Міністерство освіти і науки України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

О.О. Аршава

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» для студентів спеціальності 161 «Хімічні технології та інженерія»

Харків 2017

Міністерство освіти і науки України

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ**

Спеціальність 161

О.О. Аршава

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» для студентів спеціальності 161 «Хімічні технології та інженерія»

Затверджено на засіданні кафедри
вищої математики.
Протокол № 2 від 26.10.2017

Харків 2017

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» для студентів спеціальності 161 «Хімічні технології та інженерія» / Укладач О.О. Аршава – Харків: ХНУБА, 2017. - 153 с.

Рецензент Л.І Щелкунова

Кафедра вищої математики

ВСТУП

Методичні вказівки призначаються для надання допомоги студентам в організації самостійної роботи з курсу "Вища математика".

Результативність самостійної роботи забезпечується системою контролю, яка включає наступні етапи:

- виконання індивідуальних домашніх завдань;
- виконання контрольних робіт;
- виконання та складання підсумкового завдання з теми;
- виконання модульної контрольної роботи за всіма темами модуля.

Методичні вказівки містять робочу програму модуля, індивідуальні домашні завдання, варіанти підсумкового завдання і приклад його виконання

.

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №1

Лінійна алгебра. Аналітична геометрія.

Тема 1. Визначники і їх властивості.

Тема 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Правило Крамера.

Тема 3. Матриці та дії над ними. Обернена матриця.

Тема 4. Матричний запис системи рівнянь. Теорема Кронікера-Капеллі.

Тема 5. Поняття вектора. Лінійні операції над векторами.

Тема 6. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.

Тема 7. Прямокутна та полярна системи координат на площині. Відстань між двома точками.

Тема 8. Пряма на площині, її рівняння. Основні задачі.

Тема 9. Криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола. Їх властивості.

Тема 10. Перетворення координат. Зведення загального рівняння 2-го порядку до канонічного вигляду.

Тема 11. Рівняння поверхні у просторі. Площина. Різні види її рівнянь. Кут між площинами.

Тема 12. Пряма у просторі, різні види рівнянь прямої. Пряма та площина в просторі. Основні задачі.

Тема 13. Поверхні другого порядку.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь
1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.
Виконати перевірку.

Варіант 1

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 = 8; \\ 3x_1 - x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант 2

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = -1; \\ -2x_1 + 3x_2 = -12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 8; \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Варіант 3

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 14; \\ -3x_1 - 2x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3; \\ 2x_1 \quad + \quad x_3 = -2. \end{cases}$

Варіант 4

а) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 7; \\ -11x_1 + 3x_2 = -19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 7; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 5

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = -17; \\ -3x_1 + 4x_2 = -18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 10; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -17. \end{cases}$

Варіант 6

а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 = 18; \\ -7x_1 + 5x_2 = -31; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11; \\ x_1 + 2x_2 + 8x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 7

а) $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 = 17; \\ 7x_1 + 4x_2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1; \\ x_1 - 9x_2 - 5x_3 = 3; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$

Варіант 8

а) $\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 = 12; \\ 9x_1 - 5x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2; \\ 9x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 9

а) $\begin{cases} -7x_1 + 5x_2 = 19; \\ 2x_1 - 3x_2 = -7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 9; \\ 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 10

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -1; \\ 8x_1 - 7x_2 = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4; \\ x_1 \quad + \quad 3x_3 = 3; \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 11

а) $\begin{cases} 3x_1 - 8x_2 = -19; \\ 2x_1 + 9x_2 = 16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 = 10; \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$

Варіант 12

а) $\begin{cases} -4x_1 - 3x_2 = 18; \\ 7x_1 + 2x_2 = -25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 1; \\ 5x_1 - x_2 - 3x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 13

а) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 = 12; \\ 9x_1 - 4x_2 = -17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 \quad + 5x_3 = 2; \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$

Варіант 14

а) $\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 = -3; \\ -7x_1 + 9x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 15

а) $\begin{cases} 11x_1 + 3x_2 = -25; \\ -9x_1 - 2x_2 = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$

Варіант 16

а) $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 = -18; \\ -5x_1 + 4x_2 = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 14; \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9. \end{cases}$

Варіант 17

а) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 19; \\ 7x_1 - 11x_2 = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_3 = 9; \\ x_1 - 3x_2 - 16x_3 = 14; \\ x_2 - 10x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 18

а) $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 = -9; \\ 2x_1 + 7x_2 = -25; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 19

а) $\begin{cases} -2x_1 - 7x_2 = -17; \\ 3x_1 - 4x_2 = -18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$

Варіант 20

а) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 11; \\ -4x_1 + 3x_2 = -6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 7; \\ x_2 - 3x_3 = 4; \\ 5x_1 - 9x_2 - 7x_3 = 3. \end{cases}$

Варіант 21

а) $\begin{cases} -5x_1 + 6x_2 = 16; \\ -7x_1 - 4x_2 = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 9x_3 = 5; \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 12; \\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 22

а) $\begin{cases} -2x_1 + 7x_2 = 17; \\ -9x_1 + 5x_2 = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 8; \\ 2x_1 + 5x_3 = 9; \\ x_2 - 10x_3 = -16. \end{cases}$

Варіант 23

а) $\begin{cases} 7x_1 - 11x_2 = 3; \\ 6x_1 + 5x_2 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5; \\ 9x_1 - 6x_2 - 4x_3 = 1; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 24

а) $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 = 13; \\ -7x_1 - 4x_2 = -10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 8; \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \\ 2x_1 - 7x_2 - 9x_3 = 1. \end{cases}$

Варіант 25

а) $\begin{cases} -9x_1 + 4x_2 = -6; \\ 2x_1 - 5x_2 = -11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 15x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 7; \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$

Варіант 26

а) $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 = -11; \\ -7x_1 + 2x_2 = 20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3; \\ 5x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$

Варіант 27

а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 = -6; \\ -7x_1 + 11x_2 = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 4. \end{cases}$

Варіант 28

а) $\begin{cases} 3x_1 + 10x_2 = -23; \\ -4x_1 - 7x_2 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7; \\ 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_1 - 7x_2 - 5x_3 = 9. \end{cases}$

Варіант 29

а) $\begin{cases} 11x_1 - 7x_2 = -3; \\ 5x_1 + 2x_2 = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 7; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 14; \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 19. \end{cases}$

Варіант 30

а) $\begin{cases} -9x_1 - 4x_2 = 19; \\ 5x_1 + 3x_2 = -9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 9; \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 14; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$

Завдання 1.2 Задана піраміда, координатами вершин якої є A_1, A_2, A_3, A_4 (координати точок наведені в таблиці 1). Методами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди.

Таблиця 1

Номер варіанту	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(4;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)
2	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;9)
3	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
4	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
5	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
6	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
7	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
8	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
9	(8:6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
10	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)
11	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
12	(1;2;3)	(2;0;0)	(3;2;5)	(4;0;0)
13	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
14	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
15	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
16	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)
17	(6;1;5)	(5;1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
18	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
19	(0;4;-1)	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)
20	(8;5;8)	(3;3;9)	(6:9; I)	(1;7;3)
21	(6;4;8)	(3;5;4)	(5:8:3)	(1;9;9)
22	(3;6;7)	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)
23	(6;9;2)	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)
24	(3;9;8)	(0;7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)
25	(5;8;2)	(3;5;10)	(3;8;4)	(5:5;4)
26	(1;2;6)	(4;2;0)	(4;6;6)	(6;1;1)
27	(7;9;6)	(4;5;7)	(9;4;4)	(7;5;3)
28	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
29	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
30	(1;-2;l)	(0;0;4)	(1;4;2)	(2;0;0)

Завдання 1.3 Задано координати вершин трикутника ABC (наведені в таблиці 2). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони AB;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини C;

3) обчислити довжину висоти, яка проведена із вершини C;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони AC;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині C.

Таблиця 2

Номер варіанту	A	B	C	Номер варіанту	A	B	C
1	(-6;-3)	(-4; 3)	(9;2)	16	(2;-1)	(8;7)	(-10;4)
2	(-3;1)	(-1;7)	(I2;6)	17	(5;-3)	(1;0)	(7;2)
3	(-1;3)	(1;9)	(4;7)	18	(4;-б)	(2;2)	(-2;-1)
4	(0;0)	(2;6)	(7;2)	19	(3;4)	(-1;7)	(-4;0)
5	(-2;-6)	(0;0)	(3;-2)	20	(1;-2)	(7;6)	(0;2)
6	(-2;-5)	(6;2)	(0;0)	21	(2;-1)	(-2;-3)	(-6;4)
7	(-2; 0)	(-4;-7)	(5;5)	22	(5;-8)	(3;-2)	(-3;-6)
8	(1;2)	(3;8)	(-4;-I)	23	(8;-2)	(-6;-5)	(0;4)
9	(4;4)	(1;-3)	(9; 0)	24	(7;5)	(3;2)	(4;0)
10	(5;6)	(7;2)	(-6; 0)	25	(3;-7)	(6;0)	(1;1)
11	(-6;-4)	(-1;2)	(6;1)	26	(5;3)	(-1;-2)	(-3;7)
12	(2;0)	(7;2)	(0;5)	27	(3;1)	(-2;8)	(-5;3)
13	(-2;-б)	(-6;-3)	(10;-1)	28	(9;2)	(-5;7)	(0;-3)
14	(-2;1)	(-2;1)	(-4;7)	29	(-3;-3)	(3;1)	(-1;4)
15	(2;-4)	(-2;-1)	(4; I)	30	(7;9)	(-2;0)	(-3;2)

Завдання 1.4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки A_1, A_2, A_3, A_4 (наведені в таблиці 3). Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;
2) скласти рівняння площини $A_1A_2\,A_3$;
3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2\,A_3$;
4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2\,A_3$.

Таблиця 3

Номер варианта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	(2;0;0)	(-2;0;-1)	(1;4;2)	(3;0;6)
2	(-2;0;2)	(0;0;4)	(3;2;5)	(-1;3;2)
3	(1;2;3)	(2;0; 0)	(0;2;5)	(4;0.0)
4	(3;0;6)	(1;-3;2)	(3;2;5)	(2;2;5)
5	(-2;0;-1)	(0,0;4)	(1;3;2)	(3;2;7)
6	(1;-2;1)	(0;0,-4)	(1;4;2)	(2;0;0)
7	(-2;1;0)	(3;2;7)	(2;2;5)	(6;1;5)
8	(-1;3;0)	(2;0;0)	(4;-1;2)	(3;2;7)

9	(6;-1;5)	(5,1;0)	(-4;1;-2)	(-6;0;5)
10	(1;-1;6)	(-5;-1;0)	(4;0;0)	(2;2;5)
11	(3;1;4)	(-1;6;1)	(-1;1;6)	(0;4;-1)
12	(3;3;9)	(6;9;1)	(1;7;3)	(8;5;-8)
13	(3;5;4)	(5;8;3)	(1;9;9)	(6;4;8)
14	(2;4;3)	(7;6;3)	(4;9;3)	(3;6;7)
15	(9;5;5)	(-3;7;1)	(5;7;8)	(6;9;2)
16	(0,7;1)	(4;1;5)	(4;6;3)	(3;9;8)
17	(5;5;4)	(3;8;4)	(3;5;10)	(5;8;2)
18	(6;1;1)	(4;6;6)	(4;2;0)	(1;2;6)
19	(7;5;3)	(9;4;4)	(4;5;7)	(7;9;6)
20	(6;6;2)	(5;4;7)	(2;4;7)	(7;3;0)
21	(4;2;5)	(0;7;1)	(0;2;7)	(1;5;0)
22	(4;4;10)	(7;10;2)	(2;6;4)	(9;6;9)
23	(4;6;5)	(6;9;4)	(1;10;10)	(7;5;9)
24	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
25	(10;6;6)	(-2;6;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
26	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
27	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
28	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;-7)
29	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
30	(7;7;3)	(6;5 ;8)	(3;5;8)	(8;4,1)

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 1.1 Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2; \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 1; \\ 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

1) методом Крамера;
2) за допомогою оберненої матриці.

Виконати перевірку.

Розв'язання.

1) Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера. Для цього обчислюємо методом трикутників визначники: Δ - головний визначник системи; Δx_1, $\Delta x_2, \Delta x_3$ - додаткові визначники системи (визначники, що утворюються з головного визначника послідовною заміною першого, другого й третього стовпця відповідно стовпцем вільних членів системи рівнянь).

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot(-5)\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot(-6) + 2\cdot 5\cdot(-3) - 2\cdot(-5)\cdot 5 - 3\cdot 2\cdot(-6) - 4\cdot 4\cdot(-3) = -4;$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}2 & -3 & 2\\ 1 & -5 & 2\\ 3 & -6 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-5)\cdot4+2\cdot1\cdot(-6)+3\cdot2\cdot(-3)-2\cdot(-5)\cdot3-2\cdot2\cdot(-6)-4\cdot1\cdot(-3)=-4;$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix}3 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 4\end{vmatrix}=3\cdot1\cdot4+2\cdot4\cdot3+5\cdot2\cdot2-2\cdot1\cdot5-3\cdot3\cdot2-4\cdot4\cdot2=-4;$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 1\\ 5 & -6 & 3\end{vmatrix}=3\cdot(-5)\cdot3+2\cdot4\cdot(-6)+5\cdot1\cdot(-3)-2\cdot(-5)\cdot5-3\cdot1\cdot(-6)-3\cdot4\cdot(-3)=-4,$$

тоді $x_1=\dfrac{\Delta x_1}{\Delta}=\dfrac{-4}{-4}=1,\ x_2=\dfrac{\Delta x_2}{\Delta}=\dfrac{-4}{-4}=1,\ x_3=\dfrac{\Delta x_3}{\Delta}=\dfrac{-4}{-4}=1.$

2) Розв'яжемо систему рівнянь за допомогою оберненої матриці. Для цього запишемо систему в матричній формі: $A\cdot X=B$,

де $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2\\ 4 & -5 & 2\\ 5 & -6 & 4\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$

(A – матриця коефіцієнтів системи, X– стовпець невідомих, B – стовпець вільних членів).

Розв'язок системи знаходимо за формулою $X=A^{-1}\cdot B$, де A^{-1}– матриця, що є оберненою до матриці системи. Оскільки матриця А – квадратна та визначник матриці $\Delta=\det A=-4\neq0$, отже, обернена матриця A^{-1} існує та знаходиться за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\cdot\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},\ \text{де } A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},$$

де M_{ij} - мінор, що відповідає елементу a_{ij} матриці А.

Обчислимо алгебраїчні доповнення A_{ij} для кожного елементу матриці A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-8;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=0;\quad A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -5 & 2\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-6;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=2;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & -5\\ 5 & -6\end{vmatrix}=1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 5 & -6\end{vmatrix}=3;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=-3,$$

тоді

$$X=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-8 & 0 & 4\\ -6 & 2 & 2\\ 1 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-8\cdot2+0\cdot1+4\cdot3\\ -6\cdot2+2\cdot1+2\cdot3\\ 1\cdot2+3\cdot1+(-3)\cdot3\end{pmatrix}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-4\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Аналогічна відповідь була одержана при розв'язанні системи методом Крамера: $x_1=x_2=x_3=1$.

Виконаємо перевірку одержаного результату, підставляючи значення змінних у вихідну систему: $\begin{cases}3\cdot1-3\cdot1+2\cdot1=2;\\ 4\cdot1-5\cdot1+2\cdot1=1;\\ 5\cdot1-6\cdot1+4\cdot1=3,\end{cases}$ $\begin{cases}2=2;\\ 1=1;\\ 3=3.\end{cases}$

Відповідь: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Завдання 1.2 Задана піраміда, координатами вершин якої є $A_1(1;-2;1)$, $A_2(0;0;4)$, $A_3(1;4;2)$, $A_4(2;0;0)$. Методами векторної алгебри знайти:

1) довжину ребра A_1A_2;
2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4;
3) проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$;
4) площу грані $A_1A_2A_3$;
5) об'єм піраміди (рис. 4.1).

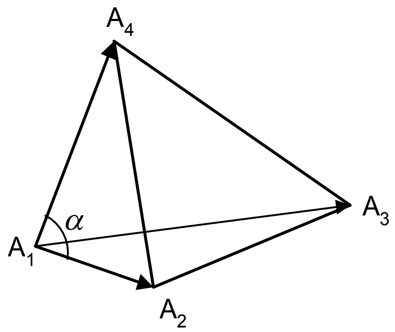


Рис. 1.1

Розв'язання.

1 Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{(x_{A_2}-x_{A_1};y_{A_2}-y_{A_1};z_{A_2}-z_{A_1})}=\overrightarrow{(0-1;0-(-2);4-1)}=\overrightarrow{(-1;2;3)}$. Тоді довжина ребра A_1A_2 піраміди буде дорівнювати модулю вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$:

$$\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}\text{ (одиниць).}$$

2 Позначимо кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 через α, тоді

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|}.$$

Координати вектора $\overrightarrow{A_1A_4}=\overrightarrow{(2-1;0-(-2);0-1)}=\overrightarrow{(1;2;-1)}$,

$$\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6} \text{ (од).}$$

Скалярний добуток $\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (-1)\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot(-1) = 0$.

Отже, $\cos\alpha = \dfrac{0}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$, тобто ребра A_1A_2 і A_1A_4 перпендикулярні.

3 Координати векторів

$\overrightarrow{A_1A_4} = \overline{(2-1;\, 0-(-2);\, 0-1)} = \overline{(1;\, 2;\, -1)}$, $\overrightarrow{A_1A_3} = \overline{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overline{(0;\, 6;\, 1)}$.

Обчислюємо проекцію вектора $\overrightarrow{A_1A_3}$ на вектор $\overrightarrow{A_1A_4}$ за формулою:

$$np_{\overrightarrow{A_1A_4}}\, \overrightarrow{A_1A_3} = \frac{\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4}}{\left|\overrightarrow{A_1A_4}\right|} = \frac{1\cdot 0 + 2\cdot 6 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{\sqrt{6}}.$$

4 Оскільки векторним добутком векторів є вектор, довжина якого дорівнює площі паралелограма, побудованого на цих векторах у якості сторін, тоді площа грані $A_1A_2A_3$ дорівнює половині векторного добутку векторів $\overrightarrow{A_1A_2}$ і $\overrightarrow{A_1A_3}$ (рис. 1.2), тобто S = $\frac{1}{2}\left|\vec{n}\right|$.

Вектор $\overrightarrow{A_1A_3} = \overline{(1-1;\, 4-(-2);\, 2-1)} = \overline{(0;\, 6;\, 1)}$.

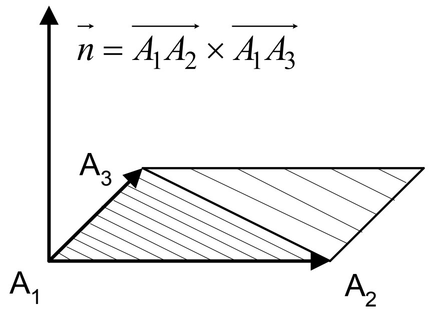


Рис. 1.2

Координати вектора $\vec{n}$ визначимо, користуючись теоремою Лапласа про розвинення визначника за елементами першого рядку.

$$\vec{n} = \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k},$$

тобто $\vec{n}(-16; 1; -6)$; $\left|\vec{n}\right| = \sqrt{(-16)^2 + 1^2 + (-6)^2} = \sqrt{256 + 1 + 36} = \sqrt{293}$.

Таким чином, $S_{A_1A_2A_3} = \dfrac{1}{2}\sqrt{293}$ (кв.од.).

5 Мішаним добутком векторів є число, що дорівнює об’єму паралелепіпеда, який побудований на цих векторах, а об’єм тетраедра дорівнює шостої частини об’єму цього паралелепіпеда (рис. 1.3).

Таким чином, об'єм піраміди обчислюється за формулою

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} \right|.$$

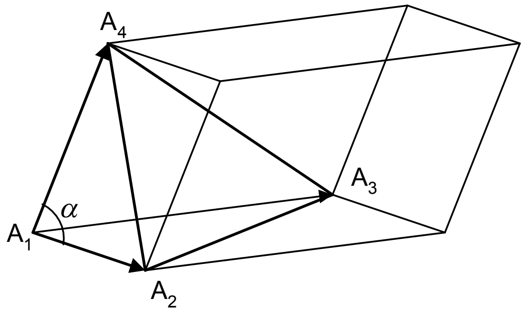


Рис. 1.3

Обчислюємо мішаний добуток векторів $\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}$:

$$\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 16 = -8;$$

$$\left| \overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4} \right| = |-8| = 8 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{6} \cdot 8 = 1\frac{1}{3} \text{ (куб.од.).}$$

Завдання 1.3 Задано координати вершин трикутника *ABC: A*(3;-2), *B*(1;4), *C*(-2;1). Методами аналітичної геометрії

1) скласти рівняння сторони AB;

2) скласти рівняння висоти, яка проведена із вершини *C*;

3) обчислити довжину висоти, яка проведена із вершини *C*;

4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно до сторони *AC*;

5) обчислити площу трикутника;

6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині *C* (рис.1.4).

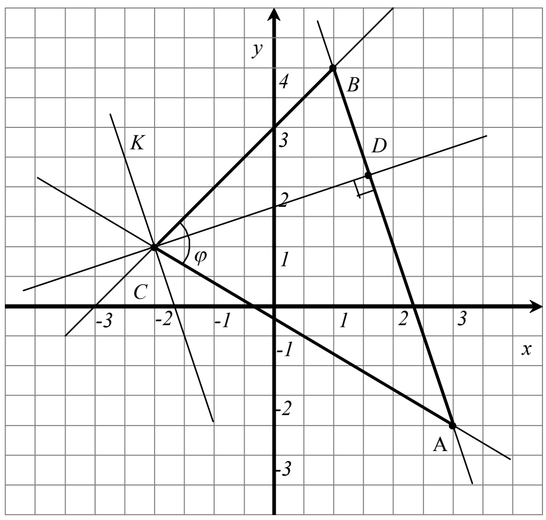


Рис. 1.4

Розв'язання.

1 Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1)$ і $B(x_2,y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Для $A(3;-2)$, $B(1;4)$ маємо: $\dfrac{x-3}{1-3}=\dfrac{y-(-2)}{4-(-2)}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{x-3}{-2}=\dfrac{y+2}{6}$; $\Rightarrow$ $-3(x-3)=y+2$ $\Rightarrow$ $3x+y-7=0$ - загальне рівняння прямої AB;

$y=-3x+7$ - рівняння прямої AB з кутовим коефіцієнтом, $k_{AB}=-3$.

2 Складаємо рівняння прямої $CD\perp AB$.

Із умови перпендикулярності прямих $k_{CD}=-\dfrac{1}{k_{AB}}$ $\Rightarrow$ $k_{CD}=\dfrac{1}{3}$.

Запишемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, що проходить через точку $C(x_0;y_0)$:

$$y-y_0=k(x-x_0).$$

Для $C(-2;1)$ маємо: $y-1=\dfrac{1}{3}(x+2)$, т.е. $x-3y+5=0$ - загальне рівняння прямої CD.

3 Довжину висоти CD знайдемо як відстань від точки $C(x_0;y_0)$ до прямої AB за формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$, де $Ax+By+C=0$ - рівняння прямої AB.

$$d=\frac{|3\cdot(-2)+1-7|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{10}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}\ \text{(од.)}.$$

4 Координати точки M – центра ваги трикутника обчислюємо як середнє арифметичне координат його вершин:

$$x_M=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\quad y_M=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}.$$

$$x_M=\frac{3+1-2}{3}=\frac{2}{3},\quad y_M=\frac{-2+4+1}{3}=1,\ \text{тобто}\ M\left(\frac{2}{3};1\right).$$

Кутовий коефіцієнт прямої AC: $k_{AC}=\dfrac{y_C-y_A}{x_C-x_A}$, $k_{AC}=\dfrac{1+2}{-2-3}=-\dfrac{3}{5}$.

Кутовий коефіцієнт прямої, що паралельна прямій AC, також дорівнює $-\dfrac{3}{5}$.

Таким чином, рівняння прямої, що проходить через точку $M\left(\dfrac{2}{3};1\right)$ і має кутовий коефіцієнт $k=-\dfrac{3}{5}$, буде мати вигляд: $y-1=-\dfrac{3}{5}(x-\dfrac{2}{3})$;

$3x+5y-7=0$ - загальне рівняння шуканої прямої.

5 Для обчислення площі трикутника знайдемо довжину сторони AB:

$$AB = \sqrt{(1-3)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Тоді $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{6\sqrt{10}}{5} = 12$ (кв. од.).

6 Тангенс кута φ (кута між прямими AC і BC) знаходимо за формулою

$$tg\varphi = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} \cdot k_{AC}}.$$

$$k_{AC} = -\frac{3}{5}; \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1-4}{-2-1} = 1 \quad \Rightarrow \quad tg\varphi = \frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - 1 \cdot \frac{3}{5}} = 4, \quad \varphi = arctg 4 \approx 76^\circ.$$

Завдання 1.4 Задана піраміда, координатами вершин якої є точки $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$, $A_3(2;-1;-2)$, A_4 $(-1;2;1)$. Потрібно:

1) скласти рівняння ребра A_1A_2;

2) скласти рівняння площини $A_1A_2\,A_3$;

3) скласти рівняння висоти, що опущена із вершини A_4 на площину $A_1A_2\,A_3$;

4) обчислити кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2\,A_3$.

Розв'язання.

1 Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(x_1,y_1,z_1)$ і $B(x_2,y_2,z_2)$: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Для $A_1(3;-4;2)$, $A_2(4;1;-3)$ маємо: $\frac{x-3}{4-3} = \frac{y-(-4)}{1-(-4)} = \frac{z-2}{-3-2} \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-2}{-5}$.

2 Рівняння площини, що проходить через три задані точки: $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$, знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Підставимо координати заданих точок у вищенаведене рівняння:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 4-3 & 1+4 & -3-2 \\ 2-3 & -1+4 & -2+4 \end{vmatrix} = 0; \qquad \begin{vmatrix} x-3 & y+4 & z-2 \\ 1 & 5 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Запишемо розвинення визначника за елементами першого рядку:

$$(x-3)\begin{vmatrix} 5 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (y+4)\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$25(x-3) + 3(y+4) + 8(z-2) = 0;$$

$25x + 3y + 8z - 79 = 0$ - рівняння площини $A_1A_2A_3$.

3 Канонічні рівняння прямої, що проходить через задану точку $M(x_0; y_0; z_0)$ з напрямним вектором $\vec{s}(m; n; p)$, має вигляд

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Нормальний вектор площини $A_1A_2A_3$ $\vec{n}(25; 3; 8)$ є напрямним вектором висоти, що опущена із вершини A_4 на площину A_1A_2 A_3, тобто $\vec{s}(m; n; p)=(25; 3; 8)$, тоді рівняння висоти має вигляд:

$$\frac{x+1}{25}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{8}.$$

4 Знаходимо кут між ребром A_1A_4 і гранню A_1A_2 A_3 за формулою

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Через те, що нормальний вектор площини $\vec{n}(25; 3; 8)$ і напрямний вектор прямої $\vec{s}(m; n; p)=(-4; 6; -1)$, маємо

$$\sin\varphi=\frac{|25\cdot(-4)+3\cdot 6+8\cdot(-1)|}{\sqrt{625+9+64}\cdot\sqrt{16+36+1}}=\frac{90}{\sqrt{698}\cdot\sqrt{53}}=0,47.$$

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №2

Диференціальне числення.

Тема 14. Функція та її властивості. Способи завдання, графік функції.

Тема 15. Границя функції. Визначні границі. Неперервність функції. Точки розриву функції.

Тема 16. Похідна функції.. Правила диференціювання складної функції. Таблиця похідних.

Тема 17. Похідна неявної, параметрично заданої функції. Похідні та диференціали вищих порядків.

Тема 18. Теореми Ролля, Лагранжа, Коші, правило Лопіталя .

Тема 19. Знаходження екстремуму функції .Опуклість, угнутість кривої, точки перегину.

Тема 20. Асимптоти графіка функції. Загальна схема дослідження функцій.

Тема 21. Функції багатьох змінних. Границя функції 2-х змінних. Неперервність у точці та області.

Тема 22. Частинні похідні. Диференціювання складної функції кількох змінних.

Тема 23. Екстремум функції двох змінних. Найбільше та найменше значення функції в області.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 2.1 Знайти границі функцій.

Варіант 1

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{xtg3x}{\cos^5 x-\cos^3 x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3-7x-2x^2}$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-8x}\right)$.

4. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x+3}{2x+2}\right)^{\frac{2}{x-1}}$

Варіант 2

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x\sin x}{1-\cos 2x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+4x^2+5x-6}{x^3+2x^2+3x+7}$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3x+2}\right)$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-x-5}{x^2+2x}\right)^{x-3}$.

Варіант 3

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-1}$.

3 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x-\sqrt{9x^2-7x}\right)$

Варіант 4

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2+2x}\right)$.

2 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{7x+2}{7x+2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-7}{5-2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{arctg^2\, 2x}$.

Варіант 5

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5\sin 2x}{tg3x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{8-5x^2+x^3}{x^2+4x+10}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-3x}$

Варіант 6

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+x}-2x\right)$.

2 $\lim\limits_{x\to 2\pi} \dfrac{tg\,\frac{x}{2}}{\sin x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3+4x^2+8}{5x^4+2x^3-9}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^{3x}$

Варіант 7

1 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x-\sin 5x}{2x}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x}$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)$.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x+5}-x\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-5x}{1-3x}\right)^{\frac{1}{2x}}$

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-7x+2x^2}{6-5x+3x^2}$.

3 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{8x}}$.

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

3 $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$.

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos7x-\cos3x}{2x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-8x}\right)$.

1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x+3}\right)^{\frac{x+3}{2}}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8x+1}{2+3x^2+4x^3}$.

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+3}{3-2x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{2x}$.

1 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2 3x}{x\,tg\,\dfrac{x}{2}}$.

Варіант 8

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^3 3x}{x^2\,tg2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-4x^4+3}{1-2x^2-4x^5}$

Варіант 9

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 3x}{tg^2\,\dfrac{x}{2}}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x-x}\right)$

Варіант 10

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{tg^2\,6x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-x}\right)$

Варіант 11

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(2x+3)^3\,(3x-2)}{x^5+7}$

Варіант 12

2 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x}+5\right)$

Варіант 13

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 3x}{5\sin^2 2x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2}-4x\right)$

Варіант 14

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{\frac{x^2+2}{3}}$.

$$3.\ \lim_{x\to+\infty}\left(3^{\frac{1}{x}}+\frac{2x^5}{1-3x^5}\right).$$

$$4\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{9x^2+8}-3\sqrt{x^2+4x}\right)$$

Варіант 15

$$1\ \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x+2)}{2x^2+x+7}.$$

$$2\ \lim_{x\to0}\left(\frac{4\sin 2x}{x}-\frac{\sin 3x}{2x}\right).$$

$$3.\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x+4}-\sqrt{x^2+8x}\right)$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}$$

Варіант 16

$$1\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right).$$

$$2\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{4+3x}{3x+2}\right)^{\frac{3x-1}{2}}\ .$$

$$3.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+7}{1-x+3x^3}$$

$$4\ \lim_{x\to0}\frac{\arcsin 2x}{5x+x^2}$$

Варіант 17

$$1\ \lim_{x\to\infty}\frac{14x^2-x-1}{15x^3-3x+7}.$$

$$2\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x+3}\right)^{\frac{x-1}{2}}\ .$$

$$3\ \lim_{x\to0}\frac{\cos 3x-\cos 7x}{x\sin 6x}.$$

$$4\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x-1}-\sqrt{x^2-x}\right)\ .$$

Варіант 18

$$1\ \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right)\ .$$

$$2\ \lim_{x\to0}\left(1+tg\sqrt[2]{3x}\right)\frac{2}{\sin 3x}\ .$$

$$3.\ \lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-1}{x^2+5x^3}.$$

$$4\ \lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{tg^2 3x}.$$

Варіант 19

$$1\ \lim_{x\to0}\left(1+tg 5x\right)^{\frac{2}{x}}.$$

$$2\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right).$$

$$3.\ \lim_{x\to-0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$$

$$4\ \lim_{x\to-2}\frac{x^2+3x^2+2x}{x^2-x-6}\ .$$

Варіант 20

$$1\ \lim_{x\to-2}\frac{\arcsin(x+2)}{x^2+2x}.$$

$$2\ \lim_{x\to\infty}\frac{8x^3-1}{x^2+5x^3}.$$

$$3\ \lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{3x^2-x-4}.$$

$$4\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-3}{4+5x}\right)^{x-2}\ .$$

Варіант 21

$$1\ \lim_{x\to-3}\frac{2x^2+3x-9}{27+x^3}.$$

$$2\ \lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}-ctg^2 x\right)\ .$$

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+7}{1-x+3x^3}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{\frac{x+4}{2}}$.

Варіант 22

1 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^4+3x^2}{x^{5^3}+x^3+2x^2}$.

2 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{3x^2}{\cos7x-\cos3x}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+4}{x-6}\right)^{\frac{x}{2}}$.

4 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}$.

Варіант 23

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3+2x}{7+2x}\right)^{\frac{x-1}{4}}$.

2 $\lim\limits_{x\to0} \left(x\cdot\sin3x\cdot ctg^2 5x\right)$.

3 $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-5+6}{x^2-7x+10}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}\right)$.

Варіант 24

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x+4}{\sqrt[3]{27x^3-5x^2+1}}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x-1}{3+4x}\right)^{\frac{3x-2}{2}}$.

3 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos x-tg^2 x}{x\sin x}$.

4 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-x^2+x-1}{3x^2-2x-1}$.

Варіант 25

1 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$.

2 $\lim\limits_{x\to-5} \dfrac{x^2+2x-15}{3x^2+14x-5}$.

3 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{tg^2 3x}{1-\cos4x}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-5}\right)$.

Варіант 26

1 $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{9x^2+8}-3\sqrt{x^2+4x}\right)$.

2 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{8x^2}{\cos7x-\cos9x}$.

3 $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-21}$.

4 $\lim\limits_{x\to0} \left(1+\sin^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{3x}}$.

Варіант 27

1 $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{4x+2}{4x-1}\right)^{\frac{4x+3}{5}}$.

2 $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

3 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x+3)^3\,(3x-2)}{x^5+7}$.

4 $\lim\limits_{x\to0} \left(\cos2x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$.

Варіант 28

1 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{xtg3x}{\cos^5 x-\cos^3 x}$.

2 $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$.

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x}{7x-2}\right)^{\frac{3x-1}{4}}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+3}-x\right)$.

Варіант 29

1 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^3+27}$.

2 $\lim\limits_{x\to0}\left(x\cdot tg3x\cdot ctg^2\dfrac{x}{5}\right)$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x-2}$

4 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[x]{1+5x}$.

Варіант 30

1 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{9x^2-14x-8}{x^2-x-2}$.

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x-4}\right)^{1-6x}$.

3 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+8}{\sin(x+2)}$.

4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x-\sqrt{9x^2-7x}\right)$

Завдання 2.2 Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік.

Варіант 1

$$f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1\\ x^2+2, & -1\le x<1\\ 2x, & x\ge1\end{cases}$$

Варіант № 2

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\le1\\ 2x, & 1<x\le3\\ x+2, & x>3\end{cases}$$

Варіант № 3

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le0\\ (x+1)^2, & 0<x\le2\\ -x+4, & x>2\end{cases}$$

Варіант 4

$$f(x)=\begin{cases}x-3, & x<0\\ x+1, & 0\le x\le4\\ 3+x, & x>4\end{cases}$$

Варіант 5

$$f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le-1\\ x+1, & -1<x\le1\\ -x+3, & x>1\end{cases}$$

Варіант 6

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le0\\ 0, & 0<x\le2\\ x-2, & x>2\end{cases}$$

Варіант 7

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le0\\ -(x-1)^2, & 0<x<2\\ x-3, & x\ge2\end{cases}$$

Варіант 8

$$f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le0\\ x, & 0<x\le1\\ 2+x, & x>1\end{cases}$$

Варіант 9

$$f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le-1\\ (x+1)^3, & -1<x<0\\ x, & x\le0\end{cases}$$

Варіант 10

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le0\\ x^2, & 0<x\le2\\ x+1, & x>2\end{cases}$$

Варіант 11

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0\\ x, & 0\le x\le2\\ 0, & x>2\end{cases}$$

Варіант 12

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\\ 2, & x\ge2\end{cases}$$

Варіант 13

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le0\\ x^2, & 0<x<2\\ 2x, & x\ge2\end{cases}$$

Варіант 14

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0\\ x^2-1, & 0\le x<1\\ -x, & x\ge1\end{cases}$$

Варіант 15

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\le0\\ 2^x, & 0<x\le2\\ x+3, & x>2\end{cases}$$

Варіант 16

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x^2+1, & 0\le x<2\\ x+1, & x\ge 2\end{cases}$$

Варіант 17

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\le -2\\ x^3, & -2<x\le 1\\ 2, & x>1\end{cases}$$

Варіант 18

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0\\ 1, & 0<x\le 2\\ x^2-2, & x>2\end{cases}$$

Варіант 19

$$f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\le -1\\ x^2-2, & -1<x<2\\ x, & x\ge 2\end{cases}$$

Варіант 20

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0\\ \sin x, & 0\le x<\pi\\ 3, & x\ge \pi\end{cases}$$

Варіант 21

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1\\ (x-2)^2, & 1<x<3\\ -x+6, & x\ge 3\end{cases}$$

Варіант 22

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x<-1\\ x^2+1, & -1\le x\le 3\\ 2x, & x>2\end{cases}$$

Варіант 23

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1\\ x^2+2, & 1\le x\le 2\\ -2x, & x>2\end{cases}$$

Варіант 24

$$f(x)=\begin{cases}x^3, & x<-1\\ x-1, & -1\le x\le 3\\ -x+5, & x>3\end{cases}$$

Варіант 25

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0\\ -x^2+4, & 0<x<2\\ x-2, & x\ge 2\end{cases}$$

Варіант 26

$$f(x)=\begin{cases}x, & x<-2\\ -x+1, & -2\le x\le 1\\ x^2-1, & x>1\end{cases}$$

Варіант 27

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -1\\ x^2-1, & -1<x\le 2\\ 2x, & x>2\end{cases}$$

Варіант 28

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ \cos x, & 0\le x\le \pi\\ 1-x, & x>\pi\end{cases}$$

Варіант 29

$$f(x)=\begin{cases}2, & x<-1\\ 1-x, & -1\le x\le 1\\ \ln x, & x>1\end{cases}$$

Варіант 30

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x\le 2\\ x+4, & x>2\end{cases}$$

Завдання 2.3 Знайти похідні першого порядку функцій.

Варіант 1

1. $y=5^{x^2\sin^3 x}+\left(\sin\dfrac{x}{4}\right)^{\sqrt{2}}$
2. $y=\sqrt[4]{3x+x\sqrt[5]{x^2}}$
3. $y=\ln arctg\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$
4. $y=(x^3+1)^{tg^2\frac{x}{2}}$
5. $y\sin x-\cos(x-y)=0$
6. $\begin{cases}x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1}\\ y=\dfrac{t}{t^2-1}\end{cases}$

Варіант 2

1. $y=\dfrac{e^{-3\sqrt{x}}}{1+e^{4x^2}}$
2. $y=\ln\sin 3x+x^2\arcsin^5 2x$
3. $y=\sqrt[5]{(1-x^2)^2}$
4. $y=\left(\sin\dfrac{x}{4}\right)^{tg^3\frac{2}{x}}$
5. $arctgy=x+y^2$
6. $\begin{cases}x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t\\ y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t\end{cases}$

Варіант 3

1. $y=\dfrac{\sqrt{5x^3+1}}{4+5x^3}$
4. $y=\cos^x(3x+1)$

2. $y = (1 + ctg^3 5x)e^{\frac{x}{3}}$

3. $y = \ln^2 \cos\dfrac{2}{x^2 + 1}$

5. $x^2 \sin y - \cos y + \cos 2y = 0$

6. $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

Варіант 4

1. $y = \dfrac{\sqrt{1 - \sin^3 2x}}{1 + \cos 4x}$

2. $y = e^{tg^5 \frac{x}{3}} - 2arctg\sqrt{x}$

3. $y = \dfrac{3x^2 - 1}{3x^3} + \ln\sqrt{1 + x^2}$

4. $y = (\ln tgx)^{\sin^2 x}$

5. $x - y = \arcsin x - \arcsin y$

6. $\begin{cases} x = \ln(t^3 + 2) \\ y = \dfrac{t}{t^3 + 2} \end{cases}$

Варіант 5

1. $y = x^2 tg^5 3x + \arcsin^2 \dfrac{x}{5}$

2. $y = \ln\dfrac{ctg^3 \frac{x}{3}}{1 + \cos^2 x}$

3. $y = 10^{1 - \sin^4 3x}$

4. $y = (arctg\sqrt{3x + 1})^{x^3 + 1}$

5. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

6. $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = t^3 - 3t + 1 \end{cases}$

Варіант 6

1. $y = \ln(9x^3 + \sqrt[3]{x^5 + 1})$

2. $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} + \ln tg^3 \dfrac{x}{7}$

3. $y = (1 + \sin_3 3x)e^{arctg^2 5x}$

4. $y = (x^3 - 1)^{\cos\sqrt{x}}$

5. $x^2 \ln(1 + y^3) + y\ln(1 + x^3) = 0$

6. $\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3t^2}{1 + t^3} \end{cases}$

Варіант 7

1. $y = \sin^4(3x - 1)e^{-x^3}$

2. $y = \sqrt[4]{(1 + \cos^5 7x)^3}$

3. $y = 3tg\dfrac{x}{5} + 3^{tg^5 x}$

4. $y = \left(\dfrac{x^3}{1 + x^2}\right)^x$

5. $(y^3 - x^3)^2 - x^2 y + y - x = 0$

6. $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$

Варіант 8

1. $y = \ln\left(\sin^3 4x + arctg\frac{x}{4}\right)$

2. $y = \sqrt[5]{\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}}$

3. $y = e^{\frac{x^2}{\sqrt{3}}} \arcsin^2 \ln x$

4. $y = (arctg\sqrt{x})^{\ln(x^2+1)}$

5. $(x^2+1)^2 + (y^2+1)^2 - xy = 0$

6. $\begin{cases} x = 3t - \sin 3t^2 \\ y = \sin^2 3t \end{cases}$

Варіант 9

1. $y = \sqrt[7]{\frac{3x+2}{1-4x}}$

2. $y = ctg^5 xctg5x$

3. $y = \ln\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}}$

4. $y = (\ln^2 x)^{\cos 3x}$

5. $x^2 + y^2 + \arcsin y + yarctg2x = 0$

6. $\begin{cases} x = \frac{4-t}{1+t} \\ y = \frac{t^3}{2-t^3} \end{cases}$

Варіант 10

1. $y = \ln^5(2x+7) - \sqrt[3]{\sin^2 3x}$

2. $y = \sqrt{xe^{2x} + 2x^3}$

3. $y = 3^{ctg\frac{1}{x}} - \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $y = (x^3+2)^{\sqrt{tgx}}$

5. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln y = 2$

6. $\begin{cases} x = \ln(t^5+3) \\ y = \frac{t^2}{t^5+3} \end{cases}$

Варіант 11

1. $y = tg^5 3x - e^{-\frac{1}{x^2}}$

2. $y = \arcsin(x^3+5)$

3. $y = x^3\ln(x^2+5) + \frac{1}{\cos^4\frac{x}{5}}$

4. $y = (x^5+5)^{\cos 2x}$

5. $x^3y^2 + \sin y + (x-y)^2 = 0$

6. $\begin{cases} x = te^t \\ y = te^{-t} \end{cases}$

Варіант 12

1. $y = \ln\frac{3-\sqrt{9-x^2}}{x^2}$

2. $y = x^3 e^{-\frac{1}{x^2}} + e^{\sin^3 x}$

3. $y = \frac{2x^3-1}{\sqrt{\cos\frac{x}{3}}}$

4. $y = \sin^2 x^{x^2-1}$

5. $(y^2+x)^3 + (x^2-3y)^3 = 0$

6. $\begin{cases} x = t + \frac{1}{2}\cos 2t \\ y = \sin^3 2t \end{cases}$

Варіант 13

1. $y = 5^{ctg^2(5x+3)}$

4. $y = (\ln 3x)^{arctg\frac{3}{x}}$

2. $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}e^{-3x}$

3. $y = \left(\dfrac{4}{3x^2} - \dfrac{1}{9x}\right)\sqrt{4x+x^2}$

5. $\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{y^2}{2}} = 5$

6. $\begin{cases} x = t^3 - 3\pi \\ y = t^3 - 6arctgt \end{cases}$

Варіант 14

1. $y = \sqrt{3}arctg^2 x + \dfrac{1}{x} + tg\sqrt{x}$

2. $y = x^2 e^{-x^2} - 5^{1-\ln^2 3x}$

3. $y = 3arctg \ln^3 \dfrac{1}{x}$

4. $y = \ln(\cos(7x))^{\sin\frac{x}{2}}$

5. $y - \cos^3 y + \sin^3 x = 0$

6. $\begin{cases} x = \arccos(t^3+1) \\ y = \arcsin 5t \end{cases}$

Варіант 15

1. $y = 2^{\arcsin 2x} + \left(1 - \arccos\dfrac{x}{3}\right)^3$

2. $y = e^x \cos 3x + \sqrt[7]{2x + \sqrt[5]{x^3}}$

3. $y = \dfrac{\sin^4 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$

4. $y = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\ln^5 x}$

5. $\ln y + \dfrac{x^2}{y} = 3$

6. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t + t\cos t \end{cases}$

Варіант 16

1. $y = 5\sin^2 \dfrac{x}{3} ctgx$

2. $y = \ln\dfrac{\cos^4 x}{\sqrt{\sin 2x}}$

3. $y = 5^{\arcsin\sqrt{x}} - 2arctg\dfrac{x}{2}$

4. $y = (x^2 + e^x)^{tg^3 x}$

5. $xe^y + y^2 = 10$

6. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} - t \\ y = \sqrt{t^2+1} \end{cases}$

Варіант 17

1. $y = \sqrt[5]{(3 - \sqrt{x}\sin x)^3}$

2. $y = 3\cos^2\dfrac{x^2}{\ln x} + ctge^{x^2+4}$

3. $y = 5arctg(x^2 \ln x)$

4. $y = (1 - \sqrt{x})^{\cos\frac{1}{x}}$

5. $y^3 + \sqrt[3]{x} = \arcsin y$

6. $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sqrt{tgt} \end{cases}$

Варіант 18

1. $y = \dfrac{1}{3}\arcsin(\cos^3\dfrac{x}{5})$

2. $y = 5^{tg\frac{x}{2}} \ln x$

4. $y = \ln^3 x^{x^7}$

5. $\sin(x + \sqrt{y}) = y^2 + 1$

3. $y=\frac{e^{5x}}{1+e^{3x}}$

6. $\begin{cases} x=t\sin t \\ y=\frac{t}{\cos t} \end{cases}$

Варіант 19

1. $y=2^{\frac{\sin x}{\cos^2 x}}+3tg^3\frac{x}{5}$
2. $y=e^{5x}\cos^2 3x+7$
3. $y=arctg^4(x\ln x)$
4. $y=(1+2^x)^{x^2+2}$
5. $2^{x+y}=x+10y$
6. $\begin{cases} x=3e^{5t} \\ y=5\ln t \end{cases}$

Варіант 20

1. $y=5\sin 3^{\ln x}+2$
2. $y=(2x+3)e^{5x}+\frac{\ln x}{x}$
3. $y=(\ln 2)^{\sin x}-ctg^3\frac{x}{2}$
4. $y=(3+\ln^2 x)^{\sin^5 x}$
5. $4x-y^4=\cos(xy^2)$
6. $\begin{cases} x=3t^2+1 \\ y=arctg\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 21

1. $y=2^{\sqrt{\cos(3x+5)}}+\ln ctg\sqrt[3]{x}$
2. $y=\frac{x^5}{\cos^2 7x}-(\cos 5^{\sqrt{tgx}})^3$
3. $y=\sqrt[5]{\sin 10x e^{arctg\frac{1}{x}}}$
4. $y=(x^7+x)^{\sqrt{\ln x}}$
5. $x+tgy=2^x+y^2$
6. $\begin{cases} x=\sqrt{1+3t} \\ y=t^2\sin t \end{cases}$

Варіант 22

1. $y=\frac{x}{\ln^2 x}+x^5 5^{\cos\frac{x}{2}}$
2. $y=(arctg\sqrt{\ln x})^{\sqrt{3}}$
3. $y=3\arcsin^4 3x+\sqrt[3]{\ln^2 tg\frac{x}{7}}$
4. $y=(2x+\cos 3x)^{\frac{1}{x}}$
5. $\arccos y+xy^2=1$
6. $\begin{cases} x=\ln^3 t \\ y=t^2+ctg\sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 23

1. $y=\sqrt[5]{1+xe^{\sqrt{x}}}$
2. $y=(2x+3)^5+5^{2x+3}$
3. $y=\frac{2^x}{tg^3 x}+1$
4. $y=(e^{5x}+\cos\sqrt{x})^{\log_5 x}$
5. $arctg\frac{x}{y}+\sin(xy)=y^3$
6. $\begin{cases} x=te^t \\ y=\arcsin t+\sin t \end{cases}$

Варіант 24

1. $y=\ln(x-\sqrt[3]{x})-x^3\ln x$
2. $y=\cos 3^{x^2}+\left(x^3+\frac{3}{x}\right)^5$
4. $y=(1+\sin^8 7x)^{\frac{2}{x}}$
5. $arctgy=2x+\sqrt{y}$

3. $y = tg\dfrac{x^2}{x^3+1} + 5$

6. $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{\sin t} \\ y = t^2 \cos t \end{cases}$

Варіант 25

1. $y = e^{\frac{x}{2}} arctg^2 x$
2. $y = tg \ln^4 x + 10\sqrt{\cos\dfrac{x}{5}}$
3. $y = \dfrac{3^{ctgx}}{\sqrt{2x^3+1}} + (x^3 + e^{3x})^7$
4. $y = (3^x + \ln x)^{\sqrt[3]{x^2}}$
5. $arctgy = x \sin y$
6. $\begin{cases} x = 2t \sin t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}$

Варіант 26

1. $y = x^2 (\arcsin 3x)^3$
2. $y = 7\log_2(e^{\frac{x}{2}} + 1) + 7^{\ln x}$
3. $y = \dfrac{arctg3x}{1+9x^2} - 3\sqrt{\cos 2x}$
4. $y = (tg7x - x^7)^{\ln^5 x}$
5. $y^3 + xy = 1$
6. $\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = tgt + ctgt \end{cases}$

Варіант 27

1. $y = \sqrt[6]{x + (\sin \ln x)^3}$
2. $y = \dfrac{e^{3x}}{2x+5} - x\ln(1+x^2)$
3. $y = 3\arcsin^4(\sqrt{x} - 2)^5$
4. $y = ctg(x+1)^{\sqrt{3x^2+2}}$
5. $\sqrt{x - y^3} = 2\sin^3 x$
6. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t + 1 \\ y = 2tgt - 3 \end{cases}$

Варіант 28

1. $y = \sin(x + \sqrt[3]{\cos 2x})$
2. $y = 3\log_7(3^{\ln x} + 5) + \dfrac{3x}{\ln x}$
3. $y = x^2 arctgx^2 - 2^x$
4. $y = (3x+1)^{\sqrt{\sin x}}$
5. $tg(xy0 = 3\cos(x\sqrt{y})$
6. $\begin{cases} x = \sqrt{1+2t} \\ y = 3t^2 \cos^2 \sqrt{t} \end{cases}$

Варіант 29

1. $y = (2 + \ln 5)^{tgx} + \sqrt{\dfrac{x}{\sin x}}$
2. $y = \sqrt[3]{arctg\dfrac{x}{2}} - \log_2(5^x - 1)$
3. $y = xe^{7x} + (x + e^{7x})^3$
4. $y = \left(1 + \sin\dfrac{2}{x}\right)^{e^{2x}}$
5. $(x^2 + y^2) + \cos\dfrac{x+y}{x} = 5$
6. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 3t^3 \ln t \end{cases}$

Варіант 30

1. $y = x\log_5(x^3 + 1) + (\ln 3)^{\cos 2x}$
2. $y = \dfrac{x}{(x^3+1)^2} - arctg^3 \sin 7x$
4. $y = (3 + \cos\sqrt{x})^{\ln^2 x}$
5. $\sqrt{\sin y} + \cos^2(xy^2) = 0$

3. $y = 2^{\ln(1+tg^3\frac{x}{4})}$

6. $\begin{cases} x = t^3 + 5\sin t \\ y = t\cos 3t \end{cases}$

Завдання 2.4 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Варіант 1
$y = \dfrac{x}{x^2+1}$

Варіант 2
$y = \ln(2x^2+3)$

Варіант 3
$y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

Варіант 4
$y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$

Варіант 5
$y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$

Варіант 6
$y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

Варіант 7
$y = \dfrac{x^3+16}{x}$

Варіант 8
$y = \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$

Варіант 9
$y = \dfrac{x^3-1}{4x^2}$

Варіант 10
$y = \dfrac{2}{x^2+x+1}$

Варіант 11
$y = \dfrac{x^3}{x^2+2x+3}$

Варіант 12
$y = x + \dfrac{x}{3x-1}$

Варіант 13
$y = \dfrac{x^3-8}{2x^2}$

Варіант 14
$y = \dfrac{4x}{4+x^2}$

Варіант 15
$y = xe^{-x^2}$

Варіант 16
$y = \dfrac{1}{2x+x^2}$

Варіант 17
$y = \ln(x^2+2x+2)$

Варіант 18
$y = \dfrac{x^3}{x^2+9}$

Варіант 19
$y = \dfrac{4x^3+5}{x}$

Варіант 20
$y = e^{\frac{1}{2-x}}$

Варіант 21
$y = \dfrac{x^2+1}{x}$

Варіант 22
$y = x\ln x$

Варіант 23
$y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

Варіант 24
$y = \dfrac{x^2}{x^2+4}$

Варіант 25
$y = \dfrac{8}{x^2(x-4)}$

Варіант 26
$y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$

Варіант 27
$y = (x^2+4)e^{-x^2}$

Варіант 28
$y = \dfrac{x^3+1}{x^2}$

Варіант 29
$y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$

Варіант 30
$y = \dfrac{x^4+3}{x}$

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 2.1 Знайти границі функцій.

$$1\ \lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}\quad 2\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$$

$$3\ \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)\ 4\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$$

Розв'язання.

1 Маємо невизначеність виду $\frac{0}{0}$. Розкладаючи на множники чисельник за формулою $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, а знаменник за формулою $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$, матимемо:

$$8x^3-1=(2x-1)(4x^2+2x+1),$$

$$6x^2-5x+1=0,\qquad x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm1}{12},\qquad x_1=\frac{1}{2},\qquad x_2=\frac{1}{3}.$$

$$6x^2-5x+1=6(x-1/2)(x-1/3)=(2x-1)(3x-1).$$

Отже,

$$\lim_{x\to 1/2}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1/2}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=\lim_{x\to 1/2}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{1+1+1}{3/2-1}=6.$$

2 Ні чисельник, ні знаменник не мають границі при $x\to\infty$. Застосувати теорему про границю частки безпосередньо не можемо. Тому перетворимо дріб, поділивши його чисельник і знаменник на x^4. Дістанемо

$$-\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x+1/x^3}{1-3/x^2+1/x^4}.$$

Оскільки при $x\to\infty$:

$$1/x\to 0,\quad 1/x^3\to 0,\quad 3/x^2\to 0,\quad 1/x^4\to 0,$$

то, застосувавши теорему про границю суми, переконуємось, що чисельник має границю, яка дорівнює 0, а знаменник – 1. За теоремою про границю частки маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\frac{0}{1}=0.$$

3 При $x\to 1$ задана функція являє собою різницю двох нескінченно великих величин (випадок $\infty-\infty$). Виконаємо віднімання дробів

$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\frac{x^2+x-2}{1-x^3}.$$

Тоді

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{1-x^3}=\left(\frac{o}{o}\right)=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim_{x\to1}\frac{x+2}{1+x+x^2}=-\frac{3}{3}=-1.$$

4 При підстановці граничного значення x у вираз функції маємо невизначеність 1^{∞}. Після виконання елементарних перетворень і використання другої чудової границі матимемо

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4}{3x+2}-1\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-4-3x-2}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{-6}}\right]^{\frac{-6}{3x+2}\frac{x+1}{3}}=\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{2(x+1)}{3x+2}}=e^{-2/3}.$$

Завдання 2.2 Дослідити функцію на неперервність та побудувати її графік:

$$y=\begin{cases}-1, & \text{якщо} \quad x<1,\\ x^2-2, & \text{якщо} \quad 1\le x\le 1,\\ 1, & \text{якщо} \quad x>1.\end{cases}$$

Розв'язання. Вихідна функція не є елементарною, тому що задана кількома формулами. Кожна з функцій $y=-1$, $y=x^2-2$, i $y=1$ є елементарною і визначена, а отже й неперервна на всій числовій осі.

Тому вихідна функція може бути неперервною лише в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз, тобто в точках $x=-1$ i $x=1$. Досліджуємо функцію на неперервність в цих точках. Використовуючи означення, одержуємо :

$$\left.\begin{aligned}&y(-1)=(-1)^2-2=1-2=-1\\&\lim_{x\to-1+0}y=\lim_{x\to-1+0}(x^2-2)=-1\\&\lim_{x\to-1-0}y=\lim_{x\to-1-0}(x^2-2)=-1\end{aligned}\right\}\text{Задана функція неперервна в точці } x=-1$$

$$\left.\begin{aligned}&y(1)=1^2-2=1-2=-1\\&\lim_{x\to1+0}y=\lim_{x\to1+0}1=1\end{aligned}\right\}\text{Задана функція розривна в точці } x=1$$

$$\lim_{x\to 1-0} y = \lim_{x\to 1-0}\left(x^2-2\right) = -1$$

Таким чином, областю неперервності даної функції є вся числова вісь; крім точки x=1. Побудуємо графік функції. На інтервалі $\left(-\infty:-1\right)$ її графіком буде пряма $y=-1$, на відрізку $\left[-1:1\right]$ — парабола $y=x^2-2$ і, нарешті, на інтервалі $\left(1:+\infty\right)$ — пряма $y=1$ (рис. 2.1).

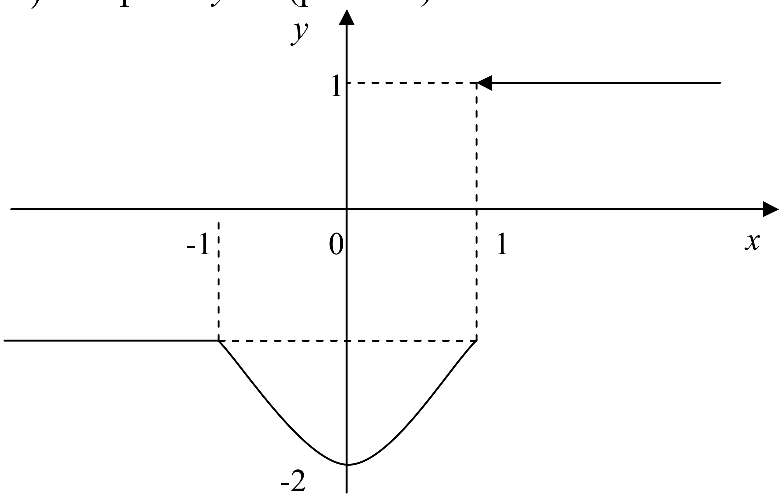


Рис. 2.1

Завдання 2.3 Знайти похідні першого порядку функцій.

1 $y=\frac{x}{2}\sqrt{2-x^2}+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}$

2 $y=\ln\sqrt[3]{1+x^2}$

3 $y=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4 $y=(2x-3)^{\sqrt{\cos x}}$

5 $y\sin(x+y)-x=0$

6 $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}.$

Розв'язання. Використовуючи таблицю похідних та правила диференціювання, знаходимо похідні функцій 1-3.

$$1\ \ y'=\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\sqrt{2-x^2}+\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2-x^2}\right)'+\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)'=\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{2-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2-x^2+2}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{4-2x^2}{2\sqrt{2-x^2}}=\frac{2-x^2}{\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{2-x^2}.$$

$$2\ \ y'=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\left(\sqrt[3]{1+x^2}\right)'=\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\cdot\frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot(1+x^2)'=\frac{2x}{3(1+x^2)}.$$

$$3\ \ y'=\frac{(x)'\cdot\sqrt{1-x^2}-x(\sqrt{1-x^2})'}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}=\frac{1-x^2+x^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

4 Для знаходження похідної степенево-показникової функції використовуємо логарифмічне диференціювання.

$$y=(2x-3)^{\sqrt{\cos x}},$$

$$\ln y=\sqrt{\cos x}\cdot\ln(2x-3),$$

диференціюємо ліву та праву частини одержаної рівності по x:

$$\frac{y'}{y}=\left(\sqrt{\cos x}\right)'\cdot\ln(2x-3)+\sqrt{\cos x}\cdot\left(\ln(2x-3)\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\cos x}}(-\sin x)\cdot\ln(2x-3)+\sqrt{\cos x}\,\frac{2}{2x-3}.$$

Тоді похідна функції має вигляд:

$$y'=((2x-3)^{\sqrt{\cos x}})\cdot\left(\sqrt{\cos x}\,\frac{2}{2x-3}-\frac{\sin x\cdot\ln(2x-3)}{2\sqrt{\cos x}}\right).$$

5 Для знаходження похідної неявної функції $y\sin(x+y)-x=0$ диференціюємо обидві частини рівності по x:

$$y'\cdot\sin(x+y)+y\cos(x+y)\cdot(1+y')-1=0.$$

Розкриваючи дужки та групуючи доданки відносно y', одержуємо:

$$y'\cdot\sin(x+y)+y\cos(x+y)+y\cdot y'\cos(x+y)=1,$$

$$y'\cdot(\sin(x+y)+y\cdot\cos(x+y))=1-y\cos(x+y),$$

$$y'=\frac{1-y\cos(x+y)}{\sin(x+y)+y\cdot\cos(x+y)}.$$

6 Для знаходження похідної параметрично заданої функції $\begin{cases}x=\cos t+t\sin t\\ y=\sin t-t\cos t\end{cases}$ будемо використовувати формулу $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Знаходимо похідні по t:

$x'_t=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t,$

$y'_t=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t.$

Тоді шукана похідна буде дорівнювати: $y'_x=\dfrac{t\sin t}{t\cos t}=tgt.$

Завдання 2.4 Провести повне дослідження функції та побудувати її графік.

Розв'язання.

Повне дослідження функції рекомендується проводити за такою схемою:

1 Знайти область визначення функції

2 Встановити точки розриву та інтервали неперервності функції

3 Дослідити функцію на парність і непарність.

4 Знайти точки перетину графіка функції з осями координат.

5 Знайти інтервали знакосталості функції.

6 Знайти асимптоти. Дослідити поведінку функції поблизу точок розриву.

7 Знайти інтервали спадання і зростання функції та екстремуми.

8 Знайти інтервали опуклості і вгнутості графіка функції та точки перегину.

9 Побудувати графік функції за результатами дослідження.

Використовуючи запропоновану схему, маємо:

1 Знаходимо $3-x^2 \neq 0, \quad x \neq \pm\sqrt{3}$;

$$D(y)=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};+\infty\right).$$

2 $x=-\sqrt{3}$ і $x=\sqrt{3}$ – точки розриву;

$\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$, $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ і $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ – інтервали неперервності функції.

3 $y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2}=\dfrac{-x^3}{3-x^2}=-y(x)$. Отже, задана функція є непарною. Її графік розташований симетрично відносно початку координат, тому подальші дослідження досить проводити лише для $x \geq 0$.

4 При $x=0$ $y=0$; при $y=0$ $x=0$, тобто графік функції проходить через точку $O(0;0)$ - початок координат.

5 $y=0$ при $x=0$; $y=\infty$ при $x=\pm\sqrt{3}$;

$y>0$ в інтервалі $\left(0;\sqrt{3}\right)$ і $y<0$ в інтервалі $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ (рис. 2.2).

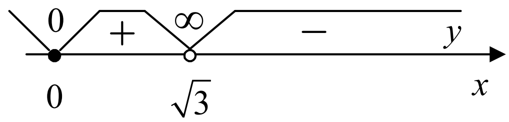


Рис. 2.2

6 $x=\sqrt{3}$ – точка розриву функції.

$$\lim_{x\to\sqrt{3}+0} y=\lim_{x\to\sqrt{3}+0}\frac{x^3}{3-x^2}=\frac{\left(\sqrt{3}+0\right)^3}{3-\left(\sqrt{3}+0\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{-0}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}-0} y=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\sqrt{3}-0}\frac{x^3}{\left(\sqrt{3}-x\right)\left(\sqrt{3}+x\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}-0\right)^3}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}+0\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}-0\right)}=\frac{3\sqrt{3}}{+0}=+\infty.$$

Отже, $x=\sqrt{3}$ – вертикальна асимптота.

Знаходимо похилі асимптоти $y=kx+b$, де

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\cdot\left(3-x^2\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=0,$$

оскільки степінь многочлена чисельника менша степеня многочлена знаменника.

Отже, пряма $y=-x$ – похила асимптота.

7 $$y'=\left(\frac{x^3}{3-x^2}\right)'=\frac{3x^2\left(3-x^2\right)-x^3(-2x)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-3x^2+2x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2}=\frac{x^2\left(9-x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^2};$$

$y'(x)=0$, якщо $x^2\left(9-x^2\right)=0$, звідки $x=0$, $x=\pm 3$;

$y'(x)=\infty$, якщо $3-x^2=0$, звідки $x=\pm\sqrt{3}$,

$y_{\max}=y(3)=\dfrac{27}{3-9}=-\dfrac{9}{2}$ (рис. 2.3).

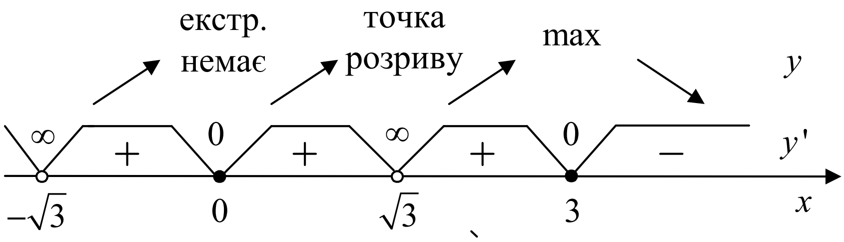


Рис. 2.3

8 $$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)'=\frac{\left(18x-4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2-2\left(3-x^2\right)(-2x)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(9-2x^2\right)\left(3-x^2\right)^2+4x\left(3-x^2\right)\left(9x^2-x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=\frac{2x\left(3-x^2\right)\left(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\left(27+3x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}=\frac{6x\left(9+x^2\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$

$y''(x)=0$, якщо $x=0$;

$y''(x)=\infty$ якщо $x=\pm\sqrt{3}$.

$y_{перегину}=y(0)=0$ (рис. 2.4).

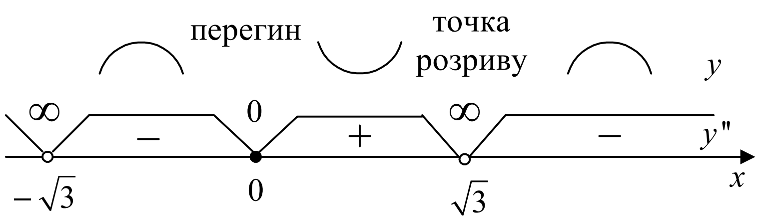


Рис. 2.4

Зауважимо, що у зв‘язку з тим, що точка $x=0$ знаходиться на межі півінтервалу $\left[0;+\infty\right)$, в якому досліджується функція, виникла необхідність дослідити знак $y'(x)$ і $y''(x)$ на півінтервалі $\left(-\sqrt{3};0\right]$.

9 Будуємо графік функції за результатами дослідження (рис. 2.5).

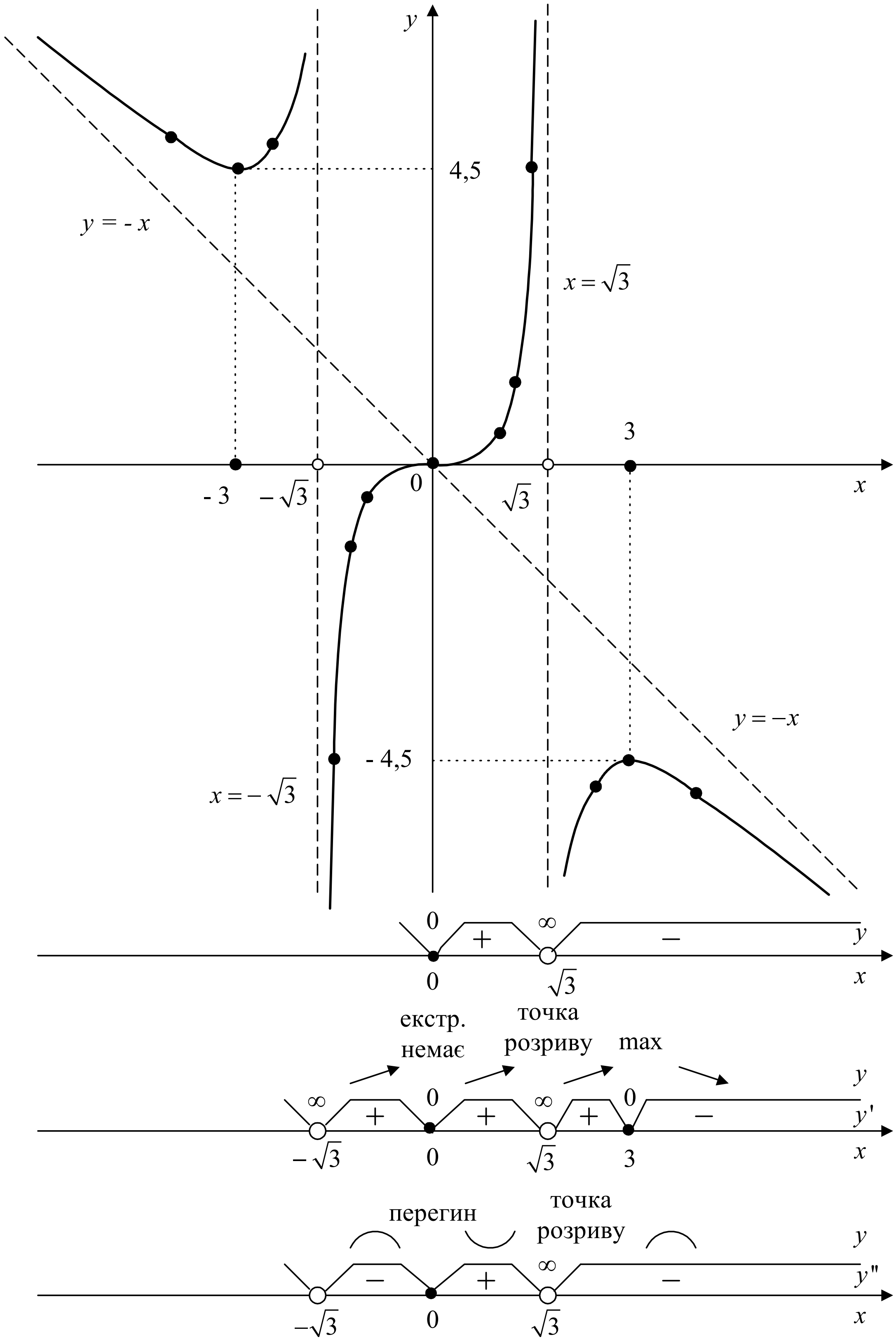

y
4,5
y = - x
x = √3
3
- 3
− √3
0
√3
x
y = −x
- 4,5
x = − √3
0
∞
+
−
y
x
0
√3
екстр.
немає
точка
розриву
max
y
∞
+
0
+
∞
+
0
−
y'
x
− √3
0
√3
3
перегин
точка
розриву
y
∞
−
+
−
y"
x
−√3
0
√3

Рис. 2.5

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №3

Невизначений та визначений інтеграл.

Тема 24. Первісна функції. Невизначений інтеграл.

Тема 25. Таблиця невизначених інтегралів. Безпосереднє інтегрування.

Тема 26. Основні методи інтегрування. Інтегрування підстановкою та частинами.

Тема 27. Інтеграли, що містять квадратний тричлен. Раціональні дроби і їх розкладання.

Тема 28. Інтегрування раціональних дробів.

Тема 29. Інтегрування тригонометричних виразів.

Тема 30. Інтегрування ірраціональних функцій.

Тема 31. Означення та властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбниця.

Тема 32. Методи підстановки та інтегрування у визначеному інтегралі.

Тема 33. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення площі плоскої фігури.

Тема 34. Геометричні застосування визначеного інтеграла. Обчислення довжини дуги плоскої кривої, об’єму та площі поверхні тіла обертання.

Тема 35. Механічні застосування визначеного інтеграла. Розв’язання задач фізики.

Тема 36. Невласні інтеграли по нескінченному проміжку та від розривних функцій, ознаки збіжності.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 3.1 Знайти невизначені інтеграли.

Варіант № 1	**Варіант № 2**	**Варіант № 3**
1 $\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^2 x dx}}{1+x^2} dx$	1 $\int \frac{dx}{(4x^2+1)\operatorname{arctg} 2x}$	1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-\operatorname{ctg}^2 x}}$
2 $\int x\cos\frac{x}{3} dx$	2 $\int xe^{3x} dx$	2 $\int x\ln(x^2+1)dx$
3 $\int \frac{2x+3}{x^2-5x+7} dx$	3 $\int \frac{x^3+2x+5}{(x^2-4)(x+3)} dx$	3 $\int \frac{3x^3-10x^2-11x+21}{x^2-5x+4} dx$
4 $\int \cos^2 x\sin^2 x dx$	4 $\int \sin^4 x\cos^3 x dx$	4 $\int \cos x\sin 5x dx.$
5 $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+2)(\sqrt[6]{x}-1)}$	5 $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}} dx$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$
Варіант № 4	**Варіант № 5**	**Варіант № 6**
1 $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{3\sqrt{x}} dx$	1 $\int \sqrt[6]{1-2x^3}\cdot x^2 dx$	1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}$

2 $\int x^2 \sin 5x dx$	2 $\int (2x-1)e^{2x} dx$	2 $\int x \arccos 3x dx$
3 $\int \frac{(6x+3)\,dx}{(x-4)(x^2-2x+1)}$	3 $\int \frac{(1-x)\,dx}{x^3+4x^2+4x}$	3 $\int \frac{3x^2+13x+11}{(x+1)^2(x+2)} dx$
4 $\int \frac{dx}{3\cos x+\sin x+1}$	4 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x-6\sin x+5}$	4 $\int \cos 2x \cos^2 x dx$
5 $\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2} dx$	5 $\int \frac{1+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx$	5 $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}$
Варіант № 7	**Варіант № 8**	**Варіант № 9**
1 $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$	1 $\int \frac{\cos x dx}{\sin^7 x}$	*1* $\int e^x \cos e^x dx$
2 $\int x^2 \sin \frac{x}{3} dx$	2 $\int x \ln(x-5)\,dx$	2 $\int x \arcsin 2x dx$
3 $\int \frac{dx}{(x^2-x-2)(x-1)}$	3 $\int \frac{x^3-3x}{x^2-6x+8} dx$	3 $\int \frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-2x}$
4 $\int \cos 2x \cos \frac{x}{3} dx$	4 $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$	4 $\int \frac{dx}{3\cos x-2\sin x}$
5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$	5 $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+4x+1}}$	5 $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{1-4x-x^2}}$
Варіант № 10	**Варіант № 11**	**Варіант № 12**
1 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[5]{\operatorname{arctg}^3 x}}$	1 $\int \frac{\sqrt[5]{\ln^3 x}}{x} dx$	1 $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx$
2 $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$	2 $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$	2 $\int (x^2-1)10^{-2x} dx$
3 $\int \frac{x^2+5x+1}{x^2+4} dx$	3 $\int \frac{x^6+1}{x^3-5x^2+4x} dx$	3 $\int \frac{4x dx}{2x^2-3x+1}$
4 $\int x \sin^2 7x dx$	4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+\sin^2 x}$	4 $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$
5 $\int \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-7x+13}} dx$	5 $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$	5 $\int \frac{x^2-3}{\sqrt{x^2+9}} dx$
Варіант № 13	**Варіант № 14**	**Варіант № 15**
1 $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x} dx$	1 $\int \frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$	1 $\int \frac{dx}{(\operatorname{tg} x+1)\cos^2 x}$
2 $\int \ln(x^2+9)dx$	2 $\int \frac{x dx}{\cos^2 3x}$	2 $\int x^3 \arcsin \frac{1}{x} dx$

3 $\int \frac{(x+2)dx}{x^3+2x^2-3x}$	3 $\int \frac{x^4+3}{x(x^2+4x-5)}dx$	3 $\int \frac{x^3-3x^2+x}{(x-3)(x^2-1)}dx$
4 $\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x}$	4 $\int \sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}dx$	4 $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}dx$
5 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$	5 $\int \frac{(\sqrt[4]{x}-2)}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$	5 $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x}}$
Варіант № 16	**Варіант № 17**	**Варіант № 18**
1 $\int \frac{8^{3x}dx}{3+8^{6x}}$	1 $\int \frac{dx}{x\sqrt{2-3\ln x}}$	1 $\int \sin^3 x\sqrt{\cos x}dx$
2 $\int x^2 \operatorname{arctg} 3xdx$	2 $\int (x^2-3x)\sin 5xdx$	2 $\int (x^2-1)\ln xdx$
3 $\int \frac{x^2+4x+1}{2x+2}dx$	3 $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)(x-1)}dx$	3 $\int \frac{x^5+1}{16-x^4}dx$
4 $\int \cos\frac{x}{2}\sin\frac{9x}{2}dx$	4 $\int \sin^2\frac{x}{3}\cos\frac{5x}{2}dx$	4 $\int \frac{dx}{3+\operatorname{tg} x}$
5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$	5 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{(x^2-1)^3}}$	5 $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$
Варіант № 19	**Варіант № 20**	**Варіант № 21**
1 $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}-6e^x+13}$	1 $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$	1 $\int \sin^7 7x\cos 7xdx$
2 $\int xe^{2x+3}dx$	2 $\int x\operatorname{arctg}(2x+3)dx$	2 $\int (2x-1)\cos\frac{x}{3}dx$
3 $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4}dx$	3 $\int \frac{x^3+2}{x(x^2+2x-3)}dx$	3 $\int \frac{2x^4-x^3+5}{x^3-9x}dx$
4 $\int \frac{\sin xdx}{6-5\cos x+\cos^2 x}$	4 $\int \frac{dx}{2+\cos x-2\sin x}$	4 $\int \frac{\cos 2xdx}{\sin^2 x\cos^2 x}$
5 $\int \frac{3xdx}{\sqrt{17-2x-x^2}}$	5 $\int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2-7x+3}}$	5 $\int \frac{\sqrt{4-x}}{(\sqrt{4-x}+3)^3}dx$
Варіант № 22	**Варіант № 23**	**Варіант № 24**
1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{4x^3-6}}$	1 $\int (e^{2x}+5)^3 e^{2x}dx$	1 $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$
2 $\int x\cdot 5^{2x}dx$	2 $\int \ln(2x+1)dx$	2 $\int \operatorname{arctg}\frac{x-1}{x}dx$
3 $\int \frac{x^2+2x+3}{x^3-9x^2+20x}dx$	3 $\int \frac{x^5-2x}{x^3-1}dx$	3 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x^2-4)}dx$

4 $\int \frac{dx}{\cos^2 x - 5\sin^2 x + 2}$	4 $\int \sin\frac{x}{12}\cos\frac{x}{3}dx$	4 $\int \frac{\sin^6 x}{\cos^8 x}dx$
5 $\int \frac{5x-3}{\sqrt{3+4x-x^2}}dx$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{7+4x-2x^2}}$	5 $\int \frac{(1+\sqrt[6]{x})^3}{\sqrt[3]{x}-4}dx$
Варіант № 25	**Варіант № 26**	**Варіант № 27**
1 $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{4-11x^6}}$	1 $\int x^2 e^{5-3x^3}dx$	1 $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt{6-\sin^2 x}}$
2 $\int \frac{\ln \mathrm{ctg}\, x}{\cos^2 x}dx$	2 $\int x\sin 3x\cos 3xdx$	2 $\int x\ln\left(1+x^3\right)dx$
3 $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$	3 $\int \frac{x^3+x^2-5}{x^3-8}dx$	3 $\int \frac{x^2+24}{x(x^2-7x+12)}dx$
4 $\int \frac{2\,\mathrm{tg}\, x+3}{\sin^2 x+2\cos^2 x}dx$	4 $\int \frac{1+\mathrm{tg}^2 x}{(1+\mathrm{tg}\, x)^2}dx$	4 $\int \frac{dx}{3+4\sin^2 x}$
5 $\int \frac{7x-1}{\sqrt{9+4x-x^2}}dx$	5 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^2}$	5 $\int \frac{dx}{x(1+\sqrt[3]{x})^2}$
Варіант № 28	**Варіант № 29**	**Варіант № 30**
1 $\int \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{5-3e^{4x}}}$	1 $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(2-3\,\mathrm{ctg}\, x\right)}$	1 $\int \frac{\cos^2 x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$
2 $\int (x+1)\,\mathrm{arctg}\, xdx$	2 $\int x^2\sin\frac{x}{2}dx$	2 $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^2}dx$
3 $\int \frac{2x^4-x^2+1}{x^3-x}dx$	3 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$	3 $\int \frac{x^3dx}{x^3-4x^2+3x}$
4 $\int \frac{dx}{1+5\sin^2 x}$	4 $\int \sin^3 2x\cos^2 2xdx$	4 $\int \frac{dx}{5\cos x-3\sin x+2}$
5 $\int \frac{x^3dx}{1+\sqrt[3]{x^4+1}}$	5 $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+10x+29}}$	5 $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{x(2+\sqrt[3]{x})}dx$

Завдання 3.2 Розв’язати задачі.

Варіант 1

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = a\sin 2t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = x^3, y = 0, x = 2.$

3 Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2(1-\cos\varphi)$, що розташована в середині круга $r \le 1$.

4 Найти статический момент относительно оси Ox однородной фигуры, которая ограничена линиями $y=4-x^2, y=3$, если плотность материала $\gamma=1$.

Варіант 2

1 Знайти площу фігури, обмеженої лінією

$$\begin{cases} x=3t^2, \\ y=3t-t^3 \end{cases} ; \quad -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{3}.$$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=\cos x, x=-\dfrac{\pi}{4}, x=\dfrac{\pi}{2}, y=0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $r=\sqrt{2}\cdot e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

4 Найти массу стержня длиной 100см, если линейная плотность ($^{г}/_{см}$) изменяется по закону $\gamma(x)=20x+0{,}15x^2$, где x – расстояние от одного из концов стержня.

Варіант 3

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=x^2-2x+3$ і $y=3x-1$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої

$$\begin{cases} x=t^2, \\ y=\dfrac{t}{3}(t^2-3) \end{cases} ; \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

3 Знайти довжину дуги кривої $r=e^{\frac{5\varphi}{12}}, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

4 Найти массу дуги кривой $y=\ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$, если плотность $\gamma(x)=x^2$.

Варіант 4

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r=2\sqrt{\sin 2\varphi}.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y=2x-x^2$ і $y=2-x.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y=1-\ln\sin x, \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{\pi}{2}.$

4 Найти координаты центра тяжести однородной фигуры, которая ограничена линиями $y=x^2, y^2=x.$

Варіант 5

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r=2+\sin\varphi.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox параболи $y^2=2x$ від її вершини до точки з абсцисою $x=\dfrac{3}{2}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$.

4 Найти статический момент относительно оси Ох однородной кривой $y=(x-3)^3, 3 \le x \le 4.$

Варіант 6

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=(x+2)^2, y=4-x$ і $y=0.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r=2a(1+\cos\varphi).$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x=a(t^2+1), \\ y=\dfrac{a}{3}(t^3-3t), \end{cases} \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$

4 Найти массу фигуры, которая ограничена линиями $y=\dfrac{4}{x}, y=5-x,$ если плотность материала в каждой точке равняется квадрату абсциссы этой точки.

Варіант 7

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=5-x^2, \; y=x-1.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо полярної осі кривої $r^2=a^2\cos 2\varphi.$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x=\dfrac{t^6}{6}, \\ y=2-\dfrac{t^4}{4}, \end{cases} \quad 0 \le t \le \sqrt[4]{8}.$

4 Скорость тела (м/с), задается формулой $v=t\cdot e^{-t}$. Найти путь, который прошло тело за 3с. от начала движения.

Варіант 8

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=e^{-2x}, y=0, x=-\dfrac{1}{2}, x=1.$

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y=4x-x^2$ і $y=x.$

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x=t^2, \\ y=t(\dfrac{1}{3}-t^2), \end{cases} \quad 0 \le t \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

4 Найти ординату центра тяжести дуги однородной кривой $r=\dfrac{a}{\cos\varphi},$ $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}.$

Варіант 9

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r=\cos 3\varphi.$

2 Знайти об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *Ox* фігури, обмеженої лініями $y^2=x+4$ і $x=0.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y = a\ln(a^2 - x^2)$, $0 \le x \le \dfrac{a}{2}$.

4 Найти статический момент относительно оси Oy однородной дуги линии $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t(\frac{1}{3} - t^2), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Варіант 10

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $xy = 8$, $x = 6$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = (x+4)^3$ і $x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(3\cos t - \cos 3t), \\ y = a(3\sin t - \sin 3t), \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

4 Найти абсциссу центра тяжести дуги однородной кривой $r = \dfrac{a}{\sin\varphi}$, $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Варіант 11

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = \dfrac{t^3}{3}, \\ y = 4 - \dfrac{t^2}{2}, \end{cases}$ і $y = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $x + y - 2 = 0$ і $x^2 + y^2 = 4$.

3 Знайти довжину дуги лінії $y = \dfrac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$ між точками перетину її з віссю абсцис.

4 Найти массу дуги кривой $r = 1 + \cos\varphi$, если плотность материала $\gamma(\varphi) = \sin^2\dfrac{\varphi}{2}$.

Варіант 12

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = tgx$, $y = ctgx$, $x = \dfrac{\pi}{6}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 3\pi$.

4 Какую работу необходимо затратить, чтобы растянуть пружину на 6см, если сила в 2н растягивает ее на 1см?

Варіант 13

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = 6 - x$ і $y = \dfrac{5}{x}$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 3\sin t. \end{cases}$

3 Знайти довжину спіралі $r = 5\varphi$, що розташована в області, яка обмежена колом $r = 10\pi$.

4 Какую работу необходимо затратить, чтобы растянуть пружину на 5см, если сила в 1н растягивает ее на 1см?

Варіант 14

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x$ і $y - 3 = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $xy = 4,\ \ y = 1,\ \ y = 2,\ \ x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}\ \ 0 \le t \le 1.$

4 Найти статические моменты относительно осей Ox и Oy дуги однородной ($\gamma = 1$) окружности $r = 2a\cos\varphi$, которая лежит выше полярной оси.

Варіант 15

1 Знайти площу фігури, обмеженої лінією $r = 4\cos 2\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = e^x,\ \ y = 0,\ \ x = 0, x = 1.$

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2},\ \ 0 \le x \le 1.$

4 Найти статический момент относительно оси Oy дуги однородной кривой $\begin{cases} x = t, \\ y = \ln(1 - t^2), \end{cases}\ \ 0 \le t \le \frac{1}{2}.$

Варіант 16

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2 + \cos 2\varphi.$

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox дуги кривої $y = \frac{x^3}{3},\ \ -2 \le x \le 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = a(\cos 2t + \ln tgt), \\ y = a\sin 2t, \end{cases}\ \ \frac{\pi}{8} \le t \le \frac{\pi}{4}.$

4 Найти массу дуги кривой $y = \arcsin x,\ \ \frac{1}{2} \le x \le 1,$ если плотность материала $\gamma(x) = \frac{x}{\sqrt{2 - x^2}}$.

Варіант 17

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 1 - 2\sin\varphi.$

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лінією $\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 - t. \end{cases}$

3 Знайти довжину дуги кривої $y^2 = (4-x)^3$, що відрізана прямою $x = 0, (x \geq 0)$.

4 Скорость движения (м/с) тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2$. Найти путь, который прошло тело от начала движения до остановки.

Варіант 18

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$ і $y = x + 2$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2, \end{cases}$ $x = -1$, $x = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = a\sin^4 \dfrac{\varphi}{4}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

4 Найти массу стержня длины a (см), если плотность материала $\gamma(x) = \dfrac{x^3}{2a - x}$ $\left({}^{г}\!/\!{}_{см}\right)$.

Варіант 19

1 Знайти площу фігури, обмеженої першим витком спіралі Архімеда $r = a\varphi$ і полярною віссю.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$, $y = x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} + 3$, $0 \leq x \leq 2$.

4 Найти статический момент относительно оси Ох однородной фигуры ($\gamma = 1$), которая ограничена линиями $y = x^2$, $y = x$.

Варіант 20

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $r = 2 - \cos\varphi$ і $r = \cos\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = x$, $y = \dfrac{x}{2}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = -\ln\cos x$, $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{6}$.

4 Найти статический момент относительно оси Ох однородной фигуры ($\gamma = 1$), которая ограничена линиями $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Варіант 21

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $x + y = 6$, $y = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy криволінійної трапеції, що обмежена лініями

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 \end{cases} \text{ і } y = 4$$

3 Знайти довжину дуги кривої $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$.

4 Найти абсциссу центра тяжести однородной фигуры ($\gamma = 1$), которая ограничена линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Варіант 22

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2(2 + \cos\varphi)$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 = \dfrac{3}{2}x$, $x^2 + y^2 = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \dfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x})$, $0 \le x \le 3$.

4 Скорость точки (м/с) $v = 0{,}1t^3$. Найти путь, который прошла точка за 10с от начала движения. Чему равняется средняя скорость за этот промежуток времени?

Варіант 23

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 2\sin 2\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = tgx$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \ln\dfrac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, $1 \le x \le 2$.

4 Найти статический момент относительно оси Ох дуги однородной ($\gamma = 1$) кривой $\begin{cases} x = t, \\ y = t^3, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Варіант 24

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $r = 3\sin 3\varphi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y^3 = 4x^2$ і $y = 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

4 Найти статический момент относительно оси Ох дуги однородной ($\gamma = 1$) кривой $y = \dfrac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$, $0 \le x \le 3$.

Варіант 25

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$ і $x = 4$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = 2^x$, $y = 4^x$, $x = 1$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

4 Найти массу стержня длиной $l = 10$ см, если линейная плотность материала задается формулой $\gamma(x) = 1 + 1{,}5x^2 + \sqrt{10x}$ (г/см).

Варіант 26

1 Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 4$ і $x = 0$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$$

3 Знайти довжину дуги кардіоїди $r = 2(1 + \cos\varphi)$, що розташована в області, яка обмежена колом $r = 2$.

4 Найти массу дуги кривой $y = \ln(1 - x^2)$, $0 \le x \le \frac{1}{3}$, если плотность материала $\gamma(x) = \frac{x}{1 + x^2}$ (г/см).

Варіант 27

1 Знайти площу фігури, обмеженої кардіоїдою $r = a(1 - \cos\varphi)$.

2 Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y^2 = 4x$ від її вершини до точки з абсцисою $x = 2$.

3 Знайти довжину дуги кривої $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$ $0 \le t \le \pi$.

4 Найти абсциссу центра тяжести однородной фигуры ($\gamma = 1$), которая ограничена линиями $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Варіант 28

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = ae^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = \frac{x^2}{4} - 1$ і $y = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $y = \frac{2}{\pi}\ln\cos\frac{\pi x}{2}$, $0 \le x \le \frac{1}{2}$.

4 Найти статический момент относительно оси Oy дуги однородной ($\gamma = 1$) кривой $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3, \\ y = t, \end{cases}$ $0 \le t \le 1$.

Варіант 29

1 Знайти площу фігури, обмеженої першою аркою циклоїди $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases}$ і віссю абсцис.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y^2 + x - 4 = 0$ і $x = 0$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = e^{a\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

4 Найти статический момент относительно оси Ox дуги однородной ($\gamma = 1$) кривой $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 1$.

Варіант 30

1 Знайти площу фігури, обмеженої кривою $\begin{cases} x = 12\cos t + 5\sin t, \\ y = 5\cos t - 12\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

2 Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y^2 = 9x$ і $y = -x$.

3 Знайти довжину дуги кривої $r = 6(1 + \sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$.

4 Найти массу однородной фигуры ($\gamma = 1$), которая ограничена линией $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 3.1 Знайти невизначені інтеграли

1 $\displaystyle\int \frac{dx}{(5 + 7tgx)\cos^2 x}$.

2 $\displaystyle\int x^2 \sin 3x dx$.

3 $\displaystyle\int \frac{x^2 - 2x + 3}{(x-1)(x^3 - 4x^2 + 3x)} dx$.

4 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}$.

5 $\displaystyle\int \cos^4 x \sin^5 x dx$.

Розв'язання.

1 Оскільки похідна виразу $5+7tgx$ дорівнює $\dfrac{7}{\cos^2 x}$, а множник $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ відрізняється від цієї похідної лише сталим множником *7,* то змінною інтегрування тут можна вважати вираз $5+7tgx$, і, таким чином, знайти інтеграл:

$$\int \frac{dx}{(5 + 7tgx)\cos^2 x} = \frac{1}{7}\int \frac{1}{5 + 7tgx} \cdot \frac{7}{\cos^2 x} dx = \begin{vmatrix} u = 5 + 7tgx \\ u_x' = \dfrac{7}{\cos^2 x} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\int \frac{1}{u} \cdot u_x' dx = \frac{1}{7}\ln|5 + 7tgx| + C.$$

2 Покладемо $u=x^2$, $dv=sin3xdx$. Тоді

$$du=2xdx, \quad v = \int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x.$$

За формулою інтегрування частинами знаходимо

$$\int x^2\sin 3x dx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\cdot 2x dx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3x dx.$$

До останнього інтеграла знову застосуємо формулу інтегрування частинами. Для цього покладемо $u=x$, $dv=cos3xdx$, тоді

$$du=dx, v=\int\cos 3x dx=\frac{1}{3}\int\cos 3x d(3x)=\frac{1}{3}\sin 3x$$

і $\int x\cos 3x dx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3x dx=\frac{1}{3}x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\sin 3x dx=\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x.$

Таким чином, остаточно будемо мати

$$\int x^2\sin 3x dx=-\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}x\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x\right)+C.$$

$$=\frac{1}{27}\left(-9x^2\cos 3x+6x\sin 3x+2\cos 3x\right)+C.$$

3 Переконуємося, що підінтегральний дріб – правильний і нескоротний. Враховуючи, що

$$(x-1)(x^3-4x^2+3x)=x(x-1)(x^2-4x+3)=x(x-1)(x-1)(x-3)=x(x-1)^2(x-3)$$

має чотири корені, з яких два $x=0$ і $x=3$ – прості, а $x=1$- двократний, подамо дріб у вигляді суми чотирьох елементарних дробів:

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-1)^2(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{x-1}.$$

Одержимо тотожність для знаходження коефіцієнтів *A, B*, *C, D*:

$$x^2-2x+3=A(x-3)(x-1)^2+Bx(x-1)^2+Cx(x-3)+Dx(x-1)(x-3).$$

Коефіцієнти знаходимо комбінованим способом

$$\begin{array}{r|l} x=0 & 3=-3A, \\ x=3 & 6=12B, \\ x=1 & 2=-2C, \\ x^3 & 0=A+B+D. \end{array}$$

Звідси $A=-1, B=\frac{1}{2}, C=-1, D=\frac{1}{2}$. Отже,

$$\frac{x^2-2x+3}{x(x-3)(x-1)^2}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

а шуканий інтеграл

$$\int\frac{x^2-2x+3}{(x-1)(x^3-4x^2+3x)}dx=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}\right)dx=$$

$$=-\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}-\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}=-\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\ln|x-1|+C.$$

4 Підінтегральна функція є раціональною функцією від дробових степенів x. Отже, маємо інтеграл першого типу від ірраціональної функції. Тут $n_1=2$,

$n_2=3$, $n_3=4$, тому $к=12$ (найменше спільне кратне чисел 2, 3 і 4). Покладемо $x=t^{12}$. Тоді

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \left| \begin{matrix} x = t^{12} \\ dx = 12t^{11}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{t^6}{t^8 - t^3} 12t^{11}dt =$$

$$= 12\int \frac{t^{17}dt}{t^3(t^5-1)} = 12\int \frac{t^{14}dt}{t^5-1} =$$

$$= \left| \begin{array}{l|l} \begin{array}{r} -\begin{array}{r} t^{14} \\ t^{14}-t^9 \end{array} \\ \hline -\begin{array}{r} t^9 \\ t^9-t^4 \end{array} \\ \hline t^4 \end{array} & \begin{array}{l} t^5-1 \\ \hline t^9+t^4 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= 12\int \left(t^9 + t^4 + \frac{t^4}{t^5-1} \right) dt = 12\left(\int t^9 dt + \int t^4 dt + \frac{1}{5}\int \frac{5t^4 dt}{t^5-1} \right) =$$

$$= 12\left(\frac{t^{10}}{10} + \frac{t^5}{5} + \frac{1}{5}\ln\left|t^5-1\right| \right) + C = \frac{6}{5}\left(t^{10} + 2t^5 + 2\ln\left|t^5-1\right| \right) + C.$$

Повертаючись до змінної x, остаточно будемо мати

$$\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}} = \frac{6}{5}\left(\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[12]{x^5} + 2\ln\left|\sqrt[12]{x^5}-1\right| \right) + C.$$

5 Маємо інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$, де $m=5$, $n=4$.

Враховуючи, що $m=5>0$ і непарне, одержимо

$$\int \cos^4 x \sin^5 x dx = \int \cos^4 x \cdot \sin^4 x \cdot \sin x dx = \int \cos^4 x (1-\cos^2 x)^2 \cdot \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{matrix} \right| = -\int t^4(1-t^2)^2 dt = -\int t^4(1-2t^2+t^4)dt =$$

$$= -\int (t^4 - 2t^6 + t^8)dt = -\left(\frac{t^5}{5} - \frac{2t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \right) + C = -\left(\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{2\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} \right) + C.$$

Завдання 3.2 Розв’язати задачі.

1 Обчислити площу фігури, обмеженої лінією $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ і параболою $y = \dfrac{x^2}{2}$.

2 Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнею, яка утворюється обертанням параболи $y^2=4x$ навколо своєї осі (параболоїд обертання) і площиною, перпендикулярною до його осі та віддаленою від вершини параболи на відстань, що дорівнює одиниці.

3 Обчислити довжину петлі лінії $x=t^2$, $y = t - \dfrac{t^3}{3}$.

4 Обчислити координати центра ваги першої арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Розв'язання.

1 Крива $y = \dfrac{x^2}{2}$ – парабола з вершиною в точці *O(0;0)* і віссю симетрії *Oy*. Вітки параболи направлені вгору (рис. 3.1).

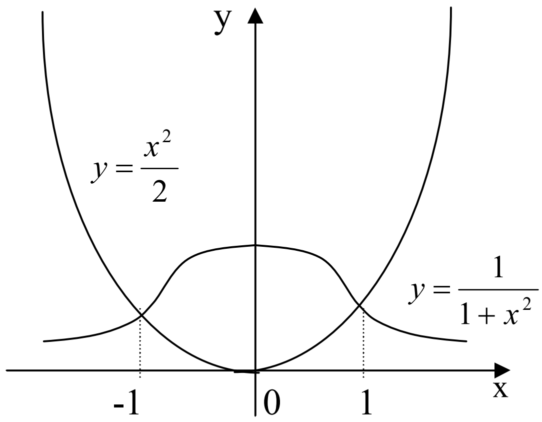


Рис. 3.1

Крива $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ – локон Аньєзі. Із рівняння видно, що при будь-якому x функція набуває лише додатних значень, а тому її графік розташований вище осі *Ox*, а вісь *Oy* є її віссю симетрії, бо $y(-x)=y(x)$. Найбільше значення, яке дорівнює одиниці, функція набуває при $x=0$, а при $x \to \pm\infty$ $y \to 0$.

Схематично графік цієї функції зображений на рис. 3.1. Точніше побудувати графік цієї функції можна за допомогою загальної схеми дослідження функції. Фігура, обмежена даними лініями, також зображена на рис. 3.1. Площу заштрихованої фігури обчислимо за формулою:

$$S = \int_a^b \left(y_в(x) - y_н(x) \right) dx .$$

Для визначення меж інтегрування обчислимо абсциси точок перетину ліній, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{1+x^2}, \\ y = \dfrac{x^2}{2}. \end{cases}$$

Звідси $x_1=-1$, $x_2=1$. Отже, $a=-1$, $b=1$.

Враховуючи також, що $y_в = \dfrac{1}{1+x^2}$, а $y_н = \dfrac{x^2}{2}$ будемо мати $S = \int\limits_{-1}^{1}\left(\dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{x^2}{2}\right)dx,$ а з урахуванням симетрії фігури відносно осі Oy одержуємо

$$S = 2\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\left(arctgx - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}.$$

2 Побудуємо тіло (рис.3.2).

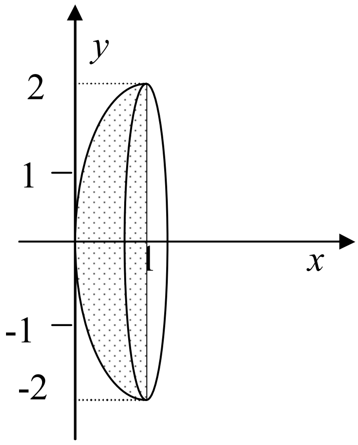


Рис. 3.2

Враховуючи, що $y_в = 2\sqrt{x}$, $y_н=0$, $a=0$ і $b=1$, за формулою

$$V_x = \pi\int\limits_a^b \left(y_в{}^2(x) - y_н{}^2(x)\right)dx$$

будемо мати

$$V_x = \pi\int\limits_0^1 4x dx = 2\pi x^2\Bigg|_0^1 = 2\pi.$$

3 Оскільки межі інтегрування не задані, то слід побудувати лінію, для чого доцільно виключити параметр t із параметричних рівнянь: $y^2 = x\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)^2$. На довжині петлі (рис.3.3) параметр t змінюється від $-\sqrt{3}$ до $\sqrt{3}$.

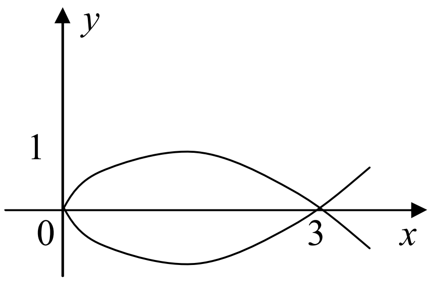


Рис. 3.3

Із урахуванням симетрії лінії відносно осі Ox, обчислюємо її довжину за формулою: $L=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt$.

$$L=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{(2t)^2+\left(1-t^2\right)^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{4t^2+1-2t^2+t^4}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+2t^2+t^4}\,dt=$$

$$=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\sqrt{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=2\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(1+t^2\right)dt=2\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}=2\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)=4\sqrt{3}.$$

Зауважимо, що при добуванні квадратного кореня з виразу $\left(1+t^2\right)^2$ враховано, що $1+t^2>0$ для всіх дійсних значень t.

4 Перша арка циклоїди має вісь симетрії $x=\pi a$ (див. рис.3.4).

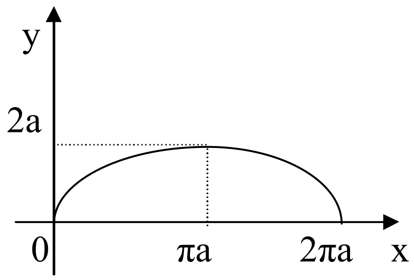


Рис. 3.4

Тому абсциса центра ваги $x_c=\pi a$. Ординату центра ваги обчислимо за формулою:

$$y_c=\frac{M_x}{m}.$$

Попередньо виконаємо всі перетворення, які пов'язані з обчисленням статичного моменту дуги і її маси:

$$x_t'=a(1-\cos t),\qquad y_t'=a\sin t,$$

$$\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\right)=$$

$$=a^2(2-2\cos t)=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2},$$

$$y=a(1-\cos t)=2a\sin^2\frac{t}{2}.$$

Згідно з формулою:

$$M_x=\int\limits_a^b\gamma(x)y(x)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx,$$

а оскільки крива задана параметричними рівняннями, то

$$M_x = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt.$$

Враховуючи попередні перетворення, будемо мати

$$M_x = \int_0^{2\pi} 2a\sin^2\frac{t}{2}\cdot 2a\sin\frac{t}{2}dt = 4a^2\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 4a^2\left(\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt - \int_0^{2\pi}\cos^2\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}dt\right) =$$

$$= 4a^2\left(-2\cos\frac{t}{2} + 2\cdot\frac{\cos^3\frac{t}{2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 4a^2\left(2-\frac{2}{3}+2-\frac{2}{3}\right) = \frac{32}{3}a^2.$$

Тут враховано, що $\sqrt{\sin^2\frac{t}{2}} = \sin\frac{t}{2}$, бо $\sin\frac{t}{2} \ge 0$ для $0 \le t \le 2\pi$.

Маса дуги кривої чисельно дорівнює її довжині, тобто

$$m = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\,dt.$$

Виконуючи обчислення, одержимо

$$m = \int_0^{2\pi} 2a\sin\frac{t}{2}dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = -4a(\cos\pi - \cos 0) = -4a(-1-1) = 8a.$$

Таким чином, $x_c = \pi a,\qquad y_c = \frac{4}{3}a.$

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №4

Диференціальні рівняння.

Тема 37. Диференціальні рівняння першого порядку. Теорема існування і єдиності розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку. Задача Коші.

Тема 38. Рівняння з відокремлюваними змінними. Рівняння, однорідні відносно змінних.

Тема 39. Лінійні рівняння. Рівняння Бернуллі.

Тема 40. Рівняння другого порядку. Три типа рівнянь, що припускають зниження порядку.

Тема 41. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку. Властивості частинних розв'язків.

Тема 42. Визначник Вронського, його властивості. Теорема про структуру загального розв'язку.

Тема 43. Поняття комплексного числа. Лінійні однорідні рівняння з сталими коефіцієнтами.

Тема 44. Лінійні неоднорідні рівняння другого порядку. Теорема про структуру загального розв'язку.

Тема 45. Метод варіації довільних сталих.

Тема 46. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння зі спеціальною правою частиною.

Тема 47. Системи диференціальних рівнянь, основні визначення і методи розв'язання.

Завдання 4.1 Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

Варіант 1

1. $y'\sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$.
2. $(x+2y)dx - xdy = 0$, $y(1) = 1$.
3. $y' - \dfrac{2y}{x} = x^2 e^x$.
4. $2(y' + xy) = (x-1)e^x y^2$.

Варіант 2

1. $y' = \dfrac{2x}{3y^2+1}$.
2. $3xy' = x + 4y$, $y(1) = 1$.
3. $y' = e^{2x} - ye^x$.
4. $y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{(x+1)^3 y^3}{2}$.

Варіант 3

1. $y' = y \cdot tgx$.
2. $xy^2 y' = x^3 + y^3$, $y(1) = 3$.
3. $xy' - 3y = x + 1$.
4. $yy' + \dfrac{y^2}{x} = \sin x$.

Варіант 4

1. $y'\sin x = y\ln y$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = e$.
2. $xy' - x\cos^2\dfrac{y}{x} = y$.
3. $\dfrac{ds}{dt}\cos t + s\sin t = 1$.
4. $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

Варіант 5

1. $y^2 y' + x^2 = 1$.
2. $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.
3. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$.
4. $y' + xy = x^3 y^3$, $y(0) = 1$.

Варіант 6

1. $y' = y^2\cos 2x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
2. $xy' = 2y$.
3. $x^2 y' + xy + 1 = 0$.
4. $y' - xy + y^3 e^{-x^2} = 0$.

Варіант 7

1. $y' = \dfrac{4y}{x^2-4}$.
2. $yy' + x = 0$.
3. $xydx + (x+1)dy = 0$.
4. $y - y'\cos x = y^2\cos x(1-\sin x)$, $y(0) = 1$.

Варіант 8

1. $y' = \dfrac{x^2-2}{1-y^3}$.
2. $3xy' = x + 4y$.
3. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(2) = 8$.
4. $(1-x^2)y' - xy - 2x^3 y^2 = 0$.

Варіант 9

1. $y' = e^{x+y}$.
2. $xy' = y \ln \dfrac{y}{x}$.
3. $y' - y \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^2 x$.
4. $y' + y = \sqrt{y} \cdot e^{\frac{x}{2}}, \quad y|_{x=0} = \dfrac{9}{4}$.

Варіант 10

1. $y \cdot y' + x = 5$.
2. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. $xy' + y = \ln x + 1$.
4. $y' - 2xe^x y^3 - y = 0, \quad y|_{x=0} = 1$.

Варіант 11

1. $(x^2 + 1)y' - 4xy = 0$.
2. $2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$.
3. $x(1 + x^2)dy = (y + yx^2 - x^2)dx$,

$y|_{x=1} = -\dfrac{\pi}{4}$.

4. $y' - 8x\sqrt{y} = \dfrac{4xy}{x^2 - 1}$.

Варіант 12

1. $yy' = (1 - 3x^2)y^{-2}$.
2. $y' - \dfrac{y}{x} = e^{\frac{y}{x}}$.
3. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - 2y = (x+1)^2$.
4. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^3, \quad y(0) = 1$.

Варіант 13

1. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$.
2. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.
3. $y' - 2xe^x y^3 - y = 0, \ y|_{x=0} = 1$.
4. $6xy' - y = -\dfrac{1}{y^3 \sqrt{x}}$.

Варіант 14

1. $yy' = -\dfrac{2x}{\cos y}$.
2. $(x - y\cos\dfrac{y}{x})dx + x\cos\dfrac{y}{x} \cdot dy = 0$.
3. $(y' - y)x = e^x, \quad y|_{x=1} = e$.
4. $yy' - 4x^2 - y^2\sqrt{x} = 0$.

Варіант 15

1. $x\sqrt{1 + y^2}dx + y\sqrt{1 + x^2}dy = 0$.
2. $(y + 2\sqrt{xy})dx - xdy = 0, \quad y(e) = e$.
3. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

Варіант 16

1. $(1 + x^2)dy + ydx = 0$.
2. $xdy - ydx = x\sin^2\dfrac{y}{x} \cdot dx$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.
4. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y|_{x=1} = 1$.

Варіант 17

1. $y' = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.
2. $(x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$.
3. $tds - 2sdt = t^2 \ln t \cdot dt$.
4. $(y' + y^2)(x + 1) = -y, \quad y(0) = 1$.

Варіант 18

1. $x(y^2 - 4)dx + ydy = 0$.
2. $y = x(y' + \sqrt[x]{e^y})$.
3. $y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad y(\pi) = \dfrac{4}{3}$.
4. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4$.

Варіант 19

1. $(x + 1)y' = xy$.

Варіант 20

1. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.

2. $xy'\cos\frac{y}{x}=y\cos\frac{y}{x}-x$.

3. $y'+\frac{1-2x}{x^2-x}=1, \quad y(2)=-2\ln 2$.

4. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

2. $y'=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2}$.

3. $y'\operatorname{ctg}x-y=2\cos^2 x\operatorname{ctg}x$.

4. $xdy=(x^5y^2-2y)dx, \quad y\big|_{x=1}=1$.

Варіант 21

1. $ydx+ctgxdy=0$.
2. $3xy'=x+4y, \quad y(1)=1$.
3. $(\varphi^2-1)r'-\varphi r=\varphi^3-\varphi$.
4. $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}(1-x^3)$.

Варіант 22

1. $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$.
2. $xy'-3y=\frac{x^2}{y}$.
3. $xy'-\frac{y}{x+1}=x, \quad y\big|_{x=1}=1$.
4. $3(xy'+y)=y^2\ln x$.

Варіант 23

1. $xydx=-(x+1)dy$.
2. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0, \quad y\big|_{x=0}=2$.
3. $xy'-2y=x+1$.
4. $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=\frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{1+x^2}}\operatorname{arctg}x, \quad y(0)=1$.

Варіант 24

1. $y'-y\sin 2x=0$.
2. $xy'=y(1+\ln y-\ln x)$.
3. $y'\cos x+y\sin x=1, y(0)=1$.
4. $y'-y\operatorname{tg}x=-\frac{2}{3}y^4\sin x$.

Варіант 25

1. $yy'=\frac{2+x}{y}$.
2. $y'=\frac{x+2y}{x}$.
3. $y'+(1+\frac{1}{x^2})y=e^{\frac{1}{x}}$.
4. $y'=y\operatorname{ctg}x+\frac{y^3}{\sin x}$.

Варіант 26

1. $S\operatorname{tg}t\cdot dt+dS=0$.
2. $\frac{dx}{dy}=\frac{y}{x}-\frac{x}{y}, \quad y(-1)=2$.
3. $y'-\frac{y}{x+2}=x^2+4x+5$.
4. $xy'+y=\frac{1}{2}xy^2$.

Варіант 27

1. $(1+y^2)xdx+(1+x^2)dy=0$.
2. $xy'\sin\frac{y}{x}=y\sin\frac{y}{x}-x$.
3. $y'+\frac{3y}{x}=7x^3+2x^2$.
4. $(y'+xy)e^x=(x-1)y^2, \quad y(0)=1$.

Варіант 28

1. $y'=y^2\cos 2x, \quad y(\frac{\pi}{2})=1$,
2. $xy'\sin\frac{y}{x}=y\sin\frac{y}{x}-x$.
3. $y'+\frac{y}{x+1}=3x-1$.
4. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2}$.

Варіант 29

1. $(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0$.
2. $(x + 2y)dx - xdy = 0$.
3. $tdx + (x - t\sin t)dt = 0$.
4. $y - y'\cos x = y^2 \cos x(1 - \sin x)$, $y(0) = 1$.

Варіант 30

1. $(x+1)y' + xy = 0$.
2. $tx' + t\cos\dfrac{x}{t} - x + t = 0$.
3. $y'\cos x - 2y\sin x = 2$.
4. $\dfrac{2y' + y\cos x}{1 + \sin x} = y^{-1}\cos x, \quad y\big|_{x=0} = 1.$

Завдання 4.2 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $2y'' - 9y' + 9y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 6$.
2. $y'' + 4y' + 5y = 0$
3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Варіант 2

1. $2y'' + 5y' + 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1$
2. $y'' - 2y' = 5y = 0.$
3. $4y'' + 4y' + y = 0.$

Варіант 3

1. $3y'' + 5y'' - 2y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 4y' + 13y = 0.$
3. $y'' + 2y' + y = 0$

Варіант 4

1. $4y'' + y' - 3y = 0, y(0) = 1{,}5, y'(0) = 0{,}25.$
2. $y'' + 4y = 0.$
3. $y'' - 2y' + y = 0.$

Варіант 5

1. $10y'' - 3y' - y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0{,}1.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 8y' + 16y = 0.$

Варіант 6

1. $3y'' + 11y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 7.$
2. $y'' + 9y = 0.$
3. $y'' - 10y' + 25y = 0.$

Варіант 7

1. $3y'' + 2y' - 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{14}{3}.$
2. $y'' - 4y' + 29y = 0.$
3. $0{,}04y'' + 0{,}4y' + y = 0.$

Варіант 8

1. $4y'' - 17y' = 15y = 0, y(0) = 7, y'(0) = 0{,}5.$
2. $y'' + 16y = 0.$
3. $y'' + y' + 0{,}25y = 0.$

Варіант 9

1. $5y'' - 8y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{1}{5}.$
2. $y'' - 8y' + 20y = 0.$
3. $y'' - 14y' + 49y = 0.$

Варіант 10

1. $y'' - 7y' + 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 5.$
2. $y'' + 8y' + 25y = 0.$
3. $25y'' - 10y' + y = 0.$

Варіант 11

1. $2y'' - 7y' + 6y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 4.$
2. $y'' + 25y = 0.$
3. $4y'' - 12y' + 9y = 0.$

Варіант 12

1. $y'' - y' - 12y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 10.$
2. $y'' - 2y' + 10y = 0.$
3. $y'' + 16y' + 64y = 0.$

Варіант 13

1. $y'' + 14y' + 24y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 20.$
2. $y'' - 4y' + 5y = 0.$

Варіант 14

1. $y'' - 11y' - 60y = 0, y(0) = -1, y'(0) = 4$.
2. $y'' + y' = 0.$
3. $9y'' + 24y' + 16y = 0.$

3. $\frac{1}{4}y'' - y' + y = 0.$

Варіант 15

1. $y'' - y' - 20y = 0, y(0) = -2, y'(0) = 8.$
2. $y'' - 6y' + 10y = 0.$
3. $4y'' - 20y' + 25y = 0.$

Варіант 16

1. $9y'' - 6y' + y = 0, y(0) = 3, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 6y' + 13y = 0.$
3. $y'' - 10y' = 0.$

Варіант 17

1. $y'' + 10y' + 25y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 4y = 0.$

Варіант 18

1. $y'' + 7y' + 6y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 6.$
2. $\frac{4}{9}y'' - \frac{4}{3}y'' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

Варіант 19

1. $4y'' - 8y' + 5y = 0, y(0) - 2, y'(0) = 3.$
2. $y'' + 5y' - 14y = 0.$
3. $16y'' - 40y' + 25y = 0.$

Варіант 20

1. $y'' + 4y' - 12y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 8.$
2. $y'' + 2y' + 10y = 0.$
3. $169y'' + 26y' + y = 0.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' = 0, y(0)2, y'(0)2.$
2. $y'' - 6y' + 34y = 0.$
3. $y'' - 22y' + 121y = 0.$

Варіант 22

1. $y'' + 3y' + 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
2. $81y'' - 18y' + y = 0.$
3. $y'' - 2y' + 17y = 0.$

Варіант 23

1. $y'' - 3y' - 10y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$
2. $100y'' - 20y' + y = 0.$
3. $y'' - 6y' + 25y = 0.$

Варіант 24

1. $4y'' - 7y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{4}.$
2. $y'' + 10y' + 61y = 0.$
3. $121y'' - 44y' + 4y = 0.$

Варіант 25

1. $y'' - 4y' + 4y = 0, y(0) = 3, y'(0) = -1.$
2. $y'' - 8y' + 15y = 0.$
3. $17y'' + 2y' + y = 0.$

Варіант 26

1. $3y'' + 7y' + 3y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + 49y = 0.$
3. $4y'' - 28y' + 49y = 0.$

Варіант 27

1. $y'' + 4y' + 8y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 5y' - 14y = 0.$
3. $1{,}44y'' - 2{,}4y' + y = 0.$

Варіант 28

1. $2y'' - 3y' - 35y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 5.$
2. $y'' - 14y' + 58y = 0.$
3. $81y'' - 36y'' + 4y = 0.$

Варіант 29

1. $y'' - 13y' + 22y = 0, y(0) = -3, y'(0) = 3.$
2. $y'' + 81y = 0.$
3. $y'' - 30y' + 225y = 0.$

Варіант 30

1. $5y'' - 6y' = 0, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' + 26y = 0.$
3. $y'' - 5y' + 6{,}25y = 0.$

Завдання 4.3 Знайти загальний або частинний розв’язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Варіант 1

1. $y'' - 5y' + 4y = x^2 + 1, y(0) = \frac{29}{32}, y'(0) = -\frac{3}{8}.$
2. $y'' + 4y = 8\sin 2x.$
3. $y'' + 5y' + 6y = \frac{1}{1+e^{2x}}.$

Варіант 2

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y''(0) = 11.$
2. $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + \cos 2x.$
3. $y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}.$

Варіант 3

1. $y'' + 4y = 8x, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
2. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x.$
3. $y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}.$

Варіант 4

1. $y'' + 4y' + 4y = 5e^{3x}, y(0) = \frac{1}{5}, y'(0) = \frac{8}{5}.$
2. $y'' - 3y' + 2y = \sin x.$
3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x.$

Варіант 5

1. $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}, y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 3y' = 9x.$
3. $y'' + 4y = tg2x.$

Варіант 6

1. $y'' + 4y = 4\sin x, y(0) = 0, y'(0) = 2.$
2. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$
3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}.$

Варіант 7

1. $y'' - 2y' = x^2 - x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + 2y' + 2y = 4\sin 2x + 2\cos 2x.$
3. $y'' + 5y' + 6y = \left(e^{2x} + 1\right)^{-3/2}.$

Варіант 8

1. $y'' + y = x^2, y(0) = 0, y'(0) = 0.$
2. $\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 2k\sin kt.$
3. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$

Варіант 9

1. $y'' - 2y' + 10y = 5x + 9, y(0) = 4, y'(0) = 6{,}5.$
2. $y'' - 2my' + m^2y = \sin mx.$
3. $y'' - y' = \frac{1}{1+e^x}.$

Варіант 10

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$
2. $y'' + 2y' + 2y = 2x^3 - 2.$
3. $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}.$

Варіант 11

1. $y'' + y = \cos 2x, y(0) = -\frac{1}{3}, y'(0) = 1.$
2. $y'' - 5y' + 4y = 4e^{2x}x^2.$
3. $y'' + 2y' + y = \sqrt{x}e^{-x}.$

Варіант 12

1. $y'' - 2y' = 2e^x, y(1) = -1, y'(1) = 0.$
2. $y'' + y = 4\sin x.$
3. $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x.$

Варіант 13

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x + 3, y(0) = 2, y'(0) = 6.$
2. $y'' + 2y' - 3y = e^x x^2.$
3. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$

Варіант 14

1. $y'' + y = 4e^x, y(0) = 4, y'(0) = -3.$
2. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$
3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}.$

Варіант 15

1. $y'' - 3y' = x + \cos x, y(0) = -\frac{1}{10}, y'(0) = -\frac{1}{9}.$

Варіант 16

1. $y'' - 2y' + y = e^x, y(0) = 1, y'(0) = -2.$
2. $y'' + 4y' + 8y = 20\sin 2x.$

2. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}.$

3. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2} x.$

3. $y'' + y = \frac{1}{\cos^3 x}.$

Варіант 17

1. $y'' - 4y = 8x + 3, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
2. $y'' + 9y = e^x \cos 3x.$
3. $y'' - 4y' - 5y = \frac{e^{6x}}{1 + e^{2x}}.$

Варіант 18

1. $y'' + 2y' + y = x^2 + 3x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$
3. $y'' - 3y' - 4y = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}}.$

Варіант 19

1. $y'' - 8y' + 20y = 20x^2 + 4x + 14, y(0) = 3, y'(0) = 11.$
2. $y'' + 3y' + 2y = 2\sin x + \cos x.$
3. $y'' - y' = e^{2x}\sqrt{1 - e^{2x}}.$

Варіант 20

1. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3, y(0) = \frac{4}{3}, y'(0) = \frac{1}{27}.$
2. $y'' + 4y' = 8e^{4x}.$
3. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}.$

Варіант 21

1. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, y(0) = 2, y'(0) = 0.$
2. $y'' - 3y' = 6e^{3x}.$
3. $y'' + 9y = 2\sin x \sin 2x.$

Варіант 22

1. $4y'' + y' - 3y = 3x^2 + x.$
2. $y'' - y = 8e^x, y(0) = 2, y'(0) = 4.$
3. $y'' - 4y' + 13y = \frac{e^{2x}}{\cos^3 3x}.$

Варіант 23

1. $y'' + 4y = \sin x, y(0) = y'(0) = 1.$
2. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$
3. $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}.$

Варіант 24

1. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}, y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x + 22\cos x.$
3. $y'' + 6y' + 9y = \frac{e^{-3x}}{x^3}.$

Варіант 25

1.
$y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)e^x, y(0) = y'(0) = 0.$
2. $y'' - 8y' + 16y = 32x.$
3. $y'' + 9y = ctg 3x.$

Варіант 26

1.
$y'' - 2y' + y = 4\sin x + 4\cos x, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' + y' = 49 - 2x^2.$
3. $y'' + 10y' + 25y = \frac{e^{-5x}}{\sqrt{1 - 4x^2}}.$

Варіант 27

1. $y'' - 3y' = 6 - 3x^2, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
2. $y'' + y = \sin x - \cos x.$
3. $y'' - 2y'' + y = \frac{2 - x}{x^3} e^x.$

Варіант 28

1. $y'' - 2y' + y = 16e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' - y' - 6y = 6x^2 - 4x + 3.$
3. $y'' - 3y' - 4y = e^{-x} \cos 3x.$

Варіант 29

1.
$y'' - 4y' + 13y = 26x + 5, y(0) = 1, y'(0) = 0.$
2. $y'' + 2y' + y = 3\sin x.$
3. $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^5}.$

Варіант 30

1. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x, y(0) = 1, y'(0) = 2.$
2. $y'' + y' = 49 - 24x^3.$
3. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}.$

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 4.1 Знайти загальний або частинний розв'язок (інтеграл) диференціальних рівнянь першого порядку.

1 $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

2 $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

3 $y' - ytgx = \sec x$, $y(0) = 0$.

4 $xy' + y = \dfrac{1}{2}xy^2$, $y(1) = 2$.

Розв'язання.

1 Розв`яжемо рівняння відносно y': $y' = \dfrac{1-2x}{y^2}$. Отримаємо рівняння типу $y' = f_1(x)f_2(y)$, оскільки $\dfrac{1-2x}{y^2} = (1-2x)\dfrac{1}{y^2}$. Замінимо y' на $\dfrac{dy}{dx}$, тоді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1-2x}{y^2}$.

Помноживши обидві частини на y^2dx, одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$y^2dy = (1-2x)dx,$$

інтегруючи яке, знаходимо $\dfrac{y^3}{3} = x - x^2 + C$ (загальний інтеграл)

або, розв`язавши відносно y, $y = \sqrt[3]{C + 3x - 3x^2}$ (загальний розв'язок).

2 Це рівняння типу $y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$, тобто однорідне відносно змінних x і y диференціальне рівняння першого порядку.

Зробимо заміну $\dfrac{y}{x} = u(x)$, звідки $y = ux$, а $y' = u'x + u.$. Підставляючи ці вирази в дане рівняння, отримаємо

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \qquad \text{або} \qquad x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u},$$

а після відокремлювання змінних $udu = \dfrac{dx}{x}$. Інтегруючи цю рівність, знаходимо $\dfrac{u^2}{2} = \ln|x| + \dfrac{1}{2}\ln|C|$ або $u^2 = \ln\left|Cx^2\right|$. Повертаючись до y, отримаємо загальний інтеграл вихідного рівняння $\dfrac{y^2}{x^2} = \ln\left|Cx^2\right|$, а, розв`язавши відносно $y$, – загальний розв`язок рівняння

$$y = \pm\sqrt{\ln\left|Cx^2\right|}.$$

3 Задане рівняння є лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Знайдемо спочатку його загальний розв`язок. Для цього покладемо $y = uv$, $y' = u'v + v'u$ і підставимо знайдені вирази в рівняння

$$u'v + v'u - uvtgx = \sec x$$

або $u'v + u(v' - vtgx) = \sec x$.

Тоді

1. $v' - vtgx = 0;$

$\frac{dv}{dx} = vtgx;$

$\frac{dv}{v} = tgxdx;$

$\ln|v| = -\ln|\cos x|;$

$v = (\cos x)^{-1} = \frac{1}{\cos x}.$

2. $u'v = \sec x;$

$u'\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos x};$

$u' = 1;$

$u = x + C.$

$y = uv = (x + C)\frac{1}{\cos x}$ - загальний розв\`язок.

При x=0 і y=0 знаходимо значення довільної сталої C

$$0 = (0 + C)\frac{1}{\cos 0} \Rightarrow C = 0.$$

Отже, шуканий частинний розв\`язок рівняння буде мати наступний вигляд: $y = \frac{x}{\cos x}.$

4 Рівняння може бути поданим у вигляді $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{2}y^2$. Отже, це рівняння Бернуллі, де $p(x) = \frac{1}{x}; q(x) = \frac{1}{2}; n = 2.$ Покладемо, що $y = uv;$ $y' = u'v + uv'$. Тоді $u'v + uv' + \frac{uv}{x} = \frac{u^2v^2}{2}$ або $u'v + u(v' + \frac{v}{x}) = \frac{u^2v^2}{2}.$

Одержуємо два рівняння з відокремленими змінними:

1. $v' + \frac{v}{x} = 0$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|$$

$$v = \frac{1}{x}$$

2. $u' = \frac{u^2 v}{2}$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{2x}$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{2x}$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}\ln|x| + C$$

$$-\frac{2}{u} = \ln|x| + \ln|c_1|$$

$$u = -\frac{2}{\ln|C_1 x|}$$

Тоді загальний розв’язок рівняння має вигляд $y = -\frac{2}{x\ln|C_1 x|}.$

При $x = 1$ і $y = 2$ знаходимо значення довільної сталої C:

$2=-\dfrac{2}{\ln|C_1|}\Rightarrow C_1=\dfrac{1}{e}.$ Тому частинний розв'язок рівняння, який задовольняє початковим умовам, буде таким: $y=-\dfrac{2}{x(\ln|x|-1)}.$

Завдання 4.2 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $y''-4y'+3y=0; y(0)=6; y'(0)=10.$

2 $y''-2y'+y=0.$

3 $y''+6y'+13y=0.$

Розв'язання.

1 Спочатку знайдемо загальний розв`язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння $\kappa^2$–$4\kappa$+3 = 0. Його корені $\kappa_1$ = 1 і $\kappa_2$ = 3 дійсні й різні, тому загальний розв`язок має вигляд $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$.

Диференціюючи y, отримаємо $y'=C_1e^x+3C_2e^{3x}$. Використовуючи початкові умови, знаходимо значення C_1 і C_2 із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6=C_1+C_2, \\ 10=C_1+3C_2. \end{cases}$$

Розв`язуючи систему, одержимо $C_1$ = 4, $C_2$ = 2. Підставляючи ці значення в загальний розв`язок, знаходимо шуканий частинний розв`язок $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

2 Складемо характеристичне рівняння κ^2 –2κ +1=0.

Оскільки κ^2 –2κ +1=(κ-1)^2=0, κ_1=κ_2 =1. Корені характеристичного рівняння дійсні й рівні, тому загальний розв`язок запишемо у вигляді $y = (C_1 + C_2x)e^x$.

3 Складемо характеристичне рівняння κ^2+6κ+13=0. Його корені знайдемо за формулою $k_{1,2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\dfrac{p^2}{4}-q}$, згідно з якою

$$k_{1,2}=-3\pm\sqrt{9-13}=-3\pm\sqrt{-4}=-3\pm\sqrt{4i}=-3\pm 2i.$$

Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені ($\kappa_{1,2}=\alpha\pm\beta i$). Отже, α = - 3; β = 2. Тоді загальний розв`язок даного рівняння набуде вигляду

$$y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

Завдання 4.3 Знайти загальний або частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

1 $2y''+y'-y=2e^x.$

2 $y''+y+\sin 2x=0,\ \ y(\pi)=y'(\pi)=1.$

3 $y''-4y'+5y=\dfrac{e^{2x}}{\cos x}$.

Розв'язання. 1 Дане рівняння є ЛНДР – 2 зі сталими коефіцієнтами й спеціальною правою частиною. Його загальний розв`язок шукаємо у вигляді $y=\bar{y}+Y$. Для знаходження $\bar{y}$ ЛОДР – 2, яке відповідає даному ЛНДР – 2: $2y''+y'-y=0$.

Складемо характеристичне рівняння $2\kappa^2+\kappa-1=0$.

Його корені $\kappa_1=-1$ і $k_2=\frac{1}{2}$. Отже, $\bar{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}$.

Підставимо Y, Y', Y'' в дане рівняння: $2Ae^x+Ae^x-Ae^x\equiv 2e^x$. Права частина $f(x)=2e^x$ даного рівняння є функція вигляду $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$, де $\alpha=1$, а $n=0$, тому $Y=Ae^x$ бо $\alpha\neq\kappa_{1,2}$. Диференціюючи Y двічі, отримаємо $Y'=Ae^x, Y''=Ae^x$. Звідки знаходимо $A=1$. Отже, $Y=e^x$, а загальний розв\`язок вихідного рівняння: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{x}{2}}+e^x$.

2 Зведемо рівняння до загального вигляду: $y''+y=-\sin 2x$.

Далі, розв\`язуючи його відповідним методом, будемо мати:

$$y=\bar{y}+Y;$$

$$y''+y=0;\quad \kappa^2+1=0;\quad \kappa_{1,2}=\pm i;\quad \alpha=0;\beta=1;$$

$$\bar{y}=C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Оскільки $f(x)=-\sin 2x$, то $b=2(\pm bi=\pm 2i\neq k_{1,2})$ і тому

$$\begin{array}{c|l} 1 & Y=M\cos 2x+N\sin 2x \\ 0 & Y'=-2M\sin 2x+2N\cos 2x \\ 1 & Y''=-4M\cos 2x-4N\sin 2x \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \cos 2x & M-4M=0; M=0; \\ \sin 2x & N-3N=-1; N=\frac{1}{3}. \end{array}$$

Отже, $Y=\frac{1}{3}\sin 2x$ і загальний розв\`язок неоднорідного рівняння набуде вигляду: $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x$.

Знаходимо $y'=-C_1\sin x+C_2\cos x+\frac{2}{3}\cos 2x.$ Ураховуючи початкові умови: при $x=\pi; y=y'=1,$ отримаємо систему

$$\begin{cases} 1=-C_1, \\ 1=-C_2+\frac{2}{3}, \end{cases}$$

розв’язавши яку, знаходимо $C_1=-1$, $C_2=-\frac{1}{3}$. Підставляючи числові значення C_1 і C_2 в загальний розв\`язок, одержимо шуканий частинний розв\`язок

$$y=-\cos x-\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{3}\sin 2x.$$

3 Задане рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами і правою частиною $f(x)=\frac{e^{2x}}{\cos x}$, яка не є функцією спеціального вигляду. Будемо відшукувати його розв’язок у вигляді $y=C_1(x)y_1+C_2(x)y_2$. Для цього знайдемо частинні розв’язки рівняння $y''-4y'+5y=0$: $k^2-4k+5=0, k_{1,2}=2\pm i, y_1=e^{2x}\cos x, y_2=e^{2x}\sin x.$

Визначник Вронського для y_1 і y_2:

$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{2x}\cos x & e^{2x}\sin x \\ e^{2x}(2\cos x-\sin x) & e^{2x}(2\sin x+\cos x) \end{vmatrix}=e^{4x}\neq 0,$ отже, y_1 і y_2 - лінійно незалежні розв'язки.

Знаходимо: $C_1'(x)=-\dfrac{y_2 f(x)}{W}=-\dfrac{e^{2x}\sin x\cdot\dfrac{e^{2x}}{\cos x}}{e^{4x}}=-tgx,$

звідки $C_1(x)=-\int tgxdx=\ln\left|\cos x\right|+\overline{C}_1;$ $C_2'(x)=\dfrac{y_1 f(x)}{W}=\dfrac{e^{2x}\cos x\cdot\dfrac{e^{2x}}{\cos x}}{e^{4x}}=1,$

$$C_2(x)=\int dx=x+\overline{C}_2.$$

Таким чином, загальний розв'язок даного рівняння набуде вигляду

$$y=e^{2x}(\overline{C}_1\cos x+\overline{C}_2\sin x+\ln\left|\cos x\right|\cdot\cos x+x\sin x).$$

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №5

Кратні та криволінійні інтеграли. Ряди.

Тема 48. Обчислення подвійного інтеграла в прямокутних координатах. Заміна змінних у подвійному інтегралі. Перехід до полярних координат.

Тема 49. Застосування подвійного інтеграла до задач геометрії та механіки.

Тема 50. Обчислення потрійного інтеграла в прямокутних координатах. Обчислення об'єму тіл. Потрійний інтеграл в циліндричних та сферичних координатах.

Тема 51. Означення криволінійного інтеграла 2-го роду, теорема існування, обчислення. Формула Гріна. Обчислення площі плоскої фігури за допомогою криволінійного інтеграла. Умови незалежності криволінійного інтеграла від шляху інтегрування.

Тема 52. Числові ряди. Означення збіжності ряда. Необхідна ознака збіжності. Гармонічний ряд. Числові ряди з додатними членами. Теореми порівняння. Ознака Д'Аламбера та ознаки Коші.

Тема 53. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Абсолютна та умовна збіжність. Функціональні ряди. Степеневі ряди. Теорема Абеля. Радіус та інтервал збіжності.

Тема 54. Ряди Тейлора і Маклорена. Розвинення в ряд Маклорена елементарних функцій. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Тема 55. Ряди Фур`є. Формули для коефіцієнтів. Теорема Діріхле. Ряд Фур`є для парних і непарних функцій. Розвинення в ряд Фур`є функцій на півінтервалі. Розвинення в ряд Фур`є функцій в довільному інтервалі.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 5.1 Розв'язати задачі.

Варіант №1

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (3x+y)dxdy, \qquad D: x=1, y=x^2, y=-\sqrt{x}.$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2 = 2x; \qquad x^2 = 2y.$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-2y+x^2=0, \qquad y^2-4y+x^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=x\sqrt{3}.$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=1, y=0, y^2=4x \quad (y\ge 0); \quad \mu = 7x^2+y.$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (1+z)dxdydz, \qquad V: y=2x^2, \quad y=2, \quad z=0, \quad z=3.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z^2+y^2=x, \quad x=16.$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x^2+1}{\sqrt{1+4x^2}}dL, \quad L: y=x^2, \qquad A(0,0), \qquad B(2,4).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+3x)dy, \qquad L: y=3+0{,}5x, \qquad A(-6;0), B(0;3).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx - 3yzdy + 5zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки $A(1,2,-1)$ і $B(4,3,2)$.

Варіант №2

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)dy.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (3x-7y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$xy=1; \qquad x=1; \qquad x=2 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-4x+y^2=0, \qquad x^2-8x+y^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=1, \;\; x^2+y^2=4, x=0; \;\; y=0 \;\; (y\ge 0, x\ge 0); \mu=(x+y)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (5+z)dxdydz, \qquad V: x=y^2, \;\; x=1, \;\; z=0, \;\; z=2.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}, \;\; x^2+y^2=z^2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{3x^2-5}{\sqrt{1+4x^2}}dL, \quad L: y=x^2, \qquad A(1{,}1), \qquad B(3{,}9) .$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+2x)dy, \qquad L: y=0{,}5x^2-1, \qquad A(-2;1), B(0;-1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} 3x^2dx-2yzdy+4zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки A(-2,3, -1) і B(1,5,2).

Варіант №3

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x+5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=\ln x, \qquad y=0, \qquad x=1, \qquad x=2 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-6y+y^2=0, \qquad x^2-8y+y^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=x\sqrt{3}.$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=1, y=0, y^2=4x \quad (y\ge 0); \quad \mu=7x^2/2+5y .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (2+y)dxdydz, \qquad V: z=x^2, \quad z=1, \quad y=0, \quad y=6.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=x^2+y^2, \quad z=4 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{2x^2+3x-10}{\sqrt{1+9x^4}} dL, \quad L: y=x^3, \qquad A(1,1), \qquad B(2,8) .$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+4x)dy, \qquad L: y=2+0{,}5x, \qquad A(-2;1), B(0;2).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} 2x^2dx-3yzdy+2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(1,3, -1) і B(4,4,2).

Варіант №4

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{e^x} f(x,y)dx.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (5x-2y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^3.$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2-2y=x, \qquad x+y=0.$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-2x+y^2=0, \quad x^2-4x+y^2=0, \quad y=x, \quad y=0.$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=9, \;\; x^2+y^2=16, x=0; \;\; y=0 \;\; (y\ge 0, x\ge 0); \mu=(2x+5y)/(x^2+y^2).$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (2+x)dxdydz, \qquad V: z=y^2, \;\; z=1, \;\; x=0, \;\; x=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=1.$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{2\sqrt{x}(x^2-3x)}{\sqrt{1+4x}}dL, \quad L: y=\sqrt{x}, \qquad A(1,1), \qquad B(4,2).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+4x)dy, \qquad L: y=0{,}5x^2+1, \qquad A(-1;1{,}5), B(0;1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} 3x^2dx-2yzdy+6zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-3,2, -1) і B(1,3,2).

Варіант №5

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x+5y)dxdy, \quad D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^2.$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=4\sqrt{x}, \quad xy=4, \quad x=16.$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-8y+x^2=0, \quad y^2-10y+x^2=0, \quad y=x/\sqrt{3}, \quad y=x\sqrt{3}.$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=2, y=0, y^2=2x \quad (y\ge 0); \quad \mu=7x^2/8+2y.$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (1+x)dxdydz, \quad V: y=z^2, \quad y=1, \quad x=0, \quad x=1.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=1-x^2-y^2, \quad z=0.$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}dL, \quad L: y=e^x, \quad A(\ln 3{,}3), \quad B(\ln 5{,}5).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-4y)dx+(y^2+2x)dy, \quad L: y=3x-1, \quad A(0;-1), B(1;2).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} 2xdx-3y^2zdy+2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки $A(1,3,\text{-}1)$ і $B(5,5,2)$.

Варіант №6

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (4x-5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 = 1+y, \qquad x = y-1 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-4x+y^2=0, \qquad x^2-8x+y^2=0, \qquad y=x, \qquad y=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=1, \;\; x^2+y^2=16, x=0; \;\; y=0 \;\; (y \ge 0, x \ge 0); \mu = (x+y)/(x^2+y^2).$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (1+y)dxdydz, \qquad V: x=z^2, \;\; x=1, \;\; y=0, \;\; y=1.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = x^2+y^2, \;\; z=1 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+4e^{4x}}} dL, \quad L: y=e^{2x}, \qquad A(\ln 2{,}4), \qquad B(\ln 3{,}9) .$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+x)dy, \qquad L: y=0{,}25x^2+1, \qquad A(-2;2), B(0;1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} ydx-4ydy-z^2dz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(1,4, -1) і B(5,3,2).

Варіант №7

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x+7y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt{x}, y=x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2-2y=x, \qquad x+y=0 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-4y+x^2=0, \qquad y^2-6y+x^2=0, \qquad y=x, \qquad x=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=2, y=0, y^2=x/2 \quad (y \geq 0); \quad \mu = 7x^2/2+6y .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (3+z)dxdydz, \qquad V: y=3x^2, \quad y=3, \quad z=0, \quad z=2.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+y^2=1, \quad z=2, \quad z=3 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dL, \quad L: y=\sin x, \qquad A\left(\pi/4, \sqrt{2}/2\right), \qquad B\left(\pi/2, 1\right).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+4x)dy, \qquad L: y=3x+2{,}5, \qquad A(-2;-3{,}5), B(0;2{,}5).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} 2xdx-2y^2zdy+3zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки $A(2,2,2)$ і $B(-2,3,3)$.

Варіант №8

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (5x-8y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2 = 1+x, \qquad y = x-1 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, \qquad x^2 - 10x + y^2 = 0, \qquad y = x\sqrt{3}, \qquad y = 0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2 + y^2 = 4,\ \ x^2 + y^2 = 25, x = 0;\ \ y = 0\ \ (y \le 0, x \ge 0); \mu = (2x-3y)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (7+z)dxdydz, \qquad V: x = 2y^2,\ \ x = 2,\ \ z = 0,\ \ z = 1.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 1 - x^2 - y^2,\ \ x^2 + y^2 = z^2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{\sin 3x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dL, \quad L: y = \sin x, \qquad A\left(\pi/6, 1/2\right), \qquad B(\pi, 0).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2 - 2y)dx + (y^2 + 2x)dy, \qquad L: y = \frac{x^2}{3} + 2, \qquad A(-3;5), B(0;2).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx - 3yzdy + 5zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки $A(2,2,\ 2)$ і $B(-1,-2,3)$.

Варіант №9

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_x^{e^x} f(x,y)dy .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (x+3y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt{x}, y=x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$1-x^2-y=0, \qquad y-x+1=0 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-6y+x^2=0, \qquad y^2-10y+x^2=0, \qquad y=x, \qquad x=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=1, y=0, y^2=4x \quad (y \ge 0); \quad \mu = x+3y^2 .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (1+y)dxdydz, \qquad V: z=2x^2, \quad z=2, \quad y=0, \quad y=4.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z^2+y^2=x, \quad x=1 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{\cos 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dL, \quad L: y=\cos x, \qquad A(0,1), \qquad B\left(\pi/4, \sqrt{2}/2\right).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+2x)dy, \qquad L: y=\frac{x}{3}+5, \qquad A(-3;4), B(0;5).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-5yzdy+3zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки A(-1,2, 2) і B(1,-2,3).

Варіант №10

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y}}^{e^y} f(x,y)dy.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (3x-5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 = 1+y, \qquad x+y=1.$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-2x+y^2=0, \qquad x^2-4x+y^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=x\sqrt{3}.$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=1, \ \ x^2+y^2=9, x=0; \ \ y=0 \ \ (y\le 0, x\ge 0); \mu=(x-y)/(x^2+y^2).$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (1+x)dxdydz, \qquad V: z=2y^2, \ \ z=2, \ \ x=0, \ \ x=4.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=1+\sqrt{1-x^2-y^2} \ \ , \ \ x^2+y^2=1, \ \ z=0.$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x(3x+1)}{\sqrt{1+x^2}}dL, \quad L: y=\ln x, \qquad A(1,0), \qquad B(2,\ln 2).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+4x)dy, \qquad L: y=\frac{x^2}{3}+2, \qquad A(-3;1), B(0;-2).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} 4xdx-5yzdy+3z^2dz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-3,2,2) і B(-1,-2,3).

Варіант №11

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{e^{-x}} f(x, y)dy .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x - 3y)dxdy, \qquad D: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2 = 4x; \qquad x^2 = 4y .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, \qquad y^2 - 4y + x^2 = 0, \qquad y = x\sqrt{3}, \qquad x = 0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x = 1, y = 0, y^2 = x \quad (y \ge 0); \quad \mu = 3x + 6y^2 .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (2 + x)dxdydz, \qquad V: y = 2z^2, \quad y = 2, \quad x = 0, \quad x = 5.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 1 + \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 = z^2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x^2(2x + 3)}{\sqrt{1 + x^4}} dL, \quad L: y = \frac{1}{x}, \qquad A(1,1), \qquad B\left(2, \tfrac{1}{2}\right).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2 - 2y)dx + (y^2 + 2x)dy, \qquad L: y = 0{,}2x + 2, \qquad A(-5;1), B(0;2).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx - 3yzdy + 5zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки A(3,2, 2) і B(-1,-2,4).

Варіант №12

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y)dy.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (3x+7y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$xy=4; \qquad x=2; \qquad x=4 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-2x+y^2=0, \qquad x^2-6x+y^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=9, \; x^2+y^2=25, x=0; \; y=0 \; (y\ge 0, x\le 0); \mu=(2y-x)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (2+y)dxdydz, \qquad V: x=2z^2, \; x=2, \; y=0, \; y=3.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}, \; x^2+y^2=2-z .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \sqrt{\frac{1-x^2}{2-x^2}}(x-2)dL, \quad L: y=\arcsin x, \qquad A(0,0), \qquad B\left(1,\frac{\pi}{2}\right).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+4x)dy, \qquad L: y=0{,}2x^2-2, \qquad A(-5;3), B(0;-2).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-3y^2zdy+5zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-2,2, 2) і B(-1,-2,3).

Варіант №13

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{y} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (7x-5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=\ln x, \qquad y=0, \qquad x=1, \qquad x=3 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-4y+x^2=0, \qquad y^2-6y+x^2=0, \qquad y=x\sqrt{3}, \qquad x=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=2, y=0, y^2=x/2 \quad (y\ge 0); \quad \mu=2x+3y^2 .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (5+z)dxdydz, \qquad V: y=4x^2, \quad y=4, \quad z=0, \quad z=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=1-\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2=(z-2)^2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x^2(4x-5)}{\sqrt{1+x^4}}dL, \quad L: y=\frac{1}{x} \quad A\left(2, 1/2\right), \qquad B\left(3, 1/3\right).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+x^2)dy, \qquad L: y=2x-1, \qquad A(0;-1), B(1;1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-3yzdy+5zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(1,2, 2) і B(-2,-2,3).

Варіант №14

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{-1}^{0} dx \int_{x^2-2}^{-x^2} f(x,y)dy .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (8x-5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2-4y=2x, \qquad x+y=0 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-2x+y^2=0, \qquad x^2-8x+y^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=4,\ \ x^2+y^2=16, x=0;\ \ y=0\ \ (y\ge 0, x\le 0); \mu=(2y-3x)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (8+z)dxdydz, \qquad V: x=3y^2,\ \ x=3,\ \ z=0,\ \ z=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$y=\sqrt{x^2+z^2},\ \ y=2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{3x^2-5}{\sqrt{1+4x^2}}dL, \quad L: y=x^2 \quad A(1,1), \qquad B(3,9).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+0{,}25x)dy, \qquad L: y=5x^2-2, \qquad A(0;-2), B(1;3).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-3yz^2dy+5zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(2,-2, 2) і B(-1,2,3).

Варіант №15

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (5x+7y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt{x}, y=x^3.$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=2\sqrt{x}, \qquad xy=2, \qquad x=4.$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-2y+x^2=0, \qquad y^2-6y+x^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad x=0.$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=1/2, y=0, y^2=8x \quad (y\geq 0); \quad \mu=7x+3y^2.$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (5+y)dxdydz, \qquad V: z=3x^2, \quad z=3, \quad y=0, \quad y=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=4-x^2-y^2, \quad z=0.$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{3x^2+4x-1}{\sqrt{1+9x^4}}dL, \quad L: y=x^3 \quad A(2,8), \quad B(3,27).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^3-2y)dx+(y^2+2x^2)dy, \qquad L: y=3x-2, \qquad A(0;-2), B(1;1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-3yzdy+2z^2dz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-4,2, 2) і B(-1,-2,3).

Варіант №16

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{0}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)dy .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (5x-7y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 = 4+2y, \qquad x = y-2 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-2x+y^2=0, \qquad x^2-4x+y^2=0, \qquad y=0, \qquad y=x\big/\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=9, \;\; x^2+y^2=16, x=0; \;\; y=0 \;\; (y\ge 0, x\le 0); \mu=(2y-5x)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (3+x)dxdydz, \qquad V: z=3y^2, \;\; z=3, \;\; x=0, \;\; x=1.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+y^2=4, \;\; z=3, \;\; z=5 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{2\sqrt{x}(x-5)}{\sqrt{1+4x}}dL, \quad L: y=\sqrt{x} \quad A(4,2), \qquad B(9,3).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+0{,}5x)dy, \qquad L: y=0{,}5x^2-1, \qquad A(-1;-0{,}5), B(0;-1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-3y^2zdy+zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-2,2, 2) і B(-1,-2,5).

Варіант №17

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0} dy \int_{y^2}^{4-y^2} f(x,y)dx.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (5x+7y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt{x}, y=x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2-4y=2x, \qquad x+y=0 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-2y+x^2=0, \qquad y^2-10y+x^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=1, y=0, y^2=4x \quad (y\ge 0); \quad \mu=7x^2+2y .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (4+x)dxdydz, \qquad V: y=3z^2, \quad y=3, \quad x=0, \quad x=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z^2+y^2=x, \quad x=4 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \sqrt{\frac{1-x^2}{2-x^2}}\cdot(x+1)dL, \quad L: y=\arcsin x, \qquad A\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\pi}{6}\right), \qquad B\left(1, \tfrac{\pi}{2}\right).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+2x^3)dy, \qquad L: y=0{,}5x-5, \qquad A(0;-5), B(2;-4).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx-3yzdy+5zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки $A(2,-2,2)$ і $B(-1,2,1)$.

Варіант №18

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^2 dy \int_y^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (3x-8y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2 = 4+2x, \qquad y = x-2 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-2x+y^2=0, \qquad x^2-6x+y^2=0, \qquad y=0, \qquad y=x/\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=1,\ \ x^2+y^2=16, x=0;\ \ y=0\ \ (y\ge 0, x\ge 0); \mu=(x+3y)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (4+y)dxdydz, \qquad V: x=3z^2,\ \ x=3,\ \ y=0,\ \ y=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}\ \ ,\ \ x^2+y^2=4,\ \ z=0 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{3x^3-3}{\sqrt{1+4x^2}}dL, \quad L: y=x^2 \quad A(1,1), \qquad B(2,4).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+2x)dy, \qquad L: y=0{,}5x^2+0{,}5, \qquad A(-1;1), B(0;0{,}5).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-3yzdy+2z^2dz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-3,2, 2) і B(-1,-2,3).

Варіант №19

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^2 dx \int_{0,5x^2}^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)dy.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (9x-2y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$4-x^2-2y=0, \qquad y-x+2=0 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-4y+x^2=0, \qquad y^2-10y+x^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=2, y=0, y^2=2x \quad (y \ge 0); \quad \mu = 7x^2/4 + y/2 .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (3+z)dxdydz, \qquad V: y=5x^2, \quad y=5, \quad z=0, \quad z=3.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=2+\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2=z^2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x^2(4x+5)}{\sqrt{1+x^4}} dL, \quad L: y=\frac{1}{x} \quad A(1,1), \qquad B(2, 1/2).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+2x)dy, \qquad L: y=5x-1, \qquad A(-1;-6), B(0;-1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx-3yzdy+2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(1,2, -2) і B(-1,4,3).

Варіант №20

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2}^{4-y^2} f(x,y)dx.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x+9y)dxdy, \quad D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 = 4+2y, \quad x+y=2 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-2x+y^2=0, \quad x^2-6x+y^2=0, \quad y=x, \quad y=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=1, \quad x^2+y^2=4, x=0; \quad y=0 \quad (y \ge 0, x \ge 0); \mu=(x+2y)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (2+z)dxdydz, \quad V: x=4y^2, \quad x=3, \quad z=0, \quad z=3.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=2-\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2=(z-4)^2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{2x^2-3x--4}{\sqrt{1+4x^2}} dL, \quad L: y=x^2 \quad A(2,4), \quad B(3,9).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx+(y^2+2x)dy, \quad L: y=2x^2-1, \quad A(-1;1), B(0;-1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx-3yzdy+2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки A(1,2, -2) і B(4,-4,3).

Варіант №21

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (4x+5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2 = 6x, \quad x^2 = 6y .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-2y+x^2=0, \qquad y^2-4y+x^2=0, \qquad y=x, \qquad x=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=2, y=0, y^2=2x \quad (y \ge 0); \quad \mu = 7x^2/4 + y .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (3+y)dxdydz, \qquad V: z=4x^2, \quad z=4, \quad y=0, \quad y=3.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$y=\sqrt{x^2+z^2}, \quad y=3 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{3^x}{\sqrt{1+4^x \ln^2 2}} dL, \quad L: y=2^x, \qquad A(2,4), \qquad B(3,8) .$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx + (y^2+3x)dy, \qquad L: y=2x+2, \qquad A(-4;-6), B(0;2).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx - 3y^2zdy + 2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки $A(3,4,-2)$ і $B(-1,5,2)$.

Варіант №22

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{0}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2-4}^{-x^2} f(x,y)dy .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x-5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$xy=9; \qquad x=3; \qquad x=6 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-2x+y^2=0, \qquad x^2-4x+y^2=0, \qquad y=0, \qquad y=x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=1, \;\; x^2+y^2=9, x=0; \;\; y=0 \;\; (y\le 0, x\ge 0); \mu=(2x-y)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (2+x)dxdydz, \qquad V: z=4y^2, \;\; z=4, \;\; x=0, \;\; x=3.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=9-x^2-y^2, \;\; z=0 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{\sin 4x}{\sqrt{1+\cos^2 x}} dL, \quad L: y=\sin x, \qquad A\left(\pi/4, \sqrt{2}/2\right), \qquad B\left(\pi/3, \sqrt{3}/2\right).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+x)dy, \qquad L: y=2x^2+3, \qquad A(-1;5), B(0;3).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx-3yzdy+2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-1,2, -2) і B(5,4,3).

Варіант №23

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{-\sqrt{2}}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{y} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (3x+7y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt{x}, y=x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=\ln x, \qquad y=0, \qquad x=1, \qquad x=4 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-6y+x^2=0, \qquad y^2-8y+x^2=0, \qquad y=x, \qquad x=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=2, y=0, y^2=x/2 \ \ (y\geq 0); \ \ \mu=7x^2/2+8y .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (2+x)dxdydz, \qquad V: y=4z^2, \ \ y=4, \ \ x=0, \ \ x=3.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=x^2+y^2, \ \ z=4 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x^2(2x-1)}{\sqrt{1+x^4}}dL, \quad L: y=\frac{1}{x} \quad A(2, 1/2), \qquad B(3, 1/3)$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+2x^2)dy, \qquad L: y=2x+3, \qquad A(-3;-3), B(0;3).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx-2yzdy+3zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки $A(4,2,-2)$ і $B(3,1,3)$.

Варіант №24

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0} dy \int_{-\sqrt{6-y^2}}^{y} f(x,y)dx.$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x-7y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2-6y=3x, \qquad x+y=0.$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-4x+y^2=0, \qquad x^2-8x+y^2=0, \qquad y=0, \qquad y=x\sqrt{3}.$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=1, \;\; x^2+y^2=25, x=0; \;\; y=0 \;\; (y\le 0, x\ge 0); \mu=(x-4y)/(x^2+y^2).$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (5+y)dxdydz, \qquad V: x=4z^2, \;\; x=4, \;\; y=0, \;\; y=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+y^2=9, \;\; z=3, \;\; z=4.$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{\cos 4x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dL, \quad L: y=\cos x, \qquad A\left(\pi/3, 1/2\right), \qquad B\left(\pi/2, 0\right).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+2x)dy, \qquad L: y=x^2-1, \qquad A(0;-1), B(1;0).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} 2x^2dx-5yzdy+6zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-1,2, -2) і B(-2,3,3).

Варіант №25

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2}^{6-x^2} f(x,y)dy .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x+5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt{x}, y=x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y=3\sqrt{x}, \qquad xy=3, \qquad x=9 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-4y+x^2=0, \qquad y^2-8y+x^2=0, \qquad y=x, \qquad x=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=1, y=0, y^2=4x \quad (y \ge 0); \quad \mu=6x+3y^2 .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (4+z)dxdydz, \qquad V: y=6x^2, \quad y=6, \quad z=0, \quad z=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=6-x^2-y^2, \quad x^2+y^2=z^2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x(3x+4)}{\sqrt{1+x^2}} dL, \quad L: y=\ln x, \qquad A(1,0), \qquad B(2,\ln 2).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2+2x^2)dy, \qquad L: y=3x+2, \qquad A(-1;-1), B(0;2).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx-3yzdy+2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(2,2, -2) і B(-1,1,3).

Варіант №26

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_{-\sqrt{3}}^{0} dy \int_{y^2}^{6-y^2} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x-7y)dxdy, \quad D: x=1, y=\sqrt{x}, y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 = 9+3y, \quad x = y-3 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-4x+y^2=0, \quad x^2-8x+y^2=0, \quad y = x/\sqrt{3}, \quad y = x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=4, \; x^2+y^2=16, x=0; \; y=0 \; (y \le 0, x \ge 0); \mu = (3x-y)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (7+z)dxdydz, \quad V: x=5y^2, \; x=5, \; z=0, \; z=4.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z^2+y^2=x, \quad x=9 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{2^x}{\sqrt{1+9^x \ln^2 3}} dL, \quad L: y=3^x, \quad A(2,9), \quad B(4,81) .$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-2y)dx + (y^2+4x)dy, \quad L: y=3x^2-2, \quad A(0;-2), B(1;1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} 2xdx - yz^2dy + 3zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-1,2, -2) і B(3,4,3).

Варіант №27

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^{\sqrt{3}} dy \int_{y^2}^{6-y^2} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x-9y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2-6y=3x, \qquad x+y=0 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-4y+x^2=0, \qquad y^2-8y+x^2=0, \qquad y=x\sqrt{3}, \qquad x=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=2, y=0, y^2=x/2 \ \ (y \ge 0); \ \ \mu=4x+6y^2 .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (4+y)dxdydz, \qquad V: z=5x^2, \ \ z=5, \ \ y=0, \ \ y=1.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=3+\sqrt{9-x^2-y^2} \ \ , \ \ x^2+y^2=9, \ \ z=0 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x(5x-1)}{\sqrt{1+x^2}} dL, \quad L: y=\ln x, \qquad A(1,0), \qquad B(2,\ln 2)$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^3-4y)dx+(y^2+6x)dy, \qquad L: y=4x+1, \qquad A(-1;-3), B(0;1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-3y^2zdy+4zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки A(-3,2, -2) і B(-1,4,3).

Варіант №28

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x+y)dxdy, \quad D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^3 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$y^2 = 9+3x, \quad y = x-3 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-4x+y^2=0, \quad x^2-6x+y^2=0, \quad y = x/\sqrt{3}, \quad y = x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=4, \; x^2+y^2=9, x=0; \; y=0 \; (y \ge 0, x \le 0); \mu = (y-4x)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (1+x)dxdydz, \quad V: z=5y^2, \; z=5, \; x=0, \; x=4.$$

7 Знайти об’єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z = 3+\sqrt{9-x^2-y^2}, \; x^2+y^2=z^2 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{\cos 3x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dL, \quad L: y=\cos x, \quad A\left(\pi/6, \sqrt{3}/2\right), \quad B(\pi, -1).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2+2y)dx + (y^2+2x)dy, \quad L: y=3x-2, \quad A(0;-2), B(1;1).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx - 7yzdy + 2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з’єднує точки A(-3,2, -2) і B(-1,4,3).

Варіант №29

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (7x+20y)dxdy, \qquad D: x=1, y=-\sqrt[3]{x}, y=x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$9-x^2-3y=0, \qquad y-x+3=0 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$y^2-2y+x^2=0, \qquad y^2-10y+x^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad x=0 .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x=1/2, y=0, y^2=2x \quad (y\ge 0); \quad \mu=4x+9y^2 .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (3+x)dxdydz, \qquad V: y=5z^2, \quad y=5, \quad x=0, \quad x=3.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z=2-\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad x^2+y^2=6-z .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \frac{x^2(5x+7)}{\sqrt{1+x^4}}dL, \quad L: y=\frac{1}{x} \quad A(1,1), \qquad B(3,1/3).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2-3y)dx+(y^2-2x)dy, \qquad L: y=2x-1, \qquad A(1;1), B(2;3).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} xdx-3yzdy+2z^2dz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(1,-2, -2) і B(-1,4,5).

Варіант №30

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_x^{e^x} f(x,y)dy .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (2x+5y)dxdy, \qquad D: x=1, y=\sqrt[3]{x}, y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

$$x^2 = 9+3y, \qquad x+y=3 .$$

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-6x+y^2=0, \qquad x^2-10x+y^2=0, \qquad y = x/\sqrt{3}, \qquad y = x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині:

$$x^2+y^2=4, \;\; x^2+y^2=9, x=0; \;\; y=0 \;\; (y \ge 0, x \le 0); \mu = (y-2x)/(x^2+y^2) .$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint_V (2+y)dxdydz, \qquad V: x=5z^2, \;\; x=5, \;\; y=0, \;\; y=3.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$z^2+y^2=x, \;\; x=16 .$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L \sqrt{\frac{1-x^2}{2-x^2}} \cdot (x-3)dL, \quad L: y = \arcsin x, \qquad A(0,0), \qquad B(1, \pi/2).$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду по лінії L від т. A до т. B:

$$\int_L (x^2+5y)dx + (y^2-3x)dy, \qquad L: y = 2x^2+1, \qquad A(1;3), B(2;9).$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2 dx - 5yzdy + 2zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(-1,2, -2) і B(4,4,3).

Завдання 5.2 Дослідити збіжність числових рядів.

2.01 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{tg\frac{1}{n}}{n\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3^n(n-1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+4}\right)^{-n^2}$.

2.02 а) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3(n^2-1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n+1}(n^4+2)}{(n+1)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{2^n}$.

2.03 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^{n-1}+n-4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+3)!}{(2n+5)5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{1}{2^n}$.

2.04 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{2}{n}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-2}{7n+2}\right)^{\frac{n}{3}}$.

2.05 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+1}{2n^2+3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n!}\sin\frac{3}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{7^n}$.

2.06 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}\sin\frac{1}{2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt[5]{n^3}}{(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6n}{7n+2}\right)^{-n}$.

2.07 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+5n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n(4n+1)}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3n+4}{8n+1}\right)^{\frac{n}{5}}$.

2.08 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\sqrt[4]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n(n+3)}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3n+2)^n}$.

2.09 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(3n+4)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2-2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{5n}$.

2.10 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{6n^3-5}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n3^{n+2}}{5^n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^5 n}$.

2.11 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{3n^2+n-4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctg\frac{2}{n}}{(n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\frac{\pi}{3^n}$.

2.12 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}\sin\frac{1}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n+2}{n3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+2)\ln^2(3n+2)}$.

2.13 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+5}{2n^2+6n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-2}}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{9n+4}\right)^{3n}$.

2.14 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{5n^3-1}{5n^3+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(2n+1)3^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n\ln^2(n\sqrt{2})}$.

2.15 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt[4]{n+3}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^2+3)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{2\pi}{5n}$.

2.16 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}\sqrt[5]{n}}{n!}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(5n)}$.

2.17 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(3n-2)(n+5)}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n\frac{1}{7^n}$.

2.18 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{5}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n^n}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln n}}$.

2.19 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3+\ln^3 n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-3}\sqrt{n^2+4}}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+7}{8n+1}\right)^{2n}$.

2.20 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{(n^2+5)(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+5)}{7^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^4(n+2)}$.

2.21 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!\sqrt[5]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)^n}{6^{n^2}}$.

2.22 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}arctg\frac{1}{(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^3 n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n}{n+3}\right)^n$.

2.23 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{n^3(n+2)^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n^2+2)}{n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$.

2.24 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(n+1)}{n!6^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n-2}{7n+3}\right)^{2n}$.

2.25 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n+1)}{n\ \ +1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{3}{4^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{5n}}$.

2.26 а) $\sum_{n=1}^{\infty}arctg^n\frac{\pi}{3\sqrt[4]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{5^n(n+3)!}$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n}}$.

2.27 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\sqrt[7]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\ln^n(n+4)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\sqrt[6]{\ln(n+2)}}$.

2.28 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+4n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+4}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[5]{\left(\frac{n+3}{5n+2}\right)^{3n}}$.

2.29 а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+\sin^2 2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{4^n n!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\arcsin^n\frac{1}{2n}}$.

2.30 а) $\sum_{n=1}^{\infty} arctg^n\frac{1}{3n^4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{2n}}{(3n-1)!}$; в) $\sum_{n=6}^{\infty}\frac{1}{(n-4)\ln(n-4)}$.

Завдання 5.3 Установити, як збігається ряд: абсолютно, умовно чи розбігається.

3.01 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+2}{n(n+3)}$.

3.02 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(n+2)}$.

3.03 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$.

3.04 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\sqrt[5]{4n+5}}$.

3.05 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cos\frac{2\pi}{5n}$.

3.06 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{2n}$.

3.07 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+3)5^{3n}}$.

3.08 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt[5]{n^2}}$.

3.09 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{5n+2}}$.

3.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln(n+3)}{n+3}$.

3.11 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n\ln(3n)}$.

3.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+5)3^{2n+3}}$.

3.13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\ln\left(1+\frac{2}{n^3}\right)$.

3.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin 4^n}{4^n}$.

3.15 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{arctg\frac{\pi}{3\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{3n+1}}$.

3.16 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(n+5)\left(\frac{8}{3}\right)^n}$.

3.17 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n^2+1}{n^4+5n^2+4}$.

3.18 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n} tg\frac{\pi}{9^n}$.

3.19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{2n}{5^n}$.

3.20 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n(n+1)!}$.

3.21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n}{(n+4)^n}$.

3.22 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^3(n+2)}$.

3.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{tgn\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

3.24 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{2n}{7n+5}$.

3.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^5}$.

3.26 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{\sin\frac{\pi}{3n}}{n^2}$.

3.27 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{2^n(3n+1)}$.

3.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{1}{n^2+4n+1}$.

3.29 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{n(n+2)}{7^n}$.

3.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^4}{e^n}$.

Завдання 5.4 Знайти радіус та область збіжності степеневого ряду.

4.01 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n3^n}$.

4.02 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{n2^n}$.

4.03 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{\sqrt{(2n-1)7^n}}$.

4.04 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{3^{n+1}5^n}$.

4.05 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}x^{2n+1}}{(3n-1)^2}$.

4.06 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{8^n(n+3)}$.

4.07 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2^n(4n+3)}$.

4.08 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+4)x^n}{2^n(n^2+6)}$.

4.09 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

4.10 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n x^n}{\sqrt[7]{n}}$.

4.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)(x-4)^n}{2^n(n+1)}$.

4.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+1)x^{2n}}{9^n}$.

4.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n}}{7^n}x^n$.

4.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{nx^n}{6n+5}$.

4.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$.

4.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+3)!}$.

4.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)(x-3)^n}{(n^2+2)5^n}$.

4.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n3^{n+2}}$.

4.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{(n+3)7^{n+1}}$.

4.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{2n}}{9^n(n+4)}$.

4.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)x^n}{5^n(n^2+1)}$.

4.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n^2 5^n}$.

4.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{\sqrt{n^5+2}}$.

4.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n^2\sqrt{n^3+3}}$.

4.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^{n+1}}$.

4.26 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(x-1)^n}{(n^2+5)2^n}$.

4.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n x^n}{(n+5)!}$.

4.28 $\sum_{n=1}^{\infty}3^{n+1}x^{2n-2}$.

4.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\sqrt{n+2}}{7^n}x^n$.

4.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{5^n x^n}{\sqrt[7]{n^2}}$.

Завдання 5.5 Розвинути функцію в ряд Тейлора.

5.1 $f(x)=\ln(x+2)$ за степенями $x-1$.

5.2 $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $x+1$.

5.3 $f(x)=\sqrt{x}$ за степенями $x-4$.

5.4 $f(x)=\frac{1}{x+2}$ за степенями $x-1$.

5.5 $f(x)=e^{3x}$ за степенями $x-1$.

5.6 $f(x)=\frac{1}{x-4}$ за степенями $x+2$.

5.7 $f(x)=\ln(x+2)$ за степенями $x-1$.

5.8 $f(x)=e^x$ за степенями $x+1$.

5.9 $f(x)=\ln(x+5)$ за степенями $x-1$.

5.10 $f(x)=e^{\frac{x}{a}}$ за степенями $x-a$.

5.11 $f(x) = \cos x$ за степенями $x-\frac{\pi}{2}$.

5.12 $f(x)=x^4$ за степенями $x+1$.

5.13 $f(x)=x^3-3x$ за степенями $x-1$.

5.14 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ за степенями $x+1$.

5.15 $f(x)=\cos^2 x$ за степенями $x-\frac{\pi}{4}$.

5.16 $f(x)=\sqrt{x^3}$ за степенями $x-3$.

5.17 $f(x)=\cos\frac{x}{2}$ за степенями $x-\frac{\pi}{2}$.

5.18 $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $x-5$.

5.19 $f(x)=3x^4+6x^3-2$ за степенями $x-1$.

5.20 $f(x)=tgx$ за степенями $x-\frac{\pi}{4}$.

5.21 $f(x)=\sin 3x$ за степенями $x+\frac{\pi}{3}$.

5.22 $f(x)=\sin x$ за степенями $x-\frac{\pi}{2}$.

5.23 $f(x)=x^4-4x^2$ за степенями $x+2$.

5.24 $f(x)=\cos x$ за степенями $x-\frac{\pi}{4}$.

5.25 $f(x)=x^3-2x^2+5x$ за степенями $x-1$.

5.26 $f(x)=\frac{1}{x}$ за степенями $x-1$.

5.27 $f(x)=x^3-2x^2-5$ за степенями $x+4$.

5.28 $f(x)=e^x$ за степенями $x+2$.

5.29 $f(x)=\cos^2 x$ за степенями $x-\frac{\pi}{3}$.

5.30 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}$ за степенями $x-1$.

Завдання 5.6 Розвинути в ряд Фур'є функції на заданому проміжку.

6.01 $f(x)=x+4;\quad (-\pi;\pi)$

6.02 $f(x)=3x+2;\quad (-2;2)$

6.03 $f(x)=x-3;\quad (-1;1)$

6.04 $f(x)=x^2+1;\quad (-1;1)$

6.05 $f(x)=x^2-1;\quad (-\pi;\pi)$

6.06 $f(x)=5-x;\quad (-1;1)$

6.07 $f(x)=\frac{\pi-x}{3};\quad (-\pi;\pi)$

6.08 $f(x)=-x+7;\quad (-\pi;\pi)$

6.09 $f(x)=4x+2;\quad (-2;2)$

6.10 $f(x)=\frac{\pi+x}{2};\quad (-2\pi;2\pi)$

6.11 $f(x)=3x;\quad (-\pi;\pi)$

6.12 $f(x)=4-\frac{x}{2};\ (-2;2)$

6.13 $f(x)=\frac{\pi}{2}-x;\quad (-\pi;\pi)$

6.14 $f(x)=\begin{cases} x+2; & (-\pi;0) \\ 0; & (0;\pi) \end{cases}$

6.15 $f(x)=2+5x;\quad (-1;1)$

6.16 $f(x)=7x-3;\quad (-1;1)$

6.17 $f(x)=\begin{cases} 2x; & x\in\ (-\pi;0) \\ 3x; & x\in\ (0;\pi) \end{cases}$

6.18 $f(x)=x^2+2;\quad (-\pi;\pi)$

6.19 $f(x)=\begin{cases} x; & (-\pi;0) \\ \pi-x; & (0;\pi) \end{cases}$

6.20 $f(x)=8x+2;\quad (-\pi;\pi)$

6.21 $f(x)=x^2-2;\quad (-\pi;\pi)$

6.22 $f(x)=x-4;\quad (-2;2)$

6.23 $f(x)=x-1;\quad (-2;2)$

6.24 $f(x)=\frac{x}{4};\quad (-4;4)$

6.25 $f(x)=1-\frac{x}{3};\quad (-3;3)$

6.26 $f(x)=2\pi-x;\quad (-\pi;\pi)$

6.27 $f(x)=\begin{cases}0; & (-\pi;0)\\ 3x; & (0;\pi)\end{cases}$

6.28 $f(x)=\dfrac{1+x}{2}$; $(-2;2)$

6.29 $f(x)=|2x|$; $(-1;1)$

6.30 $f(x)=\begin{cases}x+2; & (-2;0)\\ 0; & (0;2)\end{cases}$

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 5.1 Розв'язати задачі.

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx .$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D (3x-5y)dxdy, \qquad D: x=1, \quad y=\sqrt{x}, \quad y=-x^2 .$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y=2-x^2, \quad y=x$.

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-4x+y^2=0, \qquad x^2-2x+y^2=0, \qquad y=x/\sqrt{3}, \qquad y=x\sqrt{3} .$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині: $\mu=\mu(x,y)$: $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \quad x=0, \quad y=0, \quad (y\ge 0, x\ge 0); \quad \mu=kxy$.

6 Обчислити потрійний інтеграл:

$$\iiint_V (2+z)dxdydz, \qquad V: y=x^2, \quad y=1, \quad z=0, \quad z=2.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2+y^2+z^2=2z, \qquad x^2+y^2=z^2$$

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду від т. A(1; 0) до т. B(2;ln2)

$$\int_l \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dl, \qquad l: y=\ln x .$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду від т. A(-1, 1) до т. B(-2,4).

$$\int_l xydx-(x+y)dy, \qquad l: y=x^2 .$$

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx-yzdy+zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки A(1,2, -1) і B(3,3,2).

Розв'язання.

1 Змінити порядок інтегрування в інтегралі

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx .$$

Змінити порядок інтегрування в інтегралі – це означає, що його потрібно записати у вигляді

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \,.$$

Рівняння ліній, що обмежують область інтегрування знайдемо з меж зовнішнього та внутрішнього інтеграла, $y=0,\ \ y=1,\ \ x=\sqrt{y},\ \ x=2-y$. Будуємо цю область (рис. 5.1).

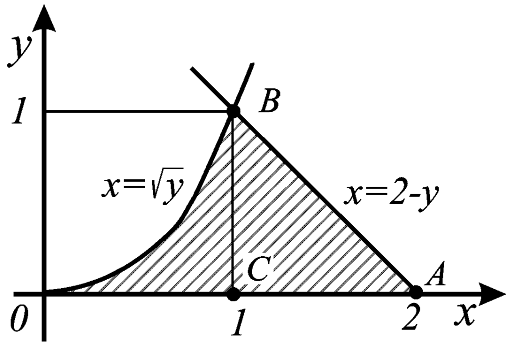


Рис. 5.1

Оскільки лінія *OBA* має на різних ділянках різні рівняння, тому потрібно розбити область *D* на дві: *OBC* і *CBA*.

Знаходимо границі у зовнішньому інтегралі:

$$0 \le x \le 1, \qquad 1 \le x \le 2\,.$$

Розв’яжемо рівняння, що описують область відносно змінної y для кожної з областей : *OBC* : $y=0,\ \ y=x^2$, *CBA* : $y=0,\ \ y=2-x$.

Тому, заданий інтеграл можна записати у вигляді суми двох інтегралів:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{2-y} f(x,y)dx = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$$

2 Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint\limits_D (3x-5y)dxdy, \qquad D: x=1,\ \ y=\sqrt{x},\ \ y=-x^2.$$

Побудуємо задану область *D* (рис. 5.2) та знайдемо межі для x та y:

$$0 \le x \le 1,\ \ -x^2 \le y \le \sqrt{x}\,.$$

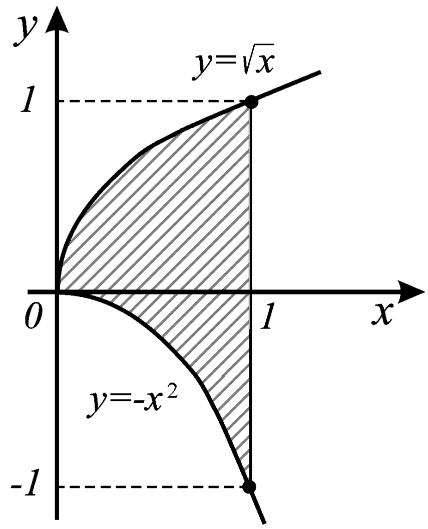


Рис. 5.2

Для обчислення подвійного інтеграла перейдемо до двократного інтеграла по цій області:

$$\iint\limits_D (3x-5y)dxdy = \int_0^1 dx \int_{-x^2}^{\sqrt{x}} (3x-5y)dy\,.$$

У двократному інтегралі спочатку обчислюємо внутрішній інтеграл по змінній y, при сталому значенні x, а потім інтегруємо по змінній x в межах від 0 до 1:

$$\int_0^1 dx \int_{-x^2}^{\sqrt{x}} (3x-5y)dy = \int_0^1 dx \left(3xy - 5\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{-x^2}^{\sqrt{x}} =$$

$$= \int_0^1 \left(3x\sqrt{x} - \frac{5}{2}x + 3x^3 + \frac{5}{2}x^4\right)dx = \left(\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{6}{5}.$$

3 Знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y = 2 - x^2,\ \ y = x$.

Побудуємо задану область та визначимо точки перетину даних ліній (рис. 5.3).

Для знаходження площі застосуємо формулу

$$S=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dy\,.$$

Знайдемо межі інтегрування. В точці перетину ординати рівні, тому:

$$x=2-x^2.$$

Розв'язавши це рівняння, маємо

$$x_1=-2,\qquad x_2=1.$$

Таким чином, отримали дві точки перетину $M_1(-2;-2)$, $M_2(1,1)$.

Звідси маємо шукані межі інтегрування:

$$-2\le x\le 1,\qquad x\le y\le 2-x^2\,.$$

Отже, шукана площа дорівнює:

$$S=\int_{-2}^{1}dx\int_{x}^{2-x^2}dy=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx=$$

$$=\left[2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_{-2}^{1}=4{,}5(\textit{кв.од}).$$

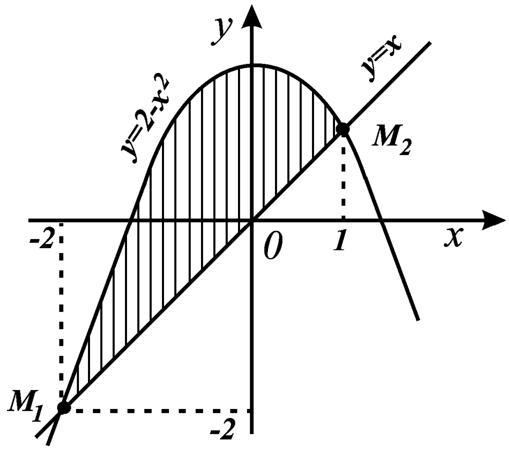


Рис. 5.3

4 Обчислити площу фігури, переходячи до полярних координат:

$$x^2-4x+y^2=0,\qquad x^2-2x+y^2=0,\qquad y=x/\sqrt{3},\qquad y=x\sqrt{3}\,.$$

Площу фігури в полярних координатах знайдемо за формулою:

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho$$

Враховуючи, що: $x^2+y^2=\rho^2$, $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, перетворюємо задані криві до полярних координат:

$\rho^2-4\rho\cos\varphi=0$, $\rho^2-2\rho\cos\varphi=0$,

$tg\varphi=1/\sqrt{3}$ $tg\varphi=\sqrt{3}$, або

$\rho_1(\varphi)=2\cos\varphi$, $\rho_2(\varphi)=4\cos\varphi$,

$$\varphi_1=\frac{\pi}{6},\qquad \varphi_2=\frac{\pi}{3}.$$

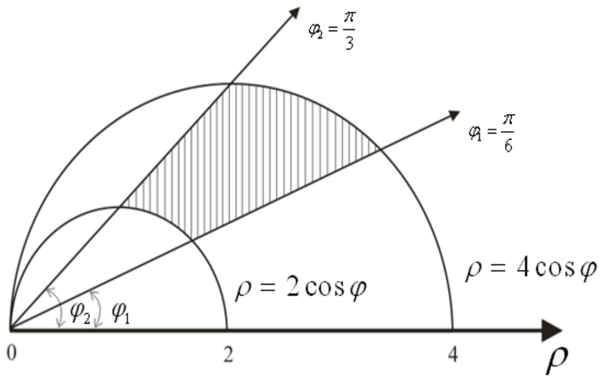


Рис. 5.4

Побудуємо область, що займає дана фігура (рис.5.4):

Таким чином, площа дорівнює:

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}\rho d\rho=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{2\cos\varphi}^{4\cos\varphi}=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}12\cos^2\varphi d\varphi=$$

$$=6\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi=3\left(\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{2}(кв.од).$$

5 Обчислити масу пластинки, обмеженої заданими лініями при заданій густині $\mu=\mu(x,y)$.

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1,\quad x=0,\quad y=0,\quad (y\ge 0, x\ge 0);\quad \mu=kxy,$$

де k - коефіцієнт пропорційності.

Побудуємо область, що займає пластинка (рис.5.5).

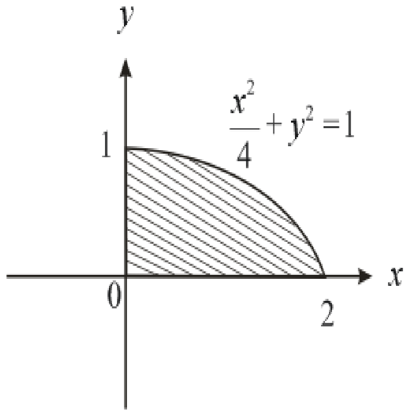


Рис. 5.5

Масу пластинки знайдемо за формулою:

$$m=\iint\limits_D \mu dxdy.$$

Враховуючи, що межі інтегрування по заданій області мають вигляд:

$$0\le x\le 2,\qquad 0\le y\le\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}.$$

Маса дорівнює подвійному інтегралу:

$$m=\iint\limits_D kxydxdy=k\int\limits_0^2 xdx\int\limits_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}ydy=\frac{k}{2}^2\int x\left(y^2\right)\Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}dy=\frac{k}{2\cdot 4}\int\limits_0^2 x(4-x^2)dx=$$

$$=\frac{k}{8}\left(2x^2-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^2=\frac{k}{2}\text{ (од. маси).}$$

6 Обчислити потрійний інтеграл

$$\iiint\limits_V (2+z)dxdydz,\qquad V: y=x^2,\quad y=1,\quad z=0,\quad z=2.$$

Область V, що обмежена заданими поверхнями визначає в просторі прямий параболічний циліндр, твірні якого паралельні осі Oz (рис. 5.6). Заданий потрійний інтеграл перетворимо на повторний:

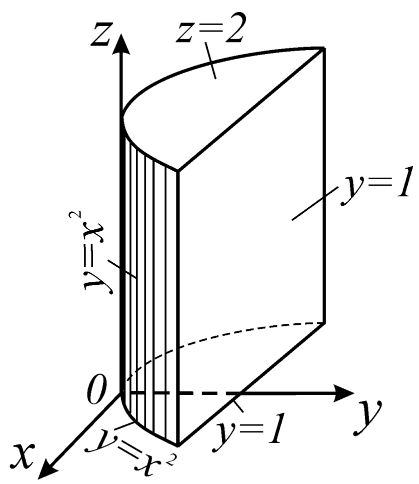


Рис. 5.6

$$\iiint\limits_V (2+z)dxdydz=\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{1}dy\int\limits_0^2(2+z)dz$$

Межі по змінній x знайдено з рівнянь:
$y=x^2, y=1 \Rightarrow x=\pm 1$, а по змінним y та z - з відповідних рівнянь, що описують побудовану область V:

$$-1\le x\le 1,\quad x^2\le y\le 1,\quad 0\le z\le 2.$$

Послідовно обчислюємо інтеграли, починаючи з внутрішнього:

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \int_{0}^{2} (2+z)dz = \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy \left(2z + \frac{z^2}{2}\right)_0^2 = 6\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{1} dy =$$

$$= 6\int_{-1}^{1} dx (y)\Big|_{x^2}^{1} = 6\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2\right)dx = 6\left(x - \frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1} = 8.$$

7 Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2z, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

Задане тіло обмежено сферою та конусом (рис.5.7). Об'єм тіла знаходимо за формулою:

$$V = \iiint_V dxdydz = \iint_D dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$

де D - проекція тіла на площину xOy; лінія , що обмежує область D є коло $x^2 + y^2 = 1$; границі по z знайдені шляхом розв'язання рівнянь сфери та конуса. Перейдемо до полярних координат: $x^2 + y^2 = \rho^2$, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ та знайдемо об'єм:

$$V = \iint_{D'} [(1 + \sqrt{1-\rho^2}) - \rho]\rho d\rho d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho - \rho^2 + \rho\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho =$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3} - \frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)_0^1 = \pi(куб.од)$$

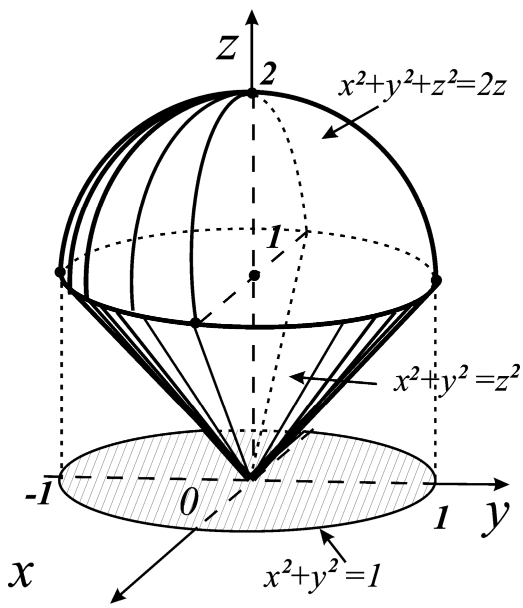


Рис. 5.7

8 Обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду по лінії l від т. А(1; 0) до т. В(2;ln2)

$$\int_l \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dl, \qquad l: y = \ln x.$$

Криволінійний інтеграл 1-го роду знайдемо за формулою:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

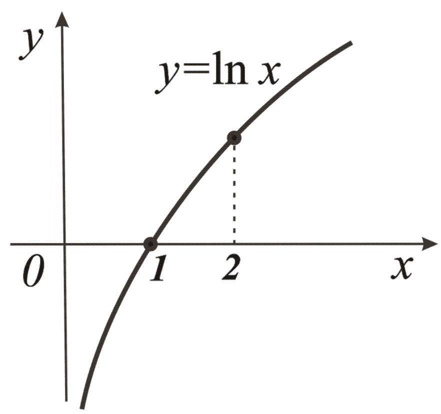


Рис. 5.8

Побудуємо задану криву (рис.5.8) та визначимо границі інтегрування: $1 \le x \le 2$.

Знайдемо похідну функції, що описує дану криву:

$$y'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Враховуючи, що $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}dx = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx$, обчислюємо заданий криволінійний інтеграл:

$$\int_l \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dl = \int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = \int_1^2 2dx = 2.$$

9 Обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{AB} xydx - (x+y)dy$$

по дузі AB параболи $y = x^2$, що з'єднує точки $A(-1, 1)$ і $B(-2, 4)$.

Заданий криволінійний інтеграл 2-го роду можна обчислити за формулою

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + y'(x)Q(x, y(x))]dx,$$

Побудуємо задану параболу (рис.5.9) та визначимо на ній точки A та B:

$$y = x^2, \quad x_A = -1, \quad x_B = -2$$

Враховуючи, що $y = x^2, \quad y'(x) = 2x$, обчислюємо заданий криволінійний інтеграл:

$$\int_{AB} xydx - (x+y)dy = \int_{-1}^{-2}[x^3 - (x + x^2)\cdot 2x]dx =$$

$$= -\int_{-1}^{-2}(2x^2 + x^3)dx = -\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{-2} = \frac{11}{12}.$$

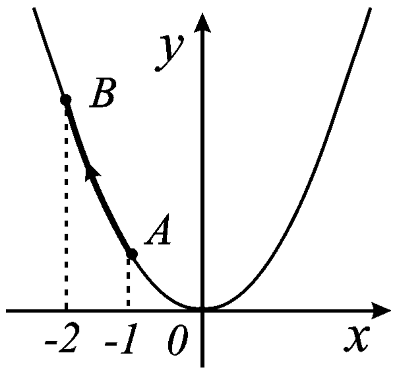


Рис. 5.9

10 Обчислити інтеграл

$$\int_{AB} x^2dx - yzdy + zdz$$

вздовж відрізка AB, що з'єднує точки $A(1,2,-1)$ і $B(3,3,2)$ (рис.5.10).

Складемо рівняння прямої AB, яка проходить через дві точки: A і B:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

Подамо це рівняння в параметричній формі:

$$x = 1 + 2t, \quad y = 2 + t, \quad z = -1 + 3t.$$

Знайдемо диференціали:

$$dx = 2dt, \quad dy = dt, \quad dz = 3dt.$$

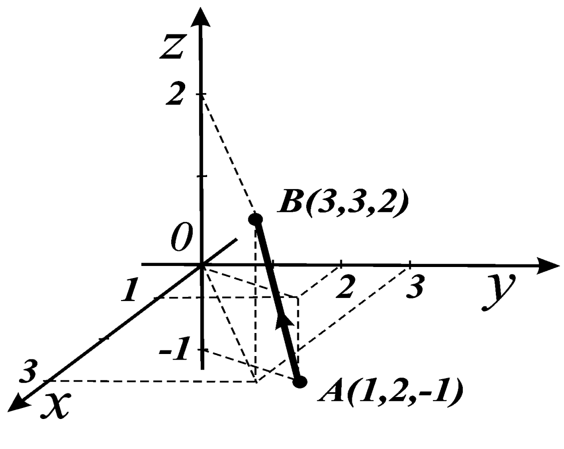


Рис. 5.10

Підставляючи значення x=1, y =2,
z = -1 в параметричні рівняння, маємо, що в точці A(1,2, -1) параметр t = 0, а при x=3, y=3, z=2 в точці B(3,3,2) t =1, тому для відрізка AB параметр t : $0 \le t \le 1$. Отже, інтеграл має вигляд:

$$\int_{AB} x^2 dx - yzdy + zdz = \int_0^1 [2(1+2t)^2 - (2+t)(3t-1) + 3(3t-1)]dt =$$

$$= \int_0^1 (5t^2 + 12t + 1)dt = \left(5\frac{t^3}{3} + 6t^2 + t \right)\Bigg|_0^1 = \frac{26}{3}.$$

Завдання 5.2 Дослідити збіжність числових рядів.

1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 5}$.

2 $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + ... + \frac{n^2}{3^n} + ...$

3 $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + ... + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + ...$

Розв'язання.

1 Для порівняння обираємо ряд узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Цей ряд збіжний, оскільки p = 2 > 1.

За третьою ознакою порівняння рядів маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2 - 4n + 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2n - 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1 \ne 0.$$

Границя відношення загальних членів рядів існує, отже, заданий ряд так само, як і обраний, збігається.

2 Це ряд, що має додатні члени. Застосуємо до нього ознаку Даламбера. Запишемо (n+*1*) – й член ряду $u_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}$. Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 3^n}{3^{n+1} n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2(n+1)}{6n} = \frac{1}{3} < 1,$$

таким чином, ряд збігається.

3 Це ряд, що має додатні члени, його загальний член $u^n = \left(\frac{1}{\ln(n+1)} \right)^n$.

Отже, доцільно застосувати радикальну ознаку Коші

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n+1)} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

таким чином, даний ряд збігається.

Завдання 5.3 Установити, як збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$: абсолютно, умовно чи розбігається.

Розв'язання.

Даний ряд є знакопочережним. Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $1>\frac{1}{2-\ln 2}+\frac{1}{3-\ln 3}>\ldots>\frac{1}{n-\ln n}>\ldots$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n-\ln n}=0.$

Обидві умови виконуються, тому ряд збігається.

Ряд, складений із абсолютних величин даного ряду, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n-\ln n}$ розбігається за другою ознакою порівняння, оскільки має місце нерівність $\frac{1}{n-\ln n}>\frac{1}{n}$. Отже, даний ряд збігається умовно.

Завдання 5.4 Знайти радіус та область збіжності степеневого ряду

$$10x+100x^2+1000x^3+\ldots+10^n x^n+\ldots$$

Розв'язання. Даний ряд є повним степеневим за степенями x. Знайдемо радіус збіжності за формулою $R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$ при $a_n=10^n$;

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^n}}=\frac{1}{10}.$$

Для всіх $x\in\left]-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right[$ ряд збігається. Досліджуємо збіжність ряду в граничних точках $x=-\frac{1}{10}$ і $x=\frac{1}{10}$.

При $x=-\frac{1}{10}$ отримаємо знакопочережний ряд $-1+1-1+\ldots+(-1)^n+\ldots$, який розбігається, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1.$

При $x=\frac{1}{10}$ отримаємо знакододатний ряд 1+1+1+..., який розбігається, оскільки не виконується необхідна умова збіжності числового ряду $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1\neq 0.$

Отже, областю збіжності степеневого ряду є інтервал $\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{10}\right)$.

Завдання 5.5 Розвинути функцію *f(x)= lnx* в ряд Тейлора за степенями (x-1).

Розв'язання.
Обчислимо значення функції та її похідних при $x = a = 1$ функції

$f(x) = lnx,$ $\qquad f(1) = ln1 = 0,$

$f'(x) = \dfrac{1}{x},$ $\qquad f'(1) = 1,$

$f''(x) = -x^{-2},$ $\qquad f''(1) = -1,$

$f'''(x) = 1 \cdot 2x^{-3},$ $\qquad f'''(1) = 1 \cdot 2 = 2!,$

$f^{IV}(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3x^{-4},$ $\qquad f^{IV}(1) = -1 \cdot 2 \cdot 3 = 3!,$

.... $\qquad$ ....

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n},$ $\qquad f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}(n-1)!.$

Підставляючи дані значення до ряду Тейлора для довільної функції, отримаємо

$$\ln x = 0 + (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2!(x-1)^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(x-1)^n}{n!} + \ldots =$$

$$= x - 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n} + \ldots$$

Завдання 5.6 Розвинути періодичну з періодом $2l$ функцію $f(x) = 2x - 3$ в ряд Фур'є в інтервалі (-3;3).

Розв'язання. Подамо функцію графічно (рис. 5.11).

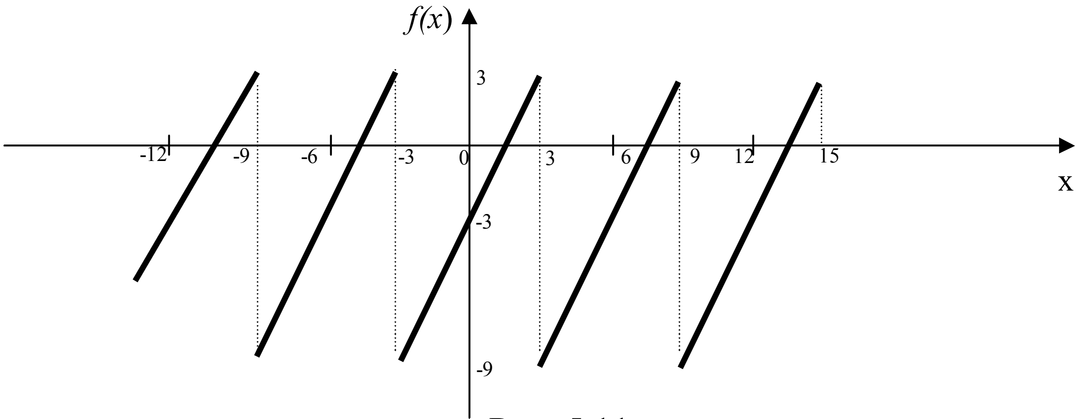


Рис. 5.11

У цьому випадку $2l = 6$, $l = 3$.

Знаходимо коефіцієнти Ейлера-Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)dx = \frac{1}{3}\left(x^2 - 3x\right)\Big|_{-3}^{3} = \frac{1}{3}\left[(9-9)-(9+9)\right] = -6,$$

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)\cos\frac{\pi nx}{3}dx = \left|\begin{matrix} u = 2x-3, & du = 2dx \\ dv = \cos\dfrac{\pi nx}{3}dx, & v = \dfrac{3}{\pi n}\sin\dfrac{\pi nx}{3}\end{matrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(2x-3)\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3} - \int_{-3}^{3}\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}2dx\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{6}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Big|_{-3}^{3} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3}(2x-3)\sin\frac{\pi n x}{3}dx = \left| \begin{matrix} u = 2x-3, & du = 2dx \\ dv = \sin\frac{\pi n x}{3}dx, & v = -\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-(2x-3)\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}\Bigg|_{-3}^{3} - \int_{-3}^{3}\left(-\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi n x}{3}2dx\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[-3\cdot\frac{3}{\pi n}(-1)^n - 9\cdot\frac{3}{\pi n}(-1)^n + \frac{6}{\pi n}\cdot\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi n x}{3}\Bigg|_{-3}^{3}\right] = -\frac{12}{\pi n}(-1)^n = \frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}.$$

Таким чином, ряд Фур`є для даної функції має вигляд

$$f(x) = -3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{\pi n}(-1)^{n+1}\sin\frac{\pi n x}{3}$$

або $f(x) = -3 + \frac{12}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot\sin\frac{\pi n x}{3}.$

ПРОГРАМА МОДУЛЯ №6

Теорія ймовірностей та математична статистика.

Тема 56. Елементи комбінаторики: розміщення, перестановки, сполучення. Класифікація подій. Означення класичної ймовірності, її властивості. Статистична ймовірність та відносна частота.

Тема 57. Теорема додавання ймовірностей несумісних подій. Повна група подій. Теорема множення ймовірностей незалежних подій. Імовірність появи хоча б однієї події. Умовна ймовірність. Теорема множення ймовірностей залежних подій. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій. Формула повної ймовірності. Теорема Байєса.

Тема 58. Повторні випробування. Формула Бернуллі та Пуасона. Локальна та інтегральна теореми Лапласа. Імовірність відхилення відносної частоти від сталої ймовірності.

Тема 59. Випадкові величини. Закони розподілу й числові характеристики дискретних випадкових величин. Інтегральна та диференціальна функції розподілу, їх властивості, графіки.

Тема 60. Рівномірний та нормальний закони розподілу, їх числові характеристики, графіки. Імовірність заданого відхилення. Правило трьох сигм. Закон великих чисел.

Тема 61. Вибірковий метод. Генеральна та вибіркові сукупності. Вибірка, способи відбору. Емпірична функція розподілу, її властивості. Полігон і гістограма. Статистичні оцінки параметрів розподілу. Оцінювання генеральної середньої за вибірковою.

Тема 62. Генеральна й вибіркова дисперсії. Оцінювання генеральної дисперсії за виправленою вибірковою. Точність оцінок. Надійна ймовірність та надійний інтервал. Надійні інтервали для оцінки математичного сподівання нормального розподілу при відомому середньому квадратичному відхиленні.

Тема 63. Елементи теорії кореляції. Умовні середні. Кореляційна таблиця. Знаходження параметрів вибіркового рівняння прямої лінії регресії за незгрупованими та згрупованими даними.

Варіанти індивідуальних домашніх завдань

Завдання 6.1

Варіант 1

У партії 20% нестандартних деталей. Навмання беруть 3 деталі.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи нестандартних деталей серед відібраних;

2 Побудувати многокутник розподілу;

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 2

У трьох урнах міститься по 8 чорних і 2 білих кулі. Із кожної урни навмання беруть по одній кулі.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи білих куль серед відібраних.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 3

Імовірність того, що баскетболіст влучить в корзину під час одного кидання, дорівнює 0,9. По корзині було здійснено 3 кидання:

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа влучень баскетболістом по корзині.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 4

Імовірність того, що покупець, який навідався до взуттєвого магазину, здійснить покупку, дорівнює 0,7. У магазин завітало три покупці.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа покупців, які здійснять покупку в магазині.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 5

У партії з 7 деталей 4 – стандартні. Навмання відібрані 3 деталі.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних деталей серед відібраних.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 6

Пристрій складається з трьох незалежно працюючих елементів. Імовірність відмови кожного елемента в даному експерименті дорівнює 0,8.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа елементів, які відмовили в даному експерименті.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 7

Проведено 3 незалежних випробування. Імовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,6.

Потрібно:

1Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи події в трьох випробуваннях;

2 Побудувати многокутник розподілу;

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 8

Перевіркою якості встановлено, що з кожних 100 деталей 75 не мають дефекту. Навмання беруть 3 деталі.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа деталей без дефекту серед взятих трьох.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 9

Проводиться 3 незалежних випробування, ймовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 2/3.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа можливих виходів появи події.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 10

У місті 3 оптових бази. Імовірність того, що потрібний товар відсутній на цих базах дорівнює 0,2.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа баз, на яких товар відсутній.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 11

Імовірність того, що в даний день робочого тижня на заводі не буде витрачено електроенергії вище норми, дорівнює 0,8.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа днів в тиждень при п`яти робочих днях в тижні, в який електроенергія витрачена вище норми.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 12

Імовірність влучень в ціль при одному пострілі дорівнює 0,7. Зроблено 3 постріли.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа влучень в ціль.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 13

Імовірність придбання в магазині потрібної студенту книги дорівнює 0,3. У місті 3 магазини.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа магазинів, які відвідав студент.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 14

Гральну кістку кинули 3 рази.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа випавших шестірок, що з'явилися.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 15

Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа хлопчиків в сім'ї, де троє дітей.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 16

У грошовій лотереї 50 білетів. Розігрується 2 виграшу по 10 гривень і один – 30 гривень.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – вартості можливого виграшу для володаря 1 білета.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 17

У партії 25 виробів, серед яких 6 – бракованих, навмання відібрані 3 вироби.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа бракованих виробів серед відібраних.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 18

Імовірність влучення м`яча в корзину при одному киданні дорівнює 0,6. Проведено 3 кидання.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа влучень м`яча в корзину.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 19

На базу поступило 1000 приборів. Імовірність пошкодження прибору в дорозі дорівнює 0,003.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа пошкоджених приборів в дорозі.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 20

Імовірність влучення в літак при кожному пострілі з гармати дорівнює 0,8. Зроблено 3 постріли.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа влучень в літак.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 21

Серед 10 годинників 6 – потрібен ремонт. Навмання відбираються 3 годинники:

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа годинників, що не потребують ремонт, серед відібраних.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 22

У партії з 10 виробів 8 – стандартних. Навмання відбираються 3 вироби.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа стандартних виробів серед відібраних.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 23

Імовірність влучення в ціль при одному пострілі з гармати дорівнює 0,4. Зроблено 3 постріли.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа влучень з гармати при 3 пострілах.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 24

У рекламних цілях торгова фірма вкладає у кожну десяту одиницю товару приз 1000 гривень. Зроблено 3 покупки.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – розміру виграшу в результаті зроблених покупок.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 25

Двом танкам необхідно подолати мінне поле. Імовірність того, що перший танк подолає мінне поле дорівнює 0,6, другий – 0,7.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа танків, що подолали мінне поле.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 26

На шляху руху автомобіля 3 світлофори, кожен з яких дозволяє, або забороняє подальший рух із імовірністю 0,5.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа світлофорів, пройдених автомобілем до першої зупинки.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 27

У деякому цеху брак складає 10 % від усіх виробів. Навмання беруть 3 вироби.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа бракованих виробів серед відібраних.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 28

На 20 приладів припадає 6 – неточних. Навмання беруть 3 прилади.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа точних приладів серед відібраних.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 29

Із 10 телевізорів, виставлених на виставці, 4 виявились фірми “Soni”. Навмання для огляду взято 3 телевізори.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа телевізорів фірми “Soni” серед взятих.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X), D(X), \sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Варіант 30

Радіолокаційна станція здійснює спостереження за трьома об`єктами, кожен з яких може бути втраченим з імовірністю 0,1.

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа об`єктів, які можуть бути втраченими.

2 Побудувати многокутник розподілу.

3 Знайти числові характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

Завдання 6.2 Дана щільність $f(x)$ розподілу випадкової величини X.
Знайти:

1 Коефіцієнт с.

2 Інтегральну функцію розподілу $F(x)$.

Побудувати графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$.

4 Числові характеристики $M(X)$; $D(X)$; $\sigma(X)$.

Варіант 1

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ c, & -2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Варіант 2

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ cx-\dfrac{1}{2}, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Варіант 3

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ cx^2, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Варіант 4

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ cx^3, & 1<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Варіант 5

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ c(x+3)\ , & -2<x\le -1,\\ 0, & x>-1.\end{cases}$$

Варіант 6

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ c(2-x)\ , & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Варіант 7

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -2,\\ 4c\ , & -2<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Варіант 8

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ cx\ , & 1<x\le 4,\\ 0, & x>4.\end{cases}$$

Варіант 9

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ cx^4, & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Варіант 10

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ cx(x+1)\ , & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Варіант 11

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ cx^2, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Варіант 12

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ cx(1-x)\ , & 0<x\le 1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Варіант 13

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ 2cx\ , & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Варіант 14

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ c(4x-x^3)\ , & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Варіант 15

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ c(3x-x^2)\ , & 0<x\le 3, \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Варіант 16

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ c(x^2+2x)\ , & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Варіант 17

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2, \\ c(x^2+x-6)\ , & 2<x\le 3, \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Варіант 18

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ c\sqrt[3]{x}\ , & 0<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Варіант 19

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2, \\ c(x+2)\ , & -2<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Варіант 20

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ c(1-x^2)\ , & -1<x\le 1, \\ 0, & x>1. \end{cases}$$

Варіант 21

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1, \\ c(x+1)\ , & -1<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Варіант 22

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3, \\ c(x+3)\ , & -3<x\le 0, \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Варіант 23

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ c(x^2+x-2)\ , & 1<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Варіант 24

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 3, \\ c(x^2-4x-3)\ , & 3<x\le 4, \\ 0, & x>4. \end{cases}$$

Варіант 25

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -3, \\ c(x^2+3x)\ , & -3<x\le -2, \\ 0, & x>-2. \end{cases}$$

Варіант 26

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -2, \\ c(x^2+2x)\ , & -2<x\le -1, \\ 0, & x>-1. \end{cases}$$

Варіант 27

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2, \\ c(x^2-2x)\ , & 2<x\le 3, \\ 0, & x>3. \end{cases}$$

Варіант 28

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -4, \\ c(x^2+4x)\ , & -4<x\le -3, \\ 0, & x>-3. \end{cases}$$

Варіант 29

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -5,\\ c(x^2+7x-10)\ , & -5<x\le -4,\\ 0, & x>-4.\end{cases}$$

Варіант 30

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le -4,\\ c(x^2+6x-8)\ , & -4<x\le -3,\\ 0, & x>-3.\end{cases}$$

Завдання 6.3 Дана щільність *f(x)* рівномірно розподіленої випадкової величини *X* (таблиця 4).

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Знайти:

1 інтегральну функцію розподілу *F(x);*

2 побудувати графіки функцій *F(x), f(x);*

3 числові характеристики рівномірного розподілу *M(X), D(X),* σ*(X).*

Таблиця 4

Варіант	*a*	*b*	**Варіант**	*a*	*b*
1	1	5	**16**	7	11
2	2	7	**17**	8	13
3	3	6	**18**	9	12
4	4	8	**19**	1	6
5	5	9	**20**	2	5
6	6	10	**21**	3	7
7	7	12	**22**	4	8
8	8	11	**23**	5	9
9	9	14	**24**	6	11
10	1	4	**25**	7	10
11	2	6	**26**	8	12
12	3	5	**27**	9	14
13	4	8	**28**	1	3
14	5	7	**29**	2	5
15	6	9	**30**	3	8

Завдання 6.4 Неперервна випадкова величина має нормальний розподіл. Її математичне сподівання дорівнює *a*, середнє квадратичне відхилення σ (таблиця 5).

Знайти:

1 імовірність попадання випадкової величини *X* в інтервал *(*α*;* β*);*

2 імовірність абсолютної величини відхилення випадкової величини *X* від її математичного сподівання;

3 імовірність того, що $|X-M(X)|<\varepsilon$, якщо відома дисперсія *D(X).*

Таблиця 5

Варіант	a	σ	α	β	δ	ε	$D(X)$
1	10	1	8	14	2	0.2	0.004
2	12	2	8	14	4	0.3	0.009
3	14	3	10	15	6	0.4	0.016
4	16	2	15	18	8	0.5	0.025
5	18	1	16	21	10	0.6	0.036
6	20	2	17	22	12	0.1	0.001
7	24	1	20	26	14	0.15	0.0225
8	26	3	23	27	16	0.16	0.0256
9	28	2	24	30	18	0.17	0.0289
10	30	1	27	32	20	0.18	0.0324
11	32	3	30	35	3	0.2	0.004
12	34	1	30	36	5	0.3	0.009
13	36	2	34	37	7	0.4	0.016
14	38	3	37	41	9	0.5	0.025
15	40	2	39	42	11	0.6	0.036
16	40	4	36	43	1	0.1	0.001
17	38	2	35	40	2	0.15	0.0225
18	42	4	40	43	3	0.16	0.0256
19	44	5	41	45	3	0.17	0.0289
20	45	5	43	48	2	0.18	0.0324
21	46	4	44	48	1	0.2	0.004
22	48	5	45	49	4	0.3	0.009
23	50	6	48	53	5	0.4	0.016
24	52	4	50	55	6	0.5	0.025
25	54	3	53	56	7	0.6	0.036
26	56	4	55	58	2	0.1	0.001
27	58	5	56	61	8	0.15	0.0225
28	60	6	58	63	4	0.16	0.0256
29	62	5	59	64	5	0.17	0.0289
30	64	6	60	66	7	0.18	0.0324

Завдання 6.5 Розв’язати задачі, використовуючи теорію випадкових величин.

Варіант 1

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,1. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,9$, а дисперсія $D(X) = 0,09$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=12$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$. Знайти інтервал, у який із імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Оцінити ймовірність того, що число осіб, які мають вищу освіту, в групі з 800 чоловік, відрізняється від свого математичного сподівання, рівного 200, менше, ніж на 40.

Варіант 2

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,3. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,7$, а дисперсія $D(X) = 0,21$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=10$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 6$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Скільки повинно бути проведено незалежних вимірювань деякої величини, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,95, можна було стверджувати, що середнє арифметичне результатів вимірювання відрізняється від істинного значення за абсолютною величиною менше, ніж на 2, якщо середнє квадратичне відхилення кожної величини менше 10?

Варіант 3

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,5. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,5$, а дисперсія $D(X) = 0,25$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=8$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Імовірність виготовлення нестандартної радіолампи дорівнює 0,02. Яку кількість радіоламп треба відібрати, щоб з імовірністю більшою 0,8, можна було стверджувати, що частина серед них нестандартних радіоламп буде відрізняться від імовірності виготовлення нестандартної лампи за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,005?

Варіант 4

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,3$, а дисперсія $D(X) = 0,21$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=10$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 При штампуванні 70 % виробів є першосортними. Скільки треба взяти виробів, щоб з імовірністю, яка не перевищує 0,9973, можна було б стверджувати, що частина першосортних серед них буде відрізняться за абсолютною величиною від імовірності $p = 0,7$ не більше, ніж на 0,05?

Варіант 5

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,1$, а дисперсія $D(X) = 0,09$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=9$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Середня вага картоплини дорівнює 120 г. Яка ймовірність того, що навмання взята картоплина має вагу не більше 360 г?

Варіант 6

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 2,2$, а дисперсія $D(X) = 0,36$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=9$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 6$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Середнє число молодих спеціалістів, яких щорічно направляють до аспірантури, складає 200 чоловік. Оцінити ймовірність того, що в цьому році до аспірантури буде направлено не більше 220 молодих спеціалістів.

Варіант 7

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,2$, а дисперсія $D(X) = 0,16$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=7$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Імовірність появи події А в кожному випробуванні $p=0,5$. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що число появи події А включено в межах від 40 до 60, якщо буде проведено 100 випробувань.

Варіант 8

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,4$, а дисперсія $D(X) = 0,24$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=10$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 3$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Імовірність виготовлення нестандартного виробу в деяких технологічних умовах дорівнює 0,1. Оцінити ймовірність того, що число

нестандартних виробів серед 10000 буде включено в межах від 950 до 1030 включно.

Варіант 9

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,4. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,6$, а дисперсія $D(X) = 0,24$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=8$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Імовірність сходження насіння деякої культури дорівнює 0,75. Оцінити ймовірність того, що з посіяних 1000 зерен насіння, зійде від 700 до 800 зерен включно.

Варіант 10

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,8$, а дисперсія $D(X) = 0,16$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=11$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Електростанція обслуговує мережу в 20000 ламп, імовірність включення кожної з яких в зимовий період дорівнює 0,8. Яка ймовірність того, що число ламп, включених в мережу зимовим вечором, відрізняється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 300.

Варіант 11

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,2. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 2,6$, а дисперсія $D(X) = 0,64$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=9$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Імовірність появи події А в кожному з 1500 випробувань дорівнює 0,4. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що відхилення числа появи цієї події від математичного сподівання буде більше 25.

Варіант 12

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,2$, а дисперсія $D(X) = 0,36$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=14$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Число телевізорів вищої якості складає в середньому 75 % від їх загального випуску. Оцінити за допомогою нерівності Чебишева ймовірність того, що серед 2000 телевізорів число телевізорів вищої якості буде від 1790 до 1920 включно.

Варіант 13

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 1,8$, а дисперсія $D(X) = 2,56$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=12$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 6$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Скільки треба перевірити виробів, щоб з імовірністю, не меншою ніж 0,98, можна було б чекати, що абсолютна величина відхилення частоти придатних виробів від імовірності виробу бути придатним, рівній 0,95, не перевищує 0,01.

Варіант 14

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 1,2$, а дисперсія $D(X) = 0,16$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=14$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Імовірність того, що випущений годинник має точність ходу в межах стандарту, дорівнює 0,97. Оцінити ймовірність того, що серед 1000 годинників частина годинників з точністю ходу в межах норми відхилиться за абсолютною величиною від імовірності 0,97 не більше, ніж на 0,02.

Варіант 15

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 2,2$, а дисперсія $D(X) = 3,36$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=15$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 У процесі штампування платівок з пластмаси за даними ВТК брак складає 3%. Знайти ймовірність того, що під час перегляду партії в 2000 платівок виявиться відхилення від установленого процента браку менше, ніж на 1 %.

Варіант 16

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,3. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,7$, а дисперсія $D(X) = 0,21$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=14$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 7$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Дисперсія кожної з попарно незалежних випадкових величин не перевищує 6. Визначити, скільки таких випадкових величин треба взяти, щоб з імовірністю, не менше 0,99, можна було б стверджувати, що $\left|\overline{X} - M(\overline{X})\right|$ не перевищує 0,25.

Варіант 17

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3{,}2$, а дисперсія $D(X) = 0{,}16$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=14$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Дисперсія кожної з попарно незалежних 15000 випадкових величин не перевищує 8. Оцінити ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від математичного сподівання їх середньої не перевищує 0,3.

Варіант 18

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,4. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 2{,}8$, а дисперсія $D(X) = 2{,}16$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=14$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 9$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Відомо, що дисперсія кожної з незалежних випадкових величин не перевищує 4. Визначити число таких величин, при якому ймовірність відхилення середнього арифметичного випадкових величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань не більше, ніж на 0,25, перевищує 0,99.

Варіант 19

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,5. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 4{,}5$, а дисперсія $D(X) = 0{,}25$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=15$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Довжина виробляємих стержнів представляє випадкову величину з математичним сподіванням рівним 90 см і дисперсією – 0,0225. Оцінити ймовірність того, що відхилення довжини виробленого стержня від математичного сподівання за абсолютною величиною не перевищує 0,4 см.

Варіант 20

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,5. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,0$, а дисперсія $D(X) = 1,0$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=14$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Середнє значення довжини виробу 50 см, а дисперсія 0,1. Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що навмання взятий виріб буде за довжиною не менше 49,5 і не більше 50,5 см.

Варіант 21

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,4. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 2,2$, а дисперсія $D(X) = 0,96$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням a=14 і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 4$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Скільки повинно бути проведено незалежних вимірювань деякої величини, щоб з імовірністю, не меншою, ніж 0,98 можна було стверджувати, що середнє арифметичне результатів вимірювання відрізняється від істинного значення за абсолютною величині менше, ніж на 0,01, якщо дисперсія кожного результату вимірювання не перевищує 1?

Варіант 22

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,6. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 2,4$, а дисперсія $D(X) = 0,24$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=16$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 9$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Дискретна випадкова величина задана законом розподілу

X	*0,3*	*0,6*
P	0,2	0,8

Використовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,2$.

Варіант 23

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,3. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3,4$, а дисперсія $D(X) = 0,84$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=16$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 5$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Нехай в результаті 100 незалежних спроб знайдені значення випадкової величини X: $x_1, x_2, ..., x_{100}$. Відомі: математичне сподівання $M(X) = 10$ і дисперсія $D(X) = 1$. Оцінити ймовірність того, що абсолютна величина різниці між середнім арифметичним $\overline{X}$ значень, що спостерігаються, випадкової величини і математичним сподіванням менше 0,5.

Варіант 24

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 1,3$, а дисперсія $D(X) = 0,21$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=15$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 8$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Імовірність появи події в кожному випробуванні дорівнює 0,3. Застосувавши нерівність Чебишева, знайти число випробувань, необхідних для того, щоб імовірність відхилення частоти події від її ймовірності була б за абсолютною величиною більше 0,99.

Варіант 25

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,1. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 1,9$, а дисперсія $D(X) = 0,09$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=15$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 7$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Зріст дорослих чоловіків в їх сукупності, що розглядається, є нормально розподіленою величиною з математичним сподіванням a = 170 см і дисперсією D = 36 см. Визначити ймовірність того, що хоча б один навмання вибраний дорослий чоловік буде мати зріст від 165 см до 175 см.

Варіант 26

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,7. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 1,6$, а дисперсія $D(X) = 0,84$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням а=18 і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 7$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Діаметр виготовлених поршнів є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом, з математичним сподіванням a = 4 і дисперсією $D(X) = 9*10^{-6}$. Поршні з діаметром 3,994 і 4,006 є браком. Який при цих умовах очікується процент браку?

Варіант 27

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,5. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 2,5$, а дисперсія $D(X) = 0,25$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=14$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 2$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Відхилення довжини виготовлених виробів від стандарта є випадковою величиною, розподіленою за нормальним законом. Якщо стандартна довжина дорівнює 40 см і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0,4$ см, тоді яку точність довжини виробу можна гарантувати з імовірністю 0,8?

Варіант 28

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,8. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 1,4$, а дисперсія $D(X) = 0,64$.

2 Випадкова величина Х розподілена нормально з математичним сподіванням $a=18$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 10$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 У читальному залі установлено 200 настільних ламп, які включаються і виключаються незалежно одна від іншої. Для кожної лампи ймовірність бути включеною дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що абсолютна величина різниці між числом включених ламп і математичним сподіванням цього числа буде більше 10.

Варіант 29

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 2,2$, а дисперсія $D(X) = 0,36$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=15$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 7$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Математичне сподівання швидкості повітря на даній висоті дорівнює 25 км /год. Середнє квадратичне відхилення дорівнює 4,5 км/год. Які швидкості повітря на цій висоті можна очікувати з імовірністю, не меншою за 0,9?

Варіант 30

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X приймає значення x_1 дорівнює 0,9. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 1,3$, а дисперсія $D(X) = 0,81$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=18$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 9$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде X в результаті випробування.

3 Електростанція обслуговує мережу в 18000 ламп, імовірність включення кожної дорівнює 0,9. Чому дорівнює ймовірність того, що число включених ламп в мережу відрізняється від свого математичного сподівання за абсолютною величиною не більше, ніж на 200 ламп?

Завдання 6.6 Заданий ряд розподілу випадкової величини X й середнє квадратичне відхилення (таблиця 6). Необхідно:

1) знайти відносні частоти розподілу випадкової величини X;
2) побудувати полігон і гістограму частот і відносних частот;
3) знайти вибіркову середню випадкової величини X;
4) знайти вибіркову й виправлену дисперсії випадкової величини X;
5) знайти емпіричну функцію розподілення;
6) знайти довірчий інтервал із надійністю 0,95 для оцінки математичного сподівання нормального розподілення X при відомому середньому квадратичному відхиленні.

Таблиця 6

1	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	5	10	30	35	15	5	2
2	Частковий інтервал випадкової величини X	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36	σ
	n_i	4	16	20	25	30	5	3
3	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	5	10	30	35	15	5	3,2
4	Частковий інтервал випадкової величини X	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	σ
	n_i	4	12	24	28	22	10	2,4
5	Частковий інтервал випадкової величини X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	σ
	n_i	8	14	35	35	6	2	2,3
6	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	5	10	20	35	15	15	2,2
7	Частковий інтервал випадкової величини X	0-7	7-14	14-21	21-28	28-35	35-42	σ
	n_i	5	10	20	35	15	15	4,2
8	Частковий інтервал випадкової величини X	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48	σ
	n_i	5	15	30	30	15	5	2,5
9	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	8	13	39	25	10	5	2,6
10	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	11	19	30	32	6	2	2,2

11	Частковий інтервал випадкової величини X	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36	σ
	n_i	5	19	29	20	15	12	2,7
12	Частковий інтервал випадкової величини X	0-3	3-6	6-9	9-12	12-15	15-18	σ
	n_i	5	10	20	35	15	15	2,8
13	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	5	10	30	28	22	5	3,4
14	Частковий інтервал випадкової величини X	0-9	9-18	18-27	27-36	36-45	45-54	σ
	n_i	5	10	30	22	18	15	2,9
15	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	5	17	30	28	15	5	2
16	Частковий інтервал випадкової величини X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	σ
	n_i	5	15	25	35	15	5	4,2
17	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	5	20	25	30	15	5	2,7
18	Частковий інтервал випадкової величини X	0-8	8-16	16-24	24-32	32-40	40-48	σ
	n_i	5	14	26	35	15	5	2,8
19	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	15	10	25	30	15	5	2,3
20	Частковий інтервал випадкової величини X	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	σ
	n_i	5	10	30	24	26	5	4,1
21	Частковий інтервал випадкової величини X	0-9	9-18	18-27	27-36	36-45	45-54	σ
	n_i	2	13	24	35	15	11	2,5
22	Частковий інтервал випадкової величини X	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	σ
	n_i	5	10	30	23	27	5	3,5
23	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	15	18	17	30	15	5	3,7
24	Частковий інтервал випадкової величини X	0-6	6-12	12-18	18-24	24-30	30-36	σ
	n_i	5	10	30	33	15	7	2,9
25	Частковий інтервал випадкової величини X	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	σ
	n_i	7	13	30	30	15	5	4,4
26	Частковий інтервал випадкової величини X	0-7	7-14	14-21	21-28	28-35	35-42	σ
	n_i	12	10	20	28	15	15	4,6

27	Частковий інтервал випадкової величини X	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	10-12	σ
	n_i	25	10	30	13	17	5	4,2
28	Частковий інтервал випадкової величини X	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24	σ
	n_i	5	15	30	25	15	10	2,3
29	Частковий інтервал випадкової величини X	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	σ
	n_i	2	13	30	27	23	5	5,2
30	Частковий інтервал випадкової величини X	0-15	15-30	30-45	45-60	60-75	75-90	σ
	n_i	4	11	30	35	15	5	4,8

Зразок виконання індивідуальних домашніх завдань

Завдання 6.1

У партії з шести деталей міститься чотири стандартних. Навмання відібрано три деталі (без повернення).

Потрібно:

1 Скласти закон розподілу дискретної випадкової величини X – числа появи нестандартних деталей серед відібраних;

2 Побудувати многокутник розподілу;

3 Знайти числові характеристики *M(X), D(X),* σ *(X)*.

4 Знайти інтегральну функцію розподілу *F(x)* і побудувати її графік.

Розв'язання.

1 Випадкова величина X - число стандартних деталей серед відібраних має наступні можливі значення: x_2 = 1 (одна деталь стандартна), x_3 = 2 (дві деталі стандартні), x_4 = 3 (усі три деталі стандартні). Ймовірності цих значень відповідно дорівнюють:

$$P(X=1)=\frac{C_4^1\cdot C_2^2}{C_6^3}=\frac{4\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{6\cdot 5\cdot 4}=\frac{1}{5};$$

$$P(X=2)=\frac{C_4^2\cdot C_2^1}{C_6^3}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{3}{5};$$

$$P(X=3)=\frac{C_4^3\cdot C_2^0}{C_6^3}=\frac{4\cdot 1\cdot 1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{1}{5};$$

Шуканий закон розподілу X має вигляд:

X	1	2	3
P	1/5	3/5	1/5

Контроль: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{5}=1.$

2 Будуємо многокутник розподілу (рис. 6.1)

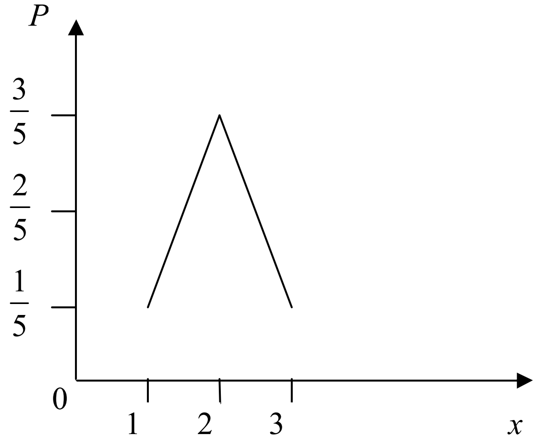


Рисунок 6.1

3 Знаходимо математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X :

$$M(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i\cdot p_i=1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{5}+\frac{6}{5}+\frac{3}{5}=2,$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i^2\cdot p_i-(M(X))^2=1\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{3}{5}+9\cdot\frac{1}{5}-4=\frac{1}{5}+\frac{12}{5}+\frac{9}{5}-4=\frac{22}{5}-4=\frac{2}{5},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

4

а) Якщо $x\le 1$, то $F(x)$=0. Дійсно, значень, менших за число 1, величина X не набуває. Отже, при $x\le 1$ функція $F(x)=P\,(X<x)=0$.

б) Якщо $1<x\le 2$, то $F(x)$ =0,2. Дійсно, X може набути значення 1 з ймовірністю 0,2.

в) Якщо $2<x\le 3$, то $F(x)$ =0,8. Дійсно, X може набути значення 1 з ймовірністю 0,2 і значення 3 з імовірністю 0,6. Отже, одного з цих значень, байдуже яке саме, X може набути (за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій) з імовірністю 0,2 + 0,6 = 0,8.

г) Якщо $x>3$, то $F(x)=1$. Дійсно, подія $X\le 3$ вірогідна і тому її ймовірність дорівнює одиниці.

Таким чином, шукана інтегральна функція аналітично може бути записана таким чином:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 1,\\ 0{,}2 & при \quad 1<x\le 2,\\ 0{,}8 & при \quad 2<x\le 3,\\ 1 & при \quad x>3.\end{cases}$$

Графік інтегральної функції зображений на рис. 6.2

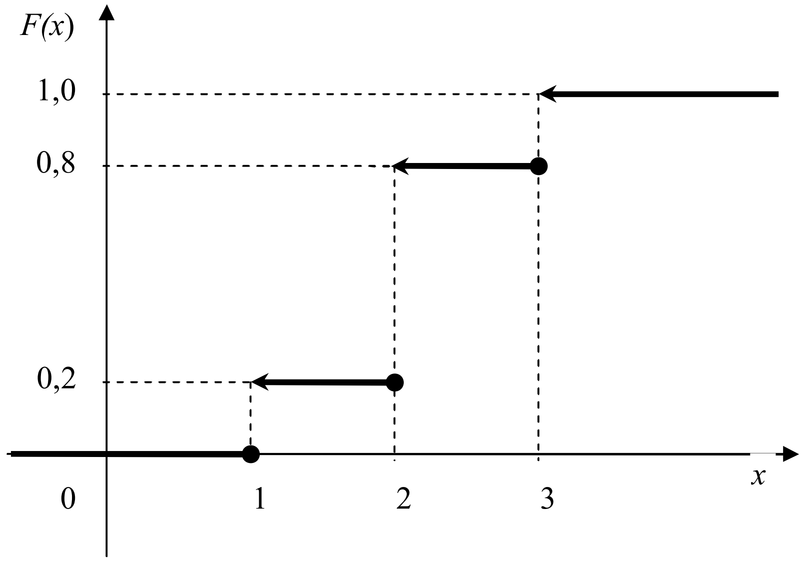


Рисунок 6.2

Завдання 6.2 Дана щільність *f(x)* розподілу випадкової величини *X*.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ C(4x - x^3) & при \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & при \quad x > 2. \end{cases}$$

Знайти:

1 Коефіцієнт *C*.

2 Інтегральну функцію розподілу *F(x)*.

3 Побудувати графіки функцій *f(x)* і *F(x)*.

4 Числові характеристики *M(X); D(X); σ(X)*.

Розв'язання.

1 Функція $f(x)$ може бути прийнята за щільність ймовірності, якщо

$$f(x) \ge 0 \qquad і \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Беручи до уваги, що при $x < 0$ і $x > 2$ функція $f(x) = 0$, отримаємо

$$\int_0^2 a(4x - x^3)dx = 1.$$

Обчислюючи інтеграл, будемо мати

$C(2x^2 - \frac{x^4}{4})\Big|_0^2 = 1$ або $C(8-4) = 1$, звідки $C = \frac{1}{4}$.

Тобто щільність імовірності неперервної випадкової величини X має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ \frac{1}{4}(4x - x^3) & при \quad 0 < x \le 2, \\ 0 & при \quad x > 2 \end{cases}$$

2 Знаходимо інтегральну функцію розподілу за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Якщо $x \le 0$, то $f(x)=0$, отже, $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty} 0\cdot dx = 0.$

Якщо $0 < x \le 2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{x}\frac{1}{4}(4x-x^3)dx=\frac{1}{4}(2x^2-\frac{x^4}{4})\Big|_0^x=\frac{1}{4}(2x^2-\frac{x^4}{4}).$$

Якщо $x > 2$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{2}\frac{1}{4}(4x-x^3)dx+\int_{2}^{x} 0dx=\frac{1}{4}(2x^2-\frac{x^4}{4})\Big|_0^2=1.$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x\le 0, \\ \frac{1}{4}(2x^2-\frac{x^4}{4}) & при \quad 0<x\le 2, \\ 1 & при \quad x>2. \end{cases}$$

3 Побудуємо графіки функцій *f(x)* (рис. 6.3) і *F(x)* (рис. 6.4).

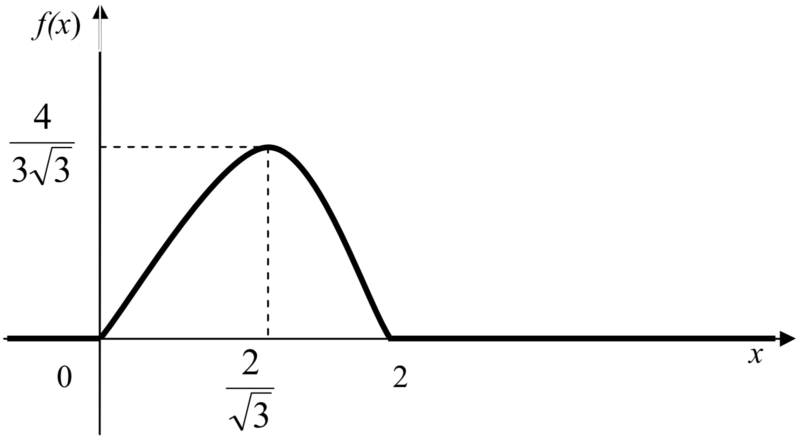


Рисунок 6.3

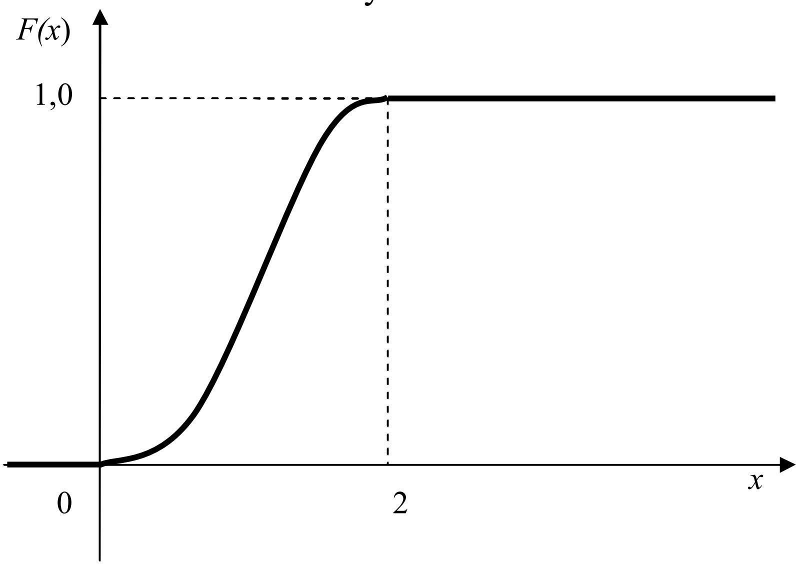


Рисунок 6.4

4 Тепер знаходимо математичне сподівання *X*:

$$M(X)=\int_a^{в} xf(x)dx=\int_0^2\frac{1}{4}x(4x-x^3)dx=\frac{1}{4}\int_0^2(4x^2-x^4)dx=\frac{1}{4}\left(\frac{4x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=$$

$$=\frac{1}{4}(\frac{32}{3}-\frac{32}{5})=8(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})=\frac{16}{15}.$$

Далі знаходимо дисперсію випадкової величини *X*.

$$D(X(=\int_a^b x^2 f(x)dx-M^2(X)=\int_0^2\frac{1}{4}x^2(4x-x^3)dx-\left(\frac{16}{15}\right)^2=\frac{1}{4}\int_0^2(4x^3-x^5)dx-\frac{256}{225}=$$

$$=\frac{1}{4}(x^4-\frac{x^6}{6})\Bigg|_0^2-\frac{256}{225}=\frac{1}{4}(16-\frac{32}{3})-\frac{256}{225}=\frac{4}{3}-\frac{256}{225}=\frac{300-256}{225}=\frac{44}{225}.$$

Обчислюємо середнє квадратичне відхилення *X*:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{44}{225}}=\frac{2}{15}\sqrt{11}\approx 0{,}44\,.$$

Завдання 6.3 Дана щільність *f(x)* рівномірно розподіленої випадкової величини X ($a=2, b=5$).

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x>b\end{cases}$$

Знайти:

1 інтегральну функцію розподілу *F(x);*

2 побудувати графіки функцій *F(x), f(x);*

3 числові характеристики рівномірного розподілу *M(X), D(X),* $\sigma(X)$.

Розв'язання. За умовою задачі щільність імовірності має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 2\\ \dfrac{1}{3}, & 2<x\le 5,\\ 0, & x>5\end{cases}$$

1 Знаходимо інтегральну функцію розподілу за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

Якщо $x\le 2$, то $f(x)=0$, отже, $F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}0\cdot dx=0.$

Якщо $2<x\le 5$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{2}0dx+\int_2^x\frac{1}{3}dx=\frac{1}{3}x\,|_2^x=\frac{1}{3}(x-2).$$

Якщо $x>5$, то

$$F(x)=\int_{-\infty}^{2}0dx+\int_2^5\frac{1}{3}dx+\int_5^x 0dx=\frac{1}{3}x\,|_2^5=1.$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 2, \\ \frac{1}{3}(x-2) & при \quad 2 < x \le 5, \\ 1 & при \quad x > 5. \end{cases}$$

2 Побудуємо графіки функцій *F(x)* (рис. 6.5)*, f(x)* (рис. 6.6).

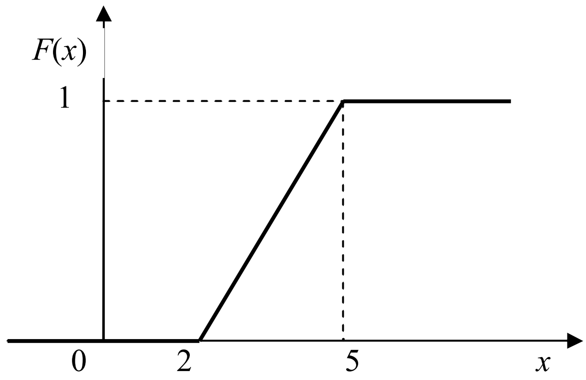


Рисунок 6.5

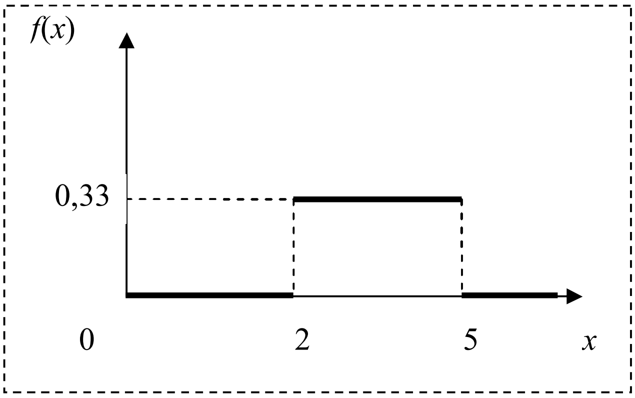


Рисунок 6.6

3 Знаходимо числові характеристики рівномірно розподіленої випадкової величини:

$$M(x)=\frac{a+b}{2}=\frac{2+5}{2}=3{,}5;$$

$$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{(5-2)^2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Завдання 6.4 Неперервна випадкова величина має нормальний розподіл. Її математичне сподівання дорівнює $a=20$, середнє квадратичне відхилення $\sigma=5$, $\delta=0{,}2$.

Знайти:

1 імовірність попадання випадкової величини X в інтервал (15; 25);

2 імовірність абсолютної величини відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання;

3 імовірність того, що $|X - M(X)| < 0{,}18$, якщо відома дисперсія $D(X)=$ $=0{,}03$.

Розв'язання.

1 Враховуючи, що випадкова величина X розподілена нормально, а також беручи до уваги, що $a = 20$, $\sigma = 5$, $\alpha = 15$, $\beta = 25$, за формулою (6,7) знаходимо

$$P(15 < X < 25) = \Phi\left(\frac{25-20}{5}\right) - \Phi\left(\frac{15-20}{5}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) =$$

$$= 2\Phi(1) = 2 \cdot 0{,}3413 = 0{,}6826.$$

Значення функції Лапласа $\Phi(1) = 0{,}3413$ знайдено за додатком Б. Враховано також, що $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

2 Знайдемо ймовірність абсолютної величини відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за формулою:

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Враховуючи, що математичне сподівання дорівнює $a=20$, середнє квадратичне відхилення $\sigma=5$, $\delta = 0{,}2$, одержуємо:

$$P(|X - 20| < 0{,}2) = 2\Phi\left(\frac{0{,}2}{5}\right) = 2\Phi(0{,}04) = 2 \cdot 0{,}016 = 0{,}032.$$

3 Використовуючи нерівність Чебишева, маємо:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

$$P(|X - M(X)| < 0{,}18) \ge 1 - \frac{0{,}03}{0{,}18^2} \ge 0{,}074.$$

Завдання 6.5 Розв'язати задачі, використовуючи теорію випадкових величин.

1 Дискретна випадкова величина X має тільки два можливих значення: x_1 і x_2, причому $x_1 < x_2$. Імовірність того, що X прийме значення x_1 дорівнює 0,45. Знайти закон розподілу величини X, якщо математичне сподівання $M(X) = 3{,}1$ і дисперсія $D(X) = 0{,}99$.

2 Випадкова величина X розподілена нормально з математичним сподіванням $a=20$ і середнім квадратичним відхиленням $\sigma=3$. Знайти інтервал, у який з імовірністю 0,9973 попаде величина X в результаті випробування.

3 Імовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,55. Застосовуючи нерівність Чебишева, оцінити ймовірність того, що число X появи події A буде знаходитися в межах від 40 до 70, якщо буде проведено 100 незалежних випробувань.

Розв'язання.

1 Сума ймовірностей усіх можливих значень дискретної випадкової величини дорівнює 1, тому ймовірність того, що X прийме значення x_2, дорівнює $1 - 0{,}45 = 0{,}55$. Запишемо закон розподілу X:

X	x_1	x_2
P	0,45	0,55

Для знаходження x_1 і x_2 треба скласти два рівняння, які зв`язують ці числа. З цією метою виражаємо відомі $M(X)$ і $D(X)$ через x_1 і x_2. Знайдемо $M(X)$:$M(X) = 0,45x_1 + 0,55x_2$. За умовою $M(X) = 3,1$, отже, $0,45x_1 + 0,55x_2 = 3,1$. Одне рівняння, яке зв'язує x_1 і x_2 отримали. Для того, щоб отримати друге рівняння, виразимо відому дисперсію через x_1 і x_2. Напишемо закон розподілу X^2:

X^2	x_1^2	x_2^2
P	0,45	0,55

Знайдемо дисперсію: $D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0,45x_1^2 + 0,55x_2^2 - 3,1^2$. Підставляючи $D(X) = 0,99$, після елементарних перетворень отримаємо $0,45x_1^2 + 0,55x_2^2 = 10,6$. Таким чином, отримали систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} 0,45x_1 + 0,55x_2 = 3,1, \\ 0,45x_1^2 + 0,55x_2^2 = 10,6. \end{cases}$$

Помноживши обидві частини кожного рівняння системи на 20, отримаємо

$$\begin{cases} 9x_1 + 11x_2 = 62, \\ 9x_1^2 + 11x_2^2 = 212. \end{cases}$$

Із першого рівняння знайдемо x_1 і підставимо у друге рівняння:

$$x_1 = \frac{62 - 11x_2}{9}; \qquad 9\left(\frac{62 - 11x_2}{9}\right)^2 + 11x_2^2 = 212.$$

Після перетворень розв`язуємо квадратне рівняння:

$$3844 - 1364x_2 + 121x_2^2 + 99x_2^2 - 1908 = 0,$$

$$55x_2^2 - 341x_2 + 484 = 0,$$

$$(x_2)_{1,2} = \frac{341 \pm \sqrt{116281 - 106480}}{110} = \frac{341 \pm \sqrt{9801}}{110} = \frac{341 \pm 99}{110}.$$

$$(x_2)_1 = \frac{341 + 99}{110} = \frac{440}{110} = 4; \qquad (x_2)_2 = \frac{341 - 99}{110} = \frac{242}{110} = 2,2;$$

$$(x_1)_1 = \frac{62 - 11 \cdot 4}{9} = \frac{62 - 44}{9} = \frac{18}{9} = 2; \qquad (x_1)_2 = \frac{62 - 11 \cdot 2,2}{9} = \frac{62 - 24,2}{9} = \frac{37,8}{9} = 4,2.$$

За умовою задачі $x_1 < x_2$, тому задачі задовольняє перший розв'язок: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. Підставимо ці значення в закон розподілу:

X	2	4
P	0,45	0,55.

2 Якщо ймовірність відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання a дорівнює 0,9973, то відхилення менше потрійного середнього квадратичного відхилення. Тому інтервал, в який попаде ця величина, визначається нерівністю: $|X - a| < 3\sigma$,

$$-3\sigma < X - a < 3\sigma, \text{ або } a - 3\sigma < X < a + 3\sigma,$$
$$20\text{-}3•3 < X < 20+3•3.$$

Отже, шуканий інтервал дорівнює (11, 29), або $11 < X < 29$**.**

3 Знайдемо математичне сподівання і дисперсію дискретної випадкової величини X – числа появи події в 100 незалежних випробуваннях:
$M(X) = 100•0{,}55 = 55$; $D(X) = npq = 100•0{,}55•0{,}45 = 24{,}75$.

Максимальна різниця між заданим числом появи події і математичним сподіванням $M(X) = 55$:
$\varepsilon = 70 - 55 = 15$.

Скористаємося нерівністю Чебишева:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Підставляючи $M(X) = 55$, $D(X) = 24{,}75$, $\varepsilon = 15$, отримаємо

$$P\left(\left|X - 55\right| < 15\right) \geq 1 - \frac{24{,}75}{15^2} = 1 - 0{,}11 = 0{,}89.$$

Завдання 6.6 Заданий ряд розподілу випадкової величини X й середнє квадратичне відхилення σ (таблиця 7).

Таблиця 7

Частковий інтервал X	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40	40 – 48	σ
n_i	10	12	18	20	24	16	4

Необхідно:

1 знайти відносні частоти розподілу випадкової величини X;

2 побудувати полігон і гістограму частот і відносних частот;

3 знайти вибіркову середню випадкової величини X;

4 знайти вибіркову й виправлену дисперсії випадкової величини X;

5 знайти емпіричну функцію розподілення;

6 знайти довірчий інтервал із надійністю 0,95 для оцінки математичного сподівання нормального розподілення X при відомому середньому квадратичному відхиленні.

Розв'язання.

1 Знайдемо розподілення відносних частот.

Обчислимо об\`єм вибірки: n = 10+12+18+20+24+16+ = 100.

Знайдемо відносні частоти за формулою

$$w_i = \frac{n_1}{n}.$$

$$w_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{10}{100} = 0{,}1; \qquad w_2 = \frac{n_2}{n} = \frac{12}{100} = 0{,}12; \qquad w_3 = \frac{n_3}{n} = \frac{18}{100} = 0{,}18;$$

$$w_4 = \frac{n_4}{n} = \frac{20}{100} = 0{,}2; \qquad w_5 = \frac{n_5}{n} = \frac{24}{100} = 0{,}24; \qquad w_6 = \frac{n_6}{n} = \frac{16}{100} = 0{,}16.$$

Статистичне розподілення частот і відносних частот представимо у вигляді таблиці 8.

Таблиця 8

Часткові інтервали X	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 – 32	32 – 40	40 – 48
n_i	10	12	18	20	24	16
w_i	0,1	0,12	0,18	0,2	0,24	0,16

2 Зобразимо статистичне розподілення частот графічно у вигляді полігона (рисунки 6.7, 6.8) й гістограми (рисунки 6.9, 6.10).

Відкладаємо на осі абсцис варіанти x_i, а на осі ординат — відповідні частоти n_i, з`єднуючи точки $(x_i;n_i)$ відрізками прямих, отримаємо полігон частот (рисунок 6.1).

Аналогічні дії виконуємо для відносних частот: на осі абсцис – варіанти x_i, на осі ординат – відносні частоти w_i; з`єднуючи точки $(x_i;w_i)$, отримаємо полігон відносних частот (рисунок 6.2).

Для побудови гістограм частот і відносних частот складемо таблицю 9.

Таблиця 9

Часткові інтервали X	4	12	20	28	36	44
n_i / h	1,25	1,5	2,25	2,5	3,0	2,0
w_i / h	0,0125	0,015	0,0225	0,025	0,03	0,02

Розподілення складено для середини часткових інтервалів.

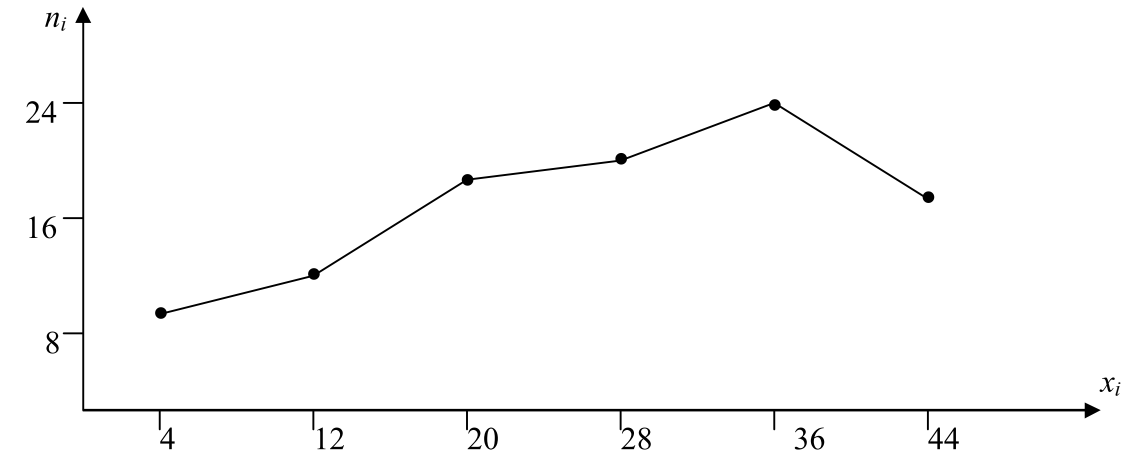


Рисунок 6.7

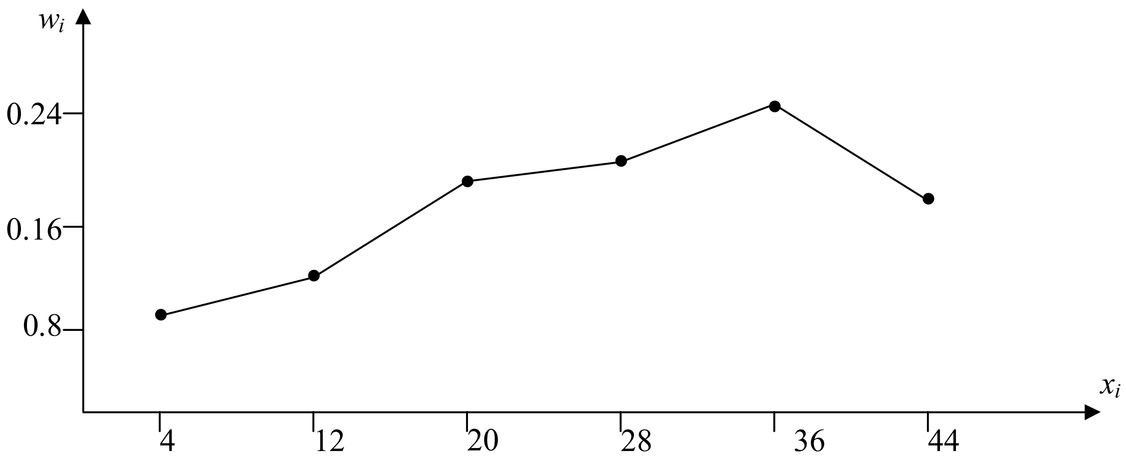


Рисунок 6.8

Будуємо на осі абсцис часткові інтервали довжиною $h = 8$. Проводимо над цими інтервалами відрізки, паралельні осі абсцис і розташовані від неї на відстанях, рівних відповідним густинам частоти $\frac{n_i}{h}$. Отримаємо гістограму частот (рисунок 6.9).

Аналогічно для гістограми відносних частот: на осі абсцис – часткові інтервали, над цими інтервалами проводимо відрізки паралельні осі OX і розташовані від неї на відстанях, рівних відповідним густинам відносної частоти $\frac{w_i}{h}$. Гістограма відносних частот зображена на рисунку 6.10.

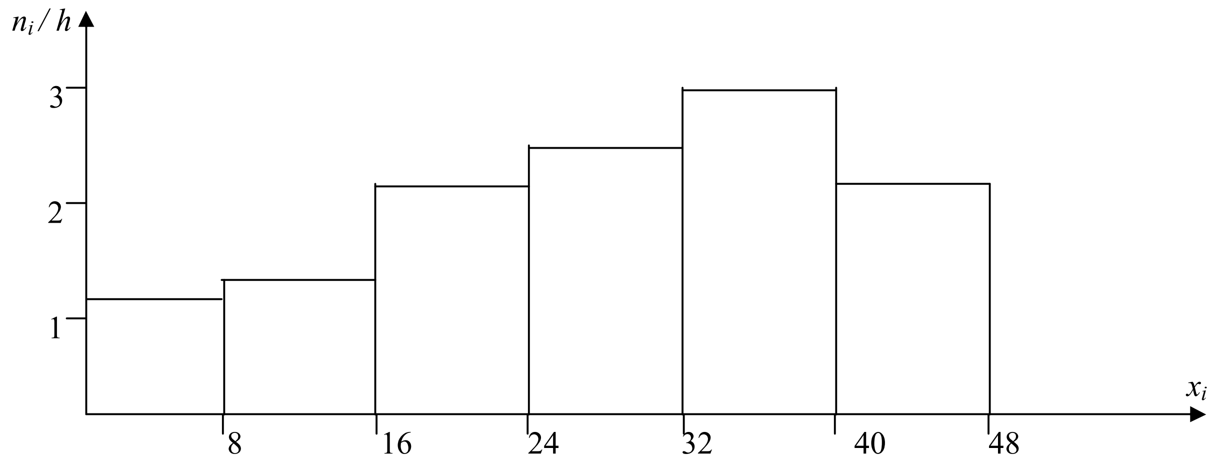


Рисунок 6.9

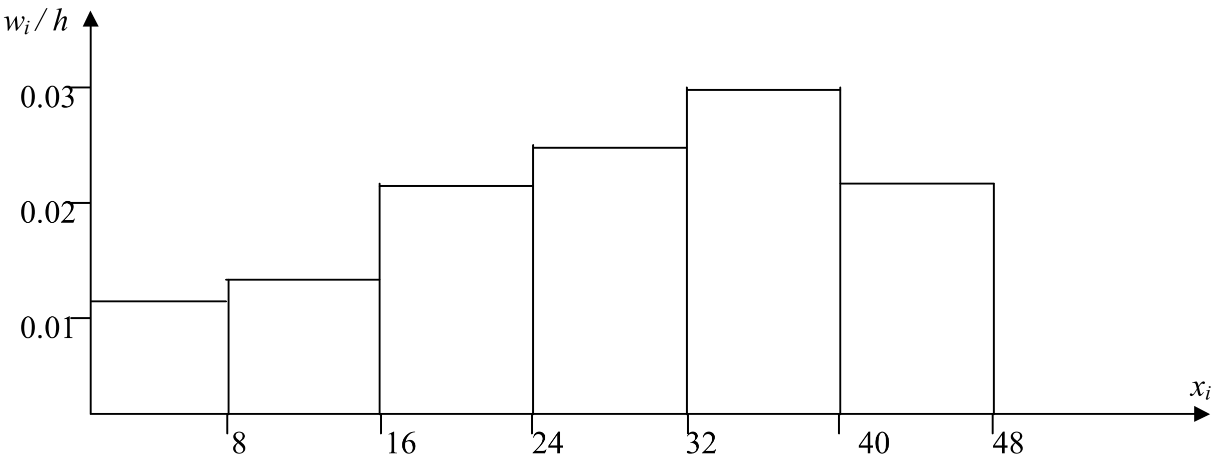


Рисунок 6.10

3 Обчислення вибіркової середньої.

Вибіркову середню обчислимо за формулою

$$\overline{x_в} = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot n_i}{n} = \frac{4\cdot 10 + 12\cdot 12 + 20\cdot 18 + 28\cdot 20 + 36\cdot 24 + 44\cdot 16}{100} = \frac{2672}{100} = 26{,}72 .$$

4 Обчислення вибіркової та виправленої дисперсій.

Вибіркова дисперсія обчислюється за формулою

$$D_в = \frac{\sum_{i=1}^{6} n_i (x_i - \overline{x_в})^2}{n} = \frac{10(-22{,}72)^2 + 12(-14{,}72)^2 + 18(-6{,}72)^2 + 20(1{,}28)^2 + 24(9{,}28)^2 + 16(17{,}28)^2}{100} =$$

$$= \frac{5161{,}98 + 2600{,}14 + 812{,}85 + 32{,}77 + 2066{,}84 + 4777{,}57}{100} = \frac{15452{,}16}{100} = 154{,}52.$$

Виправлена дисперсія дорівнює

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{100}{99} 154{,}52 = 156{,}08.$$

Середнє квадратичне відхилення дорівнює

$$\sigma_b = \sqrt{D_в} = \sqrt{154{,}52} = 12{,}43.$$

5 Знаходження емпіричної функції розподілення.

Запишемо ряд розподілення відносних частот (таблиця 10).

Таблиця 10

Варіанти X	4	12	20	28	36	44
w_i	0,1	0,12	0,18	0,2	0,24	0,16

Згідно з означенням емпіричної функції, яка визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$:

$$F^*(x) = W(X < x).$$

Об'єм вибірки $n = 100$.

а) Найменша варіанта $x = 4$, при $x \le 4$ $F^*(x) = 0$;

б) при $4 < x \le 12$ проміжок $X < x$ містить одне значення $x_1 = 4$ з $W = 0{,}1$, $F^*(x) = 0{,}1$;

в) при $12 < x \le 20$, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$ з $W = 0{,}1 + 0{,}12 = 0{,}22$, $F^*(x) = 0{,}22$;

г) при $20 < x \le 28$, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, $x_3 = 20$ з $W = 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}4$, $F^*(x = 0{,}4$;

д) при $28 < x \le 36$, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, $x_3 = 20$, $x_4 = 28$ з $W = 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}2 = 0{,}6$, $F^*(x) = 0{,}6$;

е) при $36 < x \le 44$, $x_1 = 4$, $x_2 = 12$, $x_3 = 20$, $x_4 = 28$, $x_5 = 36$ з $W = 0{,}1 + 0{,}12 + 0{,}18 + 0{,}2 + {}$ $+ 0{,}24 = 0{,}84$, $F^*(x) = 0{,}84$;

є) при $x > 44$, $F^*(x) = 1$.

Запишемо шукану емпіричну функцію

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 4, \\ 0{,}1, & 4 < x \le 12, \\ 0{,}22, & 12 < x \le 20, \\ 0{,}4, & 20 < x \le 28, \\ 0{,}6, & 28 < x \le 36, \\ 0{,}84, & 36 < x \le 44, \\ 1, & x > 44. \end{cases}$$

Графік емпіричної функції розподілення (рисунок 6.11).

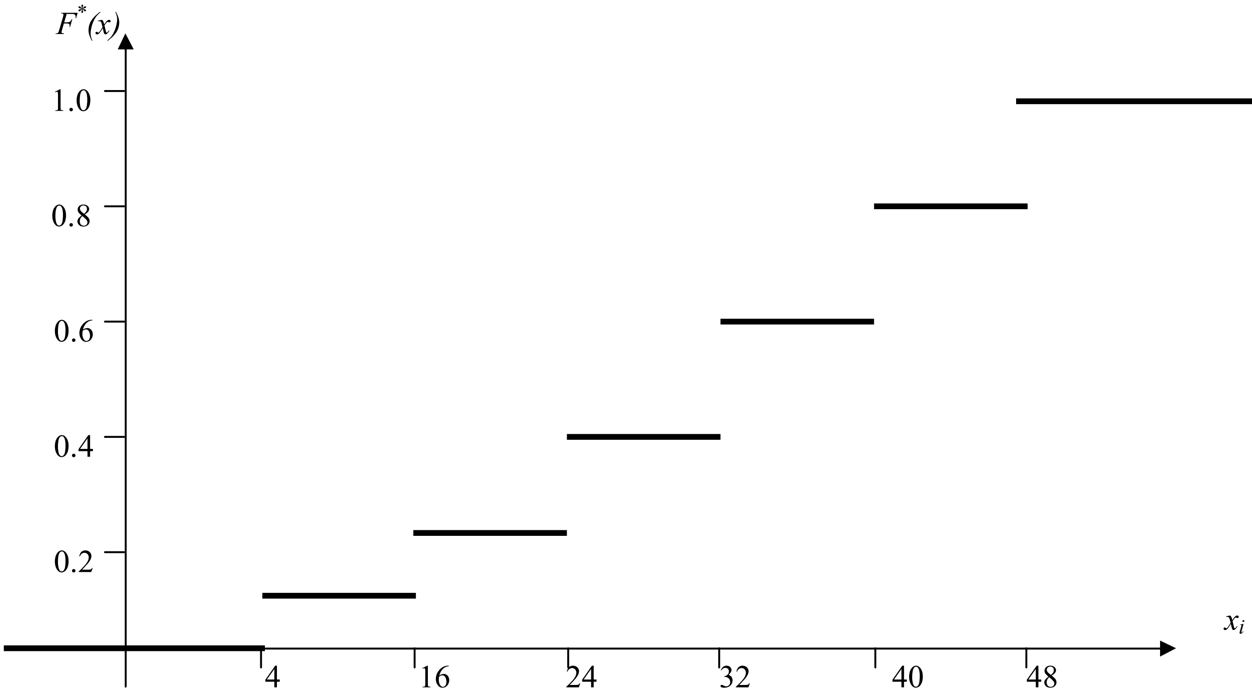


Рисунок 6.11

6 Знаходження надійних інтервалів для оцінки математичного сподівання при відомому σ.

Запишемо дані задачі: $n = 100$, $\gamma = 0{,}95$, $\sigma = 4$, $\overline{x_в} = 26{,}72$.

Знайдемо параметр t, користуючись додатком Б.

$$\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = 0{,}475 \Rightarrow t = 1{,}96.$$

$$\frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 4}{\sqrt{100}} = 0{,}78.$$

Надійні границі дорівнюють

$$\overline{x_в} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = 26{,}72 - 0{,}78 = 25{,}9, \quad \overline{x_в} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = 26{,}72 + 0{,}78 = 27{,}5.$$

Отже, математичне сподівання влучається в надійний інтервал:

$$25{,}9 < a < 27{,}5.$$

ДОДАТОК А

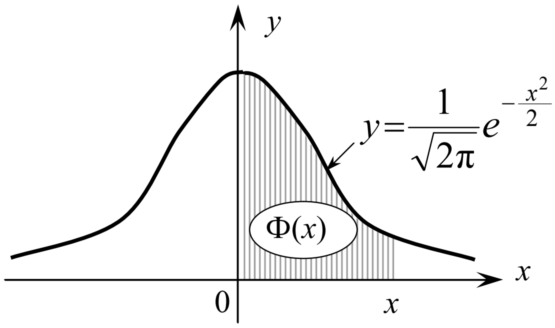
Таблиця значень функції Гауса $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,399	399	399	399	399	398	398	398	398	397
0,1	397	397	396	396	395	395	394	393	393	392
0,2	391	390	389	389	388	387	386	385	384	383
0,3	381	380	379	378	377	375	374	373	371	370
0,4	368	367	365	364	362	361	359	357	356	354
0,5	352	350	349	347	345	343	341	339	337	335
0,6	333	331	329	327	325	323	321	319	317	314
0,7	312	310	308	306	303	301	299	297	294	292
0,8	290	287	285	283	280	278	276	273	271	269
0,9	266	264	261	259	257	254	252	249	247	244
1,0	242	240	237	235	232	230	228	225	223	220
1,1	218	216	213	211	208	206	204	201	199	197
1,2	194	192	190	187	185	183	180	178	176	174
1,4	150	148	146	144	142	140	137	135	133	132
1,6	111	109	107	106	104	102	101	099	097	096
1,8	079	078	076	075	073	072	071	069	068	067
1,9	066	064	063	062	061	059	058	057	056	055
2,0	054	053	052	051	050	049	048	047	046	045
2,1	044	043	042	041	040	040	039	038	037	036
2,2	036	035	034	033	033	032	031	030	030	029
2,4	022	022	021	021	020	020	019	019	018	018
2,6	014	013	013	013	012	012	012	011	011	011
2,8	008	008	008	007	007	007	007	007	006	006
2,9	006	006	006	006	005	005	005	005	005	005
3,0	004	004	004	004	004	004	004	004	004	003
3,1	003	003	003	003	003	003	003	003	003	003
3,2	002	002	002	002	002	002	002	002	002	002
3,3	002	002	002	002	002	002	001	001	001	001
3,4	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001
3,5	001	001	001	001	001	001	001	001	001	001
3,6	001	001	001	001	001	001	001	001	001	000

ДОДАТОК Б

Значення функції Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$



x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0.0	0.00000				
0.05	0.01994	1.05	0.35314	2.05	0.47982
0.10	0.03983	1.10	0.36433	2.10	0.48214
0.15	0.05962	1.15	0.37493	2.15	0.48422
0.20	0.07926	1.20	0.38493	2.20	0.48610
0.25	0.09871	1.25	0.39435	2.25	0.48778
0.30	0.11791	1.30	0.40320	2.30	0.48928
0.35	0.13683	1.35	0.41149	2.35	0.49061
0.40	0.15542	1.40	0.41924	2.40	0.49180
0.45	0.17364	1.45	0.42647	2.45	0.49286
0.50	0.19146	1.50	0.43319	2.50	0.49379
0.55	0.20884	1.55	0.43943	2.55	0.49461
0.60	0.22575	1.60	0.44520	2.60	0.49534
0.65	0.24215	1.65	0.45053	2.65	0.49598
0.70	0.25804	1.70	0.45543	2.70	0.49653
0.75	0.27337	1.75	0.45994	2.75	0.49702
0.80	0.28814	1.80	0.46407	2.80	0.49744
0.85	0.30234	1.85	0.46784	2.85	0.49781
0.90	0.31594	1.90	0.47128	2.90	0.49813
0.95	0.32894	1.95	0.47441	2.95	0.49841
1.00	0.34134	2.00	0.47725	3.00	0.49865
3.1	0.49903	3.2	0.49931	3.3	0.49952
3.4	0.49966	3.5	0.49977	3.6	0.49984
3.7	0.49989	3.8	0.49993	3.9	0.49995
4.0	0.499968	4.5	0.499997	5.0	0.49999997

ДОДАТОК В

Критичні точки розподілення Стьюдента (t – розподіл)

Число ступенів свободи, k	Рівень значущості, α						
	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	3,08	6,31	12,7	31,82	63,66	127,32	636,62
2	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	14,09	31,60
3	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	12,94
4	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	8,61
5	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	4,77	6,86
6	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,96
7	1,42	1,90	2,36	3,00	3,50	4,03	5,41
8	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	3,83	5,04
9	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,69	4,78
10	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,58	4,59
11	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	3,50	4,44
12	1,36	1,78	2,18	2,68	3,05	3,43	4,32
13	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3,37	4,22
14	1,34	1,76	2,14	2,62	2,98	3,33	4,14
15	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,29	4,07
16	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,25	4,02
17	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,22	3,97
18	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,20	3,92
19	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,17	3,88
20	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,15	3,85
21	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,14	3,82
22	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,12	3,79
23	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,10	3,77
24	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,09	3,75
25	1,32	1,71	2,96	2,48	2,79	3,08	3,73
26	1,32	1,71	2,06	2,48	2,78	3,07	3,71
27	1,31	1,70	2,05	2,47	2,77	3,06	3,69
28	1,31	1,70	2,05	2,47	2,76	3,05	3,67
29	1,31	1,70	2,04	2,46	2,76	3,04	3,66
30	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,03	3,65
40	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	2,97	3,55
60	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	2,91	3,46
120	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	2,86	3,37
∞	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	2,81	3,29

ДОДАТОК Г

Таблиця значень $t_\gamma(\gamma, k)$.

k	γ												
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
1	0,158	0,326	0,510	0,727	1,00	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,82	63,65	63,66
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,336	2,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,60
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	2,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,94
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,694	8,610
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,363	4,032	6,859
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,263	0,401	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,086	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,487
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,728	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,103	2,552	2,872	3,922
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,859	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,857	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0.855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646

Бібліографічний список

1 Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: Наука, 1975.

2 Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М: Наука, 1985.

3 Щипачёв В.С. Курс высшей математики – Изд. МГУ, 1981.

4 Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика. Под ред. П.Ф. Овчинникова – К.: Высш. шк., 2001.

5 Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов : В. 2т.- М. : Наука, 1985.

6 Вирченко Н.А., Ляшко И.И., Швецов К.И. Графики функций: Справочник. – К.: Наук. думка, 1979.

7 Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высш. шк., 1977.

8 Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике – М.: Высш. шк., 1977.

9 Маркович Э.С. Курс высшей математики с элементами теории вероятностей и математической статистики. – М.: Высш.шк., 1976.

10 Данко П.Е., Попов А.Г. Высшая математика в упражнениях и задачах – Т.3. – М.: Высш. шк., 1978.

11 Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: ЮНИТИ, 2010.

12 Натансон И.П. Краткий курс высшей математики.- М.: Физматгиз, 1963.

13 Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1972.

14 Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986.

15 Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія. – Х.:ДСВ Основа, 1995.

16 Станішевский С.О. Вища математика. – Х.: ХДАМГ, 2002.

17 Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Наука, 1965.

18 Письменный Д. Конспект лекций по высшей математике: в 2 ч. – М.: Айрис- пресс, 2004.

19 Маркушевич А.И. Замечательные кривые. – М.:Наука, 1978.

ЗМІСТ

Навчальне видання

Методичні вказівки до самостійної роботи з курсу «Вища математика» для студентів спеціальності 161 «Хімічні технології та інженерія»

Укладач: Аршава Олена Олександрівна

Відповідальний за випуск А.П. Харченко

За редакцією автора

План 2017 р., поз. 174,18	Формат 60х84 1/16.	Папір друк. №2.
Підп. до друку 26.10.17	Обл. -вид. арк. 7,3	Безкоштовно.
Надруковано на різографі.	Ум. друк. арк. 7,5	
Тираж 50 прим.	Зам. № 4812	

ХНУБА, 61002, Харків, вул. Сумська, 40

Підготовлено та надруковано РВВ Харківського національного університету будівництва та архітектури