$ , причому у нього залишається  $1000 - 400 = 600$  одиниць вантажу. Споживач  $B_2$  з подальшого розгляду викреслюється.

4 Наступною клітиною з мінімальним значенням матриці тарифів буде клітина (3;1), де  $c_{31} = 4$ . Споживач  $B_1$  одержить 200 одиниць вантажу від постачальника  $A_3$ ,  $x_{31} = 200$ , у якого залишиться  $600 - 200 = 400$  одиниць продукту. Отже, споживач  $B_1$  вичерпав себе.

5 В розподільній таблиці залишилося дві клітини: (3;3), де  $c_{33} = 5$  і (4;3), де  $c_{43} = 7$ . Завантажимо клітину (3;3) вантажем у розмірі 400 одиниць, які залишилися у постачальника  $A_3$ , тобто  $x_{33} = 400$ . Споживачу  $B_3$  потрібно  $900 - 400 = 500$  одиниць вантажу, які він одержить від постачальника  $A_4$ .

Таким чином, розподільна таблиця буде мати вигляд (табл.34.5)

Таблиця 34.5

| $B_j$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_i$ |       |       |       |       |
| $A_1$ | 800   | 5     | 6     | 800   |
| $A_2$ | 7     | 700   | 4     | 700   |
| $A_3$ | 4     | 3     | 5     | 1000  |
| $A_4$ | 6     | 4     | 7     | 500   |
| $b_j$ | 1000  | 1100  | 900   |       |

Отже, початковий опорний розв'язок має вигляд

$$X_{\text{поч.оп.}} = \begin{pmatrix} 800 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 0 \\ 200 & 400 & 400 \\ 0 & 0 & 500 \end{pmatrix},$$

а вартість перевезень на цьому розв'язку дорівнює:

$$Z(X_{\text{поч.оп.}}) = 800 \cdot 3 + 700 \cdot 2 + 200 \cdot 4 + 400 \cdot 3 + 400 \cdot 5 + 500 \cdot 7 = 11300$$

Порівнюючи значення цільової функції  $Z(X)$  на одержаних початкових опорних розв'язках для обох методів (12100 та 11300), бачимо, що метод мінімального елемента дав кращий результат, але цей факт не можна вважати завжди обов'язковим.

### Домашнє завдання

**Теорія.** Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі. [20], с.299–305.

### Вправи

Для заданих матриць транспортних витрат  $C=(c_{ij})$  ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ ), об'ємів виробництва  $a_i$  та об'єми споживання  $b_j$  скласти математичну модель та знайти початковий опорний розв'язок.

| $a_i$ |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|
| 30    | 2  | 4  | 1  | 3  |
| 20    | 5  | 6  | 5  | 4  |
| 40    | 3  | 7  | 9  | 5  |
| 50    | 1  | 2  | 2  | 7  |
| $b_j$ | 35 | 20 | 55 | 30 |

| $a_i$ |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|
| 55    | 2  | 5  | 3  | 4  |
| 45    | 6  | 1  | 2  | 5  |
| 80    | 3  | 4  | 3  | 8  |
| $b_j$ | 20 | 60 | 55 | 45 |

| $a_i$ |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|
| 65    | 18 | 2  | 9  | 7  |
| 55    | 30 | 4  | 1  | 55 |
| 40    | 6  | 4  | 8  | 3  |
| $b_j$ | 25 | 35 | 30 | 70 |

### Питання для самоперевірки

- 1 Як формулюється транспортна задача?
- 2 Яка модель транспортної задачі називається відкритою?
- 3 Яка модель транспортної задачі називається закритою?
- 4 Як відкрита модель транспортної задачі зводиться до закритої моделі?



5 Як знаходиться початковий опорний план транспортної задачі методом північно-західного кута?

6 Як знаходиться початковий опорний план транспортної задачі методом мінімальної вартості?

**ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 35.** Метод потенціалів розв'язування транспортної задачі.

### Розв'язання прикладів

**Приклад.** З трьох складів  $A_1, A_2, A_3$  необхідно доставити будівельні матеріали на 5 будівельних майданчиків  $B_1, B_2, B_3, B_4$  та  $B_5$ . Потрібно закріпити склади за майданчиками таким чином, щоб загальна сума витрат на транспортування була мінімальною. Всі дані задачі зображені в розподільній табл. 35.1.

Таблиця 35.1

| $A_j$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | $B_5$ | $a_i$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $A_1$ | 7     | 3     | 5     | 4     | 2     | 40    |
| $A_2$ | 6     | 2     |       | 1     | 7     | 130   |
| $A_3$ | 3     | 5     | 2     | 6     | 4     | 30    |
| $b_j$ | 20    | 50    | 70    | 25    | 35    |       |

Треба:

- 1 Скласти математичну модель задачі.
- 2 Побудувати початковий опорний розв'язок.
- 3 За допомогою методу потенціалів знайти оптимальний розв'язок.
- 4 Дати економічне тлумачення одержаного оптимального розв'язку.

#### Розв'язання.

1 Перед складанням математичної моделі ТЗ перевіримо, чи є ця задача закритою. Для цього знайдемо

$$\sum_{j=1}^5 b_j = 20 + 50 + 70 + 25 + 35 = 200$$

і

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 40 + 130 + 30 = 200.$$

Оскільки виконується умова  $\sum_{i=1}^3 a_i = \sum_{j=1}^5 b_j$ , то ця ТЗ є задачею з закритою моделлю.

Позначимо через  $x_{ij}$  кількість одиниць будівельних матеріалів, що відправляється зі складу  $A_i$  до будівельного майданчика  $B_j$  ( $i = \overline{1,3}; j = \overline{1,5}$ ).

Цільова функція  $Z(X)$  досліджується на мінімум і дорівнює

$$Z(X) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_{ij} = 7x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} + 2x_{15} + 6x_{21} + 2x_{22} +$$

$$+3x_{23} + x_{24} + 7x_{25} + 3x_{31} + 5x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34} + 4x_{35}.$$

Система обмежень має вигляд

$$\begin{aligned}x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} &= 40, \\x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} &= 130, \\x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} &= 30, \\x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 20, \\x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 50, \\x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 70, \\x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 25, \\x_{15} + x_{25} + x_{35} &= 30, \\x_{ij} &\geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,5}.\end{aligned}$$

2 Методом північно-західного кута знайдемо початковий опорний розв'язок, внаслідок чого одержимо розподільну таблицю 35.2.

Таблиця 35.2

| $A_i \quad B_j$ | $B_1$   | $B_2$     | $B_3$   | $B_4$   | $B_5$    | $a_i$ |
|-----------------|---------|-----------|---------|---------|----------|-------|
| $A_1$           | 7<br>20 | 3<br>- 20 | 5       | 4       | 2<br>+   | 40    |
| $A_2$           | 6       | 2<br>+ 30 | 3<br>70 | 1<br>25 | 7<br>- 5 | 130   |
| $A_3$           | 3       | 5         | 2       | 6       | 4<br>30  | 30    |
| $b_j$           | 20      | 50        | 70      | 25      | 35       |       |

$$X_{\text{поч.оп.}} = \begin{pmatrix} 20 & 20 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 70 & 25 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}.$$

Оскільки  $(m+n-1) = (3+5-1) = 7$  і число завантажених клітин дорівнює 7, то початковий опорний розв'язок є не вироджений. Застосування методу для виродженого розв'язку розглянемо нижче.

Значення цільової функції на цьому розв'язку дорівнює

$$Z(X_{\text{поч.оп.}}) = 20 \cdot 7 + 20 \cdot 3 + 30 \cdot 2 + 70 \cdot 3 + 25 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 30 \cdot 4 = 650 \text{ (ум.од.)}.$$

3 Застосуємо метод потенціалів.

Для отримання оптимального розв'язку ТЗ необхідно виконання умов:

1) кожній завантаженій клітині в розподільній таблиці відповідає рівність

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}); \quad (35.1)$$

2) кожній вільній клітині відповідає нерівність

$$\Delta_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0. \quad (35.2)$$

Спочатку складемо систему рівнянь для завантажених клітин за формулами (35.1):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 7, & u_2 + v_4 = 1, \\ u_1 + v_2 = 3, & u_2 + v_5 = 7, \\ u_2 + v_2 = 2, & u_3 + v_5 = 4, \\ u_2 + v_3 = 3, \end{cases}$$

звідки, покладаючи, наприклад,  $u_2 = 0$ , одержимо значення потенціалів:

$$\begin{aligned} v_1 &= 6, \\ u_1 &= 1, & v_2 &= 2, \\ u_2 &= 0, & v_3 &= 3, \\ u_3 &= -3, & v_4 &= 1, \\ & & v_5 &= 7. \end{aligned}$$

Обчислимо оцінки  $\Delta_{ij}$  для вільних кліток.

$$\begin{aligned} \Delta_{13} &= c_{13} - (u_1 + v_3) = 5 - (1 + 3) = 1, \\ \Delta_{14} &= c_{14} - (u_1 + v_4) = 4 - (1 + 1) = 2, \\ \Delta_{15} &= c_{15} - (u_1 + v_5) = 2 - (1 + 7) = -6, \\ \Delta_{21} &= c_{21} - (u_2 + v_1) = 6 - (0 + 6) = 0, \\ \Delta_{31} &= c_{31} - (u_3 + v_1) = 3 - (-3 + 6) = 0, \\ \Delta_{32} &= c_{32} - (u_3 + v_2) = 5 - (-3 + 2) = 6, \\ \Delta_{33} &= c_{33} - (u_3 + v_3) = 2 - (-3 + 3) = 2, \\ \Delta_{34} &= c_{34} - (u_3 + v_4) = 6 - (-3 + 1) = 8. \end{aligned}$$

Одержаний початковий опорний розв'язок не є оптимальним, оскільки існує від'ємна оцінка  $\Delta_{15} = -6$ , тобто не виконується умова оптимальності (35.2).

Перейдемо до нового опорного розв'язку, для чого побудуємо цикл перерахування. Цикл будуємо, починаючи з клітини (1,5). Позначимо цикл в табл.9.28. З клітки (1,5) розставляємо позмінно знаки "+", "-", тобто клітини (1,5), (2,2) помічаємо знаком "+", а клітини (1,2), (2,5) – знаком "-". Серед клітин зі знаком "-" знаходимо клітину з найменшим вантажем, який дорівнює 5 одиницям ( $\lambda = 5$ ). Зробивши зсув по циклу перерахування, одержимо новий опорний розв'язок, який зображено в таблиці 35.1.

Таблиця 35.1

|       |         |         |         |         |         | $u_i$   |
|-------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|       | -7      | 3       | 5       | 4       | +2      | $u_1=1$ |
|       | 20      | 15      |         |         | 5       |         |
|       | 6       | 2       | 3       | 1       | 7       | $u_2=0$ |
|       |         | 35      | 70      | 25      |         |         |
|       | 3       | 5       | 2       | 6       | 4       | $u_3=3$ |
|       | +       |         |         |         | --30    |         |
| $v_j$ | $v_1=6$ | $v_2=2$ | $v_3=3$ | $v_4=1$ | $v_5=1$ |         |

$$X_1 = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 35 & 70 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{pmatrix}, \quad Z(X_1) = 620.$$

Оскільки кількість змінних дорівнює  $(m+n-1) = 7$ , то знайдений опорний розв'язок є невироджений.

Обчислимо оцінки

$$\Delta_{13} = 1; \Delta_{14} = 2; \Delta_{21} = 0; \Delta_{25} = 6; \Delta_{31} = -6; \Delta_{32} = 0; \Delta_{33} = -4; \Delta_{34} = 2.$$

Існують три від'ємні оцінки  $\Delta_{31} = -6; \Delta_{33} = -4$ , тому опорний розв'язок не є оптимальним. Переходимо до нового опорного розв'язку, для чого вибираємо  $\max_{\Delta_j < 0} |\Delta_j| = 6$ , який відповідає клітині (3,1). Починаючи з цієї клітини, здійснюємо цикл перерахування (в табл.35.1) і зобразимо в таблиці 35.2 наступний опорний розв'язок (по циклу пересувається вантаж у розмірі 20 одиниць).

Таблиця 35.2

|       |           |           |           |           |           | $u_i$     |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|       | 7         | 3         | 5         | 4         | 2         | $u_1 = 1$ |
|       |           | -15       |           |           | 25        |           |
|       | 6         | 2         | 3         | 1         | 7         | $u_2 = 0$ |
|       |           | +35       | -- 70     | 25        |           |           |
|       | 3         | 5         | 2         | 6         | 4         | $u_3 = 3$ |
|       | 20        |           | +         |           | -- 10     |           |
| $v_j$ | $v_1 = 0$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 3$ | $v_4 = 1$ | $v_5 = 1$ |           |

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 15 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & 35 & 70 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad Z(X_2) = 500.$$

Обчислимо оцінки:

$$\Delta_{11} = 6; \Delta_{13} = 1; \Delta_{14} = 2; \Delta_{21} = 6; \Delta_{25} = 6; \Delta_{32} = 0; \Delta_{33} = -4; \Delta_{34} = 2$$

Отриманий опорний розв'язок  $X_2$  (невироджений) знову не є оптимальним, оскільки серед оцінок  $\Delta_j$  є від'ємні.

Далі виконуємо розрахунки без пояснень (табл.35.3).

Таблиця 35.3

|       |           |           |           |           |           | $u_i$      |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|
|       | 7         | 3         | 5         | 4         | 2         | $u_1 = 1$  |
|       |           | 5         |           |           | 35        |            |
|       | 6         | 2         | 3         | 1         | 7         | $u_2 = 0$  |
|       |           | 40        | 60        | 25        |           |            |
|       | 3         | 5         | 2         | 6         | 4         | $u_3 = -1$ |
|       | 20        |           | 10        |           |           |            |
| $v_j$ | $v_1 = 4$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 3$ | $v_4 = 1$ | $v_5 = 1$ |            |

$$m+n-1=7;$$

$$\Delta_{11} = 2; \Delta_{13} = 1; \Delta_{14} = 2; \Delta_{21} = 2; \Delta_{25} = 6; \Delta_{32} = 4; \Delta_{34} = 6; \Delta_{35} = 4;$$

$$Z(X_3) = 460.$$

Всі оцінки  $\Delta_{ij}$  вільних клітин додатні, тому одержаний опорний розв'язок є оптимальним

$$X_{opt} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 45 & 60 & 25 & 0 \\ 20 & 0 & 10 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

при цьому мінімальне значення цільової функції дорівнює 460 (ум.од.).

### Економічний зміст математичного результату

Для отримання мінімальних витрат на перевезення у розмірі 460 (ум.од.) з першого складу  $A_1$  треба доставити на 2-ий та 5-ий будівельні майданчики відповідно 5 та 35 умовних одиниць будівельних матеріалів; з другого складу  $A_2$  треба доставити на 2-ий, 3-ий та 4-ий майданчики відповідно 45, 60 і 25 умовних одиниць вантажу; з третього складу  $A_3$  треба доставити на 1-ий та 3-ій майданчики відповідно 20 та 10 умовних одиниць будівельних матеріалів.

### Домашнє завдання

**Теорія.** Поняття про динамічне програмування [20], с. 305–320.

### Вправи

Для заданих матриць транспортних витрат  $C=(c_{ij})$  ( $i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ ), об'ємів виробництва  $a_i$  та об'єми споживання  $b_j$  скласти математичну модель, розв'язати складену модель методом потенціалів та дати економічну інтерпретацію розв'язку.

| $a_i$ |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|
| 20    | 1  | 3  | 3  | 8  |
| 20    | 8  | 6  | 2  | 6  |
| 40    | 7  | 7  | 3  | 8  |
| 45    | 5  | 2  | 4  | 5  |
| $b_j$ | 25 | 35 | 40 | 25 |

| $a_i$ |    |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|----|
| 130   | 4  | 5  | 6  | 8  | 10 |
| 90    | 10 | 3  | 2  | 3  | 15 |
| 40    | 4  | 10 | 5  | 1  | 16 |
| $b_j$ | 10 | 30 | 50 | 80 | 90 |

| $a_i$ |    |    |    |    |
|-------|----|----|----|----|
| 40    | 1  | 7  | 2  | 5  |
| 30    | 3  | 8  | 4  | 1  |
| 50    | 6  | 3  | 5  | 3  |
| $b_j$ | 20 | 10 | 45 | 45 |

### Питання для самоперевірки

- 1 Як знаходиться оптимальний розв'язок транспортної задачі методом потенціалів?
- 2 Що називається циклом переміщення?
- 3 Як знаходяться потенціали пунктів відправлення і пунктів призначення?
- 4 Як знаходяться оцінки вільних клітинок?
- 5 За якою ознакою визначається оптимальність плану?

## ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 36. Поняття про динамічне програмування.

### Розв'язання прикладів

#### Задача про заміну устаткування

Це важлива економічна задача. Відомо, що з часом устаткування зношується, старіє фізично і морально. Падає його продуктивність, ростуть експлуатаційні витрати. Виникає необхідність заміни устаткування.

Задачу про заміну устаткування можна сформулювати так. В процесі роботи устаткування дає щорічно прибуток, вимагає експлуатаційних витрат і має залишкову вартість. Ці характеристики залежать від терміну експлуатації устаткування. В будь-якому році можна устаткування зберегти або продати за залишковою ціною і придбати нове. В випадку збереження устаткування знижується його продуктивність, збільшуються експлуатаційні витрати. При заміні потрібні значні додаткові капітальні вкладення. Задача полягає в визначенні оптимальної стратегії заміни в плановому періоді з тим, щоб сумарний прибуток за цей період був максимальний.

Сформулюємо задачу математично. Позначимо через  $T$  тривалість планового періоду, через  $r(t)$  – вартість продукції, виготовленої  $t$ -річним устаткуванням, через  $u(t)$  – витрати, пов'язані з експлуатацією цього устаткування, через  $s(t)$  – залишкову вартість  $t$ -річного устаткування, через  $p$  – покупну ціну нового устаткування. Нехай  $F_k(t)$  – максимальний прибуток від  $t$ -річного устаткування за останні  $k$  років планового періоду, тобто  $F_1(t)$  – за останній рік,  $F_2(t)$  – за два останні роки і т.д.,  $F_T(t)$  – за останні  $T$  років, тобто за плановий період,  $F_1(0)$  – максимальний прибуток за останній рік планового періоду на новому (0-річному) устаткуванні.

За принципом оптимальності проаналізуємо стратегію заміни устаткування від кінця до початку планового періоду.

Нехай на початок останнього року планового періоду ( $k=1$ ) устаткуванню  $t$  років. Можливі два варіанти:

- 1) зберегти устаткування на  $T$ -й рік, тоді прибуток за останній рік буде дорівнювати  $r(t) - u(t)$ ,
- 2) продати устаткування за залишковою ціною і купити нове устаткування, тоді прибуток буде дорівнювати  $s(t) - p + r(0) - u(0)$ .

Отже, максимальний прибуток дорівнює

$$F_1(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - u(t) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) \end{array} \right\}.$$

При  $k=2$ , тобто за 2 роки до кінця планового періоду, і  $t$ -річному устаткуванні прибуток при збереженні устаткування буде дорівнювати  $r(t) - u(t) + F_1(t+1)$ , а при заміні устаткування  $s(t) - p + r(0) - u(0) + F_1(1)$ . Отже, максимальний прибуток буде дорівнювати

$$F_2(t) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(t) - u(t) + F_1(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_1(1) \end{array} \right\}.$$

Аналогічно знайдемо

$$F_k(t) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(t) - u(t) + F_{k-1}(t+1) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) + F_{k-1}(1) \end{array} \right\}.$$

При  $k = T$  і  $t = t_0$  матимемо остаточно:

$$F_T(t_0) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(t_0) - u(t_0) + F_{T-1}(t_0 + 1) \\ s(t_0) - p + r(0) - u(0) + F_{T-1}(1) \end{array} \right\}.$$

**Приклад.** Скласти оптимальну стратегію заміни устаткування за період  $T=10$  років, якщо  $s(t) = 2$ ,  $p=15$ . Значення  $r(t)$  і  $u(t)$  взяти з табл.10.1.

Таблиця 10.1

| $t$           | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10 |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $r(t)$        | 30 | 30 | 29 | 29 | 29 | 28 | 28 | 27 | 27 | 26 | 25 |
| $u(t)$        | 10 | 10 | 12 | 13 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 | 25 |
| $r(t) - u(t)$ | 20 | 20 | 17 | 16 | 15 | 12 | 10 | 7  | 5  | 2  | 0  |

**Розв'язання.** Розв'язок одержимо при  $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$  і  $k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ , записуючи результати в табл.10.2.

Маємо:

$$F_1(t) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(t) - u(t) \\ s(t) - p + r(0) - u(0) \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} r(t) - u(t) \\ 2 - 15 + 30 - 10 = 5 \end{array} \right\}.$$

Отже,

$$F_1(0) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(0) - u(0) \\ 5 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 30 - 10 = 20 \\ 5 \end{array} \right\} = 20,$$

$$F_1(1) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(1) - u(1) \\ 5 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 30 - 10 = 20 \\ 5 \end{array} \right\} = 20,$$

$$F_1(2) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(2) - u(2) \\ 5 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 29 - 12 = 17 \\ 5 \end{array} \right\} = 17,$$

$$F_1(3) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(3) - u(3) \\ 5 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 29 - 13 = 16 \\ 5 \end{array} \right\} = 16,$$

$$F_1(4) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(4) - u(4) \\ 5 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 29 - 14 = 15 \\ 5 \end{array} \right\} = 15,$$

$$F_1(5) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(5) - u(5) \\ 5 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 28 - 16 = 12 \\ 5 \end{array} \right\} = 12,$$

$$F_1(6) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(6) - u(6) \\ 5 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 28 - 18 = 10 \\ 5 \end{array} \right\} = 10,$$

$$F_1(7) = \max \left\{ \begin{array}{c} r(7) - u(7) \\ 5 \end{array} \right\} = \max \left\{ \begin{array}{c} 27 - 20 = 7 \\ 5 \end{array} \right\} = 7,$$

$$F_1(8) = \max \left\{ \frac{r(8) - u(8)}{5} \right\} = \max \left\{ \frac{27 - 22 = 5}{5} \right\} = 5,$$

$$F_1(9) = \max \left\{ \frac{r(9) - u(9)}{5} \right\} = \max \left\{ \frac{26 - 24 = 2}{5} \right\} = 5.$$

Зрозуміло, що в цей момент треба прийняти рішення про заміну устаткування.

Тепер можна знайти  $F_2(t)$ :

$$F_2(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_1(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_1(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_1(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 20 = 27} \right\}.$$

Одержуємо:

$$F_2(0) = \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_1(1)}{27} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 20 = 40}{27} \right\} = 40,$$

$$F_2(1) = \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_1(2)}{27} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 17 = 37}{27} \right\} = 37,$$

$$F_2(2) = \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_1(3)}{27} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 16 = 33}{27} \right\} = 33,$$

$$F_2(3) = \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_1(4)}{27} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 15 = 31}{27} \right\} = 31,$$

$$F_2(4) = \max \left\{ \frac{r(4) - u(4) + F_1(5)}{27} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 14 + 12 = 27}{27} \right\} = 27,$$

$$F_2(5) = \max \left\{ \frac{r(5) - u(5) + F_1(6)}{27} \right\} = \max \left\{ \frac{28 - 16 + 10 = 22}{27} \right\} = 27.$$

Отже, в цей момент треба замінити устаткування.

Для  $F_3(t)$  маємо такий вираз:

$$F_3(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_2(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_2(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_2(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 37 = 44} \right\}.$$

Таким чином,

$$F_3(0) = \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_2(1)}{44} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 37 = 57}{44} \right\} = 57,$$

$$F_3(1) = \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_2(2)}{44} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 33 = 53}{44} \right\} = 53,$$

$$F_3(2) = \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_2(3)}{44} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 31 = 48}{44} \right\} = 48,$$

$$F_3(3) = \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_2(4)}{44} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 27 = 43}{44} \right\} = 44.$$

Це означає, що прийшов час заміни устаткування.

Тепер знаходимо  $F_4(t)$  за формулою:



$$F_4(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_3(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_3(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_2(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 53 = 60} \right\}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} F_4(0) &= \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_3(1)}{60} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 53 = 73}{60} \right\} = 73, \\ F_4(1) &= \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_3(2)}{60} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 48 = 68}{60} \right\} = 68, \\ F_4(2) &= \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_3(3)}{60} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 44 = 61}{60} \right\} = 61, \\ F_4(3) &= \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_3(4)}{60} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 44 = 60}{60} \right\} = 60, \\ F_4(4) &= \max \left\{ \frac{r(4) - u(4) + F_3(5)}{60} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 14 + 44 = 59}{60} \right\} = 60. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що треба замінити устаткування.

Для  $F_5(t)$  одержимо вираз:

$$F_5(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_4(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_4(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_4(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 68 = 75} \right\}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} F_5(0) &= \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_4(1)}{75} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 68 = 88}{75} \right\} = 88, \\ F_5(1) &= \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_4(2)}{75} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 61 = 81}{75} \right\} = 81, \\ F_5(2) &= \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_4(3)}{75} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 60 = 77}{75} \right\} = 77, \\ F_5(3) &= \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_4(4)}{75} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 60 = 76}{75} \right\} = 76, \\ F_5(4) &= \max \left\{ \frac{r(4) - u(4) + F_4(5)}{75} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 14 + 60 = 75}{75} \right\} = 75, \\ F_5(5) &= \max \left\{ \frac{r(5) - u(5) + F_4(6)}{75} \right\} = \max \left\{ \frac{28 - 16 + 60 = 72}{75} \right\} = 75. \end{aligned}$$

Це означає, що прийшов час заміни устаткування.

Значення  $F_6(t)$  обчислюємо за формулою:

$$F_6(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_5(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_5(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_5(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 81 = 88} \right\}.$$

Таким чином,

$$F_6(0) = \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_5(1)}{88} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 81 = 101}{88} \right\} = 101,$$

$$\begin{aligned}
F_6(1) &= \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_5(2)}{88} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 77 = 97}{88} \right\} = 97, \\
F_6(2) &= \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_5(3)}{88} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 76 = 93}{88} \right\} = 93, \\
F_6(3) &= \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_5(4)}{88} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 75 = 91}{88} \right\} = 91, \\
F_6(4) &= \max \left\{ \frac{r(4) - u(4) + F_5(5)}{88} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 14 + 75 = 90}{88} \right\} = 90, \\
F_6(5) &= \max \left\{ \frac{r(5) - u(5) + F_5(6)}{88} \right\} = \max \left\{ \frac{28 - 16 + 75 = 87}{88} \right\} = 88.
\end{aligned}$$

Це означає, що треба замінити устаткування.

Для  $F_7(t)$  маємо вираз:

$$F_7(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_6(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_6(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_6(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 97 = 104} \right\}.$$

Отже,

$$\begin{aligned}
F_7(0) &= \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_6(1)}{104} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 97 = 117}{104} \right\} = 117, \\
F_7(1) &= \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_6(2)}{104} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 93 = 113}{104} \right\} = 113, \\
F_7(2) &= \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_6(3)}{104} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 91 = 108}{104} \right\} = 108, \\
F_7(3) &= \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_6(4)}{104} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 90 = 106}{104} \right\} = 106, \\
F_7(4) &= \max \left\{ \frac{r(4) - u(4) + F_6(5)}{104} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 14 + 88 = 103}{104} \right\} = 104.
\end{aligned}$$

Як бачимо, треба замінити устаткування.

Обчислимо  $F_8(t)$ :

$$F_8(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_7(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_7(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_7(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 113 = 120} \right\}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned}
F_8(0) &= \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_7(1)}{120} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 113 = 133}{120} \right\} = 133, \\
F_8(1) &= \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_7(2)}{120} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 108 = 128}{120} \right\} = 128, \\
F_8(2) &= \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_7(3)}{120} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 106 = 123}{120} \right\} = 123,
\end{aligned}$$

$$F_8(3) = \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_7(4)}{120} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 104 = 120}{120} \right\} = 120,$$

$$F_8(4) = \max \left\{ \frac{r(4) - u(4) + F_7(5)}{120} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 14 + 104 = 119}{120} \right\} = 120.$$

Отже, треба робити заміну устаткування.

Переходимо до обчислення  $F_9(t)$ . Маємо:

$$F_9(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_8(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_8(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_8(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 128 = 135} \right\},$$

отже,

$$F_9(0) = \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_8(1)}{135} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 128 = 148}{135} \right\} = 148,$$

$$F_9(1) = \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_8(2)}{135} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 123 = 140}{135} \right\} = 140,$$

$$F_9(2) = \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_8(3)}{135} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 120 = 136}{135} \right\} = 136,$$

$$F_9(3) = \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_8(4)}{135} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 14 + 120 = 135}{135} \right\} = 135.$$

Зрозуміло, що треба робити заміну устаткування.

Нарешті обчислюємо  $F_{10}(t)$ . Маємо:

$$F_{10}(t) = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_9(t+1)}{s(t) - p + r(0) - u(0) + F_9(1)} \right\} = \max \left\{ \frac{r(t) - u(t) + F_9(t+1)}{2 - 15 + 30 - 10 + 140 = 147} \right\},$$

отже,

$$F_{10}(0) = \max \left\{ \frac{r(0) - u(0) + F_9(1)}{147} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 140 = 160}{147} \right\} = 160,$$

$$F_{10}(1) = \max \left\{ \frac{r(1) - u(1) + F_9(2)}{147} \right\} = \max \left\{ \frac{30 - 10 + 136 = 156}{147} \right\} = 156,$$

$$F_{10}(2) = \max \left\{ \frac{r(2) - u(2) + F_9(3)}{147} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 12 + 135 = 152}{147} \right\} = 152,$$

$$F_{10}(3) = \max \left\{ \frac{r(3) - u(3) + F_9(4)}{147} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 13 + 135 = 151}{147} \right\} = 151,$$

$$F_{10}(4) = \max \left\{ \frac{r(4) - u(4) + F_9(5)}{147} \right\} = \max \left\{ \frac{29 - 14 + 135 = 150}{147} \right\} = 150,$$

$$F_{10}(5) = \max \left\{ \frac{r(5) - u(5) + F_9(6)}{147} \right\} = \max \left\{ \frac{28 - 16 + 135 = 147}{147} \right\} = 147,$$

$$F_{10}(6) = \max \left\{ \frac{r(6) - u(6) + F_9(7)}{147} \right\} = \max \left\{ \frac{28 - 18 + 135 = 145}{147} \right\} = 147.$$

Це означає, що треба замінити устаткування.

У результаті одержуємо табл. 10.2.

Таблиця.10.2

| $F_k(t)$    | $t$ |     |     |                  |                  |                 |                  |     |     |                |     |
|-------------|-----|-----|-----|------------------|------------------|-----------------|------------------|-----|-----|----------------|-----|
|             | 0   | 1   | 2   | 3                | 4                | 5               | 6                | 7   | 8   | 9              | 10  |
| $F_1(t)$    | 20  | 20  | 17  | 16               | 15               | 12              | 10               | 7   | 5   | 5 <sup>✓</sup> | 5   |
| $F_2(t)$    | 40  | 37  | 33  | 31               | 27               | 27 <sup>✓</sup> | 27               | 27  | 27  | 27             | 27  |
| $F_3(t)$    | 57  | 53  | 48  | 44 <sup>✓</sup>  | 44               | 44              | 44               | 44  | 44  | 44             | 44  |
| $F_4(t)$    | 73  | 68  | 61  | 60               | 60 <sup>✓</sup>  | 60              | 60               | 60  | 60  | 60             | 60  |
| $F_5(t)$    | 88  | 81  | 77  | 76               | 75               | 75 <sup>✓</sup> | 75               | 75  | 75  | 75             | 75  |
| $F_6(t)$    | 101 | 97  | 93  | 91               | 90               | 88 <sup>✓</sup> | 88               | 88  | 88  | 88             | 88  |
| $F_7(t)$    | 117 | 113 | 108 | 106              | 104 <sup>✓</sup> | 104             | 104              | 104 | 104 | 104            | 104 |
| $F_8(t)$    | 133 | 128 | 123 | 120              | 120 <sup>✓</sup> | 120             | 120              | 120 | 120 | 120            | 120 |
| $F_9(t)$    | 148 | 140 | 136 | 135 <sup>✓</sup> | 135              | 135             | 135              | 135 | 135 | 135            | 135 |
| $F_{10}(t)$ | 160 | 156 | 152 | 151              | 150              | 147             | 147 <sup>✓</sup> | 147 | 147 | 147            | 147 |

В табл. 10.5 галочка означає, що в даний момент зроблена заміна устаткування. Дані цієї таблиці дозволяють розв'язати цілий ряд задач з різними довжинами планового періоду і з різним віком устаткування. Розглянемо приклади.

Нехай маємо трирічне устаткування ( $t=3$ ) і треба знайти оптимальну стратегію заміни устаткування на 10-річний період ( $N=10$ ). В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_{10}(t)$  і стовпця  $t=3$  знаходимо  $F_{10}(3)=151$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Через рік устаткування постаріє на один рік і треба вибрати оптимальну стратегію заміни устаткування для 4-річного устаткування на решту 9 років. На перетині рядка  $F_9(t)$  і стовпця  $t=4$  в табл.10.3 знаходимо  $F_9(4)=135$ , причому це значення стоїть за галочкою, а це означає, що устаткування треба замінити. Тепер за 8 років до кінця періоду матимемо 1-річне устаткування. В табл. 10.5 на перетині рядка  $F_8(t)$  і стовпця  $t=1$  знаходимо  $F_8(1)=128$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 7 років до кінця періоду матимемо 2-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_7(t)$  і стовпця  $t=2$  знаходимо  $F_7(2)=108$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 6 років до кінця періоду матимемо 3-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_6(t)$  і стовпця  $t=3$  знаходимо  $F_6(3)=91$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 5 років до кінця періоду матимемо 4-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_5(t)$  і стовпця  $t=4$  знаходимо  $F_5(4)=75$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 4 роки до кінця періоду матимемо 5-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка

$F_4(t)$  і стовпця  $t=5$  знаходимо  $F_4(5)=60$ , причому це значення стоїть за галочкою, а це означає, що устаткування треба замінити. Отже, за 3 роки до кінця періоду матимемо 2-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_3(t)$  і стовпця  $t=2$  знаходимо  $F_3(2)=48$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Таким чином, за 2 роки до кінця періоду матимемо 3-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_2(t)$  і стовпця  $t=3$  знаходимо  $F_2(3)=31$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за рік до кінця періоду матимемо 4-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_1(t)$  і стовпця  $t=4$  знаходимо  $F_1(4)=15$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати.

Таким чином, схема оптимальної стратегії заміни 3-річного устаткування за 10-річний період має такий вигляд:

1-й рік  $\rightarrow$  збереження, 2-й рік  $\rightarrow$  заміна, 3-й рік  $\rightarrow$  збереження, 4-й рік  $\rightarrow$  збереження, 5-й рік  $\rightarrow$  збереження, 6-й рік  $\rightarrow$  збереження, 7-й рік  $\rightarrow$  заміна, 8-й рік  $\rightarrow$  збереження, 9-й рік  $\rightarrow$  збереження, 10-й рік  $\rightarrow$  збереження.

При цьому прибуток за 10-річний період буде максимальним і дорівнювати 151 одиниці.

За табл. 10.2 можна знайти оптимальну стратегію заміни устаткування і для періоду меншої, ніж 10 років, довжиною. Нехай маємо дворічне устаткування ( $t=2$ ) і треба знайти оптимальну стратегію заміни устаткування на 8-річний період ( $N=8$ ). В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_8(t)$  і стовпця  $t=2$  знаходимо  $F_8(2)=123$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Через рік устаткування застаріє на один рік і треба вибрати оптимальну стратегію заміни устаткування для 3-річного устаткування на решту 7 років. На перетині рядка  $F_7(t)$  і стовпця  $t=3$  в табл. 10.2 знаходимо  $F_7(3)=106$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Тепер за 6 років до кінця періоду матимемо 4-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_6(t)$  і стовпця  $t=4$  знаходимо  $F_6(4)=90$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 5 років до кінця періоду матимемо 5-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_5(t)$  і стовпця  $t=5$  знаходимо  $F_5(5)=75$ , причому це значення стоїть з галочкою, а це означає, що устаткування треба замінити. Отже, за 4 роки до кінця періоду матимемо 1-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_4(t)$  і стовпця  $t=1$  знаходимо  $F_4(1)=68$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за 3 роки до кінця періоду матимемо 2-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_3(t)$  і стовпця  $t=2$  знаходимо  $F_3(2)=48$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Таким чином, за 2 роки до кінця періоду матимемо 3-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_2(t)$  і стовпця  $t=3$  знаходимо  $F_2(3)=31$ , причому це значення

стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати. Отже, за рік до кінця періоду матимемо 4-річне устаткування. В табл. 10.2 на перетині рядка  $F_1(t)$  і стовпця  $t = 4$  знаходимо  $F_1(4) = 15$ , причому це значення стоїть перед галочкою, а це означає, що устаткування не треба замінювати.

Таким чином, схема оптимальної стратегії заміни 2-річного устаткування за 8-річний період має такий вигляд:

1-й рік → збереження, 2-й рік → збереження, 3-й рік → збереження, 4-й рік → заміна, 5-й рік → збереження, 6-й рік → збереження, 7-й рік → збереження, 8-й рік → збереження.

При цьому прибуток за 8-річний період буде максимальним і дорівнювати 123 одиницям.

### **Питання для самоперевірки**

- 1 Як формулюється задача динамічного програмування в загальній постановці?
- 2 В чому полягає метод динамічного програмування?
- 3 Як формулюється принцип оптимальності Беллмана?
- 4 Як формулюється задача про заміну устаткування?
- 5 Який вигляд має функціональне рівняння Беллмана для задачі про заміну устаткування?

## ДОДАТОК А

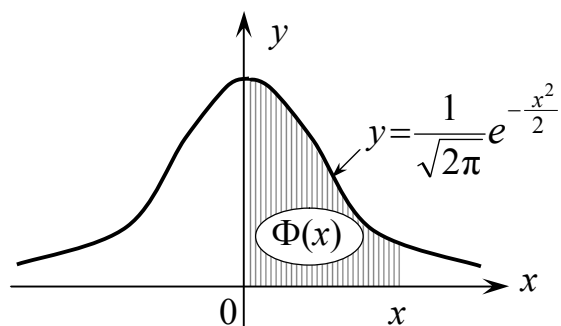
Таблиця значень функції Гауса  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

| $x$ | 0     | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
|-----|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0,0 | 0,399 | 399 | 399 | 399 | 399 | 398 | 398 | 398 | 398 | 397 |
| 0,1 | 397   | 397 | 396 | 396 | 395 | 395 | 394 | 393 | 393 | 392 |
| 0,2 | 391   | 390 | 389 | 389 | 388 | 387 | 386 | 385 | 384 | 383 |
| 0,3 | 381   | 380 | 379 | 378 | 377 | 375 | 374 | 373 | 371 | 370 |
| 0,4 | 368   | 367 | 365 | 364 | 362 | 361 | 359 | 357 | 356 | 354 |
| 0,5 | 352   | 350 | 349 | 347 | 345 | 343 | 341 | 339 | 337 | 335 |
| 0,6 | 333   | 331 | 329 | 327 | 325 | 323 | 321 | 319 | 317 | 314 |
| 0,7 | 312   | 310 | 308 | 306 | 303 | 301 | 299 | 297 | 294 | 292 |
| 0,8 | 290   | 287 | 285 | 283 | 280 | 278 | 276 | 273 | 271 | 269 |
| 0,9 | 266   | 264 | 261 | 259 | 257 | 254 | 252 | 249 | 247 | 244 |
| 1,0 | 242   | 240 | 237 | 235 | 232 | 230 | 228 | 225 | 223 | 220 |
| 1,1 | 218   | 216 | 213 | 211 | 208 | 206 | 204 | 201 | 199 | 197 |
| 1,2 | 194   | 192 | 190 | 187 | 185 | 183 | 180 | 178 | 176 | 174 |
| 1,4 | 150   | 148 | 146 | 144 | 142 | 140 | 137 | 135 | 133 | 132 |
| 1,6 | 111   | 109 | 107 | 106 | 104 | 102 | 101 | 099 | 097 | 096 |
| 1,8 | 079   | 078 | 076 | 075 | 073 | 072 | 071 | 069 | 068 | 067 |
| 1,9 | 066   | 064 | 063 | 062 | 061 | 059 | 058 | 057 | 056 | 055 |
| 2,0 | 054   | 053 | 052 | 051 | 050 | 049 | 048 | 047 | 046 | 045 |
| 2,1 | 044   | 043 | 042 | 041 | 040 | 040 | 039 | 038 | 037 | 036 |
| 2,2 | 036   | 035 | 034 | 033 | 033 | 032 | 031 | 030 | 030 | 029 |
| 2,4 | 022   | 022 | 021 | 021 | 020 | 020 | 019 | 019 | 018 | 018 |
| 2,6 | 014   | 013 | 013 | 013 | 012 | 012 | 012 | 011 | 011 | 011 |
| 2,8 | 008   | 008 | 008 | 007 | 007 | 007 | 007 | 007 | 006 | 006 |
| 2,9 | 006   | 006 | 006 | 006 | 005 | 005 | 005 | 005 | 005 | 005 |
| 3,0 | 004   | 004 | 004 | 004 | 004 | 004 | 004 | 004 | 004 | 003 |
| 3,1 | 003   | 003 | 003 | 003 | 003 | 003 | 003 | 003 | 003 | 003 |
| 3,2 | 002   | 002 | 002 | 002 | 002 | 002 | 002 | 002 | 002 | 002 |
| 3,3 | 002   | 002 | 002 | 002 | 002 | 002 | 001 | 001 | 001 | 001 |
| 3,4 | 001   | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 |
| 3,5 | 001   | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 |
| 3,6 | 001   | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 001 | 000 |

## ДОДАТОК Б

Значення функції Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$



| $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$ | $x$  | $\Phi(x)$  |
|------|-----------|------|-----------|------|------------|
| 0.0  | 0.00000   |      |           |      |            |
| 0.05 | 0.01994   | 1.05 | 0.35314   | 2.05 | 0.47982    |
| 0.10 | 0.03983   | 1.10 | 0.36433   | 2.10 | 0.48214    |
| 0.15 | 0.05962   | 1.15 | 0.37493   | 2.15 | 0.48422    |
| 0.20 | 0.07926   | 1.20 | 0.38493   | 2.20 | 0.48610    |
| 0.25 | 0.09871   | 1.25 | 0.39435   | 2.25 | 0.48778    |
| 0.30 | 0.11791   | 1.30 | 0.40320   | 2.30 | 0.48928    |
| 0.35 | 0.13683   | 1.35 | 0.41149   | 2.35 | 0.49061    |
| 0.40 | 0.15542   | 1.40 | 0.41924   | 2.40 | 0.49180    |
| 0.45 | 0.17364   | 1.45 | 0.42647   | 2.45 | 0.49286    |
| 0.50 | 0.19146   | 1.50 | 0.43319   | 2.50 | 0.49379    |
| 0.55 | 0.20884   | 1.55 | 0.43943   | 2.55 | 0.49461    |
| 0.60 | 0.22575   | 1.60 | 0.44520   | 2.60 | 0.49534    |
| 0.65 | 0.24215   | 1.65 | 0.45053   | 2.65 | 0.49598    |
| 0.70 | 0.25804   | 1.70 | 0.45543   | 2.70 | 0.49653    |
| 0.75 | 0.27337   | 1.75 | 0.45994   | 2.75 | 0.49702    |
| 0.80 | 0.28814   | 1.80 | 0.46407   | 2.80 | 0.49744    |
| 0.85 | 0.30234   | 1.85 | 0.46784   | 2.85 | 0.49781    |
| 0.90 | 0.31594   | 1.90 | 0.47128   | 2.90 | 0.49813    |
| 0.95 | 0.32894   | 1.95 | 0.47441   | 2.95 | 0.49841    |
| 1.00 | 0.34134   | 2.00 | 0.47725   | 3.00 | 0.49865    |
| 3.1  | 0.49903   | 3.2  | 0.49931   | 3.3  | 0.49952    |
| 3.4  | 0.49966   | 3.5  | 0.49977   | 3.6  | 0.49984    |
| 3.7  | 0.49989   | 3.8  | 0.49993   | 3.9  | 0.49995    |
| 4.0  | 0.499968  | 4.5  | 0.499997  | 5.0  | 0.49999997 |



## ДОДАТОК В

Критичні точки розподілення Стюдента ( $t$  – розподіл)

| Число<br>ступенів<br>свободи,<br>$k$ | Рівень значущості, $\alpha$ |      |      |       |       |        |        |
|--------------------------------------|-----------------------------|------|------|-------|-------|--------|--------|
|                                      | 0,20                        | 0,10 | 0,05 | 0,02  | 0,01  | 0,002  | 0,001  |
| 1                                    | 3,08                        | 6,31 | 12,7 | 31,82 | 63,66 | 127,32 | 636,62 |
| 2                                    | 1,89                        | 2,92 | 4,30 | 6,97  | 9,93  | 14,09  | 31,60  |
| 3                                    | 1,64                        | 2,35 | 3,18 | 4,54  | 5,84  | 7,45   | 12,94  |
| 4                                    | 1,53                        | 2,13 | 2,78 | 3,75  | 4,60  | 5,60   | 8,61   |
| 5                                    | 1,48                        | 2,02 | 2,57 | 3,37  | 4,03  | 4,77   | 6,86   |
| 6                                    | 1,44                        | 1,94 | 2,45 | 3,14  | 3,71  | 4,32   | 5,96   |
| 7                                    | 1,42                        | 1,90 | 2,36 | 3,00  | 3,50  | 4,03   | 5,41   |
| 8                                    | 1,40                        | 1,86 | 2,31 | 2,90  | 3,36  | 3,83   | 5,04   |
| 9                                    | 1,38                        | 1,83 | 2,26 | 2,82  | 3,25  | 3,69   | 4,78   |
| 10                                   | 1,37                        | 1,81 | 2,23 | 2,76  | 3,17  | 3,58   | 4,59   |
| 11                                   | 1,36                        | 1,80 | 2,20 | 2,72  | 3,11  | 3,50   | 4,44   |
| 12                                   | 1,36                        | 1,78 | 2,18 | 2,68  | 3,05  | 3,43   | 4,32   |
| 13                                   | 1,35                        | 1,77 | 2,16 | 2,65  | 3,01  | 3,37   | 4,22   |
| 14                                   | 1,34                        | 1,76 | 2,14 | 2,62  | 2,98  | 3,33   | 4,14   |
| 15                                   | 1,34                        | 1,75 | 2,13 | 2,60  | 2,95  | 3,29   | 4,07   |
| 16                                   | 1,34                        | 1,75 | 2,12 | 2,58  | 2,92  | 3,25   | 4,02   |
| 17                                   | 1,33                        | 1,74 | 2,11 | 2,57  | 2,90  | 3,22   | 3,97   |
| 18                                   | 1,33                        | 1,73 | 2,10 | 2,55  | 2,88  | 3,20   | 3,92   |
| 19                                   | 1,33                        | 1,73 | 2,09 | 2,54  | 2,86  | 3,17   | 3,88   |
| 20                                   | 1,33                        | 1,73 | 2,09 | 2,53  | 2,85  | 3,15   | 3,85   |
| 21                                   | 1,32                        | 1,72 | 2,08 | 2,52  | 2,83  | 3,14   | 3,82   |
| 22                                   | 1,32                        | 1,72 | 2,07 | 2,51  | 2,82  | 3,12   | 3,79   |
| 23                                   | 1,32                        | 1,71 | 2,07 | 2,50  | 2,81  | 3,10   | 3,77   |
| 24                                   | 1,32                        | 1,71 | 2,06 | 2,49  | 2,80  | 3,09   | 3,75   |
| 25                                   | 1,32                        | 1,71 | 2,96 | 2,48  | 2,79  | 3,08   | 3,73   |
| 26                                   | 1,32                        | 1,71 | 2,06 | 2,48  | 2,78  | 3,07   | 3,71   |
| 27                                   | 1,31                        | 1,70 | 2,05 | 2,47  | 2,77  | 3,06   | 3,69   |
| 28                                   | 1,31                        | 1,70 | 2,05 | 2,47  | 2,76  | 3,05   | 3,67   |
| 29                                   | 1,31                        | 1,70 | 2,04 | 2,46  | 2,76  | 3,04   | 3,66   |
| 30                                   | 1,31                        | 1,70 | 2,04 | 2,46  | 2,75  | 3,03   | 3,65   |
| 40                                   | 1,30                        | 1,68 | 2,02 | 2,42  | 2,70  | 2,97   | 3,55   |
| 60                                   | 1,30                        | 1,67 | 2,00 | 2,39  | 2,66  | 2,91   | 3,46   |
| 120                                  | 1,29                        | 1,66 | 1,98 | 2,36  | 2,62  | 2,86   | 3,37   |
| $\infty$                             | 1,28                        | 1,64 | 1,96 | 2,33  | 2,58  | 2,81   | 3,29   |

# ДОДАТОК Г

Таблиця значень  $t_\gamma(\gamma, k)$ .

| $k$ | $\gamma$ |       |       |       |       |       |       |       |       |        |       |       |       |
|-----|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|
|     | 0,1      | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 0,95   | 0,98  | 0,99  | 0,999 |
| 1   | 0,158    | 0,326 | 0,510 | 0,727 | 1,00  | 1,376 | 1,963 | 3,078 | 6,314 | 12,706 | 31,82 | 63,65 | 63,66 |
| 2   | 0,142    | 0,289 | 0,445 | 0,617 | 0,816 | 1,061 | 1,336 | 2,886 | 2,920 | 4,303  | 6,965 | 9,925 | 31,60 |
| 3   | 0,137    | 0,277 | 0,424 | 0,584 | 0,765 | 0,978 | 1,250 | 2,638 | 2,353 | 3,182  | 4,541 | 5,841 | 12,94 |
| 4   | 0,134    | 0,271 | 0,414 | 0,569 | 0,741 | 0,941 | 1,190 | 1,533 | 2,132 | 2,776  | 3,747 | 4,694 | 8,610 |
| 5   | 0,132    | 0,267 | 0,408 | 0,559 | 0,727 | 0,920 | 1,156 | 1,476 | 2,015 | 2,571  | 3,363 | 4,032 | 6,859 |
| 6   | 0,131    | 0,265 | 0,404 | 0,553 | 0,718 | 0,906 | 1,134 | 1,440 | 1,943 | 2,447  | 3,143 | 3,707 | 5,959 |
| 7   | 0,130    | 0,263 | 0,401 | 0,549 | 0,711 | 0,896 | 1,119 | 1,415 | 1,895 | 2,365  | 2,998 | 3,499 | 5,405 |
| 8   | 0,130    | 0,262 | 0,399 | 0,546 | 0,706 | 0,889 | 1,108 | 1,397 | 1,860 | 2,306  | 2,896 | 3,355 | 5,041 |
| 9   | 0,129    | 0,261 | 0,398 | 0,543 | 0,703 | 0,883 | 1,100 | 1,383 | 1,833 | 2,262  | 2,821 | 3,250 | 4,781 |
| 10  | 0,129    | 0,260 | 0,397 | 0,542 | 0,700 | 0,879 | 1,093 | 1,372 | 1,812 | 2,228  | 2,764 | 3,169 | 4,587 |
| 11  | 0,129    | 0,260 | 0,396 | 0,540 | 0,697 | 0,876 | 1,086 | 1,363 | 1,796 | 2,201  | 2,718 | 3,106 | 4,487 |
| 12  | 0,128    | 0,259 | 0,395 | 0,539 | 0,695 | 0,873 | 1,083 | 1,356 | 1,728 | 2,179  | 2,681 | 3,055 | 4,318 |
| 13  | 0,128    | 0,259 | 0,394 | 0,538 | 0,694 | 0,870 | 1,079 | 1,350 | 1,771 | 2,160  | 2,650 | 3,012 | 4,221 |
| 14  | 0,128    | 0,258 | 0,393 | 0,537 | 0,692 | 0,868 | 1,076 | 1,345 | 1,761 | 2,145  | 2,624 | 2,977 | 4,140 |
| 15  | 0,128    | 0,258 | 0,393 | 0,536 | 0,691 | 0,866 | 1,074 | 1,341 | 1,753 | 2,131  | 2,602 | 2,947 | 4,073 |
| 16  | 0,128    | 0,258 | 0,392 | 0,535 | 0,690 | 0,865 | 1,071 | 1,337 | 1,746 | 2,120  | 2,583 | 2,921 | 4,015 |
| 17  | 0,128    | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,689 | 0,863 | 1,069 | 1,333 | 1,740 | 2,110  | 2,567 | 2,898 | 3,965 |
| 18  | 0,127    | 0,257 | 0,392 | 0,534 | 0,688 | 0,862 | 1,067 | 1,330 | 1,734 | 2,103  | 2,552 | 2,872 | 3,922 |
| 19  | 0,127    | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,688 | 0,861 | 1,066 | 1,328 | 1,729 | 2,093  | 2,539 | 2,861 | 3,883 |
| 20  | 0,127    | 0,257 | 0,391 | 0,533 | 0,687 | 0,860 | 1,064 | 1,325 | 1,725 | 2,086  | 2,528 | 2,845 | 3,850 |
| 21  | 0,127    | 0,257 | 0,391 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,063 | 1,323 | 1,721 | 2,080  | 2,518 | 2,831 | 3,819 |
| 22  | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,686 | 0,859 | 1,061 | 1,321 | 1,717 | 2,074  | 2,508 | 2,819 | 3,792 |
| 23  | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,532 | 0,685 | 0,858 | 1,060 | 1,319 | 1,714 | 2,069  | 2,500 | 2,807 | 3,767 |
| 24  | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,685 | 0,857 | 1,059 | 1,318 | 1,711 | 2,064  | 2,492 | 2,797 | 3,745 |
| 25  | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,857 | 1,058 | 1,316 | 1,708 | 2,060  | 2,485 | 2,787 | 3,725 |
| 26  | 0,127    | 0,256 | 0,390 | 0,531 | 0,684 | 0,856 | 1,058 | 1,315 | 1,706 | 2,056  | 2,479 | 2,779 | 3,707 |
| 27  | 0,127    | 0,256 | 0,389 | 0,531 | 0,684 | 0,855 | 1,057 | 1,314 | 1,703 | 2,052  | 2,473 | 2,771 | 3,690 |
| 28  | 0,127    | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,855 | 1,056 | 1,313 | 1,701 | 2,048  | 2,467 | 2,763 | 3,674 |
| 29  | 0,127    | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,311 | 1,699 | 2,045  | 2,462 | 2,756 | 3,659 |
| 30  | 0,127    | 0,256 | 0,389 | 0,530 | 0,683 | 0,854 | 1,055 | 1,310 | 1,697 | 2,042  | 2,457 | 2,750 | 3,646 |

## СПИСОК ДЖЕРЕЛ ІНФОРМАЦІЇ

- 1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.
- 2 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985.
- 3 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.
- 4 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. шк., 2001.
- 5 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : В. 2т.- М. : Наука, 1985.
- 6 Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высш. шк., 1977.
- 7 Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике – М.: Высш. шк., 1977.
- 8 Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высш.шк., 1976.
- 9 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: ЮНИТИ, 2010.
- 10 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972.
- 11 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.
- 12 Станішевський С.О. Вища математика. – Х.: ХДАМГ, 2002.
- 13 Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. – М.: Айрис- пресс, 2004.
- 14 Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.
- 15 Кузнецов Ю.И., Кузубов В.И., Волошенко А.Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980.
- 16 Карпелевич Ф.И., Садовский Л.Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967.
- 17 Калихман И.Л. Сборник задач по математическому программированию. – М.: Высшая школа, 1975.
- 18 Бугір М.К., Якімов Ф.П. Посібник по розв'язуванню задач з лінійного програмування. – Тернопіль: Поліграфіст, 1997.
- 19 Кузнецов А. В., Сакович В. А., Холод Н. И. Высшая математика. Математическое программирование. – Минск: Высшейшая школа, 1994.
- 20 Поклонський Є.В. Тексти лекцій з курсу «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності 073 «Менеджмент». – ХНУБА, 2016.
- 21 Кузнецов А. В., Холод Н. И., Костевич Л. С. Руководство к решению задач по математическому программированию. – Минск: Высшейшая школа, 1978.
- 22 Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Издательство иностранной литературы, 1960.

## ЗМІСТ

|                                      |     |
|--------------------------------------|-----|
| Вступ .....                          | 3   |
| Програма навчальної дисципліни ..... | 3   |
| Практичне заняття 1 .....            | 5   |
| Практичне заняття 2 .....            | 10  |
| Практичне заняття 3 .....            | 19  |
| Практичне заняття 4 .....            | 26  |
| Практичне заняття 5 .....            | 42  |
| Практичне заняття 6 .....            | 58  |
| Практичне заняття 7 .....            | 72  |
| Практичне заняття 8 .....            | 81  |
| Практичне заняття 9 .....            | 89  |
| Практичне заняття 10 .....           | 102 |
| Практичне заняття 11 .....           | 110 |
| Практичне заняття 12 .....           | 122 |
| Практичне заняття 13 .....           | 127 |
| Практичне заняття 14 .....           | 135 |
| Практичне заняття 15 .....           | 141 |
| Практичне заняття 16 .....           | 144 |
| Практичне заняття 17 .....           | 150 |
| Практичне заняття 18 .....           | 156 |
| Практичне заняття 19 .....           | 161 |
| Практичне заняття 20 .....           | 170 |
| Практичне заняття 21 .....           | 180 |
| Практичне заняття 22 .....           | 186 |
| Практичне заняття 23 .....           | 191 |
| Практичне заняття 24 .....           | 198 |
| Практичне заняття 25 .....           | 206 |
| Практичне заняття 26 .....           | 214 |
| Практичне заняття 27 .....           | 221 |
| Практичне заняття 28 .....           | 224 |
| Практичне заняття 29 .....           | 228 |
| Практичне заняття 30 .....           | 232 |
| Практичне заняття 31 .....           | 237 |
| Практичне заняття 32 .....           | 243 |
| Практичне заняття 33 .....           | 257 |
| Практичне заняття 34 .....           | 259 |
| Практичне заняття 35 .....           | 263 |
| Практичне заняття 36 .....           | 268 |
| Додаток А .....                      | 277 |
| Додаток Б .....                      | 278 |
| Додаток В .....                      | 279 |
| Додаток Г .....                      | 280 |
| Бібліографічний список .....         | 281 |

Навчальне видання

Методичні вказівки до практичних занять з курсу «Вища та прикладна математика» для студентів спеціальності 073 «Менеджмент»

Укладач: Поклонський Євген Васильович

Відповідальний за випуск О.О. Аршава

За редакцією автора

План 2017 р., поз. 324,17      Формат 60x84 1/16.

Підп. до друку 21.10.2016      Обл.-вид. арк.

Надруковано на ризографії. Умов. друк. арк. 14

Тираж 50 прим .

Зам. № 3587

Папір друк. №2.

Безкоштовно.

---

ХНУБА, Україна, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

---

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного  
університету будівництва та архітектури